2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И АЛГЕБРЫ

В.И.Берник, *д.ф.-м.н., профессор,* **И.М. Морозова,** *к.ф.-м.н., доцент*

На конференции в Кембридже в 2002 г. английский математик М. Додсон сделал доклад на тему "Исключительные множества в динамических системах и диофантовы приближения" [1]. Как отмечалось в докладе, аналогом явления резонанса в технике считается проблема малых знаменателей, которая решается в математике. Малые знаменатели представляют собой некоторую функцию от параметров задачи и целочисленных векторов. При определённых значениях векторов эта функция может принимать малые значения и если она находится в знаменателе дроби, то величина дроби резко возрастает, что оказывает существенное влияние на решение задачи. Работы М. Додсона посвящены, в основном, малым знаменателям линейным по набору параметров исходной проблемы и по координатам целочисленных векторов. Однако многие задачи математической физики приводят к малым знаменателям, в которых зависимость нелинейная, как по параметрам, так и по целочисленным векторам. Некоторым таким задачам посвящена работа Б. Пташника [2]. Мотивы применения метрической теории диофантовых приближений продемонстрируем на примере строго гиперболических уравнений, однородных по порядку дифференцирования.

В некоторой области *D* для уравнения

$$L(u) \equiv \sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^n u}{\partial t^{n-s} \cdot \partial x^s} = 0 \tag{1}$$

рассмотрим задачу с условиями

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x) \qquad (j = \overline{i,n}; \quad 0 \le t_1 < t_2 \ldots < t_n \le T), \tag{2}$$

где L – гиперболический оператор с постоянными действительными коэффициентами.

Гиперболический оператор L означает, что все λ-корни соответствующего характеристического уравнения

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \lambda^{n-s} = 0 \tag{3}$$

действительные и что $a_0 \ne 0$. Без ограничения общности будем считать, что $a_0 = 1$. Рассмотрим случай, когда оператор L строго гиперболический, то есть когда все корни λ уравнения (3) действительные и различные.

Предположим, что

$$\varphi_j(x) \in H_p(\Omega_{2\pi}^1) \quad (j = \overline{1,n}), \quad p \in Z_+,$$

где $H_p(\Omega_{2\pi}^1)$ — гильбертово пространство периодических функций $v(x_1,\ldots,x_p)$ с вектором периодов $\omega_1 = \ldots = \omega_p = 2\pi$; Z_+ — множество всех неотрицательных целых чисел.

То есть

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{jk} \exp(ikx), \\ \varphi_{jk} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_j(x) \exp(-ikx)\, dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Решение задачи (1), (2) ищем в виде ряда

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp(ikx) \tag{5}$$

Подставляя ряды (4) и (5) в уравнение (1) и условия (2), видим, что каждая из функций $u_k(t)$ является соответственно решением следующей задачи:

$$\sum_{s=0}^{n} a_s (ik)^s \frac{d^{n-s}u_k(t)}{dt^{n-s}} = 0 \quad (0^0 \equiv 1) \tag{6}$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk} \quad {}_{(j=\overline{1,n})} \tag{7}$$

Таким образом, мы пришли к решению многоточечной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, коэффициенты которого полиноминально зависят от целочисленного параметра *k*.

Для каждого $k \neq 0$ уравнение (6) имеет такую фундаментальную систему решений:

$$u_{kp}(t) = e^{ik\lambda} p^t \quad (p = \overline{1,n}), \tag{8}$$

где $\lambda_p (p = \overline{1,n})$ — корни уравнения (3), а решение задачи (6), (7) имеет вид

$$u_k(t) = \sum_{p=1}^{n} c_{kp} e^{ik\lambda_p t}, \tag{9}$$

где коэффициенты $c_{kp} (p = \overline{1,n})$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{p=1}^{n} c_{kp} e^{ik\lambda_p t_j} = \varphi_{jk} \quad {}_{(j=\overline{1,n})} \tag{10}$$

детерминант которой

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} \exp(ik\lambda_1 t_1) & \dots & \exp(ik\lambda_n t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \exp(ik\lambda_1 t_n) & \dots & \exp(ik\lambda_n t_n) \end{vmatrix} \tag{11}$$

При исследовании вопроса о единственности решения рассматриваемой задачи будем ссылаться на однородные условия

$$u(t_j, x) = 0 \quad (j = \overline{1,n}),$$

$$u_k(t_j) = 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Единственность решения задачи (1), (2) дает следующая теорема 1.

$H_q^n(D^1)$ — гильбертово пространство функций $u(t,x)$, таких, что функция $\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}$ $(r = \overline{0,n})$ для $t \in [0,T]$ принадлежит пространству $H_{q-r}(\Omega_{2\pi}^p)$ и непрерывна по t.

Теорема 1. Для единственности решения задачи (1), (2) в пространстве $H_q^n(D^1)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\Delta(k) \neq 0 \quad (\pm k = 1, 2, \dots) \ . \tag{12}$$

Для существования решения задачи (1), (2) нужны более жёсткие условия, которые формулируются в теореме 2.

Теорема 2. Пусть существует константа $M > 0$ и $s \in Z_+$ такие, что для всех целых $k \neq 0$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{\Delta_{jp}(k)}{\Delta(k)} \right| \leq M |k|^s \quad (j, p = \overline{1,n}) \tag{13}$$

и пусть $\varphi_j(x) \notin H_{s+q}(\Omega_{2\pi}^1)$ $(j = \overline{1,n})$. Тогда существует решение задачи (1), (2), которое представляется рядом

$$u(t,x) = u_0(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j,p=1}^{n} \frac{\Delta_{jp}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{jk} \cdot \exp\{ik(x + \lambda_p t)\}$$

и принадлежит пространству $H_q^n(D^1)$. Это решение непрерывно зависит от функций $\varphi_j(x)$ $(j = \overline{1,n})$.

Оказывается неравенство (13) выполняется для почти всех в смысле меры Лебега

$\beta_{pr} = \dfrac{(\lambda_p - \lambda_r)t_0}{2\pi}$, что доказывается средствами метрической теории диофантовых приближений.

При рассмотрении многоточечной задачи для слаболинейных гиперболических уравнений в работе [3] при $\gamma > 1$ для почти всех ω_j и $\forall_j$, $1 \le j \le n$, была доказана сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\gamma} \prod_{\substack{q=1 \\ q \ne 1}}^{n} \left\| k\omega_{jq} \right\|^{-1}, \text{ где } \omega = (\omega_{1,\dots,}\omega_n) \in R^n, \quad k = \|x\|.$$

Из классической теоремы Хинчина [3] следует, что при $\upsilon > 2$ неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < q^{-\upsilon} \tag{14}$$

имеет бесконечное число решений в целых p и q только на множестве чисел $\alpha \in R$ нулевой меры Лебега.

При $\upsilon = 3$ и $\upsilon = 10$ множества чисел α, удовлетворяющие (14) отличаются друг от друга. Количественную разницу между ними дает понятие размерности Хаусдорфа $\dim A$. Определение этого понятия можно найти в [4]. Для применения в статье достаточно леммы.

Лемма 1.[4] Множество М имеет размерность Хаусдорфа не превосходящую ρ, если можно выбрать такое покрытие М интервалами S_i длины $|S_i|$, что любой элемент М принадлежит бесконечному числу S_i и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |S_i|^{\rho}$ сходится.

Далее

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{15}$$

многочлен с целыми коэффициентами a_j, $H = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$ - его высота.

Такие многочлены называются моническими. Их корни являются целыми алгебраическими числами.

Теорема 3. Обозначим через М(ω) множество $x \in R$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-\omega}$$

имеет бесконечное множество решений в монических полиномах (15).

Тогда при $\omega > n - 1$ справедливо неравенство $\dim M(\omega) \le \dfrac{n}{\omega + 1}$.

Приведем вначале определения и леммы, необходимые для доказательства.

Через $c(n)$ будем обозначать положительные функции, зависящие только от n и некоторого положительного, заранее фиксированного числа ε. Над $c(n)$ будем производить действия по формальным правилам $c(n)+c(n)=c(n)$, $c(n)\,c(n)=c(n)$, смысл которых состоит в том, что сумма и произведение есть снова некоторая функция, зависящая от n и ε. Ясно, что можно считать $H > H_0(n)$, где $H_0(n)$ — достаточно большое натуральное число.

*Лемма 2.*Пусть $P_1(x),\dots,P_l(x)$ — полиномы и $P(x) = P_1(x)\dots P_l(x)$. Тогда

$$c_1(n)H(P_1)\dots H(P_l) < H(P) < c_2(n)H(P_1)\dots H(P_l).$$

Лемма 3. Пусть $\varpi_1(\omega)$и $\upsilon_1(\omega)$ — точные верхние грани тех ϖ_1' и υ_1', для которых неравенства $|P(\omega)| < H^{-\varpi_1'}$, $|F(\omega)| < H^{-\upsilon_1'}$ имеют бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(x)$ и целочисленных неприводимых полиномах $F(x)$ соответственно.

Тогда $\varpi_1(\omega) = \upsilon_1(\omega)$.

Лемма 4. Пусть при некотором $\varpi > n$ неравенство $|P(\omega)| < H^{-\varpi}$ имеет бесконечное число решений в целочисленных неприводимых полиномах $P(x)$ для некоторого множества А(ϖ), причем $\dim A(\varpi) \le \delta$ $(0 \le \delta \le 1)$.

Тогда неравенство $|Q(\omega)| < H^{-\omega}$ имеет бесконечное число решений для некоторого множества B(ϖ) в целочисленных неприводимых полиномах $Q(\omega)$, подчиненных условию $\max\limits_{0\le i\le n}|a_i(Q)| \le a_n(Q) = H(Q)$, где $a_i(Q)$- коэффициенты $Q(x)$. При этом $\dim B(\omega) \le \delta$.

Далее с каждым корнем æi полинома $P(x)$ будем связывать целочисленный вектор $\vec{s}_i = (l_{i_2},...l_{i_n})$. Все многочлены $P(x) \in P_n(H)$, имеющие один и тот же вектор $\vec{s}_i$, объединим в один класс $P_n(H,\vec{s}_i)$. При i=1 класс $P_n(H,\vec{s}_1)$ будем обозначать $P_n(H,\vec{s}\ )$, а $P_n(\vec{s}_1)$ — через $P_n(\vec{s})$.

Лемма 5. Для любого $i = 1,...n$ число классов $P_n(\vec{s})$ конечно и зависит только от n и ε.

Введем еще одно обозначение.

Пусть S(æi) — множество вещественных чисел ω, обладающих свойством $\min\limits_{0\le j\le n}|\omega - \kappa_j| = |\omega - \kappa_i|$. Определим числа $p_i, i - 1,2,...n-1$ следующим образом: $p_i = \dfrac{l_{i+1} + ... + l_n}{T}$.

Лемма 6. Пусть $P(x) \in P_n(H)$, $\omega \in$ S(æi).

Тогда $|\omega - \kappa_1| \le 2^n \dfrac{|P(\omega)|}{|P'(\kappa_1)|}$, $\quad |\omega - \kappa_1| \le \min\limits_{2\le j\le n}\left(2^n \dfrac{|P(\omega)|}{|P'(\kappa_1)|}|\kappa_1 - \kappa_2|...|\kappa_1 - \kappa_j|\right)^{1/j}$.

Лемма 7. Пусть $P(x) \in P_n(H,\vec{s})$.

Тогда $|P^{(l)}(\kappa_1)| < c(n)H^{1-p_l}$.

Лемма 8. Пусть $P(x)$ - полином степени n высоты H. Пусть старший коэффициент $P(x)$ равен a_n, $i_1,...,i_m$ - попарно различные натуральные число, принимающие значения 1,2…,n.

Тогда для любого m $\quad |\kappa_{i_1}...\kappa_{i_m}| < c(n)\dfrac{H}{|a_n|}$,

где $\kappa_1,...,\kappa_n$ - корни $P(x)$.

Применение этих лемм, лемм 10–13 из [4], а также результатов работы [5] позволяет доказать теорему 3.

1. M.Dodson. Exceptional Sets in Dynamical Systems and Diophantine Approximation.//Rigidity in Dynamics and Geometry. Springer-Verlag. 2002. PP. 77-98.
2. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев., 1984.
3. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.:Наука, 1978.
4. Берник В.И., Мельничук Ю.В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. Минск., 1988.
5. Берник В.И.Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений//Acta Arithmetica.1983. Т.42,№3. С.219-253.
6. Bernik V., Dodson M. Metric Diophantine approximation on manifolds. Cambridge University Press 1999.
7. Морозова И.М. О рядах с произведениями малых знаменателей.//Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2002, №3, с.115-117.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК СРЕДСТВО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРОЦВЕТАНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

В.А.Грабауров, *д.т.н., профессор*

Ситуация на рынке не всегда является стабильной. Иногда медленно, а в периоды кризисных ситуаций все может рухнуть за считанные дни и часы. Организации стремятся быть успешными вне зависимости от ситуации на рынке.