

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ФИЗИКА:  
МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА,  
ТЕРМОДИНАМИКА.  
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением  
по аграрному техническому образованию  
в качестве учебно-методического пособия для студентов  
учреждений высшего образования по специальностям  
«Техническое обеспечение производства сельскохозяйственной  
продукции», «Техническое обеспечение хранения и переработки  
сельскохозяйственной продукции», «Технический сервис  
в агропромышленном комплексе», «Энергетическое обеспечение  
сельского хозяйства», «Охрана труда на производстве»*

Минск  
БГАТУ  
2025

УДК 53(07)  
ББК 22.3я7  
Ф48

**Авторы:**

доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры *C. M. Арабей*,  
старший преподаватель *C. A. Бортник*,  
старший преподаватель *B. Ч. Круплевич*,  
кандидат технических наук, доцент П. Н. Логвинович

**Рецензенты:**

кафедра физики и методики преподавания физики  
УО «Белорусский государственный педагогический  
университет имени Максима Танка»  
(доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой *B. P. Соболь*);  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
доцент кафедры теоретической физики и астрофизики  
Белорусского государственного университета *B. B. Жилко*

Ф48   **Физика:** механика, молекулярная физика, термодинамика.  
Лабораторный практикум : учебно-методическое пособие /  
С. М. Арабей, С. А. Бортник, В. Ч. Круплевич, П. Н. Логвинович. –  
Минск : БГАТУ, 2025. – 100 с.  
ISBN 978-985-25-0311-2.

Включает лабораторные работы по механике, молекулярной физике и термодинамике, а также теоретический раздел, содержащий основные сведения по обработке результатов и оценке погрешностей измерений. Каждая работа содержит теоретическое введение, описание лабораторной установки и хода выполнения лабораторной работы, вопросы и задания для самоконтроля.

Для студентов учреждений высшего образования по агротехническим специальностям.

УДК 53(07)  
ББК 22.3я7

ISBN 978-985-25-0311-2

© БГАТУ, 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
Требования к выполнению лабораторных работ .....	7
Основные сведения по обработке результатов измерений и оценке погрешностей измерений .....	9
 <b>ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ</b>	
<i>Лабораторная работа № 1</i>	
Изучение кинематических величин и связи между ними при поступательном и вращательном движении твердого тела.....	17
<i>Лабораторная работа № 2</i>	
Определение коэффициента трения скольжения при движении по горизонтальной поверхности .....	30
<i>Лабораторная работа № 3</i>	
Изучение динамики вращательного движения твердого тела.....	43
<i>Лабораторная работа № 4</i>	
Определение характеристик малых колебаний физического маятника .....	55
<i>Лабораторная работа № 5</i>	
Определение ускорения свободного падения математического маятника .....	68
 <b>ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ</b>	
<i>Лабораторная работа № 6</i>	
Определение универсальной газовой постоянной.....	75
<i>Лабораторная работа № 7</i>	
Определение показателя адиабаты газа методом Клемана – Дезорма .....	83
 Справочные таблицы .....	
Справочные таблицы .....	96
Список рекомендуемой литературы.....	98

## **ВВЕДЕНИЕ**

Физический эксперимент является одним из основных методов исследования в физике. Он предполагает изучение наблюдаемого явления в искусственно созданных условиях с контролируемыми параметрами. Целью лабораторных занятий является выработка практических навыков работы с различными экспериментальными установками, умение самостоятельно разобраться с установкой, провести эксперимент и рассчитать необходимые величины.

Важная задача дисциплины «Физика» – формирование у студентов целостного представления об окружающем мире. Быстро и правильно ориентироваться в современных условиях, успешно работать на предприятиях, оснащенных высокотехнологичным оборудованием, могут только те выпускники вузов, которые в процессе обучения получили широкую и глубокую фундаментальную подготовку по естественным наукам, а также приобрели навыки самостоятельной исследовательской работы. Поэтому основной задачей лабораторного практикума по дисциплине «Физика» является приобретение навыков применения методов экспериментальной физики для изучения свойств различных веществ, а также для описания разнообразных физических процессов и явлений. Главная цель лабораторного практикума – дать студентам возможность накопить навыки в проведении физического эксперимента, обработке результатов и их анализе, что станет фундаментом активного творческого участия в их будущей сельскохозяйственной деятельности.

Данное учебно-методическое пособие представляет собой цикл лабораторных работ, тематика которых соответствует учебной программе по дисциплине «Физика» и модульно-рейтинговой системе обучения. Лабораторные работы состоят из *теоретического введения* (приведены общие теоретические положения по теме работы); *описания лабораторной установки и метода измерений*; *порядка выполнения работы* (описание последовательных этапов получения экспериментальных данных и их обработки); *вопросов для самоконтроля*. Каждая лабораторная работа рассчитана на два академических часа (допуск, выполнение и защита работы). Выполнению работы должна предшествовать предварительная самоподготовка студента с использованием конспекта лекций, данного учебно-методического пособия и учебников с целью освоения теоретиче-

ского материала, изучения устройства экспериментальной лабораторной установки и методики выполнения исследований.

Для получения допуска к выполнению лабораторной работы студент обязан письменно ответить на вопросы, сформулированные в рабочей тетради.

Настоящее учебно-методическое пособие имеет огромное значение для студентов университетов сельскохозяйственного профиля, прежде всего потому, что физика занимает ключевое место в понимании и практике использования сельскохозяйственной техники, обеспечивая основу для ее эксплуатации и ремонта. Достижения современной физики широко и эффективно используются в сельскохозяйственном производстве. Парк сельскохозяйственной техники работает на полях, комплексная механизация и автоматизация устойчиво заменяет трудоемкие работы на животноводческих фермах и других сельскохозяйственных предприятиях. Законы механики, изучаемые в рамках дисциплины «Физика», учитываются при конструировании, производстве и непосредственной эксплуатации сельскохозяйственной техники. Глубокое изучение дисциплины позволяет понять, какие законы лежат в основе функционирования сельскохозяйственной техники, развить интерес у студентов к пониманию ее технической составляющей, а также способности диагностировать и устранять технические неисправности. Во всех этих вопросах физика выступает как неотъемлемый инструмент.

При выполнении конкретных лабораторных работ по механике на уровне лабораторных макетных установок будущие специалисты АПК приобретают знания по функционированию отдельных реальных узлов и механизмов сельхозтехники, а также начальные навыки по анализу их рабочих параметров, описываемых фундаментальными законами физики. Соблюдение физических законов влияет на эффективность работы сельскохозяйственной техники. Механика, например, помогает объяснить, как силы и перемещения влияют на работу различных движущихся элементов машин. При эксплуатации и ремонте техники необходимо учитывать распределение веса, трение, прочность материалов и другие механические свойства, чтобы сохранить их надежность и производительность.

В учебно-методическом пособии также представлены лабораторные работы по молекулярной физике и термодинамике и рассмотрены смежные вопросы, касающиеся сельского хозяйства. Молекулярная

физика и термодинамика играют важную роль в работе двигателей внутреннего сгорания, которые приводят в действие большинство сельскохозяйственных машин. Понимание принципов теплопередачи и эффективности позволяет инженерам оптимизировать процессы сгорания, уменьшая расход топлива и выбросы вредных веществ, приобрести цельное представление о природе и характере тепловых процессов.

Кроме описания и порядка выполнения лабораторных работ учебно-методическое пособие включает в себя теоретические вопросы и практические задачи как обобщение полученных знаний для будущей повседневной деятельности инженеров сельскохозяйственного профиля. Предлагаемые задачи с производственно-техническим содержанием способствуют сознательному усвоению студентами прикладного материала, расширяют их политехнический кругозор, создают условия для профессионального роста.

Физика не просто теоретическая наука, но и практически важный компонент в области эксплуатации и ремонта сельхозтехники. Глубокое понимание ее законов и применение на практике позволяют существенно улучшить эффективность, надежность и экологичность сельскохозяйственных процессов, что в итоге способствует устойчивому развитию сельского хозяйства и повышению благосостояния общества. В этом плане физика является одной из компонент, играющих ключевую роль в обеспечении устойчивого развития сельского хозяйства и продовольственной безопасности.

# **ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ**

## **Допуск к лабораторной работе**

Перед выполнением лабораторной работы студент получает у преподавателя допуск к работе. Для этого студент должен:

- в рабочей тетради письменно в полном объеме ответить на теоретические вопросы по теме лабораторной работы;
- устно ответить на вопросы преподавателя по теории, методике измерений, устройству установки и методике обработки результатов.

При получении студентом допуска к выполнению работы преподаватель делает в его рабочей тетради отметку о допуске (ставит подпись).

*Если студент не подготовился к лабораторной работе, то он не допускается к ее выполнению до тех пор, пока не будет подготовлена рабочая тетрадь (ответы на вопросы) и не будут освоены знания по теме лабораторной работы (причина невыполнения работы считается неуважительной).*

## **Выполнение лабораторной работы**

Студент самостоятельно получает экспериментальные данные, заносит их в таблицы рабочей тетради, проводит расчеты, строит графики и т. п. Выполнив необходимые действия, показывает полученные результаты измерений и расчетов преподавателю для проверки их корректности.

## **Оформление рабочей тетради (отчета)**

Полностью оформленная и подготовленная к защите работа должна соответствовать следующим требованиям:

1. Должны быть выполнены *все пункты* подраздела «Допуск к лабораторной работе».
2. Для всех величин, занесенных в таблицы, должны быть записаны соответствующие *единицы измерения* в системе СИ.
3. Графики должны удовлетворять следующим требованиям:
  - построение должно быть выполнено на соответствующем листе рабочей тетради (на поле в клетку);
  - на графике должны присутствовать оси декартовой системы, на концах осей – стрелки, обозначения величин, единицы измерения, множитель ( $10^n$ );
  - на каждой оси должен быть выбран равномерный (линейный) масштаб (риски через равные промежутки, числа через равное количе-

ство рисок). Масштаб надо выбирать так, чтобы наибольшие значения величин, занесенных в таблицу, оказались у концов осей координат;

– экспериментальные и теоретические точки обозначать разными значками (фигурами);

— экспериментальная кривая должна соответствовать теоретической зависимости (не соединять экспериментальные точки ломаной линией). Надо иметь в виду, что опыт проделывается всегда с погрешностями, поэтому некоторые экспериментальные точки на кривую не попадут.

4. В конце отчета сделать выводы в соответствии с шаблоном:

По результатам измерений и расчетов получено значение

(название физической величины), равное (символ) = (среднее) ± (абс. ошибка) (ед. измер.)

Полученное экспериментально значение \_\_\_\_\_,  
(полное название величины словами)

равное \_\_\_\_\_, с точностью до ошибки измерений,  
(число, единица измерения)

составляющей \_\_\_\_\_, совпадает (не совпадает)  
*(число, единица измерения)*

с табличным (теоретическим) значением данной величины, равным

(число, единица измерения)

## **Защита лабораторной работы**

Преподаватель проверяет правильность и полноту оформления рабочей тетради, задает вопросы по теории, методике измерений, устройству установки, методике обработки результатов, обоснованности выводов по отдельным результатам работы и всей работе в целом. Если работа считается полностью выполненной, то преподаватель ставит в журнале оценку по защищенной лабораторной работе.

Выполненные работы должны быть защищены на текущем или следующем занятии.

*Если студент имеет две и более незащищенные работы, то до тех пор, пока выполненные работы не будут защищены, к выполнению следующих работ студент не допускается (причина невыполнения считается неуважительной).*

## **Порядок отработки невыполненных лабораторных работ**

Отработка лабораторных работ проводится согласно графику отработки, утвержденному заведующим кафедрой и расположенному на сайте кафедры и доске объявлений на кафедре.

# ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Любой эксперимент сопровождается измерениями целого ряда различных величин. *Измерением* называют процесс получения опытным путем числового соотношения между измеряемой величиной, характеризующей некоторый объект или явление, и некоторым ее значением, принятым за единицу измерения.

*Единицей измерения* физической величины называется величина, которой по определению присвоено числовое значение, равное единице. Оценка физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц измерения называется *значением физической величины*.

Измерения делятся на *прямые* и *косвенные* по способу определения физической величины. Под *прямыми измерениями* понимают измерения, при которых значение искомой физической величины находят непосредственно из опыта с помощью специальных технических средств (мер, измерительных приборов и др.). *Косвенные измерения* – это измерения, результат которых получают на основе прямых измерений ряда величин  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , связанных с искомой величиной у известной функциональной зависимостью  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Например, нахождение скорости  $v$  по пройденному расстоянию  $l$  и времени движения  $t$ .

К косвенным измерениям прибегают в случаях, когда прямые измерения невозможны, чрезмерно сложны или не обеспечивают необходимой точности и надежности результата.

## 1. Обработка результатов прямых измерений

При измерении любой физической величины принципиально невозможно получить ее истинное значение, т. е. свободный от искажений результат. Искажения, которые получаются при любом измерении, приводят к *погрешности измерения* – отклонению результата измерения от истинного значения измеряемой величины. При измерении некоторой величины  $x$  в качестве оценки ее погрешности можно было бы взять разность

$$\Delta x = x - x_{\text{ист}}, \quad (1)$$

где  $x$  и  $x_{\text{ист}}$  – измеренное и истинное значения величины  $x$  соответственно. Но истинное значение в (1) неизвестно и принципиально

не может быть определено. Однако это значение может быть получено при проведении *серии измерений*.

Пусть серия измерений величины  $x$  состоит из  $n$  измерений, а  $x_i$  – значение этой величины, найденное в результате  $i$ -го измерения. Тогда согласно (1) отклонение результата  $i$ -го измерения от истинного значения величины  $x$  составит

$$\Delta x_i = x_i - x_{\text{ист}}, \quad (2)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Сложив все  $n$  равенств (2), имеем

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i - nx_{\text{ист}}, \quad (3)$$

откуда получим

$$x_{\text{ист}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \langle x \rangle - \langle \Delta x \rangle, \quad (4)$$

где  $\langle x \rangle$  – среднее арифметическое  $n$  измеренных значений;  $\langle \Delta x \rangle$  – средняя абсолютная погрешность измерений.

При очень большом числе измерений случайные отклонения  $\Delta x_i$ , равные по величине, но противоположные по знаку, встречаются одинаково часто. Следовательно, при бесконечно большом числе измерений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0. \quad (5)$$

Поэтому за величину погрешности принимают среднее значение модулей случайных отклонений от среднего значения  $n$  измерений величины и называют *абсолютной погрешностью*:

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots + |\Delta x_n|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta x_i|. \quad (6)$$

Из формулы (4) следует, что

$$x_{\text{ист}} = \langle x \rangle, \quad (7)$$

т. е. истинное значение измеряемой величины можно заменить средним арифметическим  $n$  измеренных значений:

$$x_{\text{ист}} = \langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad (8)$$

а результат измерений записать в следующем виде:

$$x_{\text{ист}} = \langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle. \quad (9)$$

Эту запись следует понимать таким образом, что истинное значение измеряемой величины находится в пределах

$$(\langle x \rangle - \langle \Delta x \rangle) \leq x_{\text{ист}} \leq (\langle x \rangle + \langle \Delta x \rangle). \quad (10)$$

Величина абсолютной погрешности не всегда корректна для характеристики точности измерений. Например, погрешность  $\Delta h = 1$  мм при измерении высоты порядка метра незначительна, а при измерении высоты в несколько десятков миллиметров – существенна.

Поэтому определяют *относительную погрешность* измерения, которая показывает какую долю составляет абсолютная погрешность от измеряемой величины

$$\delta_x = \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle x \rangle} \cdot 100 \%. \quad (11)$$

Относительная погрешность используется для оценки точности выполненных измерений независимо от измеряемой величины. Она обычно выражается в процентах или в виде десятичной дроби. Относительная погрешность позволяет сравнить погрешность измерений разных величин и понять, насколько они значимы.

В итоге окончательный результат прямых измерений записывается в следующем виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle; \quad \delta_x = \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle x \rangle} \cdot 100 \%. \quad (12)$$

Результат в виде формул (12) должен быть записан с соблюдением правил приближенного вычисления (см. п. 3).

## 2. Обработка результатов косвенных измерений

Результат не всегда может быть получен измерением только одной величины. Как правило, приходится измерять несколько величин и вычислять результат по соответствующей формуле. Пусть измеряемая физическая величина  $y$  не измеряется непосредственно прибором, а выражается по некоторой формуле через другие величины  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , которые получаются в результате прямых измерений:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (13)$$

Поскольку каждое значение  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) измерено со своей погрешностью  $\Delta x_i$ , то и  $y$  вычисляются с некоторой погрешностью  $\Delta y$ :

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_m} \Delta x_m \right|, \quad (14)$$

где  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$  – частные производные по переменным  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), вычисленные при  $x_i = \langle x_i \rangle$ .

Расчеты абсолютных и относительных погрешностей результатов косвенных измерений, вычисленных по часто встречающимся формулам, представлены в таблице.

*Таблица*

Формулы для вычисления абсолютных и относительных погрешностей косвенных измерений величины  $y = f(x_1, x_2)$

Вид функции	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$x_1 + x_2$	$\Delta x_1 + \Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{ x_1 + x_2 }$

Окончание таблицы

Вид функции	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$x_1 - x_2$	$\Delta x_1 + \Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{ x_1 - x_2 }$
$Cx$	$C\Delta x$	$\frac{\Delta x}{ x }$
$x_1 x_2$	$ x_1  \Delta x_2 +  x_2  \Delta x_1$	$\frac{\Delta x_1}{ x_1 } + \frac{\Delta x_2}{ x_2 }$
$\frac{x_1}{x_2}$	$\frac{ x_1  \Delta x_2 +  x_2  \Delta x_1}{x_2^2}$	$\frac{\Delta x_1}{ x_1 } + \frac{\Delta x_2}{ x_2 }$
$x^n$	$ n   x ^{n-1} \Delta x$	$ n  \frac{\Delta x}{ x }$
$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x  \ln x }$
$\sin x$	$ \cos x  \Delta x$	$\frac{\Delta x}{ \operatorname{tg} x }$
$\cos x$	$ \sin x  \Delta x$	$ \operatorname{tg} x  \Delta x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2 \Delta x}{ \sin 2x }$

*Примечания:*

1. Все значения аргументов  $x_1, x_2$ , записанные в таблице, понимаются как соответствующие средние значения  $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle$  физических величин, найденные с помощью прямых измерений.

2. Скобки модуля величины (например,  $|x|$  или  $|\sin x|$  и т. д.) появляются по той причине, что при выводе формул для абсолютной или относительной погрешности косвенных измерений принимается случай максимальной возможной погрешности. Это достигается в случаях, когда ошибки, вносимые в результат всеми измеряемыми величинами, имеют одинаковый знак, а их абсолютные величины складываются. К тому же за относительную ошибку всегда принимается положительная величина.

3. В таблице символ  $C$  означает постоянную величину. Если это известная константа (например, число  $\pi$ ), то ее нужно брать с такой точностью, чтобы относительная погрешность этой величины была значительно меньше относительной погрешности всех остальных величин, входящих в выражение для искомой величины.

### **3. Представление результатов измерений**

При вычислении средних значений и погрешностей прямых и косвенных измерений необходимо соблюдать правила приближенных вычислений.

*Значащими цифрами* числа являются все его цифры, в т. ч. нули, если они не расположены в начале числа. Например, 1,2345 – 5 значащих цифр, 1,200 – 4 значащие цифры; 0,012 – 2 значащие цифры.

Приближенные числа принято представлять в *нормальной форме*:

$$a \cdot 10^n,$$

где  $1 < a < 10$ ,  $n \in Z$ .

Первую значащую цифру ставят в разряд единиц, остальные – в десятичных разрядах после запятой. Полученное число умножается на множитель вида  $10^n$ .

Например:  $0,00109 = 1,09 \cdot 10^{-3}$ ;  
 $2040 = 2,040 \cdot 10^3$ .

Записывая результат измерений и вычислений в виде формул (12), необходимо помнить, что количество значащих цифр измеряемых величин определяется абсолютными ошибками, полученными при определении этих величин:

а) величину абсолютной погрешности следует округлить до двух значащих цифр, если первая из них единица, и до одной значающей цифры во всех остальных случаях;

б) после того как погрешность записана, значение результата должно быть округлено таким образом, чтобы его последняя значащая цифра была того же разряда, что и у погрешности.

Например:  $S = (231,0 \pm 0,4) \text{ м}$ ;  
 $v = (5,32 \pm 0,11) \text{ м/с}$ ;  
 $t = (1,96 \pm 0,18) \text{ с}$ ;

в) для округления числа до  $n$  значащих цифр отбрасываются все его цифры, стоящие после  $n$ -го разряда.

*Примечания:*

– если первая из отбрасываемых цифр  $< 5$ , то последняя из сохраняемых цифр не изменяется;

– если первая из отбрасываемых цифр  $\geq 5$ , то последняя из сохраняемых цифр увеличивается на единицу.

#### **4. Графическое представление физических зависимостей**

Графики являются наиболее информативным и наглядным способом представления экспериментальных зависимостей. Для построения графика необходимо руководствоваться следующими правилами:

1) графики выполняются в рабочей тетради на специально подготовленных полях в клетку, значение функции откладывают по оси ординат, аргумента – по оси абсцисс. На осях необходимо указать обозначение и единицы измерения физической величины;

2) на осях приводится только тот интервал аргумента, в котором проводились измерения. Точка пересечения осей необязательно должна соответствовать нулю по каждой из осей;

3) начало отсчета по осям и масштаб осей выбираются независимо друг от друга таким образом, чтобы кривые занимали практически все поле чертежа, и определяются абсолютными погрешностями откладываемых по осям величин;

4) точки, соответствующие полученным результатам, наносят на график и отмечают кружком небольшого радиуса (или квадратиком, крестиком и т. д.). Как правило, физические зависимости – это гладкие, плавные линии без резких изломов, поэтому кривую проводят между точками плавно. Желательно, чтобы по обе стороны кривой располагалось одинаковое количество точек;

5) если имеется несколько кривых, то каждой кривой присваивается номер, а на свободном поле чертежа указывается название, обозначение или параметр кривой, соответствующий этому номеру.

Измерения являются одним из важнейших направлений в любой сфере деятельности человека. Инженер-аграрий является специалистом широкого профиля, который выполняет операции по техническому обслуживанию и ремонту сельскохозяйственной техники, проводит контроль ее технического состояния с помощью диагностического оборудования и приборов. Он должен досконально знать устройство, назначение и правила применения различных измерительных и контрольно-измерительных инструментов.

К измерительному инструменту для линейных измерений относят линейки, рулетки, циркуль, угломер и др. Контрольно-измерительный инструмент делят на универсальный и специальный. К универсальному инструменту относят микрометры, штангенинструмент, оптиметры, скобы и пр. Примеры специального инструмента – зубоизмерительный и резьбоизмерительный.

В зависимости от назначения измерительные инструменты имеют разную *точность показаний* и предназначаются для измерений в различных диапазонах. Их использование определяется размерами измеряемых деталей и установленных допусков, а также рекомендациями по применению конкретного инструмента со шкалами. Например, любой измерительный инструмент для линейных измерений имеет одну или несколько основных шкал. Для повышения точности оценки долей делений основной шкалы на некоторые измерительные приборы (например, штангенциркуль) наносят вспомогательное отсчетное устройство – шкалу Нониуса (в современной конструкции – шкалу Верньера). При помощи шкалы Нониуса штангенциркулем измеряют точность до 0,1, 0,05 и даже 0,02 мм. Шкала Верньера, в отличие от шкалы Нониуса, передвигается вдоль основной шкалы. Она позволяет получить более точные измерения с точностью до 0,01 мм и выше.

При эксплуатации измерительного инструмента важно помнить, что основные причины возникновения погрешностей – неправильное использование, применение некачественного или поврежденного измерительного инструмента, загрязнение рабочих поверхностей и неподходящий температурный режим (оптимально 20 °C). Чтобы инструмент служил долго и исправно, после проведения всех необходимых замеров его желательно протереть и смазать, ослабить стопоры и чуть развести измерительные поверхности. Хранить его лучше в сухом и теплом месте и защищать от механических повреждений.

Научно-технический прогресс не стоит на месте. Появляются новые измерительные приборы и оборудование, возникают более совершенные методы контроля состояния деталей, узлов и механизмов. Знания, полученные при изучении дисциплины «Физика», помогут студентам в дальнейшем грамотно выполнять работу и быть высокопрофессиональными специалистами АПК.

# **ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ**

## Лабораторная работа № 1

### **ИЗУЧЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И СВЯЗИ МЕЖДУ НИМИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*Цель работы:* определить кинематические величины поступательного и вращательного движений твердых тел, рассчитать абсолютную и относительную погрешность измерения времени движения груза.

#### **Теоретическое введение**

Простейшей формой движения материи является механическое движение, представляющее собой изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Кинематика изучает пространственно-временное перемещение тел без учета причин, его вызывающих. Она оперирует такими величинами, как пройденный путь, перемещение, траектория, время, скорость движения и ускорение.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений.

*Поступательное движение* – это движение тела, при котором любая прямая, связанная с ним, остается параллельной самой себе. Точки тела, движущегося поступательно, имеют одинаковые скорости и ускорения, проходят один и тот же путь и имеют подобные траектории.

*Вращательное движение* твердого тела – это движение, при котором все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. При вращении твердого тела относительно неподвижной оси все его точки имеют одинаковые угловые скорости и угловые ускорения.

Для описания движения тел используют модели. Простейшая модель – *материальная точка*. Это тело, размерами которого можно пренебречь в данных условиях. При этом массой тела не пренебре-

гают. Это понятие абстрактное, но его введение облегчает решение практических задач.

Тела при взаимодействии могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. Поэтому в механике используется еще одна модель – абсолютно твердое тело.

*Абсолютно твердым телом* называется тело, в котором расстояние между любыми двумя точками не изменяется при любых воздействиях.

Для описания движения материальной точки или механической системы (совокупность тел) выбирается система отсчета.

*Система отсчета* включает в себя:

- 1) тело отсчета;
- 2) систему координат;
- 3) часы.

*Тело отсчета* – это произвольно выбранное тело, относительно которого определяется положение остальных тел в каждый момент времени.

В качестве системы координат чаще всего используется декартова система, закрепленная на теле отсчета. Базисом этой системы являются взаимно перпендикулярные единичные векторы  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Они задают направление осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  соответственно.

Положение произвольной точки определяется радиус-вектором  $\vec{r}$  – это вектор, проведенный из начала выбранной системы координат в данную точку траектории:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координаты вектора.

Модуль радиус-вектора определяется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Движение материальной точки полностью определено, если декартовы координаты материальной точки заданы в зависимости от времени (координатный способ):

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

либо задана зависимость от времени радиус-вектора (векторный способ):

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Эти уравнения называются *кинематическими уравнениями движения*.

Линия, которую описывает точка в процессе своего движения относительно выбранной системы отсчета, называется *траекторией*. Вектор, проведенный из исходного положения движущейся точки в ее конечное положение в данный момент времени, называется *вектором перемещения*.

По форме траектории различают *прямолинейное* и *криволинейное* движения.

Для характеристики движения вводится векторная величина – *скорость*, характеризующая быстроту движения.

*Мгновенная скорость* материальной точки – векторная величина, равная первой производной от радиус-вектора  $\vec{r}(t)$  и направленная по касательной к траектории в сторону движения:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор скорости в *проекциях* на оси прямоугольной декартовой системы координат можно представить в следующем виде:

$$\bar{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}.$$

Тогда *модуль вектора скорости* определяется выражением

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Физическая величина, которая характеризует изменение скорости по величине и направлению, называется *ускорением*.

*Мгновенное ускорение* материальной точки – векторная величина, равная первой производной от ее скорости по времени:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

или второй производной от ее радиус-вектора по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

*Вектор ускорения* в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат имеет вид:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

тогда *модуль вектора ускорения* определяется выражением

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При плоском криволинейном движении полное ускорение материальной точки разлагается на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 1):

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

где  $\vec{a}_n$  – *нормальное* (или центростремительное) ускорение материальной точки, определяющее изменение направления скорости;  $\vec{a}_\tau$  – *тангенциальное* (или касательное) ускорение материальной точки, определяющее изменение величины скорости.

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{\tau} = a_\tau \vec{\tau};$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n} = a_n \vec{n};$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

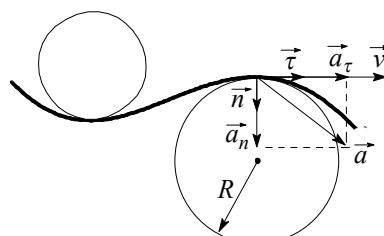


Рис. 1

Перейдем к рассмотрению характеристик вращательного движения.

При вращении тела угол поворота изменяется со временем по закону  $\phi = \phi(t)$ , который называется *уравнением вращательного движения тела*.

*Угловое перемещение*  $\Delta\vec{\phi}$  – векторная величина, модуль которой равен углу поворота  $\Delta\phi$  радиус-вектора за время  $\Delta t$ , направленная перпендикулярно плоскости движения материальной точки и определяемая по правилу буравчика (правого винта).

*Угловой скоростью* вращательного движения тела называется векторная величина, равная пределу, к которому стремится вектор средней угловой скорости при бесконечном уменьшении промежутка времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{\omega} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}.$$

Согласно правилу правого винта вектор угловой скорости направлен по оси вращения, причем так, чтобы вращение, рассматриваемое с конца вектора угловой скорости, происходило против хода часовой стрелки.

*Угловым ускорением* вращательного движения тела называется векторная величина, равная пределу, к которому стремится отношение приращения угловой скорости  $\Delta\vec{\omega}$  за промежуток времени  $\Delta t$ , стремящийся к нулю:

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{\phi}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}.$$

При ускоренном вращении вектор углового ускорения совпадает с вектором угловой скорости (рис. 2), а при замедленном – противоположен ему (рис. 3). На рис. 2 и 3 обозначение  $\vec{\omega}_1$  – угловая скорость в начальный момент времени;  $\vec{\omega}_2$  – угловая скорость через некоторый промежуток времени.

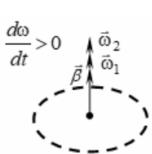


Рис. 2

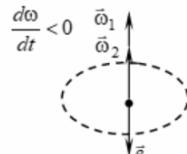


Рис. 3

Модули тангенциального и нормального ускорений произвольной точки тела, вращающейся вокруг неподвижной оси по окружности радиуса  $R$ , связаны с угловой скоростью и угловым ускорением соотношениями

$$a_{\tau} = \beta R; \quad a_n = \omega^2 R.$$

Связь поступательного и вращательного движений наглядно проявляется в работе различных механических устройств, в т. ч. устройств сельскохозяйственного назначения.

Механическая энергия, используемая для реализации поступательного движения сельскохозяйственных машин и механизмов, представляет собой, как правило, энергию вращательного движения вала двигателя. Это связано с тем, что вращение обеспечивает непрерывное и равномерное движение при небольших потерях на трение, это позволяет создать простую и компактную конструкцию механизма преобразования вращательного движения в поступательное.

Одним из простых механизмов для преобразования вращательного движения в поступательное и, наоборот, поступательного во вращательное, являются винтовые механизмы, широко применяемые в самых разнообразных устройствах. Такой механизм состоит из ходового винта и гайки; если винт закреплен, то при его вращении гайка движется по нему, и наоборот, если гайка неподвижно закреплена, то винт, вращаясь, ввинчивается в гайку, перемещаясь в осевом направлении. Винтовой механизм служит для подъема грузов или вообще для передачи усилий. Примером такого применения винтового механизма является использование его в домкратах, прессах, станочном оборудовании и многих специальных устройствах сельскохозяйственной техники.

Для преобразования вращательного движения в поступательное и наоборот используются и более сложные устройства: кривошипно-шатунный, эксцентриковый, кулисный, храповой и другие механизмы.

Механическое преобразование вращательного и поступательного движений друг в друга известно со времен зарождения техники. Устройства, обеспечивающие эти преобразования, прошли длительный путь развития и совершенствования и имеют очень широкое распространение. Грамотная эксплуатация таких механических преобразующих устройств требует знания основ и особенностей их проектирования и методов расчетов.

## Описание установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки приведен на рис. 4.

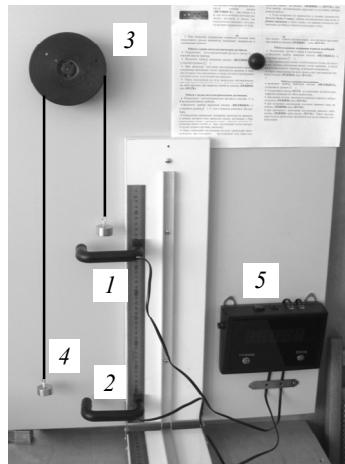


Рис. 4

Основными элементами установки являются:

- а) вертикально закрепленная миллиметровая линейка;
- б) оптоэлектронические датчики 1 и 2 (П-образный кожух, в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор);
- в) блок 3, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси;
- г) два металлических цилиндрических груза 4, связанных между собой нитью;
- д) цифровой секундомер 5, предназначенный для измерения промежутков времени.

Если к концам нити, перекинутой через блок, подвесить два груза с разными массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 5), то грузы будут двигаться поступательно ( $m_1 > m_2$ ) с постоянным ускорением, а блок будет вращаться с постоянным угловым ускорением.

Для описания движения груза массой  $m_1$  выберем систему отсчета. Начало координат (точку 0) выберем в точке начального положения груза массой  $m_1$ , ось  $Y$  направим вертикально вниз. В качестве часов будем использовать секундомер, который включается в момент  $t = 0$  начала движения груза массой  $m_1$  (следовательно,  $v_0 = 0$ ).

Если расстояние, пройденное грузом, обозначить  $h$ , то по формулам для равноускоренного движения

$$h = \frac{at^2}{2}; \quad (1.1)$$

$$v = at, \quad (1.2)$$

где  $v$  – проекция вектора скорости груза массой  $m_1$  на ось  $Y$ ;  $a$  – проекция ускорения груза на эту ось.

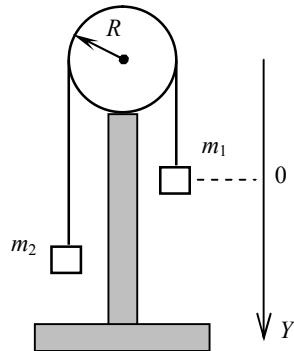


Рис. 5

Из выражения (1.1) получаем

$$a = \frac{2h}{t^2}; \quad (1.3)$$

подставив (1.3) в (1.2), получим

$$v = \frac{2h}{t}. \quad (1.4)$$

Тангенциальное ускорение  $a_t$  вращательного движения точек, лежащих на краю блока, равно ускорению  $a$  поступательного движения груза массой  $m_1$ . Тангенциальное и угловое ускорения связаны между собой соотношением

$$a_\tau = a = \beta R,$$

где  $R$  – радиус блока.

Подставив это соотношение в (1.3), получим

$$\beta = \frac{2h}{Rt^2}. \quad (1.5)$$

Тогда угловая скорость вращения в соответствии с соотношением (1.4) и уравнением связи  $v = \omega R$  будет равна  $\omega = \beta t$ .

С учетом (1.5) последнее выражение принимает вид:

$$\omega = \frac{2h}{Rt}. \quad (1.6)$$

Число оборотов  $N$  блока за время  $t$  можно найти из следующего выражения:

$$N = \frac{h}{2\pi R}. \quad (1.7)$$

### Порядок выполнения работы

1. На вертикальной линейке установите оптоэлектронные датчики на расстоянии  $h_1$  между ними таким образом, чтобы датчик 1 находился выше датчика 2 (см. рис. 4). Расстояние  $h_1$  задается преподавателем. Его значение занесите в табл. 1 рабочей тетради [1].

2. Измерьте радиус блока 3 и занесите его значение в табл. 1 рабочей тетради.

3. Подвесьте на блоке два связанных нитью груза 4 и добейтесь, чтобы грузы висели вертикально, не раскачиваясь.

4. Включите цифровой секундомер 5 нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При включении в течение двух секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись « $g\downarrow$ ».

5. Последовательным нажатием на кнопку «РЕЖИМ» установите режим работы с двумя оптоэлектронными датчиками « $g\Box$ ».

Таблица 1

$R = \underline{\hspace{2cm}}$ , $h_1 = \underline{\hspace{2cm}}$									
$i$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$a_1$	$v_1$	$\beta_1$	$\omega_1$	$N_1$	$\Delta t_{1i}$	$\langle \Delta t_1 \rangle$
1									
2									
3									
4									
5									

Окончание таблицы 1

$R = \underline{\hspace{2cm}}$ , $h_2 = \underline{\hspace{2cm}}$									
$i$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$a_2$	$v_2$	$\beta_2$	$\omega_2$	$N_2$	$\Delta t_{2i}$	$\langle \Delta t_2 \rangle$
1									
2									
3									
4									
5									

6. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.

7. На груз  $m_1$ , который будет двигаться между датчиками, положите дополнительный груз, поднимите их в положение незначительно выше светового луча датчика 1 и придержите.

8. Отпустите грузы. Секундомер производит измерение промежутка времени, в течение которого груз  $m_1$  движется между датчиками (при пересечении грузом светового луча первого датчика секундомер начинает отсчет времени, а при достижении грузом светового луча второго датчика – заканчивает). Результат измерения занесите в табл. 1 рабочей тетради.

9. Сбросьте показание секундомера на нуль нажатием на любую из кнопок «РЕЖИМ» или «ПУСК».

10. Проведите измерения пять раз и занесите результаты в табл. 1 рабочей тетради.

11. Проведите аналогичные измерения для расстояния между оптоэлектроническими датчиками  $h_2$  ( $h_2 - h_1 \geq 10$  см).

12. После окончания измерений выключите цифровой секундомер нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ».

13. Вычислите средние значения времени движения груза.

14. По полученным средним значениям времени движения груза  $t_1$  вычислите значения его ускорения по формуле (1.3), скорости движения по формуле (1.4), углового ускорения диска по формуле (1.5), угловой скорости по формуле (1.6) и число оборотов диска по формуле (1.7) для каждого расстояния  $h$ . Результаты вычислений занесите в табл. 1 рабочей тетради.

15. Сравните полученные результаты для расстояний  $h_1$  и  $h_2$  и заполните табл. 2 рабочей тетради.

Таблица 2

$\frac{t_1}{t_2}$	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{v_1}{v_2}$	$\frac{\beta_1}{\beta_2}$	$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	$\frac{N_1}{N_2}$

16. Рассчитайте для величин  $t_1$  и  $t_2$  абсолютные погрешности их измерений  $\Delta t_i$  и их средние значения  $\langle \Delta t \rangle$  по формулам (2) и (6). Результаты занесите в табл. 1 рабочей тетради. Подготовьте вывод о выполненной лабораторной работе.

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называется механическим движением? Какое движение тела называется поступательным, вращательным, прямолинейным, криволинейным?

2. Дайте определение материальной точки. Запишите кинематические уравнения движения материальной точки.

3. Что называется телом отсчета и системой отсчета?

4. Дайте определение траектории, радиус-вектора и вектора перемещения.

5. Дайте определение вектора средней скорости. Как он направлен?

6. Дайте определение кинематических величин: вектора мгновенной скорости и вектора мгновенного ускорения.

7. Как направлен вектор мгновенной скорости?

8. Запишите выражения, которыми определяется вектор мгновенной скорости и вектор мгновенного ускорения в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат.

9. Дайте определение кинематических величин вращательного движения: тангенциального и нормального ускорения, угловой скорости и углового ускорения. Как направлены вектора тангенциального ускорения, нормального ускорения, углового ускорения и угловой скорости?

10. Запишите формулу, которая связывает линейную и угловую скорости точки, движущейся по окружности.

11. Запишите формулу для модуля полного ускорения точки, движущейся по окружности.

12. Решите задачу. Для того чтобы повернуть трактор, движущийся поступательно со скоростью 18 км/ч, тракторист притормаживает одну из гусениц так, что ось ее ведущего колеса начинает двигаться вперед с меньшей скоростью – 14 км/ч. Расстояние между гусеницами 1,5 м. Дугу какого радиуса опишет центр трактора?

13. Решите задачу. Вал двигателя автомобиля вращается с угловой скоростью 180 рад/с. Определите линейную скорость ремня и угловую скорость шкива вентилятора автомобиля, если диаметр шкива на валу двигателя 9 см, а вентилятора – 6 см.

### **Примеры использования в сельскохозяйственной технике связи между поступательным и вращательным движениями**

В технике, в т. ч. сельскохозяйственной, есть ряд механизмов, которые преобразуют один вид движения в другой – вращательное движение в поступательное или, наоборот, поступательное во вращательное.

Примером может служить винтовой механизм (рис. 6), который используется для преобразования поступательного движения во вращательное. В таких механизмах винт называют тяговым, их изготавливают преимущественно с упорной резьбой, иногда с круглой.

Другим примером может быть реечный механизм – один из наиболее распространенных в технике, также применяемый для преобразования вращательного движения в поступательное и, наоборот, поступательного во вращательное. Реечный механизм состоит из шестерни и прямолинейной зубчатой рейки. Рейка – развернутое зубчатое колесо (рис. 7).

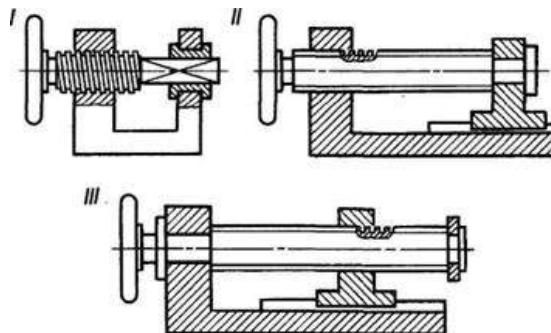


Рис. 6

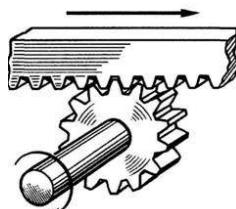


Рис. 7

Примером применения реечного механизма, в котором вращательное движение шестерни преобразуется в поступательное движение рейки, является перемещение шпинделя сверлильного станка.

## Лабораторная работа № 2

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*Цель работы:* изучить основные закономерности проявления сил трения; определить коэффициент трения скольжения при движении тела по горизонтальной поверхности.

### Теоретическое введение

Всякое движущееся тело испытывает сопротивление своему движению со стороны окружающей среды и других тел, с которыми оно во время движения соприкасается. Такой процесс механического взаимодействия соприкасающихся тел при их относительном движении (или попытке двигаться друг относительно друга) либо при относительном смещении параллельных слоев жидкости, газа или деформируемого твердого тела называется *трением*.

Если трение проявляется между частями одного и того же тела, то оно называется *внутренним трением*.

*Внешним трением* называется взаимодействие между различными соприкасающимися телами, препятствующее их относительному перемещению.

Существует трение между поверхностью твердого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой тело движется. Такое трение называется *жидким*, или *вязким*.

Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной пролежки называется *сухим трением*, одному из видов которого посвящена данная лабораторная работа.

Возникновение сухого трения обусловлено тем, что вследствие шероховатости поверхностей, соприкасающихся друг с другом, контакт между телами реализуется только на гребнях выступов ( $h \sim 1-50$  мкм). В местах контакта поверхностей тел имеет место «внедрение» одной поверхности в другую. Такое взаимодействие вызывает микроскопические деформации поверхностей, а возникающие при этом электромагнитные силы отталкивания проявляются как силы трения.

*Силой трения* называется сила, характеризующая взаимодействие соприкасающихся поверхностей двух тел и препятствующая их взаимному перемещению. Силы трения приложены к телам вдоль поверхностей их соприкосновения и всегда направлены в сторону, противоположную относительной скорости движения тел.

Различают следующие виды сухого трения:

- трение покоя;
- трение скольжения;
- трение качения.

*Трение покоя* – трение при отсутствии относительного перемещения соприкасающихся тел (*статическое трение*), т. е. оно возникает при попытке вызвать движение одного тела по поверхности другого. При значениях внешней силы  $0 < F < F_0$  ( $F_0$  – предельное значение силы трения покоя) тело остается неподвижным. В такой ситуации трение покоя обусловлено в основном упругими деформациями микровыступов. *Сила трения покоя* по модулю равна результатирующей сил, стремящихся сдвинуть тело, и направлена противоположно ей. Предельное значение модуля силы трения покоя прямо пропорционально величине силы нормального давления  $N$ , прижимающей трущиеся поверхности друг к другу:

$$F_0 = \mu_0 N,$$

где  $\mu_0$  – коэффициент трения покоя, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей двух тел.

Когда внешняя сила превосходит по модулю силу трения покоя  $F > F_0$ , тело начинает скользить по поверхности (рис. 8) и имеет место *трение скольжения* (*кинематическое трение*), возникающее в результате пластических деформаций микровыступов и их частичного разрушения.

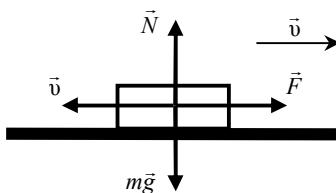


Рис. 8

Согласно экспериментально установленному закону Кулона – Амонтона модуль силы трения скольжения пропорционален силе нормального давления:

$$F_{\text{ск}} = \mu N,$$

где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей и не зависящий от площади соприкосновения. Поскольку модуль силы трения скольжения всегда меньше модуля максимальной силы трения покоя, то  $\mu_0 > \mu$ . Однако если различие между этими двумя силами мало, то можно считать, что  $\mu_0 = \mu$ .

Максимальное значение силы трения покоя приблизительно равно силе трения скольжения, поэтому, говоря о силе трения скольжения, часто имеют в виду предельную силу трения покоя.

*Трение качения* – сопротивление движению, возникающее при качении одного тела по поверхности другого (*кинематическое трение*). Причина трения качения – деформация катящегося тела и опорной поверхности, а также действие сил адгезии. При качении возникает сила сопротивления движению (рис. 9), которая называется *силой трения качения*. Эта сила действует со стороны опоры на катящееся по ней тело.

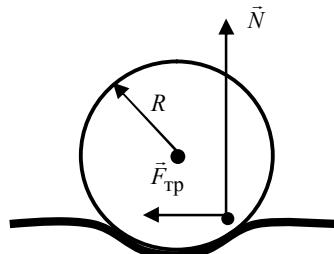


Рис. 9

По закону Кулона при качении без проскальзывания сила трения качения пропорциональна силе нормального давления  $N$ , но коэффициент пропорциональности значительно меньше коэффициента трения скольжения и зависит от радиуса катящегося тела:

$$F_{\text{кач}} = \frac{\mu_{\text{кач}}}{R} N,$$

где  $\mu_{\text{кач}}$  – коэффициент трения качения, зависящий от материала катящегося тела, опорной плоскости и физического состояния поверхностей;  $R$  – радиус тела, которое катится.

Силы трения играют важную роль в передвижении сельскохозяйственных машин, их устойчивости, а также фиксации и транспортировке сельскохозяйственных материалов и продуктов. Работа любого механизма, любой машины неизбежно сопровождается трением скольжения и/или качения при относительном движении их частей, что не позволяет полностью устранить износ трущихся деталей. Поэтому понимание природы трения и практическое применение знаний о коэффициентах трения имеют огромное значение в различных областях сельскохозяйственной техники и функционировании АПК.

Коэффициенты трения скольжения критически важны при проектировании сельскохозяйственных механизмов передачи движения. Например, для фрикционных передач, где трение является полезным явлением, обеспечивающим передачу крутящего момента, или для ременных передач, где сила трения между ремнем и шкивом определяет максимальную передаваемую мощность. Коэффициент трения скольжения непосредственно влияет на эффективность торможения или включения, т. е. для сцеплений и тормозных систем.

Малые значения коэффициента трения качения используются преимущественно при изготовлении подшипников качения и направляющих движущихся деталей, где трение влияет на точность позиционирования и энергоэффективность.

Для сельскохозяйственных транспортных средств коэффициент трения критически важен для сцепления с дорогой, что определяет тормозной путь, управляемость и устойчивость, а также для сцепления с почвой при выполнении разнообразных полевых работ. Очень важен подбор материалов колодок и дисков для тормозных систем с оптимальным коэффициентом трения скольжения при работе механизмов и машин в широком диапазоне температур.

В инженерной практике правильное определение и учет коэффициентов трения скольжения и качения имеют критическое значение для обеспечения надежной и эффективной работы сельскохозяйст-

венной техники, энергоэффективности, безопасности и долговечности соответствующих механизмов.

Существует несколько способов уменьшения силы трения. Это уменьшение шероховатости поверхности соприкасающихся деталей путем их шлифовки. Второй эффективный способ снижения сил трения в движущихся узлах сельхозтехники – нанесение между трущимися поверхностями смазочного материала (масла, консистентной смазки, жидкости и др.), уменьшающего трение за счет создания тонкого слоя, разделяющего поверхности. В современной технике используются материалы с низким коэффициентом трения (пластмассы, например политетрафторэтилен (тэфлон) или керамика).

### Описание установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки приведен на рис. 10. Все элементы установки крепятся на основании, состоящем из двух шарнирно соединенных между собой частей, на которых расположены шкалы с ценой деления 1 мм.

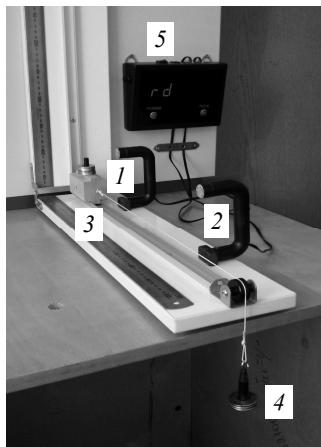


Рис. 10

На горизонтальной части основания расположены:

- а) желоб, вдоль направляющих которого движется тело, а на его конце закреплен неподвижный блок;

б) оптоэлектрические датчики 1 и 2, представляющие собой пластмассовый П-образный кожух, в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор;

в) тело 3, имеющее две поверхности скольжения (деревянную и пробковую) с разными коэффициентами трения. В центрах граней тела для установки стержней имеются отверстия диаметром 8 мм. Стержень с флагжком вставляется горизонтально в отверстие в одной из боковых граней тела и предназначается для перекрытия светового пучка фотодиода оптического датчика. Второй стержень, который вставляется вертикально в отверстие на верхней грани, предназначен для изменения массы тела путем размещения на нем металлических шайб. К одному из торцов тела прикреплен крючок;

г) подставка для шайб 4, которая соединяется нитью с телом;  
д) цифровой секундомер 5, предназначенный для измерения промежутков времени.

Рассмотрим движение по горизонтальной поверхности тела массой  $m_2$ , связанного нитью, перекинутой через неподвижный блок, с грузом массой  $m_1$  (рис. 11).

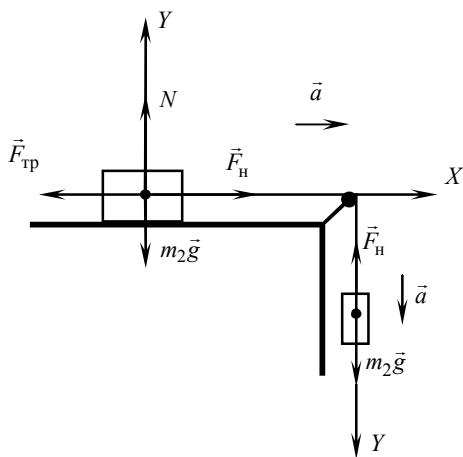


Рис. 11

На тело массой  $m_2$  действуют сила тяжести  $m_2\vec{g}$ , сила трения  $\vec{F}_{tp}$ , сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила натяжения нити  $\vec{F}_h$ . На груз массой  $m_1$

действуют сила тяжести  $m_1\vec{g}$  и сила натяжения нити  $\vec{F}_h$ . Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением на оси блока, согласно второму закону Ньютона можем записать:

$$m_2\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{tp} + \vec{F}_h = m_2\vec{a};$$

$$m_1\vec{g} + \vec{F}_h = m_1\vec{a}.$$

Так как каждую из сил можно считать постоянной, то и сумма векторов этих сил будет постоянной. Следовательно, ускорение, с которым движутся тела, также будет постоянным.

Эти уравнения в проекциях на ось  $OX$  и  $OY$  принимают следующий вид:

$$OX: F_h - F_{tp} = m_2 a; \quad (2.1)$$

$$OY: N - m_2 g = 0; \quad (2.2)$$

$$OY: m_1 g - F_h = m_1 a. \quad (2.3)$$

Сложим уравнения (2.1) и (2.3):

$$m_1 g - F_{tp} = (m_1 + m_2) a. \quad (2.4)$$

Модуль силы трения при движении по горизонтальной поверхности пропорционален модулю силы реакции опоры  $N$ . С учетом (2.2) получим

$$F_{tp} = \mu N = \mu m_2 g, \quad (2.5)$$

где  $\mu$  – коэффициент трения.

Подставив формулу (2.5) в (2.4), получим

$$m_1 g - \mu m_2 g = (m_1 + m_2) a,$$

откуда величина коэффициента трения скольжения

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} - \frac{(m_1 + m_2)a}{m_2 g}, \quad (2.6)$$

где  $a$  – ускорение, с которым движется тело.

Пусть за время  $t$  от начала движения тело пройдет путь  $l$ . Тогда по формуле равноускоренного движения

$$l = \frac{at^2}{2},$$

откуда ускорение

$$a = \frac{2l}{t^2}. \quad (2.7)$$

### Порядок выполнения работы

1. Разложите основание прибора, на его горизонтальной части вплотную к вертикальной установите в желоб тело 3 деревянной поверхностью вниз и убедитесь, что выступ на поверхности тела может свободно перемещаться по направляющим желоба (см. рис. 10).

2. Установите в отверстия, которые расположены в центрах граней тела 3, два стержня. Один стержень вставляется горизонтально в отверстие на одной из боковых граней тела и предназначается для перекрытия светового пучка оптического датчика. Второй стержень вставляется вертикально в отверстие на верхней грани и предназначается для изменения массы тела.

3. Установите оптоэлектрические датчики на горизонтальной части основания прибора, как показано на рис. 10 (датчик 1 – около тела, а датчик 2 – на расстоянии  $l$ , заданном преподавателем), таким образом, чтобы при движении тела стержень пересекал световые лучи первого и второго оптоэлектрических датчиков.

4. Перекиньте шнур, соединяющий тело 3 и подставку для шайб 4 через блок. Положите на подставку 4 несколько шайб и освободите

тело. Если тело не движется, увеличьте число шайб на подставке 4 и вновь проверьте характер движения системы. Повторяйте это действие до тех пор, пока система не начнет двигаться *равноускоренно*.

5. Рассчитайте массу подставки с шайбами  $m_1$  и массу тела  $m_2$  по следующим формулам и запишите результаты в табл. 1 рабочей тетради:

$$m_1 = m_{\text{п}} + nm_{\text{ш}},$$

где  $m_{\text{п}}$  – масса подставки 4;  $m_{\text{ш}}$  – масса шайбы;  $n$  – число шайб на подставке 4;

$$m_2 = m_{\text{т}} + km_{\text{ш}},$$

где  $m_{\text{т}}$  – масса тела 3;  $m_{\text{ш}}$  – масса шайбы;  $k$  – число шайб на стержне тела 3.

6. Включите цифровой секундомер 5 нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При включении в течение двух секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись « $\text{г}\sqcup$ ».

7. Последовательным нажатием на кнопку «РЕЖИМ» установите режим работы с двумя оптоэлектронными датчиками « $\text{г}\square$ ».

8. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.

9. Переместите и удерживайте тело 3 в крайнем положении (у вертикальной части основания прибора), а затем отпустите его. Секундомер измеряет промежуток времени, в течение которого тело движется ускоренно между датчиками (при пересечении стержнем, установленным на теле 3, светового луча первого датчика секундомер начинает отсчет времени, а при пересечении светового луча второго датчика заканчивает отсчет). Результат измерения занесите в табл. 1 рабочей тетради.

10. Верните тело в исходное положение.

11. Сбросьте показание секундомера на нуль нажатием на любую из кнопок – «РЕЖИМ» или «ПУСК».

12. Устанавливая тело в одно и то же исходное положение, проведите измерения пять раз. Результаты измерений занесите в табл. 1 рабочей тетради.

Таблица 1

Тип поверхности – деревянная, $m_{\text{п}} = 8 \text{ г}$ , $m_{\text{ш}} = 10 \text{ г}$ , $m_{\text{т}} = \underline{\quad} \text{ г}$ , $l = \underline{\quad}$ , $k = \underline{\quad}$ , $n = \underline{\quad}$								
$i$	$m_1$	$m_2$	$t$	$a$	$\mu$	$\langle \mu \rangle$	$\delta_\mu$	$\Delta \mu$
1								
2								
3								
4								
5								

13. Проведите аналогичные измерения (п. 1–12) для пробковой поверхности. Результаты измерений занесите в табл. 2 рабочей тетради.

Таблица 2

Тип поверхности – пробковая, $m_{\text{п}} = 8 \text{ г}$ , $m_{\text{ш}} = 10 \text{ г}$ , $m_{\text{т}} = \underline{\quad} \text{ г}$ , $l = \underline{\quad}$ , $k = \underline{\quad}$ , $n = \underline{\quad}$								
$i$	$m_1$	$m_2$	$t$	$a$	$\mu$	$\langle \mu \rangle$	$\delta_\mu$	$\Delta \mu$
1								
2								
3								
4								
5								

14. По формуле (2.7) определите ускорение системы тел.

15. По формуле (2.6) определите величину коэффициента трения скольжения, а по формуле (8) среднее значение коэффициента трения скольжения  $\langle \mu \rangle$ .

16. Вычислите относительную погрешность коэффициента трения скольжения для деревянной и пробковой поверхностей по формуле

$$\delta_\mu = \frac{\Delta \mu}{\langle \mu \rangle} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g} + 2 \frac{\Delta t}{t},$$

где  $\Delta l = 0,5 \text{ мм}$ ,  $\Delta t = 0,0005 \text{ с}$ , а при подстановке значения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  следует считать погрешность этой величины  $\Delta g = 0,005 \text{ м/с}^2$ . Результаты занесите в соответствующие таблицы рабочей тетради.

17. Зная относительную погрешность и среднее значение коэффициента трения скольжения, вычислите среднюю абсолютную ошибку по формуле

$$\Delta\mu = \delta_\mu \langle\mu\rangle.$$

18. Сделайте вывод о выполненной лабораторной работе.

### **Вопросы и задания для самоконтроля**

1. Сформулируйте основные законы динамики материальной точки и поступательного движения твердого тела.

2. Что называется силой трения? Как она направлена? К чему приложена эта сила?

3. Какое трение называется внутренним, а какое – внешним? Поясните их механизм. В чем принципиальная разница между этими видами трения?

4. Чем отличаются два вида внешнего трения – кинематическое и статическое?

5. Сформулируйте и запишите закон статического трения. От чего зависит коэффициент статического трения?

6. Сформулируйте и запишите закон Кулона – Амонтона для трения скольжения. От чего зависит коэффициент трения скольжения?

7. Назовите причины, вызывающие трение скольжения.

8. Сформулируйте закон Кулона для трения качения. Объясните, почему коэффициент трения качения имеет размерность длины. Объясните механизм трения качения.

9. Чем объяснить, что при буксовании колес трактора или автомобиля сила тяги значительно падает?

10. Решите задачу. Трактор везет на платформе контейнер со свеклой массой 500 кг. Коэффициент трения покоя между контейнером и платформой равен 0,55. Какое максимальное тормозящее ускорение может создать водитель трактора при остановке, чтобы избежать скольжения контейнера?

11. Решите задачу. При скорости 15 км/ч тормозной путь автомобиля равен 1,5 м. Каким будет тормозной путь при скорости 90 км/ч? Ускорение автомобиля в обоих случаях одно и то же.

12. Решите задачу. Чему должен быть равен минимальный коэффициент трения между шинами автомобиля и поверхностью наклонной дороги с углом  $30^\circ$ , чтобы автомобиль мог двигаться по ней вверх с ускорением  $0,6 \text{ м/с}^2$ ?

### Примеры использования различных видов трения в сельскохозяйственной технике

Все виды трения учитываются при конструировании и эксплуатации сельскохозяйственной техники. Прежде всего, тормозной путь колесной сельскохозяйственной техники зависит от сцепления дорожного покрытия и резиновых шин. При износе протектора резиновой покрышки колес тормозной путь значительно увеличивается, поскольку уменьшается коэффициент трения покрышки с дорожным покрытием или с почвой при полевых работах.

Трение покоя широко используется в сельскохозяйственном производстве, например при удержании тюков и другой продукции на ленте транспортера (рис. 12).

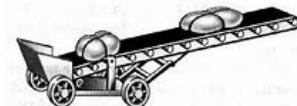


Рис. 12

Во всех типах сельскохозяйственных машин и прилегающих к ним механизмах применяются подшипники (рис. 13). Данная деталь является составной частью любого вида современной сельскохозяйственной техники и многих других сложных устройств с элементами вращения. Основное предназначение подшипников – снижение трения между вращающимися и неподвижными частями механизмов.



Рис. 13

С другой стороны, барабанный тормоз, осуществляющий торможение вращающихся колес, работает за счет больших сил трения между внутренней поверхностью вращающегося барабана и расположенными внутри него неподвижными тормозными колодками (рис. 14).

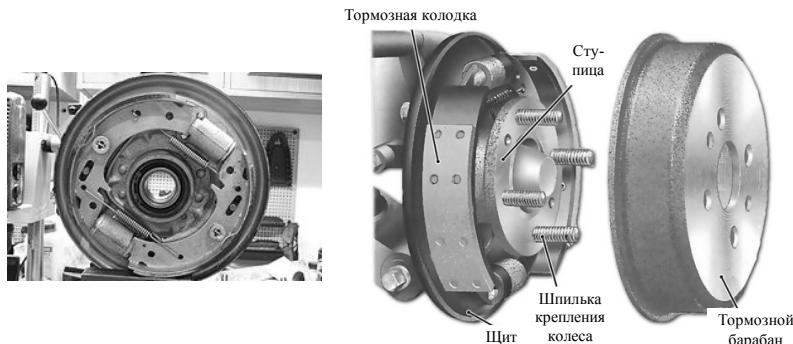


Рис. 14

## Лабораторная работа № 3

# ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Цель работы:* определить момент инерции блока относительно оси вращения и величину моментов действующих сил.

### Теоретическое введение

При изучении вращения твердых тел пользуются понятием момента инерции.

*Моментом инерции тела* – мера инертности твердых тел при вращательном движении. Его роль такая же, как и понятие *массы* при поступательном движении.

*Моментом инерции материальной точки* относительно оси называется скалярная величина, равная массе  $m$  материальной точки, умноженной на квадрат расстояния  $r$  от нее до оси:

$$I = mr^2.$$

*Моментом инерции твердого тела* относительно оси называется скалярная величина, равная сумме моментов инерции материальных точек, составляющих данное тело, относительно рассматриваемой оси:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Суммирование производят по всем элементарным массам  $m_i$ , на которые разбивается тело. Если распределение массы непрерывное, то суммирование сводится к интегрированию по всему объему тела  $V$ :

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

где  $\rho$  – плотность вещества;  $r$  – расстояние от элемента объема вещества  $dV$  до оси вращения.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется *теоремой Штейнера* – момент инерции тела  $I_z$  относительно произвольной оси  $Z$  равен сумме момента инерции  $I_c$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и массе тела, умноженной на квадрат расстояния  $a$  между осями:

$$I_z = I_c + ma^2.$$

Единица измерения [ $I$ ] = 1 кг·м<sup>2</sup>.

При изучении динамики вращательного движения помимо величины момента инерции вводят понятие *момента силы*. Различают момент силы относительно неподвижной точки и момент силы относительно неподвижной оси.

*Моментом силы относительно неподвижной точки  $O$*  называется физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы, проведенного из точки  $O$ , и вектора силы:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}.$$

*Момент силы относительно неподвижной оси* – физическая величина, равная составляющей момента силы на данную ось относительно любой точки на этой оси (рис. 15):

$$\vec{M}_Z = \vec{M}_{OZ}.$$

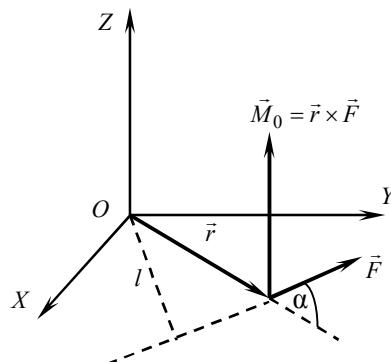


Рис. 15

*Направление вектора  $\vec{M}$*  определяется с помощью правила буравчика (правого винта): направление  $\vec{M}$  совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{r}$  к  $\vec{F}$ .

*Модуль момента силы*

$$M_0 = Fr \sin \alpha = Fl,$$

где  $\alpha$  – меньший угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ ;  $l$  – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$  (см. рис. 15), называемое плечом силы.

Единица измерения  $[M] = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

*Моментом импульса* материальной точки  $A$  относительно неподвижной точки  $O$  называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

где  $\vec{p} = m\vec{v}$  – импульс материальной точки;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $A$ .

Единица измерения:  $[L] = 1 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}$ .

*Основной закон динамики вращательного движения твердого тела:* угловое ускорение, с которым вращается твердое тело относительно оси, прямо пропорционально векторной сумме моментов всех действующих на твердое тело сил относительно оси вращения и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно той же оси:

$$\vec{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{M}_{iZ}}{I_Z}.$$

*Уравнение динамики вращательного движения твердого тела*

$$\vec{M}_Z = I_Z \cdot \vec{\beta}.$$

Существует еще одна форма уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси – производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси:

$$\frac{d\vec{L}_Z}{dt} = \vec{M}_Z,$$

где  $\vec{L}_Z$  – момент импульса (количество движения).

Силы, действующие при вращательном движении, в сельскохозяйственном производстве используются в основном для создания центробежных механизмов. В основе работы подобных механизмов лежит действие центробежных сил. Сушильная машина, медогонка, молочный сепаратор, центробежный насос и другие устройства функционируют по принципу вращательного движения. В сушильной машине разрывается сцепление воды с тканью, в медогонке – сцепление меда с сотами, в центробежном насосе – трение воды (или воздуха) о вращающиеся лопасти насоса. Отделение сливок в сепараторе обусловлено тем, что частицы жира и обрата имеют различные массы, поэтому на эти частицы действуют различные центробежные силы. Расслоение молока в сепараторе под действием центробежной силы подобно его отстаиванию в неподвижном сосуде под действием силы тяжести. Только в сепараторе молоко «отстает» вертикальными слоями и очень быстро, т. к. центробежная сила значительно превышает по величине силу тяжести.

### Описание установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки приведен на рис. 16. Основными элементами установки являются:

- а) вертикально закрепленная миллиметровая линейка;
- б) оптоэлектронные датчики 1 и 2 (П-образный кожух, в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор);
- в) блок 3, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси;

г) два металлических цилиндрических груза 4, связанных между собой нитью;

д) цифровой секундомер 5, предназначенный для измерения промежутков времени.

Момент инерции твердого тела можно определить экспериментально, изучая вращение тела вокруг неподвижной оси. Рассмотрим один из способов экспериментального определения момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси.

Схема экспериментальной установки для определения момента инерции блока изображена на рис. 17. Если к концам нити, перекинутой через блок, подвесить грузы одинаковой массой  $m_0$ , то система «блок–нить–грузы» будет неподвижной.

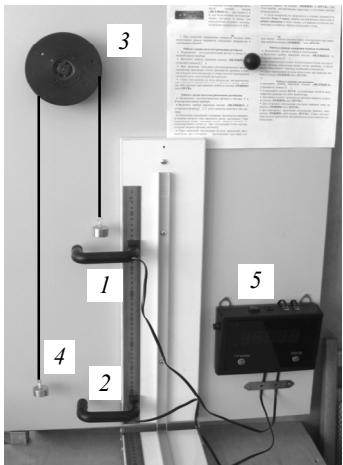


Рис. 16

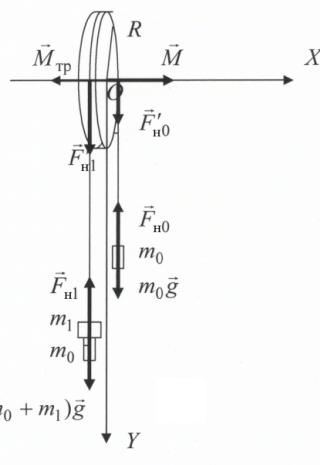


Рис. 17

На один из грузов массой  $m_0$  положим дополнительный груз массой  $m_1$ , чтобы грузы пришли в движение. Применяя второй закон Ньютона к каждому из грузов, подвешенных к концам нити, можно записать следующие уравнения движения:

$$(m_0 + m_1)\vec{g} + \vec{F}_{h1} = (m_0 + m_1)\vec{a};$$

$$m_0\vec{g} + \vec{F}_{h0} = m_0\vec{a}.$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения уравнение движения блока имеет следующий вид:

$$I\vec{\beta} = \vec{M} + \vec{M}_{\text{тр}},$$

где  $I$  – момент инерции блока относительно оси вращения;  $\vec{\beta}$  – угловое ускорение блока;  $\vec{M}$  – момент силы трения покоя между нитью и блоком;  $\vec{M}_{\text{тр}}$  – момент силы трения на оси закрепления блока.

Момент инерции блока и моменты сил берутся относительно оси вращения.

В проекциях на оси  $OY$  и  $OX$  получим соответственно

$$(m_0 + m_1)g - F_{\text{h1}} = (m_0 + m_1)a; \quad (3.1)$$

$$m_0g - F_{\text{h0}} = -m_0a; \quad (3.2)$$

$$M - M_{\text{тр}} = I\beta. \quad (3.3)$$

Момент силы трения покоя относительно оси вращения (так же, как относительно центра блока  $O$ )

$$M = (F'_{\text{h1}} - F'_{\text{h0}})R, \quad (3.4)$$

где  $R$  – радиус блока.

Согласно третьему закону Ньютона  $F_{\text{h0}} = F'_{\text{h0}}$ , а  $F_{\text{h1}} = F'_{\text{h1}}$ . Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (3.4) и получим

$$M = (F_{\text{h1}} - F_{\text{h0}})R. \quad (3.5)$$

Вычтем из уравнения (3.2) уравнение (3.1) и получим

$$F_{\text{h1}} - F_{\text{h0}} = m_1g - (2m_0 + m_1)a. \quad (3.6)$$

Ускорение  $a$  поступательного движения груза является тангенциальным ускорением точек обода блока и поэтому связано с угловым ускорением блока соотношением

$$a = \beta R. \quad (3.7)$$

С другой стороны, из формулы пути при равноускоренном движении  $a = \frac{2l}{t^2}$ , где  $l$  – расстояние, которое прошел каждый груз за время  $t$  из состояния покоя. Учитывая это, получим

$$\beta = \frac{2l}{t^2 R}.$$

С учетом соотношений (3.6) и (3.7) равенство (3.4) примет следующий вид:

$$M = (m_1 g - (2m_0 + m_1)\beta R)R. \quad (3.8)$$

Если использовать дополнительные грузы сначала массой  $m_1$ , а потом массой  $m_2$ , то момент сил трения на оси блока  $M_{tp}$  можно считать постоянным (при  $2m_0 + m_1, 2m_0 + m_2 \ll m_{бл}$ , где  $m_{бл}$  – масса блока). Но различие масс дополнительных грузов приведет к различным значениям моментов сил трения покоя между нитью и блоком и, следовательно, к различным угловым ускорениям  $\beta_1$  и  $\beta_2$  в указанных двух случаях. Поэтому на основании формулы (3.8) в случае дополнительного груза массой  $m_1$  будем иметь момент силы трения покоя между нитью и блоком

$$M_1 = (m_1 g - (2m_0 + m_1)\beta_1 R)R, \quad (3.9)$$

где

$$\beta_1 = \frac{2l}{R t_1^2}, \quad (3.10)$$

а в случае дополнительного груза массой  $m_2$

$$M_2 = (m_2g - (2m_0 + m_2)\beta_2 R)R, \quad (3.11)$$

где

$$\beta_2 = \frac{2l}{Rt_2^2}. \quad (3.12)$$

При этом согласно уравнению (3.3) указанные моменты сил удовлетворяют следующим равенствам:

$$M_1 - M_{\text{тр}} = I\beta_1;$$

$$M_2 - M_{\text{тр}} = I\beta_2.$$

Решая совместно эти уравнения, определим момент инерции блока по формуле

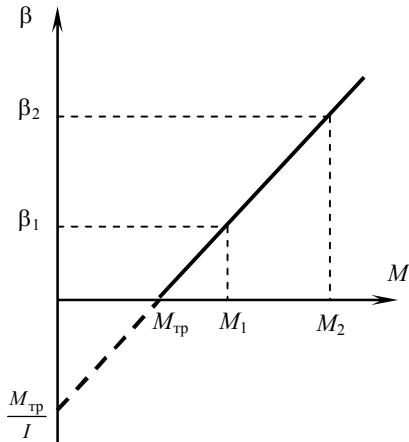
$$I = \frac{M_2 - M_1}{\beta_2 - \beta_1} \quad (3.13)$$

и момент сил трения на оси блока

$$M_{\text{тр}} = \frac{M_1\beta_2 - M_2\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}. \quad (3.14)$$

Величины момента инерции  $I$  и момента силы трения  $M_{\text{тр}}$  можно определить графически, построив график функции  $\beta = \beta(M)$ . Этот график в соответствии с формулой (3.3) имеет вид прямой линии (рис. 18), уравнение которой

$$\beta = \frac{M}{I} - \frac{M_{\text{тр}}}{I}.$$



*Рис. 18*

### Порядок выполнения работы

1. Подготовьте экспериментальную установку к работе.
2. Разместите оптоэлектрические датчики на расстоянии  $l$ , заданном преподавателем, таким образом, чтобы датчик 1 находился выше датчика 2.
3. Измерьте радиус блока 3 и занесите его значение в таблицу рабочей тетради.
4. Массы  $m_0$ ,  $m_1$  и  $m_2$  грузов 4 запишите в таблицу рабочей тетради.
5. Включите цифровой секундомер 5 нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При включении в течение двух секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись «г $\square$ ».
6. Последовательным нажатием на кнопку «РЕЖИМ» установите режим работы с двумя оптоэлектрическими датчиками «г $\square$ ».
7. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.
8. На груз 4 массой  $m_0$ , который будет двигаться между датчиками, положите дополнительный груз  $m_1$ , поднимите их в положение незначительно выше светового луча датчика 1 и придержите.

9. Отпустите грузы и проведите измерение промежутка времени  $t_1$ , в течение которого груз массой  $m_0$  с дополнительным грузом массой  $m_1$  движутся между верхним и нижним датчиками. Результат измерения занесите в таблицу рабочей тетради.

Таблица

$l = \underline{\hspace{2cm}}, R = \underline{\hspace{2cm}}, m_0 = \underline{\hspace{2cm}}, m_1 = \underline{\hspace{2cm}}, m_2 = \underline{\hspace{2cm}}$											
$i$	$t_1$	$\langle t_1 \rangle$	$\beta_1$	$M_1$	$t_2$	$\langle t_2 \rangle$	$\beta_2$	$M_2$	$I$	$M_{tp}$	
1											
2											
3											
4											
5											

10. Сбросьте показание секундомера на нуль нажатием на любую из кнопок – «РЕЖИМ» или «ПУСК».

11. Проведите измерения пять раз и занесите результаты в таблицу рабочей тетради.

12. Проведите аналогичные измерения с использованием другого дополнительного груза массой  $m_2$  (желательно, чтобы груз  $m_2 \approx 2m_1$ ). Результаты измерений  $t_2$  занесите в таблицу рабочей тетради.

13. После окончания измерений выключите цифровой секундомер нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ».

14. Для каждого дополнительного груза вычислите среднее значение времени прохождения пути  $\langle t_1 \rangle$  и  $\langle t_2 \rangle$  и для каждого из этих значений по формулам (3.9)–(3.12) вычислите значения угловых ускорений  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , а также моментов сил  $M_1$  и  $M_2$ . Результаты вычислений занесите в таблицу рабочей тетради.

15. По формулам (3.13), (3.14) рассчитайте момент инерции блока  $I$  относительно оси вращения и величину момента сил трения на оси блока  $M_{tp}$ . Результаты вычислений занесите в таблицу рабочей тетради.

16. Используя результаты вычислений, постройте график зависимости  $\beta = f(M)$  по двум точкам –  $(M_1, \beta_1)$  и  $(M_2, \beta_2)$  – и по построенному графику определите значения величин  $M_{tp}$  и  $M_{tp} / I$ . По полученным данным вычислите момент инерции  $I$ .

17. Сравните полученные графически значения момента инерции и момента силы трения с рассчитанными по формулам. Сделайте вывод о выполненной лабораторной работе.

## **Вопросы и задания для самоконтроля**

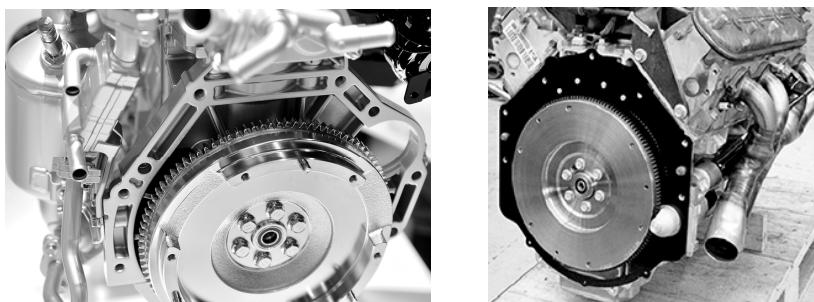
1. Что понимается под абсолютно твердым телом?
2. Какими уравнениями можно описать движение абсолютно твердого тела?
3. Дайте определение момента силы относительно неподвижной точки; относительно неподвижной оси. Назовите единицу измерения.
4. Чему равен модуль момента силы? Какая величина называется плечом силы? Поясните при помощи рисунка. Что понимается под линией действия силы?
5. Дайте определение момента импульса материальной точки относительно неподвижной точки; относительно неподвижной оси. Назовите единицу измерения.
6. Дайте определение момента импульса системы относительно неподвижной точки.
7. Сформулируйте и запишите закон изменения момента импульса; закон сохранения момента импульса.
8. Дайте определение момента инерции материальной точки относительно оси. Назовите единицу измерения.
9. Сформулируйте и запишите теорему Штейнера.
10. Сформулируйте и запишите основной закон динамики вращательного движения твердого тела.
11. Почему ход быстро движущихся сельскохозяйственных машин на поворотах замедляют?
12. Решите задачу. Найти силу, отделяющую сливки (плотность  $\rho_1 = 0,93 \text{ г}/\text{см}^3$ ) от снятого молока (плотность  $\rho_2 = 1,03 \text{ г}/\text{см}^3$ ), в расчете на единицу объема, если отделение происходит в центробежном сепараторе, вращающемся со скоростью 6000 об/мин, и если жидкости находятся на расстоянии 10 см от оси вращения.

### **Примеры использования момента инерции твердого тела в сельскохозяйственной технике**

Момент инерции играет важную роль в механике, сельскохозяйственной технике и других областях, где необходимо учитывать вращательное движение. Момент инерции характеризует распределение массы тела относительно оси вращения. Чем больше момент

инерции, тем труднее привести тело во вращательное движение или изменить его угловую скорость.

Одной из ключевых деталей двигателя внутреннего сгорания, которая выполняет критически важные функции в работе автомобиля, является маховик – массивный металлический диск, установленный на конце коленчатого вала (рис. 19). Обладая большой массой и большим моментом инерции, маховик помогает поршням двигателя продолжить движение из мертвых точек, нивелирует неравномерность вращения коленчатого вала и обеспечивает плавную передачу крутящего момента на трансмиссию.



*Ruc. 19*

Кроме того, для обеспечения плавного поступательного движения колесных машин и механизмов значительная часть массы колес со-средотачивается на ободах. Это делается для увеличения момента инерции колес, что также нивелирует неравномерность их вращения и в итоге делает поступательное движение машин и механизмов более стабильным и равномерным.

## Лабораторная работа № 4

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

*Цель работы:* измерить период малых колебаний физического маятника, определить его приведенную длину и момент инерции.

### Теоретическое введение

*Механическими колебаниями* называют такие виды механических движений, которые характеризуются повторяемостью во времени значений физических величин, определяющих это движение. Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебания, обладают какой-либо степенью повторяемости. Для возникновения и поддержания механических колебаний необходимо выполнение определенных условий:

- наличие источника энергии, вызывающего смещение тела относительно положения равновесия;
- наличие силы, направленной противоположно смещению;
- малые потери энергии на трение колеблющегося тела.

Любое механическое колебание характеризуется следующими параметрами.

*Смещение*  $x$  – величина, равная отклонению тела от положения равновесия в данный момент времени.

*Амплитуда колебаний*  $A$  (*максимальное смещение*) – величина, равная максимальному отклонению тела от положения равновесия.

*Период колебаний*  $T$  – наименьший промежуток времени, через который система, совершающая колебания, снова возвращается в то же состояние, в котором она находилась в начальный момент, выбранный произвольно.

*Частота колебаний*  $v$  – величина, обратная периоду колебаний, определяющая число колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$v = \frac{1}{T}.$$

*Циклическая частота*  $\omega$  – величина, равная числу полных колебаний, совершающихся за  $2\pi$  единиц времени:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

*Фаза колебаний* ( $\omega t + \phi_0$ ) – величина, определяющая смещение в любой момент времени.

Простейший вид периодических колебаний – гармонические колебания. *Гармонические колебания* – это периодическое изменение во времени физической величины (смещение тела от положения равновесия), происходящее по закону косинуса или синуса. *Уравнение гармонических колебаний* имеет вид:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega t + \phi_0),$$

где величины  $A$ ,  $\omega$ ,  $\phi_0$  – постоянные.

Продифференцировав первое уравнение гармонических колебаний по времени, получим выражение для *проекции скорости* материальной точки, совершающей гармонические колебания вдоль линии смещения:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi_0).$$

Продифференцировав уравнение скорости по времени, получим выражение для *проекции ускорения* материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$a_x = \frac{d v_x}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0).$$

Второй закон Ньютона позволяет в общем виде записать связь между силой и ускорением при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки:

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0) = -m\omega^2 x,$$

где  $F_x$  – проекция силы на направление оси  $OX$ , вдоль которой совершаются колебания.

Гармонические колебания совершаются под действием упругой силы, пропорциональной смещению и направленной к положению равновесия.

Смещение  $x$  как функция времени является решением *дифференциального уравнения гармонических колебаний*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем полная энергия гармонических колебаний должна оставаться постоянной. *Потенциальная и кинетическая энергии* гармонических колебаний определяются следующими соотношениями:

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0);$$

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

Следовательно, *полная энергия гармонического колебания*, состоящая из суммы кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2.$$

В физике под маятником понимают твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки или оси.

*Математический маятник* – это идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Период малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где  $l$  – длина нити;  $g$  – ускорение свободного падения.

*Физический маятник* – это абсолютно твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку, не совпадающую с центром масс тела. Период малых колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}},$$

где  $I$  – момент инерции маятника относительно оси подвеса;  $L$  – расстояние от оси подвеса до центра тяжести маятника.

*Приведенной длиной физического маятника* ( $L_{\text{пр}} = I / mL$ ) называется длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника. Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется *центром качаний физического маятника*. Точка подвеса и центр качаний обладают *свойством взаимности*: при переносе точки подвеса в центр качаний прежняя точка подвеса становится новым центром качаний и период колебаний не меняется.

Во всех реальных колебательных системах происходит уменьшение энергии системы, и если ее не восполнять за счет работы внешних сил, то колебания будут затухать. *Затухающие колебания* – это колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается. *Дифференциальное уравнение затухающих колебаний* имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\omega_0$  – *собственная частота*, т. е. частота, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды;  $\beta$  – коэффициент затухания.

В случае малого затухания, когда  $\beta \ll \omega_0$ , решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $A = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда затухающих колебаний.

Для характеристики быстроты затухания используется *логарифмический декремент затухания* – безразмерная величина, равная натуральному логарифму отношения значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период:

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T.$$

Время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется *временем релаксации*:

$$\tau = \frac{1}{\beta}.$$

Для характеристики колебательной системы часто используется ее *добротность* – безразмерная величина, равная произведению  $2\pi$  на отношение энергии колебаний системы в произвольный момент времени  $t$  к убыли этой энергии за промежуток времени от  $t$  до  $(t+T)$ , т. е. за один условный период затухающих колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}.$$

Область использования механических колебаний (вибраций) в различных отраслях народного хозяйства весьма многогранна. Так, в условиях сельскохозяйственного производства вибрационные процессы находят применение при очистке и мойке корнеплодов и фруктов, сепарации, помоле зерновых культур и др. На колебательных движениях основана работа молотилок, веялок и других машин, которые применяются для разделения сельскохозяйственной продукции по размеру и качеству.

Колебательные процессы находят большое применение в почвообрабатывающей технике. В настоящее время широко распространены машины для поверхностной обработки почвы с применением колебательных процессов механической природы, создаваемых упругими элементами. В машинах для поверхностной обработки почвы применяются автоколебания, создаваемые упругими элементами при взаимодействии рабочих органов с почвой в процессе работы.

Как показывает анализ почвообрабатывающих машин вибрационного действия, в основном в них применяются вынужденные не-периодические колебания и автоколебания. Применение свободных колебаний в почвообрабатывающих машинах ограничено тем, что при работе возникают переменные внешние воздействия. Среди всего многообразия орудий для поверхностной обработки почвы уже присутствуют машины с ротационными рабочими органами вибрационного действия.

Относительно перспектив использования колебаний различного спектра в технологических целях можно предположить, что в ближайшее время интерес к этой проблеме со стороны соответствующих специалистов различных отраслей будет возрастать.

### **Описание установки и метода измерений**

Общий вид лабораторной установки приведен на рис. 20. Основными элементами установки являются:

а) металлический стержень 1, подвешенный на кронштейне. На стержне с помощью винта закреплен стальной цилиндр 2, который может перемещаться вдоль стержня и фиксироваться в нужном положении;

б) оптоэлектрический датчик 3, представляющий собой пластмассовый П-образный кожух, в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор. При первом пересечении телом светового луча датчика секундомер начинает отсчет времени, а после завершения полного периода колебаний останавливается;

в) цифровой секундомер 4, предназначенный для измерения промежутков времени;

г) металлическая призма для определения центра масс.

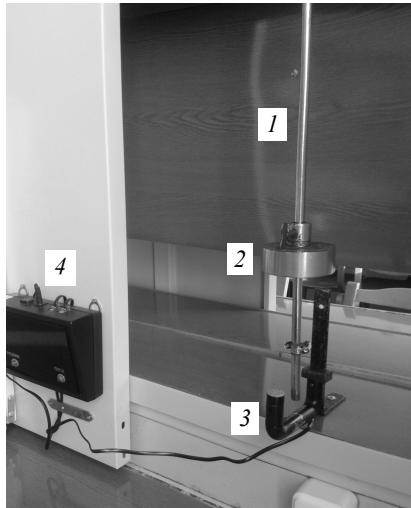


Рис. 20

По определению приведенная длина физического маятника

$$L_{\text{пп}} = \frac{I}{mL}.$$

Применив теорему Штейнера, получим

$$L_{\text{пп}} = \frac{I}{mL} = \frac{I_c + mL^2}{mL} = \frac{I_c}{mL} + L,$$

где  $I$  – момент инерции относительно оси колебаний;  $I_c$  – момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс маятника;  $L$  – расстояние от центра масс до оси колебаний.

### **Порядок выполнения работы**

1. Закрепите цилиндр маятника на расстоянии  $d$  от нижнего конца стержня. Расстояние  $d$  задается преподавателем. Занесите это расстояние в таблицу рабочей тетради.
2. Изучите схему для определения центра масс физического маятника (рис. 21).

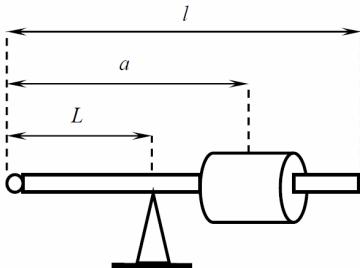


Рис. 21

3. Произведите следующие действия:
- с помощью металлической призмы определите центр масс физического маятника;
  - с помощью линейки измерьте расстояния:
    - от центра масс маятника до оси вращения  $L$ ;
    - от центра масс цилиндра до оси вращения  $a$ ;
    - длину стержня  $l$ ;
    - высоту цилиндра  $h$ ;
    - радиус цилиндра  $R$ .
- Результаты измерений занесите в таблицу рабочей тетради.
- Занесите в таблицу рабочей тетради значения массы стержня  $m_{\text{ст}}$  и цилиндра  $m_{\text{ц}}$ .

Таблица

$d = \underline{\hspace{2cm}}$	$m_{\text{ст}} = \underline{\hspace{2cm}}$	$m_{\text{ц}} = \underline{\hspace{2cm}}$	$l = \underline{\hspace{2cm}}$	$L = \underline{\hspace{2cm}}$	$a = \underline{\hspace{2cm}}$	$h = \underline{\hspace{2cm}}$	$R = \underline{\hspace{2cm}}$				
$i$	$T$	$\langle T \rangle$	$\Delta T$	$\langle \Delta T \rangle$	$L_{\text{тр}}^{\text{3}}$	$L_{\text{тр}}^{\text{T}}$	$I_0^{\text{3}}$	$I_0^{\text{T}}$	$\delta_{L_{\text{тр}}}$	$\Delta L_{\text{тр}}$	
1											
2											
3											
4											
5											

4. Установите маятник на кронштейн и расположите оптоэлектронический датчик 3 (на датчике надпись № 1) таким образом, чтобы конец стержня при своем движении перекрывал световой луч датчика и свободно проходил через створ датчика (см. рис. 20).

5. Включите цифровой секундомер 4 нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При включении в течение двух секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись « $\text{t}\square$ ».

6. Последовательным нажатием на кнопку «РЕЖИМ» установите режим измерения периода колебаний « $\langle T \rangle$ ».

7. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.

8. Отклоните маятник на небольшой угол (не более  $10^\circ$ ) от положения равновесия и отпустите. Секундомер произведет измерение периода колебаний  $T$ . Результат измерения занесите в таблицу рабочей тетради.

9. Выполните сброс секундомера на нуль нажатием на любую из кнопок – «РЕЖИМ» или «ПУСК» – и измерьте следующее полное колебание (повторите п. 8). Выполните измерения пять раз. Результаты измерений занесите в таблицу рабочей тетради.

10. По формуле (8) найдите среднее значение периода колебаний  $\langle T \rangle$ , по формуле (2) – абсолютную погрешность  $\Delta T_i$  измерений, а по формуле (6) – ее среднее значение  $\langle \Delta T \rangle$ .

11. Используя среднее значение периода колебаний  $\langle T \rangle$ , вычислите момент инерции  $I_0^3$  и приведенную длину  $L_{\text{пр}}^3$  физического маятника:

$$I_0^3 = \frac{(m_{\text{ct}} + m_{\text{п}})gL}{4\pi^2} \cdot \langle T \rangle^2,$$

$$L_{\text{пр}}^3 = \frac{g \langle T \rangle^2}{4\pi^2}.$$

12. Рассчитайте момент инерции стержня  $I_{\text{ст}}$  относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец:

$$I_{\text{ст}} = \frac{1}{3}m_{\text{ст}}l^2.$$

13. Момент инерции цилиндра  $I_{\text{ц}}$  относительно оси колебаний определите по теореме Штейнера:

$$I_{\text{ц}} = m_{\text{ц}} \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) + m_{\text{ц}} a^2.$$

14. Вычислите теоретическое значение момента инерции маятника по формуле

$$I_0^{\text{T}} = I_{\text{ct}} + I_{\text{ц}}.$$

15. Рассчитайте теоретическое значение приведенной длины  $L_{\text{пп}}^{\text{T}}$  физического маятника по формуле

$$L_{\text{пп}}^{\text{T}} = \frac{I_0^{\text{T}}}{(m_{\text{ct}} + m_{\text{ц}}) L}.$$

16. Вычислите относительную погрешность приведенной длины физического маятника по формуле

$$\beta_{L_{\text{пп}}} = \frac{\Delta g}{g} + 2 \frac{<\Delta T>}{<T>} + 2 \frac{\Delta \pi}{\pi},$$

где  $\pi = 3,14$ ,  $\Delta \pi = 0,005$ ,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ,  $\Delta g = 0,05 \text{ м/с}^2$ . Результат занесите в таблицу рабочей тетради.

17. На основании полученных данных определите среднюю абсолютную ошибку по формуле

$$\Delta L_{\text{пп}} = L_{\text{пп}} \delta_{L_{\text{пп}}}.$$

18. Сравните экспериментальное и теоретическое значения приведенной длины и момента инерции физического маятника.

19. Подготовьте вывод о выполненной лабораторной работе.

## **Вопросы и задания для самоконтроля**

1. Какое движение называется колебательным? Дайте определение периодических колебаний.
2. Перечислите условия, необходимые для возникновения механических колебаний. Назовите параметры, характеризующие любое колебание. Дайте определение каждого из параметров.
3. Какие колебания называются гармоническими? Запишите уравнение гармонических колебаний и объясните физический смысл входящих в него величин.
4. Запишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний.
5. Из чего состоит полная энергия гармонического колебания? Запишите формулу полной, кинетической и потенциальной энергий гармонического колебания.
6. Дайте определение физического маятника и объясните, под действием каких сил (моментов сил) происходят его колебания. При каком условии колебания физического маятника являются гармоническими? Запишите формулу периода гармонических колебаний физического маятника и объясните физический смысл входящих в нее величин.
7. Дайте определение математического маятника и объясните, под действием каких сил происходят его колебания. При каком условии колебания маятника будут гармоническими? Запишите формулу периода колебаний математического маятника и объясните физический смысл входящих в нее величин.
8. Что такое приведенная длина физического маятника? Дайте определение центра качания физического маятника.
9. Какие колебания называются затухающими? Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний.
10. Дайте определение логарифмического декремента затухания, времени релаксации и добротности колебательной системы.

## **Примеры использования колебательного движения в сельскохозяйственных машинах и механизмах**

Динамические нагрузки в сельскохозяйственных машинах, возникающие в процессе их работы, как правило, приводят к возникно-

вению колебательных движений, обусловленных как внутренними, так и внешними факторами. К внутренним факторам можно отнести работу двигателя и жесткость элементов трансмиссии. В роли внешних факторов выступают различные силовые воздействия на исполнительных элементах, связанные с условиями работы машины – особенности рельефа дорожного покрытия и его продольная кривизна.

Механические колебания могут быть и полезными, и вредными. С одной стороны, вибрации могут ухудшить технологические и прочностные условия работы любого механизма. С другой стороны, в сельском хозяйстве широкое распространение находят вибрационные машины транспортного и другого назначения. Вибрационный механизм характеризуются тем, что рабочему органу сообщается колебательное движение, целесообразное и необходимое для осуществления того процесса, который сельхозмашина должна выполнять.

Примерами могут служить машины для разделения продуктов. В сельском хозяйстве широко используются вибрационные механизмы для очистки и сортирования зерна. Для этой цели наибольшее распространение получили решетчатые машины, имеющие плоские решета, помещенные горизонтально или наклонно. Для задания решетам колебательного движения используют коленчатый вал.

В зерноуборочном комбайне (рис. 22) вибрационный эффект присутствует практически во всех его элементах. Вибраторование жатки способствует снижению силы трения между стеблем с колоском и поверхностью жатки, по которой он движется. После молотильного аппарата зерновой ворох попадает в систему очистки, где параметры вибрации и колебаний практически всех очистных элементов строго настраиваются.



Рис. 22

Используя вибрацию, можно интенсифицировать процесс смешивания кормовых материалов. У вибрационных прямоточных сме-

сителей подвергается вибрациям корпус, через который непрерывно проходят смешиаемые компоненты. При этом используются сравнительно большие амплитуды (3–4 мм) и относительно малые частоты колебаний корпуса (20–35 Гц).

Также в сельхозпроизводстве широко используются машины для измельчения (рис. 23). Под действием вибратора корпус мельницы совершает колебательные движения, в результате которых ролик, расположенный внутри корпуса, обкатывает цилиндрический корпус по внутренней окружности, измельчая находящийся там продукт. Движущийся корпус под действием вибратора совершает колебательные движения, что интенсифицирует процесс измельчения.



Рис. 23

Вибрационные эффекты, возникающие в процессе работы опрыскивателей, способствуют постоянному перемешиванию раствора, а также снижению частоты забивания форсунок. В современной сельхозтехнике есть примеры того, как с помощью принудительного виброустройства происходит автоматическая очистка форсунок без остановки агрегата.

## Лабораторная работа № 5

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

*Цель работы:* путем измерения периода малых колебаний математического маятника определить ускорение свободного падения.

### Теоретическое введение

*Математический маятник* – это идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Математический маятник является частным случаем физического маятника.

Ускорение, которое сообщает телу сила притяжения к Земле (без учета суточного вращения Земли), называется *ускорением свободного падения*  $\vec{g}$ . Согласно закону всемирного тяготения сила, с которой материальная точка массой  $m$  притягивается к Земле:

$$F = G \frac{mM}{R^2},$$

где  $G$  – гравитационная постоянная ( $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$ );  $M$  – масса Земли ( $M = 5,99 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ );  $R$  – расстояние от точки на поверхности Земли до центра Земли.

Сила притяжения  $F$  при условии, что тело находится вблизи поверхности Земли, сообщает телу ускорение свободного падения  $g$ :

$$F = mg.$$

Приравнивая оба выражения силы, получим

$$g = G \frac{M}{R^2} \approx 9,81 \text{ м/с}^2.$$

Последнее выражение показывает, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела и в данной точке над поверхностью Земли для всех тел одинаковое.

Вращение Земли вокруг своей оси и тот факт, что Земля имеет форму эллипсоида, а не сферы, приводят к тому, что ускорение свободного падения зависит от географической широты местности. По этой причине на полюсах Земли  $g = 9,83 \text{ м/с}^2$ , на экваторе  $g = 9,78 \text{ м/с}^2$ . Кроме того, при средней плотности Земли  $\rho = 5500 \text{ кг/м}^3$  плотность разных частей земной коры отличается от средней. Это также является причиной отклонения величины ускорения свободного падения от значения  $9,8 \text{ м/с}^2$ .

Ускорение свободного падения можно определить с помощью математического маятника. Как следует из формулы периода малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

величину  $g$  можно найти, если измерить длину нити маятника  $l$  и период колебаний  $T$ :

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Если измерить периоды малых колебаний математического маятника  $T_1$  и  $T_2$  при двух различных длинах нити  $l_1$  и  $l_2$ , то можно определить величину  $g$  в зависимости от разности  $(l_1 - l_2)$ . Из выражений

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

получаем расчетную формулу

$$g = \frac{4\pi^2 (l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (5.1)$$

## Описание установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки приведен на рис. 24. Основными элементами установки являются:

- а) шарик 1, подвешенный на нити, закрепленной на кронштейне;
- б) оптоэлектрический датчик 2, представляющий собой пластмассовый П-образный кожух, в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор;
- в) цифровой секундомер 3, предназначенный для измерения промежутков времени.



Рис. 24

## Порядок выполнения работы

1. Математический маятник (шарик 1, подвешенный на нити) закрепите на кронштейне (см. рис. 24).
2. Разложите основание прибора и установите на его вертикальной части оптоэлектрический датчик 2 (на датчике надпись «№ 1») таким образом, чтобы центр шарика при своем движении перекрывал световой луч датчика и свободно проходил через створ датчика.

3. Измерьте расстояние от центра шарика до точки подвеса  $l_1$  (длину математического маятника) и запишите его в таблицу рабочей тетради.

4. Включите цифровой секундомер 3 нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При включении в течение двух секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись «г $\ddot{\text{E}}$ ».

5. Последовательным нажатием на кнопку «РЕЖИМ» установите режим измерения периода колебаний «г $\square$ ».

6. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.

7. Отклоните шарик 1 на небольшой угол (не более  $10^\circ$ ) от положения равновесия и отпустите. При первом пересечении светового луча датчика секундомер начнет отсчет времени, а после завершения полного колебания остановится.

8. Выполните сброс секундометра на нуль нажатием на любую из кнопок – «РЕЖИМ» или «ПУСК» – и измерьте время следующего полного колебания. Проведите измерения пять раз и занесите результаты измерений в таблицу рабочей тетради.

Таблица

$l_1 = \underline{\hspace{2cm}}, l_2 = \underline{\hspace{2cm}}, l_1 - l_2 = \underline{\hspace{2cm}}$												
$i$	$T_1$	$\langle T_1 \rangle$	$\Delta T_1$	$\langle \Delta T_1 \rangle$	$T_2$	$\langle T_2 \rangle$	$\Delta T_2$	$\langle \Delta T_2 \rangle$	$g$	$\Delta g$	$\delta_g$	
1												
2												
3												
4												
5												

9. Проведите измерения, аналогичные описанным в п. 7–8, для другой длины математического маятника  $l_2$ . Для этого укоротите нить, намотав ее на кронштейн, и переместите датчик 2 на верхнюю часть шкалы.

10. После окончания измерений выключите цифровой секундомер нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ» и сложите основание прибора.

11. Найдите по формуле (8) средние значения величин  $T_1$  и  $T_2$ , т. е.  $\langle T_1 \rangle$  и  $\langle T_2 \rangle$ . Результаты занесите в таблицу рабочей тетради.

12. По формулам (2), (6) рассчитайте абсолютные погрешности  $\Delta T_1$  и  $\Delta T_2$  каждого опыта и их средние абсолютные погрешности  $\langle \Delta T_1 \rangle$  и  $\langle \Delta T_2 \rangle$ . Результаты занесите в таблицу рабочей тетради.

13. Вычислите среднее значение ускорения свободного падения по формуле (5.1), подставив в нее известное значение ( $l_1 - l_2$ ) и средние значения периодов колебаний  $\langle T_1 \rangle$  и  $\langle T_2 \rangle$ .

14. Вычислите относительную погрешность ускорения свободного падения по формуле

$$\delta_g = \frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l_1 - l_2} + 2 \frac{\langle T_1 \rangle \langle \Delta T_1 \rangle + \langle T_2 \rangle \langle \Delta T_2 \rangle}{\langle T_1^2 \rangle - \langle T_2^2 \rangle},$$

где при подстановке значения  $\pi = 3,14$  следует согласно табличным данным считать погрешность этой величины  $\Delta \pi = 0,005$ ,  $\Delta l = 0,5$  мм. Результат занесите в таблицу рабочей тетради.

15. Зная относительную погрешность и среднее значение ускорения свободного падения, вычислите среднюю абсолютную ошибку по формуле

$$\Delta g = g \delta_g.$$

16. Подготовьте вывод о выполненной лабораторной работе и запишите окончательный результат в виде  $g = (g \pm \Delta g)$  м/с<sup>2</sup>.

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Запишите закон всемирного тяготения (применительно к материальной точке массой  $m$  и Земле массой  $M$ ).

2. Каков физический смысл ускорения свободного падения? Запишите значение  $g$  при условии, что тело находится вблизи поверхности Земли.

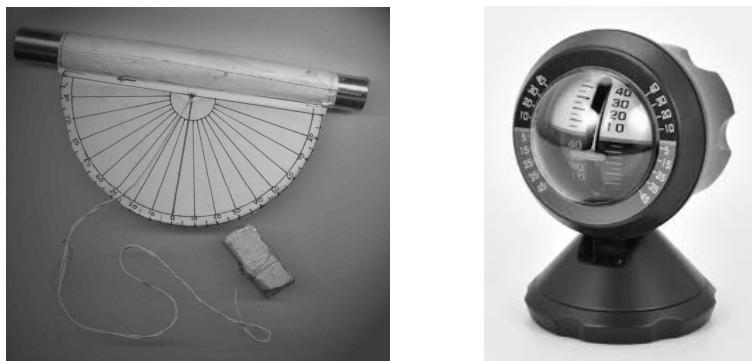
3. Что в физике понимают под маятником? Назовите виды маятников.

4. Дайте определение математического маятника и объясните, под действием каких сил происходят его колебания. При каком условии колебания маятника будут гармоническими?
5. Запишите формулу периода колебаний математического маятника и объясните физический смысл входящих в нее величин.
6. Запишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

### **Примеры использования ускорения свободного падения в сельскохозяйственных механизмах**

В инженерии ускорение свободного падения используется для понимания механики движения тел под воздействием силы тяжести. В настоящее время ускорение свободного падения и познания о нем активно применяются в инклинометрах и акселерометрах.

Инклинометр (рис. 25) – прибор, предназначенный для измерения угла наклона различных объектов относительно гравитационного поля Земли. Инклинометры используются как активная защита от опрокидывания сельскохозяйственной техники и оборудования. Статические инклинометры измеряют наклон по отношению к вектору ускорения свободного падения. Внешнее ускорение может быть только кратковременным, и среднее ускорение остается близким к земному ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ), поэтому статический инклинометр сможет обеспечить достаточную точность в определении угла наклона.



*Rис. 25*

Акселерометр (рис. 26) измеряет линейное ускорение в единицах  $g$  и – косвенно – отклонения от вертикали.

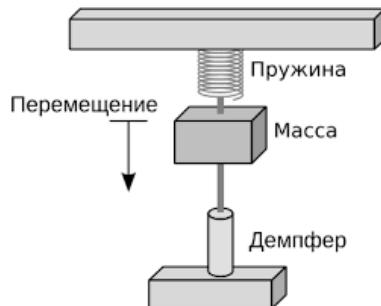


Рис. 26

Акселерометр позволяет определить ориентацию объекта в пространстве или его движение по различным осям. Датчик механического акселерометра содержит элемент инертной массы или грузик, который удерживается пружинами (от одной до трех в зависимости от количества осей). Пружины фиксируются на неподвижной детали. Они измеряют движение элемента относительно устройства. Чем больше прогиб пружин, тем больше отклонение и, следовательно, тем выше регистрируемое ускорение.

# **ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ**

## **Лабораторная работа № 6**

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ГАЗОВОЙ ПОСТОЯННОЙ**

*Цель работы:* изучить термодинамические процессы и законы идеального газа, определить универсальную газовую постоянную.

#### **Теоретическое введение**

Состояние некоторой массы газа задается *термодинамическими параметрами (параметрами состояния)*. Обычно в качестве параметров состояния выбирают давление, объем и температуру, между которыми существует связь, описываемая *уравнением состояния*  $f(p, V, T) = 0$ , согласно которому каждая из переменных является функцией двух других.

*Термодинамическая система* – совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами. *Термодинамический процесс* – любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из термодинамических параметров. Простейшими термодинамическими процессами являются изобарный, изохорный и изотермический процессы.

Одним из объектов исследований в термодинамике и статистической физике является идеальный газ. *Идеальный газ* – это газ, собственный объем молекул которого пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором находятся молекулы. Силы взаимодействия между молекулами газа отсутствуют, столкновения молекул газа между собой и стенками сосуда абсолютно упругие.

Законы, описывающие поведение идеального газа:

1. *Закон Бойля – Мариотта*: для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$pV = \text{const} \text{ при } T = \text{const} \text{ и } m = \text{const}.$$

Процесс, протекающий при постоянной температуре, называется *изотермическим*.

2. Закон Гей-Люссака: объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой:

$$V = V_0(1 + at) \text{ при } p = \text{const} \text{ и } m = \text{const},$$

где  $V_0$  – объем при 0 °C;  $t$  – температура по шкале Цельсия;  $a$  – термический коэффициент:

$$a = \frac{1}{273,15} K^{-1}.$$

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется *изобарным*.

3. Закон Шарля: давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой:

$$p = p_0(1 + at) \text{ при } V = \text{const} \text{ и } m = \text{const},$$

где  $p_0$  – давление при 0 °C;  $t$  – температура по шкале Цельсия;  $a$  – термический коэффициент.

Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется *изохорным*.

4. Закон Авогадро: равные объемы любых газов (при одинаковых температуре и давлении) содержат равное число молекул. В одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул, называемое *постоянной (числом) Авогадро*:  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

5. Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений газов, входящих в нее:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

*Парциальное давление* – давление, которое оказывал бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

Уравнение состояния идеального газа для произвольной массы газа (*уравнение Клапейрона – Менделеева*) имеет вид:

$$pV = \frac{m}{M} RT = vRT,$$

где  $M = N_A m_0$  – молярная масса газа, равная произведению числа Авогадро на массу молекулы;  $R = kN_A$  – универсальная газовая постоянная, равная произведению постоянной Больцмана на число Авогадро;  $v = \frac{m}{M}$  – количество молей вещества.

Если для термодинамической системы механическая энергия не изменяется, а изменяется лишь ее внутренняя энергия, то при любом способе перехода системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии будет одинаковым. В соответствии с законом сохранения энергии это изменение будет равно разности между количеством теплоты  $Q$ , полученной системой, и работой  $A$ , совершенной системой против внешних сил:

$$\Delta U = Q - A.$$

Отсюда вытекает формулировка первого начала термодинамики – *теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение работы против внешних сил:  $Q = \Delta U + A$ .*

В дифференциальной форме первое начало термодинамики имеет следующий вид:

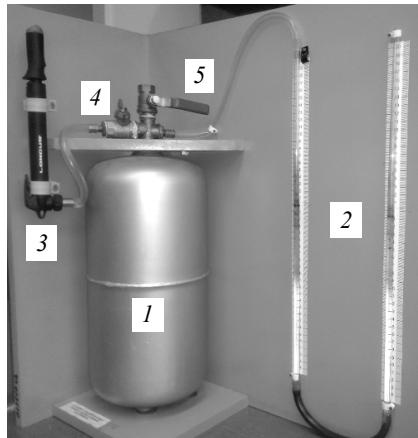
$$dQ = dU + dA.$$

Первое начало термодинамики дает возможность исследовать свойства газов и выявить характеристики, необходимые для тепловых и других расчетов, например в сушильных установках, используемых в сельском хозяйстве.

## Описание установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки приведен на рис. 27. Основными элементами установки являются:

- а) баллон с исследуемым газом (воздухом) 1;
- б) водяной манометр 2, при помощи которого измеряется избыточное давление;
- в) нагнетательный насос 3, который соединен через кран 4 с баллоном;
- г) кран 5, предназначенный для выпуска воздуха из баллона.



*Рис. 27*

Для экспериментального определения универсальной газовой постоянной проводятся последовательно термодинамические процессы с учетом постоянной массы газа, которая при атмосферном давлении и комнатной температуре имеет объем, равный объему баллона.

Пусть имеется сосуд объемом  $V$ , в котором первоначально содержится некоторое количество вещества (воздуха)  $v_0$  при атмосферном давлении  $p_0$  и температуре  $T$ . В этом случае уравнение состояния идеального газа будет иметь вид:

$$p_0V = v_0RT. \quad (6.1)$$

Путем изотермического накачивания воздуха в сосуд увеличим давление до величины  $p_1$ . В этом случае уравнение состояния идеального газа будет иметь вид:

$$p_1V = v_1RT. \quad (6.2)$$

Разделив уравнение (6.1) на уравнение (6.2), получим

$$v_1 = \frac{p_1}{p_0} v_0, \quad (6.3)$$

где  $p_0$  – атмосферное давление ( $p_0 = 101\ 325$  Па);  $p_1 = p_0 + \rho g h_1$  – давление воздуха после накачивания;  $h_1$  – разность уровней жидкости в манометре;  $v_0 = \frac{V}{V_m} = \frac{10}{22,4} = 0,446$  моль – количество вещества (воздуха) в начальном состоянии.

Затем снова увеличим давление до величины  $p_2$  путем накачивания воздуха в сосуд. Тогда уравнение состояния идеального газа будет иметь вид:

$$p_2 V = v_2 RT. \quad (6.4)$$

Разделив уравнение (6.1) на уравнение (6.4), получим

$$v_2 = \frac{p_2}{p_0} v_0, \quad (6.5)$$

где  $p_2 = p_0 + \rho g h_2$  – давление воздуха после повторного накачивания;  $h_2$  – разность уровней жидкости в манометре.

Вычитая из уравнения (6.4) уравнение (6.2), получим

$$(p_2 - p_1)V = (v_2 - v_1)RT,$$

откуда

$$\begin{aligned} R &= \frac{(p_2 - p_1)V}{(v_2 - v_1)T} = \frac{(p_0 + \rho g h_2) - (p_0 + \rho g h_1)}{(v_2 - v_1)T} = \\ &= \frac{(h_2 - h_1)\rho g V}{(v_2 - v_1)T}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

## Порядок выполнения работы

1. Проверьте, чтобы кран 5 находился в закрытом положении (рукоятка крана должна быть расположена горизонтально, см. рис. 27), и откройте кран 4 (рукоятка крана – в горизонтальном положении).

2. При помощи насоса 3 осторожно нагнетайте воздух в баллон до тех пор, пока разность уровней воды в манометре 2 не достигнет 100–150 мм водяного столба. После этого закройте кран 4 (рукоятка крана – в вертикальном положении).

3. Через 1–2 мин, когда воздух в баллоне охладится до комнатной температуры (уровни воды в манометре 2 сначала будут сближаться, а потом остановятся), определите разность уровней  $h_1$  и запишите в таблицу рабочей тетради.

4. Затем снова откройте кран 4 и насосом осторожно нагнетайте воздух в баллон до тех пор, пока разность уровней воды в манометре 2 не достигнет 200–250 мм водяного столба. После этого закройте кран 4 (рукоятка крана – в вертикальном положении).

5. Через 1–2 мин, когда воздух в баллоне охладится до комнатной температуры (уровни воды в манометре 2 сначала будут сближаться, а потом остановятся), определите разность уровней  $h_2$  и запишите в таблицу рабочей тетради.

Таблица

$V = 10 \text{ дм}^3, p_0 = 101\ 325 \text{ Па}, v_0 = 0,446 \text{ моль}, \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, T = \underline{\hspace{2cm}}$									
$i$	$h_1$	$h_2$	$v_1$	$v_2$	$R$	$\langle R \rangle$	$\Delta R$	$\langle \Delta R \rangle$	$\delta_R$
1									
2									
3									
4									
5									

6. Откройте кран 5 и дождитесь, пока уровни воды в манометре 2 не совпадут. Проведите опыт (п. 1–5) не менее пяти раз.

7. Для каждой пары значений  $h_1$  и  $h_2$  рассчитайте количество вещества  $v_1$  и  $v_2$  по формулам (6.3), (6.5).

8. По формуле (6.6) вычислите значение универсальной газовой постоянной  $R$ .

9. Рассчитайте по формулам (8), (2) и (6) среднее значение величины  $\langle R \rangle$ , абсолютную погрешность  $\Delta R$  и ее среднее значение  $\langle \Delta R \rangle$ ,

а также относительную погрешность измерения  $\delta_R$  по формуле (11). Результаты вычислений занесите в таблицу рабочей тетради.

10. Сравните вычисленное значение универсальной газовой постоянной с ее теоретическим значением. Подготовьте вывод о выполненной лабораторной работе.

### **Вопросы и задания для самоконтроля**

1. Дайте определение термодинамической системы. Какой процесс называется термодинамическим? Приведите примеры простейших термодинамических процессов.

2. Какими термодинамическими параметрами определяется состояние некоторой массы газа? Запишите уравнение состояния, содержащее эти параметры.

3. Какой газ называется идеальным?

4. Сформулируйте и запишите физические законы, описывающие изотермический, изохорный и изобарный процессы.

5. Запишите уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона – Менделеева). Поясните величины, входящие в это уравнение.

6. Каков физический смысл универсальной газовой постоянной?

7. Каким соотношением связаны между собой универсальная газовая постоянная  $R$ , постоянная Больцмана  $k$  и число Авогадро  $N_A$ ?

8. Сформулируйте первое начало термодинамики и объясните его физический смысл.

### **Примеры использования закона Стефана – Больцмана в сельскохозяйственных технологиях**

Закон Стефана – Больцмана применяется в различных областях современной науки и промышленности. В промышленности существует множество инженерных задач, в ходе которых требуется моделировать теплообмен и тепловое излучение, поскольку необходимо точно прогнозировать температурные поля, чтобы избежать перегрева оборудования, обеспечить надежность и энергоэффективность конструкций. Особенно это важно в процессах, где высокие температуры влияют на прочность материалов, устойчивость систем или безопасность.

Расчет теплового излучения, определение температуры объектов, проектирование систем отопления и освещения реализуются на основе закона Стефана – Больцмана. Этот закон, описывающий мощность излучения объекта как пропорциональную четвертой степени его температуры, лежит в основе многих инженерных задач, связанных с теплообменом.

Закон Стефана – Больцмана описывает излучение энергии нагретыми телами и применяется в конструировании сельскохозяйственных зерносушилок для расчета теплообмена, особенно при использовании инфракрасных излучателей для сушки. Он позволяет рассчитать необходимую мощность, температуру и площадь нагревательных элементов для эффективной сушки зерна, учитывая излучаемые и поглощаемые телами тепловые энергии.

Конструкция зерносушилки (рис. 28) зависит от ее типа (шахтная, модульная, барабанная), но в общих чертах включает сушильную камеру (шахту или колонны) с перфорированными стенками для прохода воздуха, систему нагрева воздуха (топка, калорифер), вентиляторы для создания воздушного потока, а также загрузочные и разгрузочные устройства для перемещения зерна.

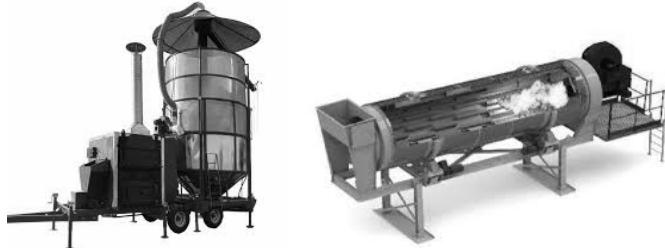


Рис. 28

Принцип действия зерносушилки заключается в сжигании твердого или жидкого топлива, благодаря которому нагревается воздушный поток, обдающий тепловой энергией злаковый продукт. Это позволяет влаге быстро испаряться и уходить при воздухообменном этапе.

Кроме того, инженеры используют закон Стефана – Больцмана, чтобы подобрать эмиссионные свойства и физические размеры солнечных элементов, максимизировать захват энергии и уменьшить теплопотери, т. е. для оптимизации солнечных коллекторов.

## Лабораторная работа № 7

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ ГАЗА МЕТОДОМ КЛЕМАНА – ДЕЗОРМА

*Цель работы:* изучить термодинамические процессы и законы идеального газа, определить показатель адиабаты для воздуха.

#### Теоретическое введение

Состояние некоторой массы газа задается *термодинамическими параметрами (параметрами состояния)*. Обычно в качестве параметров состояния выбирают давление, объем и температуру, между которыми существует связь, описываемая *уравнением состояния*  $f(p, V, T) = 0$ , согласно которому каждая из переменных является функцией двух других.

*Термодинамическая система* – совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами. *Термодинамический процесс* – любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из термодинамических параметров. Простейшими термодинамическими процессами являются изобарный, изохорный и изотермический процессы.

Одним из объектов исследований в термодинамике и статистической физике является идеальный газ. *Идеальный газ* – это газ, собственный объем молекул которого пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором находятся молекулы. Силы взаимодействия между молекулами газа отсутствуют, столкновения молекул газа между собой и стенками сосуда абсолютно упругие.

*Число степеней свободы*  $i$  – это число независимых переменных (координат), которые полностью определяют положение системы в пространстве. В ряде задач молекулу одноатомного газа рассматривают как материальную точку, которая имеет только три степени свободы поступательного движения.

В классической механике молекула двухатомного газа рассматривается как совокупность двух жестко связанных материальных точек. Кроме трех степеней свободы поступательного движения эта система, имеет еще две независимые степени свободы вращатель-

ного движения. Такие двухатомные молекулы обладают пятью степенями свободы. Трехатомные и многоатомные нелинейные молекулы с наличием жестких связей имеют шесть степеней свободы: три поступательные и три вращательные.

Жестко связанных атомов в реальных молекулах не существует, поэтому для таких молекул необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

*Закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул газа:* для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная  $\frac{1}{2}kT$ . Таким образом, *средняя кинетическая энергия молекулы с жестко связанными атомами*

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT,$$

где  $i$  – число степеней свободы, равное  $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}}$  (только для случая жестких молекул).

Всякая термодинамическая система в любом состоянии обладает *полной энергией*. Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют), то для произвольной массы газа *внутренняя энергия*

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{i}{2} vRT.$$

Работа расширения газа в общем случае определяется как

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV.$$

Если в термодинамической системе протекает адиабатический процесс (нет теплообмена с окружающей средой ( $dQ = 0$ )), то работа, совершаемая газом при расширении:

$$A = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Из первого начала термодинамики ( $dQ = dU + \delta A$ ) следует, что при адиабатическом процессе *работа совершается системой за счет убыли ее внутренней энергии*:

$$\delta A = -dU.$$

Для равновесного адиабатического процесса справедливо уравнение Пуассона

$$pV^\gamma = \text{const},$$

которое аналогично уравнению изотермического процесса  $pV = \text{const}$ .

Используя уравнение Клапейрона – Менделеева  $\left( pV = \frac{m}{M} RT \right)$ , можно из уравнения Пуассона найти связь между  $p$  и  $T$ , а также  $V$  и  $T$  в адиабатическом процессе:

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}; \quad TV^{\gamma-1} = \text{const},$$

где величина  $\gamma$  является безразмерной величиной и называется *показателем адиабаты, или коэффициентом Пуассона*:

$$\gamma = \frac{i+2}{i},$$

где  $i$  – число степеней свободы молекулы.

*Теплоемкостью тела* называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин:

$$C = \frac{dQ}{dT}.$$

Единица измерения в СИ:  $[C] = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ .

Теплоемкость моля вещества называется *молярной теплоемкостью* – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания одного моля вещества на один Кельвин:

$$C^M = \frac{dQ}{vdT}.$$

Единица измерения в СИ:  $[C^M] = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ .

Теплоемкость единицы массы вещества называется *удельной теплоемкостью*. Это величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания одного килограмма вещества на один Кельвин:

$$c^{\text{уд}} = \frac{dQ}{mdT}.$$

Единица измерения в СИ:  $[c^{\text{уд}}] = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ .

Молярная и удельная теплоемкости одного и того же вещества связаны соотношением

$$C^M = c^{\text{уд}} M,$$

где  $M$  – молярная масса вещества.

Величина теплоемкости зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. Если нагревание происходит при постоянном объеме, то теплоемкость называется *теплоемкостью при постоянном объеме*  $C_V$ , а если при постоянном давлении – *теплоемкостью при постоянном давлении*  $C_p$ :

$$C_V^M = \frac{i}{2}R; \quad C_P^M = \frac{i+2}{2}R.$$

Теплоемкость при постоянном объеме связана с теплоемкостью при постоянном давлении соотношением

$$C_P^M = C_V^M + R.$$

Это *уравнение Майера*, которое показывает, что молярная теплоемкость газа при постоянном давлении  $C_P^M$  всегда больше молярной теплоемкости при постоянном объеме  $C_V^M$  на величину универсальной газовой постоянной  $R$ .

Отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме равно показателю адиабаты:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$

Адиабатический процесс в реальных инженерных системах применяется в следующих областях:

- *тепловые двигатели*, у которых адиабатические процессы способствуют преобразованию тепловой энергии в механическую, повышая эффективность их работы;

- *холодильные установки и компрессоры*, когда адиабатическое расширение используется для понижения температуры, что способствует охлаждению среды или объекта.

Кроме того, адиабатическая система – современное и выгодное решение для обеспечения эффективного охлаждения воздуха. Адиабатические системы охлаждения воздуха имеют ряд преимуществ перед другими типами систем, такими как холодильные машины или кондиционеры. Поэтому адиабатические системы используются для охлаждения производственных помещений, складов, лабораторий и других объектов, где требуется поддерживать оптимальный температурный режим и увлажнение воздуха. Также они уже повсеместно применяются в сельском хозяйстве для поддержания оптимальной

температуры в теплицах, садах, на животноводческих фермах и других объектах.

Адиабатическое охлаждение – физический процесс, в основе которого лежат принципы термодинамики. Этот способ охлаждения обладает самой высокой экологичностью, энергоэффективностью и набирает все большую популярность на производстве. Адиабатическое охлаждение воздуха используются в летний период для понижения пиковых температур уличного воздуха выше 25 °С, который идет на охлаждение теплообменных аппаратов.

Преимущества адиабатических систем охлаждения:

а) экономия энергии. Адиабатические системы потребляют значительно меньше электроэнергии, чем традиционные системы, т. к. им не нужен компрессор для сжатия и расширения хладагента. Они также используют меньше воды, чем испарительные башни или гигрокалориферы;

б) экологичность. Адиабатические системы не содержат хладагентов, которые могут наносить вред окружающей среде и озоновому слою. Они также не выделяют парниковых газов, таких как углекислый газ или фреон;

в) увлажнение воздуха. Адиабатические системы повышают относительную влажность воздуха, который они охлаждают, что способствует созданию комфортного микроклимата в помещении. Увлажненный воздух также полезен для здоровья человека, т. к. предотвращает сухость слизистых оболочек и кожи;

г) простота установки и обслуживания. Адиабатические системы имеют простую конструкцию и не требуют сложного монтажа и регулировки. Также они легко очищаются и дезинфицируются.

### **Описание установки и метода измерений**

Общий вид лабораторной установки приведен на рис. 29. Основными элементами установки являются:

- а) баллон с исследуемым газом (воздухом) 1;
- б) водяной манометр 2, при помощи которого измеряется избыточное давление;
- в) нагнетательный насос 3, который соединен через кран 4 с баллоном;
- г) кран 5, предназначенный для выпуска воздуха из баллона.

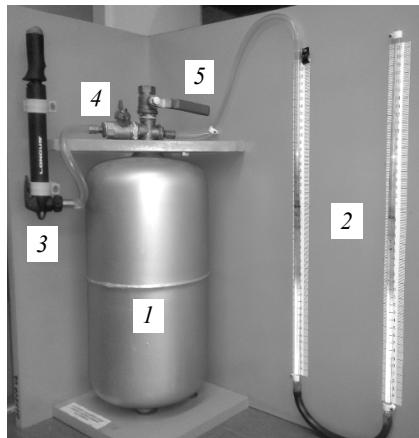


Рис. 29

Для экспериментального определения показателя адиабаты последовательно проводятся термодинамические процессы, представленные на рис. 30, с учетом постоянной массы газа, которая при атмосферном давлении и комнатной температуре имеет объем, равный объему баллона.

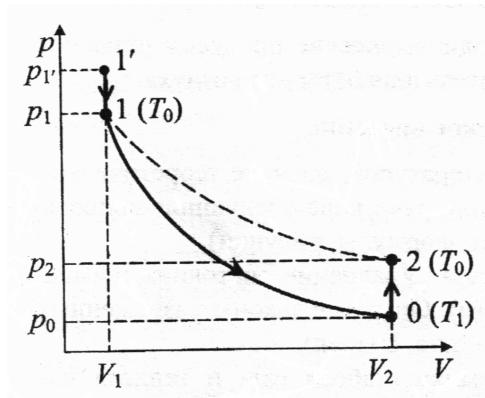


Рис. 30

Первоначально в баллон накачивается воздух до некоторого давления  $p_1$ . При этом газ в баллоне сжимается и нагревается. После закрытия крана 4 происходит изохорическое остывание (процесс  $1'-1$ ),

в конце которого температура газа становится равной комнатной  $T_0$ , а давление газа  $p_1$  превышает атмосферное давление  $p_0$  на величину  $\Delta p = \rho gh_1$ :

$$p_1 = p_0 + \rho gh_1, \quad (7.1)$$

где  $h_1$  – разность установившихся уровней жидкости в трубках манометра;  $\rho$  – плотность жидкости (воды).

Если на короткое время открыть кран 5, то происходит быстрый выброс части сжатого воздуха, при котором теплота от окружающей среды не успевает подводиться к воздуху в баллоне, т. е. реализуется адиабатический процесс, представленный кривой 1–0 (см. рис. 30). Оставшаяся часть воздуха расширяется от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ , равного объему баллона. При адиабатическом расширении газ совершают работу за счет убыли внутренней энергии, поэтому его температура понизится до  $T_1 < T_0$ . Применив уравнение Пуассона для адиабатического процесса 1–0, получим

$$p_1 V_1^\gamma = p_0 V_2^\gamma,$$

откуда

$$\frac{p_1}{p_0} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma, \quad (7.2)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

В дальнейшем за счет постепенного подвода тепла к баллону температура воздуха начинает увеличиваться, что сопровождается увеличением давления при постоянном объеме (процесс 0–2 на рис. 30), равном объему баллона. В конечном равновесном состоянии 2 температура равна комнатной температуре  $T_0$ , а давление

$$p_2 = p_0 + \rho gh_2, \quad (7.3)$$

где  $h_2$  – разность установившихся уровней жидкости в трубках манометра.

В состояниях 1 и 2 воздух находится при одинаковой температуре  $T_0$ , поэтому для изотермического расширения на основании закона Бойля – Мариотта получим

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (7.4)$$

Подставив формулу (7.4) в (7.2) и прологарифмировав полученное уравнение, с учетом формул (7.1) и (7.3) получим

$$\frac{p_1}{p_0} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^\gamma,$$

откуда

$$\gamma = \frac{\ln p_1 - \ln p_0}{\ln p_1 - \ln p_2} = \frac{\ln(p_0 + \rho g h_1) - \ln p_0}{\ln(p_0 + \rho g h_1) - \ln(p_0 + \rho g h_2)}.$$

Поскольку давления  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_0$  мало отличаются друг от друга, то отношение разности логарифмов можно с достаточной точностью заменить отношением разности самих величин:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (7.5)$$

### Порядок выполнения работы

1. Проверьте, чтобы кран 5 находился в закрытом положении (рукоятка крана должна быть расположена горизонтально, см. рис. 29), и откройте кран 4 (рукоятка крана – в горизонтальном положении).

2. При помощи насоса 3 накачивайте воздух в баллон до тех пор, пока разность уровней воды в манометре 2 не достигнет 30–40 см.

После этого закройте кран 4 (рукоятка крана – в вертикальном положении).

3. Через 1–2 мин, когда воздух в баллоне охладится до комнатной температуры (уровни воды в манометре сначала будут сближаться, а потом остановятся), определите разность уровней  $h_1$  и запишите в таблицу рабочей тетради.

4. Кратковременно откройте кран 5 (рукоятку крана переведите в вертикальное положение на 1–2 с до момента выравнивания уровней) и быстро его закройте. После этого уровень воды в одном колене манометра будет постепенно подниматься, а в другом – постепенно опускаться. Через 1–2 мин установится неизменная разность уровней  $h_2$ , которая заносится в таблицу рабочей тетради.

Таблица

$i$	$h_1$	$h_2$	$\gamma$	$\langle\gamma\rangle$	$\Delta\gamma$	$\langle\Delta\gamma\rangle$	$\delta_\gamma$
1							
2							
3							
4							
5							

5. Проведите опыт не менее пяти раз.

6. Для каждой найденной пары значений  $h_1$  и  $h_2$  рассчитайте величину показателя адиабаты  $\gamma$  по формуле (7.5).

7. Найдите среднее значение величины  $\langle\gamma\rangle$  по формуле (8), абсолютную погрешность  $\Delta\gamma$  по формуле (2) и ее среднее значение  $\langle\Delta\gamma\rangle$  по формуле (6), а также относительную погрешность  $\delta_\gamma$  по формуле (11). Результаты вычислений занесите в таблицу рабочей тетради.

8. Учитывая, что воздух состоит в основном из двухатомных молекул, и используя связь между показателем адиабаты и числом степеней свободы молекулы, вычислите теоретическое значение показателя адиабаты  $\gamma^T$  по формуле

$$\gamma^T = \frac{i+2}{i}.$$

9. Сравните вычисленное теоретическое значение показателя адиабаты  $\gamma^T$  с его экспериментальным значением  $\langle\gamma\rangle$ . Подготовьте вывод о выполненной лабораторной работе.

## **Вопросы и задания для самоконтроля**

1. Дайте определение термодинамической системы. Какой процесс называется термодинамическим? Приведите примеры простейших термодинамических процессов.
2. Какими термодинамическими параметрами определяется состояние некоторой массы газа? Запишите уравнение состояния, содержащее эти параметры.
3. Какой газ называется идеальным? Сформулируйте и запишите законы идеального газа.
4. Объясните, что такое число степеней свободы молекул газа? Почему одноатомные, двухатомные и многоатомные молекулы обладают различным числом степеней свободы? Как определяется полное число степеней свободы?
5. Сформулируйте закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Как определяется средняя энергия молекулы и что она в себя включает? Как определяется внутренняя энергия тела (газа, идеального газа)?
6. Сформулируйте первое начало термодинамики и объясните его физический смысл. Запишите первое начало термодинамики для изопроцессов.
7. Какой процесс называется адиабатическим? Запишите уравнения Пуассона для адиабатического процесса. Какая величина называется коэффициентом Пуассона?
8. Запишите выражения для работы по расширению газа для изопроцессов.
9. Что называется теплоемкостью вещества? Перечислите, какие существуют виды теплоемкости, и дайте определение каждого из них.
10. Запишите выражения для мольных теплоемкостей при постоянном давлении и объеме газа. Запишите уравнение Майера и поясните его.

### **Примеры использования адиабатических процессов в сельскохозяйственной технике**

Адиабатический процесс, протекающий в газах, – важное явление в термодинамике, где изменение внутренней энергии обусловлено

только выполненной работой. Адиабатические процессы можно наблюдать как в природе (например, при быстром расширении газов в атмосфере, что приводит к образованию облаков), так и в технике (в двигателях внутреннего сгорания, холодильных установках и компрессорах).

В двигателях внутреннего сгорания (рис. 31) горючая смесь после впуска в цилиндр в течение короткого времени сжимается, а затем, после воспламенения смеси, в течении короткого времени расширяется. Таким образом, такты сжатия и рабочего хода в двигателях являются хорошими примерами адиабатического процесса. Адиабатическое сжатие и расширение в двигателях внутреннего сгорания способствуют преобразованию тепловой энергии в механическую, повышая эффективность работы двигателя.

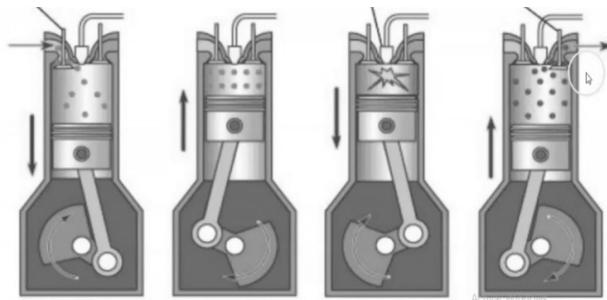


Рис. 31

Значительный нагрев газа при адиабатическом процессе используется в дизельных двигателях. В этих двигателях нет систем для поджигания сжатой топливовоздушной смеси. В дизеле происходит сжатие атмосферного воздуха, сильнее, чем в бензиновом карбюраторном двигателе. А в конце сжатия топливо впрыскивается в цилиндр с помощью специальной форсунки. В этот момент воздух имеет температуру, достаточную для самовоспламенения впрысканной горючей смеси, температура горевшей топливовоздушной смеси резко возрастает и смесь расширяется, толкая поршень и совершая полезную работу.

В холодильных установках (рис. 32) и компрессорах адиабатическое расширение используется для понижения температуры, что способствует охлаждению среды или объекта.

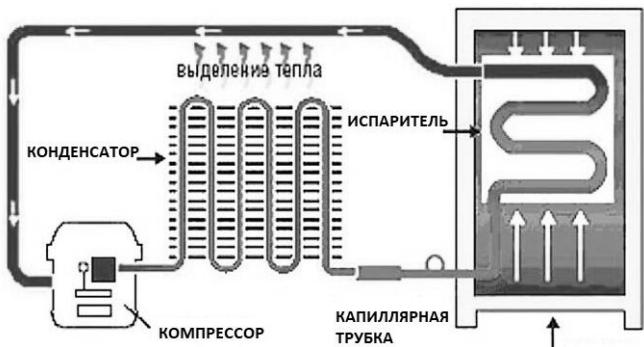


Рис. 32

Идеальный цикл получения искусственного холода – обратный цикл Карно. В отличие от прямого цикла, в котором производится работа при переходе теплоты от более нагреветого тела к менее нагретому, в обратном цикле теплота передается от менее нагреветого тела к более нагретому.

## СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

*Таблица 1*

Некоторые основные физические константы

Константа	Значение
Ускорение свободного падения	$g = 9,80665 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}^2)$
Газовая постоянная	$R = 8,31441 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$
Постоянная Больцмана	$k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Число Лошмидта	$N_L = 2,686754 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$
Нормальный молярный объем	$V_\mu = 22,4207 \text{ м}^3/\text{моль}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Н}\cdot\text{м}^2$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$

*Таблица 2*

Приставки к обозначениям единиц и соответствующие множители

Приставка	Краткое обозначение	Множитель	Приставка	Краткое обозначение	Множитель
дека	да	$10^1$	деци	д	$10^{-1}$
гекто	г	$10^2$	санти	с	$10^{-2}$
кило	к	$10^3$	милли	м	$10^{-3}$
mega	М	$10^6$	микро	мк	$10^{-6}$
гига	Г	$10^9$	нано	н	$10^{-9}$
тера	Т	$10^{12}$	пико	п	$10^{-12}$
пета	П	$10^{15}$	фемто	ф	$10^{-15}$
экса	Э	$10^{18}$	атто	а	$10^{-18}$

*Таблица 3*

Коэффициенты трения покоя и скольжения

Материалы	Трение покоя $\mu_0$	Трение скольжения (сухое) $\mu$
Сталь/сталь	0,15	0,10
Металл/дерево	0,50–0,60	0,40–0,50
Дерево/дерево	0,65	0,30
Кожа/дерево	0,47	0,27

Таблица 4

## Буквы греческого алфавита

Прописная буква	Строчная буква	Название	Прописная буква	Строчная буква	Название
Α	α	альфа	Ν	ν	ню
Β	β	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	γ	гамма	Ο	ο	омикрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пи
Ε	ε	эпсилон	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
Η	η	эта	Τ	τ	тау
Θ	θ	тета	Υ	υ	ипсилон
Ι	ι	йота	Φ	φ	фи
Κ	κ	каппа	Χ	χ	хи
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ	пси
Μ	μ	мю	Ω	ω	омега

## **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Бортник, С. А. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика : рабочая тетрадь / С. А. Бортник, В. Ч. Круплевич. – Минск : БГАТУ, 2024. – 36 с.
2. Емельянов, В. А. Методы обработки результатов измерений в лаборатории физпрактикума : учебное пособие / В. А. Емельянов, Д. Г. Лин, В. Ф. Шолох. – Минск : Бестпринт, 1997. – 90 с.
3. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие / Т. И. Трофимова. – М. : Академия, 2010. – 560 с.
4. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебник : в 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. – 352 с.
5. Зисман, Г. А. Курс общей физики : в 3 т. / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – СПб. : Лань, 2024. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. Колебания и волны. – 340 с.
6. Тащлыкова-Бушкевич, И. И. Физика : учебник : в 2 ч. / И. И. Тащлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1 : Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 303 с.
7. Физика : [электронный учебно-методический комплекс] : в 3 ч / В. К. Долгий, П. Н. Логвинович, С. М. Барайшук. – Минск : БГАТУ, 2021. – Ч. 1 : Механика. – Текст : электронный.
8. Куприн, М. Я. Физика в сельском хозяйстве / М. Я. Куприн. – М. : Просвещение, 1985. – 144 с.

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

Учебное издание

**Арабей Сергей Михайлович,  
Бортник Светлана Аркадьевна,  
Круплевич Валерий Чеславович и др.**

**ФИЗИКА:  
МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА,  
ТЕРМОДИНАМИКА.  
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск *С. В. Слонская*

Редактор *Д. А. Значёнак*

Компьютерная верстка *Д. А. Значёнак*

Дизайн обложки *Д. О. Михеевой*

Подписано в печать 27.11.2025. Формат 60×84<sup>1</sup>/16.

Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 4,55. Тираж 99 экз. Заказ 550.

Издатель и полиграфическое исполнение:

учреждение образования

«Белорусский государственный аграрный технический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий

№ 1/359 от 09.06.2014.

№ 2/151 от 11.06.2014.

Пр-т Независимости, 99–1, 220012, Минск.