Факторы спроса описывают ситуацию, когда у занятых в сельском хозяйстве появляется возможность найти работу в несельскохозяйственном секторе. Факторы нужды и бедности описывают ситуацию, когда недостаточные доходы в сельском хозяйстве заставляют жителей искать другой дополнительный источник доходов. Под давлением этих факторов в сельскохозяйственном секторе сельское население переключается на несельскохозяйственные виды деятельности.

На поиск работы сельских жителей толкают низкие доходы на селе. Так, например, в 2007 г. доля сельских жителей, имеющая доходы ниже прожиточного минимума, составляла 12 %. В сельскохозяйственных организациях уровень выплачиваемой заработной платы работника в месяц составляет 62 % от республиканского уровня. Как показали исследования, в группе хозяйств, имеющих низкий уровень плодородия земель, доля хозяйств, где работники получали доходы на уровне прожиточного минимума, составила почти 40% против 6%, где работники хозяйств имели высокий уровень плодородия земель.

Сегодня доля сельских жителей, занятых в других отраслях народного хозяйства, не превышает 10–12% от общего числа занятых по народному хозяйству. Маятниковой миграции подвергнуто 475,9 тыс. сельских жителей, что составляет 34% трудоспособного населения сельской местности. Маятниковая миграция характерна в основном для близлежащих с райцентром сельских населенных пунктов, а также для тех из них, через которые проходит железная дорога или международные и республиканские магистрали автодорог. В результате маятниковой миграции сегодня 11% сельского населения занято в промышленности, 8% — в торговле, общественном питании и строительстве. В других отраслях экономики, таких как транспорт и связь, доля занятого сельского населения составляет около 6%.

Чтобы не допустить в будущем отток сельского населения и снизить уровень миграции сельского населения, необходимо развивать несельскохозяйственные виды занятости непосредственно на селе. Это позволит уменьшить миграцию сельского населения и стабилизирует его численность. Вся несельскохозяйственная сфера деятельности должна быть сосредоточена в агрогородках. Должны получить развитие следующие виды несельскохозяйственной занятости:

- хранение и переработка сельскохозяйственной продукции;
- сельский туризм;
- народные промыслы и ремесла;
- заготовка плодов, ягод и лекарственных растений;
- заготовка древесины и деревообработка;
- транспортные услуги;

Развитие несельскохозяйственного сектора на селе позволит поднять его на более высокий уровень и одновременно повысить его эффективность.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ НЕКОТОРЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ С ПАРАМЕТРОМ

Н. Н. Дедок, *к.ф.-м.н., доцент*

Белорусский государственный аграрный технический университет (г. Минск)

Как известно, периодическому движению соответствует замкнутая траектория.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \lambda \sum_{k=1}^{n} P_k(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy + \lambda \sum_{k=1}^{n} Q_k(x, y), \tag{1}$$

где $P_k(x, y)$ и $Q_k(x, y)$ — однородные многочлены степени k относительно x, y с действительными постоянными коэффициентами, $n > k + 1$, $\lambda > 0$ — параметр.

Теорема 1. Если для системы (1) выполняются следующие условия:

$O(0, 0)$ — единственная особая точка, (2)

$$a + d > 0, \quad ad - bc > 0, \tag{3}$$

$$xP_n(x, y) + yQ_n(x, y) < 0, \tag{4}$$

то эта система имеет, по меньшей мере, один устойчивый предельный цикл.

Доказательство. При $\lambda = 0$ получаем линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + by,$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

с единственной особой точкой $O(0, 0)$, которая при выполнении (3) является неустойчивым узлом или неустойчивым фокусом.

В качестве топографической системы рассмотрим семейство кривых

$$F(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = C^2. \tag{5}$$

Тогда полная производная от $F(x, y)$ в силу системы (1) имеет вид

$$\frac{dF}{dt} = ax^2 + (b + c)xy + dy^2 + \lambda\left(x\sum_{k=1}^{n} P_k(x, y) + y\sum_{k=1}^{n} Q_k(x, y)\right).$$

При выполнении условия (4) для достаточно больших $|x|$ и $|y|$ при возрастании значений t все траектории системы (1) входят во внутреннюю область, ограниченную кривой C. Ток как $O(0, 0)$ — единственная особая точка типа неустойчивый узел или неустойчивый фокус, то на основании [1] стр. 230 заключаем, что система (1) имеет, по меньшей мере, один устойчивый предельный цикл.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y + \lambda\left(P_m(x, y) + x\sum_{i=m}^{n} R_i(x, y)\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y + \lambda\left(Q_m(x, y) + y\sum_{i=m}^{n} R_i(x, y)\right), \tag{6}$$

где $P_m(x, y)$, $Q_m(x, y)$, $R_i(x, y)$ — однородные многочлены степени m, i соответственно с действительными постоянными коэффициентами, $n > m + 1, \lambda > 0$ — параметр.

Теорема 2. Если для системы дифференциальных уравнений (6) выполняются условия:

$$O(0, 0) \text{ — единственная особая точка,} \tag{7}$$

$$\alpha > 0, \tag{8}$$

$$R_n(x, y) < 0, \tag{9}$$

то эта система имеет, по меньшей мере, один устойчивый предельный цикл.

Доказательство. При $\lambda = 0$ получаем линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y$$

с единственной особой точкой $O(0, 0)$, которая при выполнении (8) является неустойчивым фокусом. Как и в предыдущем случае, семейство кривых (5) возьмем в качестве топографической системы. Тогда полная производная от $F(x, y)$ в силу системы (6) имеет вид

$$\frac{dF}{dt} = \alpha\left(x^2 + y^2\right) + \lambda\left(xP_m(x, y) + yQ_m(x, y) + \left(x^2 + y^2\right)\sum_{i=m}^{n} R_i(x, y)\right).$$

Если выполняется условие (9), то для достаточно больших $|x|$ и $|y|$ $\frac{dF}{dt} < 0$. В точках, достаточно близких от $O(0, 0)$ $\frac{dF}{dt} > 0$. Если взять одну из кривых $F(x, y) = C$, на которой $\frac{dF}{dt} > 0$ и одну из кривых топографической системы, на которой $\frac{dF}{dt} < 0$, то между этими кривыми получим кольцевую область, в которой нет состояний равновесия и в которую направлены все траектории системы. В силу принципа кольца [2] система (6) имеет, по меньшей мере, один устойчивый предельный цикл.

В книге [3] (см. также [4] стр. 285) для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy - \lambda_6 y^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2 \qquad (10)$$

установлены три последовательные ляпуновские величины. Будем считать, что λ_1 – параметр. Из [5] стр. 271 получаем, что $\sigma(\lambda_1) = 2\lambda_1$, т. е. $\sigma'(\lambda_1) = 2$. На основании исследований, приведенных в таблице [5] стр. 274, заключаем, что, если выполняется условие

$$\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6) > 0, \qquad (11)$$

то при $\lambda_1 \le 0$ фокус $O(0, 0)$ устойчив и в окрестности его предельных циклов нет. При переходе к положительным значениям λ_1 из фокуса появляется устойчивый предельный цикл, фокус $O(0, 0)$ становится неустойчивым.

Если же

$$\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6) < 0, \qquad (12)$$

то при $\lambda_1 < 0$ фокус $O(0, 0)$ является устойчивым и в окрестности его существует неустойчивый предельный цикл. При $\lambda_1 \ge 0$ фокус $O(0, 0)$ становится неустойчивым и в его окрестности предельных циклов нет.

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3. Если для системы дифференциальных уравнений (10) выполняется условие (11), то при $\lambda_1 \le 0$ $O(0, 0)$ — устойчивый фокус и в его окрестности нет предельных циклов. При $\lambda_1 > 0$ $O(0, 0)$ — неустойчивый фокус и в окрестности его появляется устойчивый предельный цикл.

Если же для системы (10) выполняется условие (12), то при $\lambda_1 < 0$ $O(0, 0)$ — устойчивый фокус и в окрестности его имеется неустойчивый предельный цикл. При $\lambda_1 \ge 0$ $O(0, 0)$ — неустойчивый фокус и в его окрестности предельных циклов нет.

Частные случаи системы (10) рассматривались в различных приложениях.

1. Андронов А.А., Леонович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568с.

2. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320с.

3. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука, 1984. – 176с.

4. Баутин Н.Н., Леонович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1990. – 488с.

5. Андронов А.А., Леонович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967. – 488с.