УДК 001.891.57: 631.363.7

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ СМЕСИТЕЛЯ КОРМОВ

И.С.Нагорский, А.И.Пунько
Республиканское унитарное предприятие «Белорусский научно-исследовательский институт механизации сельского хозяйства»

Рассмотрены построение и анализ математических моделей, с целью прогнозирования параметров и режимов работы смесителя кормов, которые обеспечивают требуемое качество смеси и минимум затрат энергии.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование условий и процессов функционирования сельскохозяйственных объектов позволяет, используя вычислительную технику, прогнозировать на стадии проектирования рациональные параметры машин и комплектов оборудования без значительных затрат материальных средств и времени на изготовление и испытания многих опытных образцов.

Построение и анализ статистических моделей иллюстрируются примером обоснования параметров и режимов работы смесителя кормовых добавок - ключевого агрегата в составе оборудования новой технологии подготовки кормов на фермах крупного рогатого скота, разработанной в Научно-производственном объединении «Белсельхозмеханизация».

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА ОПЫТОВ

Зависимости показателей эффективности функционирования смесителя (функций отклика y) от параметров его конструкции и режимов работы (факторов x_i), представляем уравнениями регрессии

$$y = \beta_0 + \sum_i \beta_i x_i + \sum_{ij} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_i \beta_{ii} x_i^2, \qquad (1)$$
$$i = 1,\ 2, \ldots, k; \quad j \neq i$$

используя методы математической теории планирования экспериментов [1], а также аппроксимируя экспериментальные данные шаговым регрессионным методом [2], который начинается с построения корреляционной матрицы, последовательного включения в уравнение регрессии переменных, наиболее сильно коррелированных с откликом и дополнительного исследования на каждом шаге всех ранее включённых в модель переменных с исключением из неё тех, вклад которых незначимый.

В общем случае статистическую модель можно представить матричным уравнением

$$\mathbf{y} = \mathbf{xb} + \mathbf{e}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{y} = \|y_u\|$ - вектор наблюдений ($(u = 1, 2, \ldots, n)$;

n - число вариантов опыта;

$\mathbf{x} = \|x_{u,j}\|$ - матрица независимых переменных размером $n \times q$;

q - общее число коэффициентов уравнения регрессии.

$\mathbf{b}$ - вектор оценок коэффициентов регрессии;

$\mathbf{e}$ - вектор остатков (невязок между наблюдаемыми и расчётными значениями переменной y).

Определение методом наименьших квадратов оценок b_h коэффициентов β_h сводится к решению системы нормальных уравнений

$$\mathbf{x}^T \mathbf{xb} = \mathbf{x}^T \mathbf{y},$$

а именно:

$$\mathbf{b} = \mathbf{cx}^T \mathbf{y},$$

где $\mathbf{x}^T$ - транспонированная матрица, соответствующая матрице независимых переменных;

$\mathbf{c} = \left(\mathbf{x}^T \mathbf{x}\right)^{-1}$ - информационная (ковариационная) матрица, которая является обратной по отношению к матрице системы нормальных уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$.

Если план эксперимента ортогональный, то матрица системы нормальных уравнений $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ является диагональной, что приводит к простому выражению

$$b_j = \sum_{u=1}^{n} x_{uj} \tilde{y}_u \Big/ \sum_{u=1}^{n} x_{uj}^2; \qquad (3)$$

$$b_0 = b_0' - \bar{x}_i^2 \sum_{i=1}^{k} b_{ii},$$

где j - номер столбца расширенной матрицы планирования;

$\tilde{y}_u = n_n^{-1} \sum_{s=1}^{n_n} y_{us}$ - среднее арифметическое результатов u-го опыта;

b'_0 - оценка свободного члена квадратичного уравнения (1), вычисленная для столбца с фиктивной переменной $x_{u0} = 1$ композиционного плана.

Значимость регрессии оцениваем, используя таблицу дисперсионного анализа (табл.1), путём проверки гипотезы о равенстве средних квадратов MS_R (обусловленного регрессией) и MS_e (относительно регрессии).

Таблица 1

Дисперсионный анализ в матричной форме применительно к модели (2)

Источник вариации	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат
Регрессия	$\mathbf{b}^T\mathbf{x}^T\mathbf{y} - n\overline{y}^2$	q-1	MS_R
Остаток	$\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}^T\mathbf{y}$	n-q	MS_e
Общая вариация	$\mathbf{y}^T\mathbf{y} - n\overline{y}^2$	n-1	

Нулевую гипотезу $H_0 : K = 0$ при альтернативной гипотезе $H_0 : K \neq 0$ проверяем с помощью F-критерия:

$$F = \frac{MS_R}{MS_e} \geq F_{кр} \equiv F(\alpha; q-1; n-q), \qquad (4)$$

где $F(\alpha; q-1; n-q)$ - табличное значение F-распределения при уровне значимости α, числах степеней свободы q-1 и n-q.

При выполнении условия (4) гипотеза о равенстве MS_R и MS_e отвергается, т.е. уравнение регрессии статистически значимо.

Уравнение множественной регрессии, «наилучшим» образом аппроксимирующее результаты наблюдений, оцениваем также коэффициентом детерминации, который характеризует долю общей суммы квадратов, объяснённую регрессией:

$$R^2 = \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{x}^T\mathbf{y} - n\overline{y}^2}{\mathbf{y}^T\mathbf{y} - n\overline{y}^2},$$

а также относительной среднеквадратической ошибкой (коэффициентом вариации, %)

$$\delta = \frac{s}{\overline{y}} \cdot 100,$$

где $s = \sqrt{MS_e}$.

Данные параллельных опытов, позволяют, проверив гипотезу об однородности построчных выборочных дисперсий $\boldsymbol{s}^2\{\boldsymbol{y_u}\}$, вычислить дисперсию воспроизводимости опытов

$$s^2\{y\} = n^{-1}\sum_{u=1}^{n} s^2\{y_u\}$$

с числом степеней свободы $v_в = n(n_n - 1)$.

Тогда можно оценить значимость коэффициентов регрессии, вычислив оценки их дисперсий. Так, для уравнения (1), построенного путём композиционного планирования, имеем:

$$s^2\{b_j\} = \left(n_n \sum_{u=1}^{n} x_{uj}^2\right)^{-1} s^2\{y\};$$

$$s^2\{b_0\} = s^2\{b_0'\} + \sum_i \left(\overline{x}_i^2\right)^2 s^2\{b_{ii}\},$$

где $s^2\{b_0'\}$ - дисперсия свободного члена, вычисленного по формуле (3) для столбца с фиктивной переменной $x_{u0} = 1$.

Коэффициент регрессии b_j статистически значимый, если

$$\left|b_j\right| > \Delta b_j = s\{b_j\}\cdot t(\gamma, v_в),$$

где $t(\gamma, v_в)$ - табличное значение *t*- распределения при двустороннем ограничении, доверительном уровне γ и числе степеней свободы $v_в$.

Исключив незначимые коэффициенты и вычислив оценку дисперсии адекватности $s_{ад}^2$ с числом степеней свободы $v_{ад} = n - q$:

$$s_{ад}^2 = \frac{n_n}{n-q}\cdot\sum_{u=1}^{n}\left(\widetilde{y}_u - \hat{y}_u\right)^2, \qquad (5)$$

где $\hat{y}_u$ - расчётное значение функции отклика для u-го варианта, можно оценить ошибку расчётных значений в пределах ошибки воспроизводимости опытов, используя F - критерий:

$$F = s_{ад}^2 \big/ s^2\{y\} < F_{кр} \equiv F(\alpha; v_{ад}; v_в).$$

Используя составленные модели для обоснования времени смешивания t_k, надо вычислять средние значения и интервальные оценки функции отклика.

Вектор расчётных значений функции отклика

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{z}\mathbf{b},$$

где $\mathbf{z} = \|z_{u,h}\|$ - матрица размером $n \times q$, элементами первого столбца которой является фиктивная переменная $z_{u,0} = 1$, а в остальных столбцах помещены, соответственно последовательности оценок коэффициентов регрессии b_h, включённые в модель z- переменные (определённые функции факторов x_i);

Если по аналогии со строками матрицы $\mathbf{z}$ составить некоторую матрицу-строку

$$\mathbf{z}_k = \|1; z_{k,1}; z_{k,2}; \ldots; z_{k,q-1}\|, \tag{6}$$

то прогнозируемое среднее значение функции отклика в точке факторного пространства, координаты которой $z_{k,h}$,

$$\hat{y}_k = \mathbf{z}_k \mathbf{b}.$$

Границы интервальной оценки предсказанного с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$ значения $\hat{y}_k$ [2]:

$$\hat{y}_k \pm t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n - q\right) \cdot s \cdot \sqrt{\mathbf{z}_k \left(\mathbf{z}^T \mathbf{z}\right)^{-1} \mathbf{z}_k^T},$$

где $t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n - q\right)$ - значение t - распределения, соответствующее границе его односторонней критической области при уровне значимости $\alpha/2$ и числе степеней свободы $n - q$ скорректированной дисперсии $s^2 = MS_e$.

Предсказанное ***индивидуальное*** наблюдение y_k, варьирующее относительно среднего арифметического, определяется тоже величиной $\hat{y}_k$, но с дисперсией

$$s^2\{y_k\} = s^2\left[1 + \mathbf{z}_k \left(\mathbf{z}^T \mathbf{z}\right)^{-1} \mathbf{z}_k^T\right],$$

и интервал, в который с заданной доверительной вероятностью γ попадают возможные значения y_k,

$$[\hat{y}_k - \Delta y_k, \hat{y}_k + \Delta y_k], \tag{7}$$

где

$$\Delta y_k = t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n - q\right) \cdot s \cdot \sqrt{1 + \mathbf{z}_k \left(\mathbf{z}^T \mathbf{z}\right)^{-1} \mathbf{z}_k^T}.$$

Приравняв верхнюю границу интервальной оценки (7) регламентированному зоотехническими требованиями значению $[\nu] = 15\%$, численными методами можно определить фактор t_k, входящий в состав z- переменных матрицы (6).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Неравномерность смешивания балансирующей добавки оценивали коэффициентом вариации (v, %) контрольного компонента в пробах, отбираемых с шестикратной повторностью по объёму смеси. В качестве контрольного компонента использовали окрашенные зёрна ячменя, которые вводили в приготавливаемую смесь в количестве 1,5% от общей её массы. Контрольные пробы отбирали массой 1,5 *кг*.

На первом этапе исследований определена область факторного пространства, в которой неоднородность смеси находится в пределах зоотехнического допуска, при продолжительности смешивания 15 *мин.* и степени заполнения смесителя $\boldsymbol{\psi} = 0{,}8$. В качестве факторов рассматривали частоту вращения вала смесителя $n_в$, *мин.*$^{-1}$; ширину полувитков B, *м* и угол установки полувитков смешивающего органа к плоскости, перпендикулярной к оси вала смесителя, $\alpha_п$, *град.*, которые кодировали (соответственно x_1, x_2, x_3).

После проведения полного факторного эксперимента первого порядка и опыта в центре плана установлено, что неполное квадратичное уравнение не адекватно экспериментальным данным. Поэтому был реализован композиционный план: проведены дополнительные опыты в «звёздных точках», координаты которых

$$(\mp\alpha_к, 0, 0); (0, \mp\alpha_к, 0); (0, 0, \mp\alpha_к),$$

где $\alpha_к$=1,215 - звёздное плечо, обеспечивающее ортогональность плана второго порядка [1].

По формуле (3) вычислены коэффициенты регрессии: $b_0 = 12{,}705$; $b_1 = -1{,}185$; $b_2 = 9{,}126$; $b_3 = 1{,}514$; $b_{12} = -3{,}596$; $b_{11} = 1{,}097$; $b_{22} = 7{,}092$ и $b_{33} = 1{,}639$ (коэффициенты b_{13} и b_{23} незначимые).

После вычисления по формуле (5) дисперсии $s^2_{ад} = 2{,}334$ проверена адекватность уравнения регрессии (1) экспериментальным данным:

$$F = \frac{2{,}334}{1{,}539} = 1{,}516 < F_{кр} \equiv F(0{,}05;\, 7;\, 30) = 2{,}33.$$

Таким образом, составленную модель можно использовать для прогнозирования параметров смесителя, обеспечивающих требуемое качество смеси.

Чтобы облегчить исследование функции отклика, её уравнение приводим к ***каноническому виду*** [3]:

$$y-8{,}923=0{,}599(x_1')^2+7{,}59(x_2')^2+1{,}639(x_3')^2 .$$

Координаты центра гиперповерхности определяем, решая ***уравнения центра***, которые в матричной форме записи имеют вид:

$$\mathbf{a}\mathbf{x}^\circ=-\mathbf{b}_л ,$$

где $\mathbf{x}^\circ=\left\|x_1^\circ,x_2^\circ,\ldots\ldots,x_k^\circ\right\|^T$ и $\mathbf{b}_л=\left\|\frac{b_1}{2},\frac{b_2}{2},\ldots,\frac{b_k}{2}\right\|^T$ - столбцевые матрицы соответственно координат центра и коэффициентов линейной формы.

В нашем случае

$$\mathbf{x}^\circ=-\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}_л=\begin{Vmatrix}-0{,}880\\-0{,}867\\-0{,}462\end{Vmatrix}.$$

Анализ канонических уравнений регрессии упрощается благодаря имеющейся классификации гиперповерхностей второго порядка в эвклидовом пространстве [3]. По этой классификации уравнения, для которых все диагональные элементы преобразованной матрицы квадратичной формы $\lambda_i>0$ и в общем случае $H=y-\tilde{c}>0$, описывают гиперповерхности, которые называют многомерными эллипсоидами. Экстремум функции y находится в центре такой гиперповерхности.

Значения варьируемых параметров, при которых достигается $y_{\min}$: $n_в=30{,}6\ мин^{-1}; B=0{,}052\ м$ и $\alpha_n=65{,}38\ град.$

Если принять $n_в=30\ мин^{-1}; B=0{,}05\ м$ и $\alpha_n=65\ град.$, то $y=9{,}01$. Относительное ухудшение показателя неравномерности смешивания $y_{\min}=v_{\min}$ при этом

$$\delta_y=\frac{y-y_{\min}}{y_{\min}}\cdot 100=0{,}98,$$

т.е. менее одного процента.

С использованием составленной модели $y=f(n_в,B,\alpha_n)$ исследована чувствительность показателя $y=v$ к отклонениям варьируемых параметров от их номинальных значений в центре гиперповерхности (рис. 1). На коэффициент вариации v наиболее влияет ширина полувитков B, а меньше – частота вращения вала смесителя $n_в$.

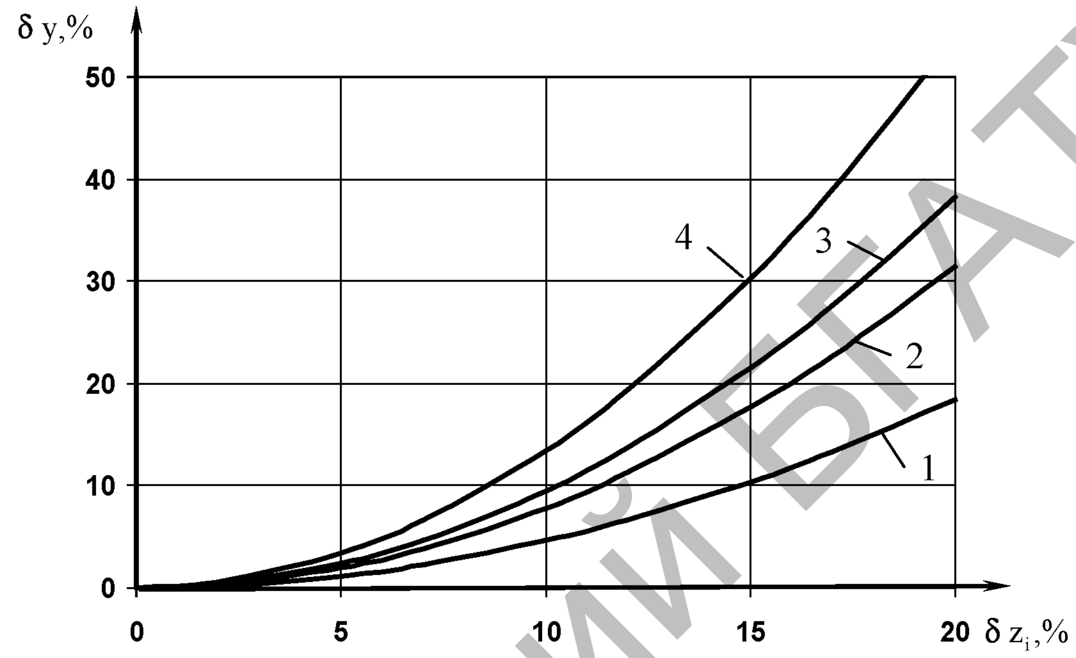

Рис. 1. Относительные погрешности неравномерности смешивания при отклонениях варьируемых параметров z_i от номинальных значений:
1 - $\delta z_i = \delta n_в$, $\delta \alpha_n = \delta B = 0$; 2 - $\delta z_i = \delta \alpha_n$, $\delta n_в = \delta B = 0$; 3 - $\delta z_i = \delta B$, $\delta \alpha_n = \delta n_в = 0$; 4 – одновременно изменяются все параметры ($n_в, \alpha_n$ и B)

На втором этапе исследований при фиксированных значениях $n_в = 30\ мин.^{-1}$; $B = 0{,}05\ м$ и $\alpha_n = 65\ град$. варьировали продолжительность смешивания t и степень заполнения смесителя ψ.

Неоднородность приготавливаемой смеси с течением времени асимптотически приближается к некоторой постоянной величине.

Такой предпосылке противоречит аппроксимация зависимости $v = f(t)$ степенным многочленом, поскольку тогда она имеет минимум. Поэтому в качестве модели следовало бы принять нелинейное по параметрам уравнение

$$v_i = a\exp(bt_i) + c + e_i, \tag{8}$$

коэффициенты которого (табл.2) можно определить, используя метод наименьших квадратов и решая путём итераций систему нелинейных нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_i\left[\nu_i - a\exp(bt_i) - c\right]\exp(bt_i) = 0;\\&\sum_i\left[\nu_i - a\exp(bt_i) - c\right]\exp(bt_i)t_i = 0;\\&\sum_i\left[\nu_i - a\exp(bt_i) - c\right] = 0\end{aligned}\right\}.$$

Таблица 2

Однофакторные модели неравномерности смешивания

ψ	$\nu = f(t)$	F	$F_{кр}$	R^2	δ, %
0,6	$\nu = 127{,}4\exp(-0{,}654t) + 11{,}3$	83,32	9,55	-	4,7
	$\nu = 34{,}3 - 4{,}408t + 0{,}203t^2$; $t_m = 10{,}9$ *мин.*	24,52	9,55	0,942	8,5
0,7	$\nu = 75{,}4\exp(-0{,}588t) + 10{,}8$	297,94	9,55	-	2,1
	$\nu = 28{,}0 - 3{,}242t + 0{,}147t^2$; $t_m = 11{,}0$ *мин.*	40,22	9,55	0,995	5,6
0,8	$\nu = 565{,}1\exp(-1{,}12t) + 10{,}0$	21,03	9,55	-	7,9
	$\nu = 25{,}8 - 3{,}275t + 0{,}16t^2$; $t_m = 10{,}2$ *мин.*	4,12	9,55	0,733	15,9
0,9	$\nu = 435{,}5\exp(-0{,}982t) + 11{,}0$	78,56	9,55	-	4,8
	$\nu = 30{,}0 - 3{,}617t + 0{,}164t^2$; $t_m = 11{,}0$ *мин.*	5,95	9,55	0,799	15,8

Поскольку уравнение (8) затруднительно использовать для построения доверительных интервалов предсказанных значений $\hat{v}_k$ - см. формулу (7), необходимых при анализе процесса смешивания компонентов обогатительной добавки, экспериментальные данные аппроксимировали также степенными многочленами второго порядка (см. табл.2), но при анализе рассматривали эти зависимости для $t < t_m$, где t_m - время, соответствующее минимуму функции $v = f(t)$.

Графики функций $\nu = f(t)$ показывают (рис.2), что при $t > 10$ *мин.* коэффициент вариации ν колеблется относительно некоторых постоянных значений – ординат, равных свободному члену *c* уравнения (8). Это вносит большие погрешности в аппроксимацию исследуемых зависимостей степенными многочленами (см. табл. 2).

Поэтому время смешивания t_k, при котором гарантируется $\nu \le [\nu]$, определяли (табл. 3), прогнозируя интервальные (7) оценки индивидуальных наблюдений $y_k = \nu$ коэффициента неравномерности смешивания, используя аппроксимацию степенным многочленом (1) экспериментальных точек, для которых $t \le 10$ *мин.*

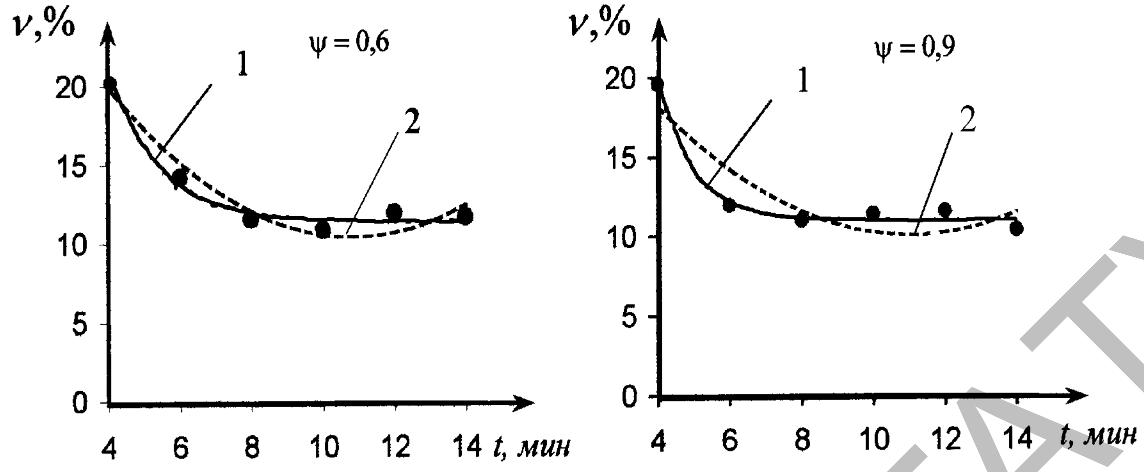

Рис. 2. Аппроксимация зависимости $\nu = f(t)$: 1 – уравнением (8); 2 – степенным многочленом (1)

Таблица 3

Продолжительность смешивания t_k, энергоёмкость E и производительность Q процесса при разной степени заполнения смесителя ψ

ψ	0,6	0,7	0,8	0,9
t_k, *мин.*	6,5	5,9	6,5	7,7
$E, {}^{кВт \cdot ч}/_{т}$	0,429	0,424	0,498	0,618
$Q, {}^{т}/_{ч}$	5,12	6,66	6,92	6,58

Для оценки энергоёмкости процесса смешивания измеряли мощность на привод рабочего органа (за вычетом мощности холостого хода) при разных значениях частоты его вращения и коэффициента заполнения смесителя. Шаговым регрессионным методом составлено уравнение множественной регрессии

$$P = -0{,}0713 + n_в(0{,}2083\psi - 0{,}0494), \qquad (9)$$

для которого $F = \dfrac{MS_R}{MS_e} = 533{,}7 >> F_{кр} \equiv F(0{,}05;\, 2;\, 13) = 3{,}81$, коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}988$ и относительная среднеквадратическая ошибка $\delta = 3{,}8\%$ (в исследованном диапазоне варьирования $n_в$ и ψ).

С учётом обоснованной при исследовании качества смешивания частоты вращения вала смесителя $n_в = 30\,мин.^{-1}$, из формулы (9) имеем:

$$P = -1{,}553 + 6{,}249\psi.$$

Энергоёмкость (E, ${}^{кВт \cdot ч}/_{т}$) и производительность ($Q, {}^{т}/_{ч}$)

процесса смешивания соответственно

$$E = \frac{P \cdot t_k}{60 \cdot M} \text{ и } Q = \frac{60 \cdot M}{t_k}, \tag{10}$$

где M – масса компонентов, загружаемых в смеситель, m.

Результаты расчётов по формулам (10) показывают (см. табл.3), что для снижения энергоёмкости процесса следует принять $\psi = 0{,}7$. Тогда при практически одинаковой производительности энергоёмкость смешивания компонентов обогатительной добавки оказывается в 1,46 раза меньше, чем в случае $\psi = 0{,}9$.

Если, повышая достоверность того, что $v \le [v]$, принять $t_k = 6{,}5$ *мин.*, то для обоснованных значений факторов и $\psi = 0{,}7$ энергоёмкость смешивания компонентов обогатительной добавки $E = 0{,}467\ ^{кВт \cdot ч}\!/_{m}$ при производительности $Q = 6{,}0\ ^{m}\!/_{ч}$.

Таким образом, прогнозируемые параметры и режимы работы обеспечивают энергоёмкость смешивания, которая меньше энергоёмкости процесса, выполняемого вертикально-шнековыми смесителями, для которых $E = 0{,}930 \ldots 1{,}046\ ^{кВт \cdot ч}\!/_{m}$ при $Q_{,} = 7{,}5 \ldots 10{,}7\ ^{m}\!/_{ч}$ [5].

ВЫВОДЫ

В результате построения и анализа статистических моделей процесса функционирования смесителя для приготовления обогатительной кормовой добавки обоснованы рациональные параметры его конструкции и режимы работы: $n_в = 30\ мин^{-1}$; $B = 0{,}05\ м$; $\alpha_n = 65\ град.$; $t_k = 6{,}5\ мин.$ и $\psi = 0{,}7$. Они обеспечивают требуемое качество смеси ($v \le [v] = 15\%$) и минимум энергоёмкости технологического процесса $E = 0{,}467\ ^{кВт \cdot ч}\!/_{m}$. Это позволило без значительных затрат материальных средств и времени на изготовление, трудоёмкие исследования и доводку большого числа вариантов экспериментального оборудования создать опытный образец смесителя, который успешно прошёл государственные приёмочные испытания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бохан Н.И., Дмитриев А.М., Нагорский И.С. Планирование экспериментов в исследованиях по механизации и автоматизации сельскохозяйственного производства. Горки, 1986.- 80 с.

2. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Изд-во «Статистика», 1973.- С. 30-32, 132.
3. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и нелинейная геометрия. М.: Изд-во «Наука», 1970.- С. 451-459.
4. Нагорский И.С., Селезнёв А.Д., Гришков А.В. Построение статистических моделей. Сб.: Повышение эффективности использования сельскохозяйственной техники. Материалы международной научно-практической конференции. Ч.1, Горки,1998.- С. 25-31.
5. Nagorski I., Selezniew A., Griszkow A., Romaniuk W. Budowa i analiza modeli mieszarek do pasz pełnoporcjowych. - Problemy intensyfikacji produkcji zwierzęcej z uwzględnieniem ograniczeń ochrony środowiska / V Międzynarodowa Konferencja Naukowa, Część I. - Warszawa, 1999.- S. 45-51.

The construction and analysis of regression models of feed mixer

I.S.Nagorsky, A.I.Punko

Republic Unitary Enterprise «Belarus Scientific-Research Institute of Farm Mechanization»

Construction and analysis of mathematical models with the purpose of prognostication of food mixer’s parameters and operating conditions which ensure required mixture quality and minimum power consumption are considered.