УДК 378.147:51

ПОВЫШЕНИЕ ФАКТОРА ЗНАЧИМОСТИ В МОТИВАЦИИ СТУДЕНТОВ АГРАРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Тиунчик А.А., к.ф.-м.н., доцент
УО «Белорусский государственный аграрный технический университет», г. Минск
Дик Е.Н., к.психол.н., доцент
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный аграрный университет», г. Уфа

Ключевые слова: мотивация, визуализация, преподавание математики, компьютерные технологии.
Key words: motivation, visualization, teaching mathematics, computer technology.

Аннотация: Рассматривается возможность повышения мотивации студентов к изучению математики. Методы векторной алгебры применяются при решении практико-ориентированных задач. В качестве изучаемой задачи используется один из новейших результатов современной математики.
Summary: The possibility of increasing students' motivation to study mathematics is considered. Vector algebra methods are used to solve practice-oriented problems. One of the latest results of modern mathematics is used as the problem being studied.

Одним из наиболее существенных факторов повышения мотивации студентов к изучению дисциплины является значимость [1], включающая практическую направленность решаемых задач. В связи с этим для повышения мотивации изучения предмета целесообразно включать в изучаемый материал интересные, а по мере возможности и парадоксальные задачи практической направленности.

Цель статьи – демонстрация возможности применения в образовательном процессе методов векторной алгебры при исследовании и решении практико-ориентированных оптимизационных задач увеличения объемов тел при фиксированных ограничениях

Большая практическая значимость изучения изопериметрических фигур (фигур, имеющих равные периметры) и изопифанных тел (тел, имеющих равные площади поверхности) обусловлена возможностью находить оптимальные варианты охвата наибольших площадей или объемов при использовании наименьших ресурсов. В советские годы для реализации молока массово использовались пакеты в виде тетраэдра (правильной треугольной пирамиды). Изготовление таких пакетов было простым, технологичным, а форма тетраэдра была достаточно эффективной с точки зрения оптимального соотношения между площадью поверхности и ограниченным ею объемом, то есть пакеты вмещали достаточно большой объем при заданной площади их поверхности.

Еще с античных времен известно, что из всех плоских многоугольников с заданным периметром и равным числом сторон наибольшую площадь имеет правильный, что из двух правильных многоугольников с равными периметрами большим будет тот, у которого больше углов, что если круг и правильный многоугольник имеют одинаковый периметр, то круг будет больше [2]. Также было известно, что объем каждого из пяти платоновых тел меньше шара с той же площадью поверхности. Уже тогда высказывалось предположение, что из всех пространственных фигур заданного объема наименьшую площадь поверхности имеет сфера. Исходя из свойства окружности охватывать наибольшую площадь среди изопериметрических фигур и свойства сферы охватывать наибольший объем среди изопифанных тел можно было предположить, что чем более выпуклой будет граница объекта, тем большую внутреннюю часть он будет содержать внутри.

В XX веке развернулись исследования по объему тел с фиксированной разверткой (а не площадью поверхности). В 1950 г. А.Д. Александров опубликовал теорему о существовании и единственности замкнутого выпуклого многогранника с данной разверткой, что означает невозможность построения выпуклого многогранника с той же разверткой, но большего объема [3]. Однако в 1996 году Д. Бликер доказал [4], что из развертки выпуклого многогранника с треугольными гранями всегда можно сложить невыпуклый многогранник большего объема. В 2006 году Г. Самарин и И. Пак доказали, что это верно для любых невыпуклых многогранников без самопересечений [5, 6]. Таким образом, если фиксировать не площадь поверхности многогранника, а его развертку, то для любого выпуклого многогранника найдется невыпуклый с такой же разверткой, но большего объема. В частности, из развертки тетраэдра можно сделать невыпуклый многогранник, объем которого увеличится более чем на 37,7 %. Это означает, что при тех же затратах на материал упаковки, которые шли на изготовление советского пакета, можно было делать значительно более вместительные пакеты (однако сложность изготовления такого пакета существенно увеличивалась бы).

Для студентов аграрных вузов такие факты имеют существенную практическую значимость. При этом демонстрация парадоксального на первый взгляд увеличения объема невыпуклого тела при фиксированной развертке может быть наглядно продемонстрирована методами векторной алгебры. В качестве многогранников, демонстрирующих этот эффект, удобно взять два многогранника, предложенных С.Н. Михалевым [7], однако в целях упрощения выкладок несколько изменим размещение вершин октаэдров в пространстве. Оба многогранника являются неправильными октаэдрами, имеют по шесть вершин и восемь граней. Выпуклый октаэдр представляет собой объединение четырехугольных «пирамид» $B_1A_1S_1C_1N_1$ и $D_1A_1S_1C_1N_1$, невыпуклый – четырехугольную «пирамиду» $B_2A_2B_2C_2N_2$, из которой вырезана $D_2A_2S_2C_2N_2$. Вершины октаэдра $N_1A_1B_1C_1D_1S_1$ разместим в точках с координатами $N_1(0, 0, \sqrt{3})$, $A_1(10, \sqrt{3}, 0)$, $B_1(0, 6\sqrt{3}, 0)$, $C_1(-10, \sqrt{3}, 0)$, $D_1(0, -10\sqrt{3}, 0)$, $S_1(0, 0, -\sqrt{3})$, а вершины октаэдра $N_2A_2B_2C_2D_2S_2$ – в точках с координатами $N_2(0, 0, \sqrt{61})$, $A_2(\sqrt{71}, 4\sqrt{2}, 0)$, $B_2(0, -5\sqrt{2}, 0)$, $C_2(-\sqrt{71}, 4\sqrt{2}, 0)$, $D_2(0, -11\sqrt{2}, 0)$, $S_2(0, 0, -\sqrt{61})$.

Рассмотрим выпуклый октаэдр. На первом этапе закрепляем формулу нахождения векторов по точкам. Затем по координатам векторов находим длины ребер:

$$\left|\overrightarrow{B_1A_1}\right| = \left|\overrightarrow{B_1C_1}\right| = 5\sqrt{7}, \qquad \left|\overrightarrow{D_1A_1}\right| = \left|\overrightarrow{D_1C_1}\right| = \sqrt{463},$$

$$\left|\overrightarrow{B_1N_1}\right| = \left|\overrightarrow{B_1S_1}\right| = \sqrt{111}, \qquad \left|\overrightarrow{D_1N_1}\right| = \left|\overrightarrow{D_1S_1}\right| = \sqrt{303},$$

$$\left|\overrightarrow{A_1S_1}\right| = \left|\overrightarrow{S_1C_1}\right| = \left|\overrightarrow{C_1N_1}\right| = \left|\overrightarrow{N_1A_1}\right| = \sqrt{164},$$

$$\left|\overrightarrow{B_2A_2}\right| = \left|\overrightarrow{B_2C_2}\right| = \sqrt{233}, \qquad \left|\overrightarrow{D_2A_2}\right| = \left|\overrightarrow{D_2C_2}\right| = \sqrt{521},$$

$$\left|\overrightarrow{B_2N_2}\right| = \left|\overrightarrow{B_2S_2}\right| = \sqrt{111}, \qquad \left|\overrightarrow{D_2N_2}\right| = \left|\overrightarrow{D_2S_2}\right| = \sqrt{303},$$

$$\left|\overrightarrow{A_2S_2}\right| = \left|\overrightarrow{S_2C_2}\right| = \left|\overrightarrow{C_2N_2}\right| = \left|\overrightarrow{N_2A_2}\right| = \sqrt{102}.$$

Аналогично находим длины ребер невыпуклого октаэдра и убеждаемся, что оба тетраэдра составлены из одинаковых треугольников. Это упражнение целесообразно давать по вариантам.

Далее с помощью смешанного произведения векторов находим объем треугольной пирамиды $B_1A_1S_1C_1$ и равной ей треугольной пирамиды $B_1C_1N_1A_1$:

$$V_{B_1A_1S_1C_1} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{B_1A_1}\ \overrightarrow{B_1S_1}\ \overrightarrow{B_1C_1}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 10 & -5\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -6\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -10 & -5\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 50 = V_{B_1C_1N_1A_1}.$$

Аналогично находим объемы треугольных пирамид $D_1A_1S_1C_1$ и $D_1C_1N_1A_1$:

$$V_{D_1A_1S_1C_1} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{D_1A_1}\ \overrightarrow{D_1S_1}\ \overrightarrow{D_1C_1}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 10 & 11\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 10\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -10 & 11\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 110 = V_{D_1C_1N_1A_1}.$$

Складывая объемы всех четырех пирамид, находим, что объем выпуклого октаэдра равен $2\cdot 50 + 2\cdot 110 = 320$.

Необходимо отметить, что многогранники $B_1A_1S_1C_1N_1$ и $D_1A_1S_1C_1N_1$ в действительности не являются четырехугольными пирамидами, а только похожи на них. В силу этого объем октаэдра можно находить иначе:

$$V_{B_1S_1C_1N_1} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{B_1S_1}\ \overrightarrow{B_1C_1}\ \overrightarrow{B_1N_1}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & -6\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -10 & -5\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -6\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 60 = V_{B_1N_1A_1S_1},$$

$$V_{D_1S_1C_1N_1} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{D_1S_1}\ \overrightarrow{D_1C_1}\ \overrightarrow{D_1N_1}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 10\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -10 & 11\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 10\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 100 = V_{D_1N_1A_1S_1},$$

при этом итоговый объем $2\cdot 60 + 2\cdot 100 = 320$ предсказуемо не изменяется.

Объем невыпуклого тетраэдра находим из соотношений

$$V_{B_2A_2S_2C_2} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{B_2A_2}\ \overrightarrow{B_2S_2}\ \overrightarrow{B_2C_2}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \sqrt{71} & 9\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5\sqrt{2} & -\sqrt{61} \\ -\sqrt{71} & 9\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\sqrt{71}\sqrt{2}\sqrt{61} = V_{B_2C_2N_2A_2},$$

$$V_{D_2A_2S_2C_2} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{D_2A_2}\ \overrightarrow{D_2S_2}\ \overrightarrow{D_2C_2}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \sqrt{71} & 15\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 11\sqrt{2} & -\sqrt{61} \\ -\sqrt{71} & 15\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\sqrt{71}\sqrt{2}\sqrt{61} \approx 5\cdot 93{,}070 = V_{D_2C_2N_2A_2}.$$

Итоговый объем октаэдра равен

$$2 \cdot 5\sqrt{71}\sqrt{2}\sqrt{61} - 2 \cdot 3\sqrt{71}\sqrt{2}\sqrt{61} = 4\sqrt{71}\sqrt{2}\sqrt{61}\,.$$

Нетрудно видеть, что объем невыпуклого октаэдра больше, причем отношение объемов составляет примерно 1,16337.

В сети Интернет на сайте «Математические этюды» размещены прекрасные анимированные фильмы «Удивительные объёмы многогранников» и «Увеличение объёма выпуклых многогранников», демонстрирующие излагаемый на занятии материал.

Изложенный в статье материал можно давать студентам аграрных вузов уже на одном из первых занятий. Он способствует отработке следующих навыков: нахождение векторов по их координатам, вычисление длин векторов, вычисление площадей треугольников, вычисление объемов треугольных и четырехугольных пирамид, вычисление объемов сложных многогранников. И самое главное – такой материал позволяет повышать мотивацию студентов и знакомить их с новейшими достижениями математики.

Список использованной литературы

1. Keller, J.M. Motivation, learning, and technology: applying the ARCS-V motivation model / J.M. Keller // Participatory educational research (PER) – Vol 3(2) – August 2016. – P. 1-13.

2. Тихомиров, В.М. Рассказы о максимумах и минимумах / В.М. Тихомиров // Библиотечка Квант, вып. 56, М.: Наука, 1986.

3. Александров, А.Д. Выпуклые многогранники / А. Д. Александров // М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

4. Bleecker, D.D. Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra / David D. Bleecker // Journal Differential Geometry. – V. 43 – 1996. – P. 505 – 526.

5. Samarin, G.A. Volume increasing isometric deformations of polyhedra / G. A. Samarin // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – Vol. 50, iss. 1. – 2010. – P. 54–64.

6. Pak, I. Inflating polyhedral surfaces : preprint / I. Pak // Department of Mathematics, MIT. – 2006.

7. Михалёв, С.Н. Изометрические реализации октаэдров Брикара 1-го и 2-го типов с известными значениями объёма / С.Н. Михалёв // Фундаментальная и прикладная математика.– Т. 8, № 3. – 2002. – С. 755 –768.