

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ РАСТЕНИЕВОДСТВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

А.Н. Леонов,

профессор каф. моделирования и проектирования БГАТУ, докт. техн. наук, профессор

Т.А. Непарко,

зав. каф. эксплуатации машинно-тракторного парка и агротехнологий БГАТУ, канд. техн. наук, доцент

Е.Ю. Жушма,

магистрант агромеханического факультета БГАТУ

Ли Цинчжэнь,

науч. сотр. Ибинского профессионального технического колледжа (Сычуань, Китай)

Э.В. Дыба,

зав. лабораторией механизации заготовки кормов

РУП «НПЦ НАН Беларуси по механизации сельского хозяйства», канд. техн. наук, доцент

Разработана методология стохастического моделирования технологических процессов, описываемых однофакторными уравнениями в ортогональных многочленах, являющаяся эффективным инструментом изучения сложных технических систем методом системного анализа. Уравнения такого типа позволяют корректно определить минимально достаточный порядок адекватного алгебраического полинома, независимо оценить вклад каждого фактора, а также рассчитать абсолютную ошибку параметра оптимизации. Разработанная методология проиллюстрирована при решении типовой задачи растениеводства – построение зависимости недобора урожая зерновых при отклонении срока посева от оптимального значения.

Ключевые слова: моделируемая функция, моделирующая функция, ортогональные многочлены, недобор урожая, сроки выполнения операций, абсолютная погрешность моделирующей функции.

The method of stochastic modeling of technological processes described by single factor equations in orthogonal polynomials, which is an effective tool for studying complex technical systems by the method of system analysis, has been developed. This type of equations allows us to determine correctly the minimum sufficient order of an adequate algebraic polynomial, to evaluate independently the contribution of each factor, as well as to calculate the absolute error of the optimization parameter. This method is illustrated when solving the typical problem of crop production - establishing a relationship between insufficient crop harvest and optimal value deviation.

Key words: simulated function, simulating function, orthogonal polynomial, insufficient harvest, operation time, absolute error of simulating function.

Введение

Эффективным методом исследования сложных технических систем (СТС), к которым относится агропромышленный комплекс (АПК), является системный анализ. Начальный этап системного анализа – операция **анализ**, которая включает в себя разбиение СТС на подсистемы с последующим математическим моделированием. Моделирование подсистем, так как они являются объектами более низкого порядка по сравнению с обобщенной системой, реализовать значительно легче, чем моделирование всей системы в целом. Заключительный этап системного анализа – операция **синтез**, которая включает в себя объедине-

ние всех подсистем в единое целое путем наложения функциональных связей между ними и построение обобщенной модели [1].

Для построения обобщенной модели СТС в стандартных компьютерных системах (например, MS Excel, Mathcad) необходимо, чтобы их математические модели и функциональные связи между ними (в дальнейшем – объекты) были представлены непрерывными функциями с непрерывными производными. Однако на практике это не всегда возможно. В этом случае предполагается, что изучаемый объект описывается некоторой неизвестной функцией $Y(t)$ (моделируемая функция), которая задается базой дискретных значений $Y_j(t)$, получаемых в результате

экспериментальных исследований (t – независимый управляющий фактор). Математически задача моделирования объекта формулируется следующим образом: для моделируемой функции $Y(t)$ необходимо «подобрать» такую моделирующую функцию $\psi(t)$, чтобы $[Y(t) \approx \psi(t)]$ [2].

В данной статье рассмотрен случай, в котором и моделируемая функция $Y(t)$ и моделирующая функция $\psi(t)$ зависят от одного фактора, и обе представлены в виде степенного полинома k -го порядка [3]

$$\begin{aligned} \psi(t) &= a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k = \\ &= a_0 + \sum_{l=1}^k a_l t^l, \quad t \in [t_{\min}, t_{\max}], \end{aligned} \quad (1)$$

где a_l – размерный коэффициент, $l = 0, \dots, k$.

Такой способ задания обеих функций имеет ряд существенных недостатков. Для исключения отрицательных моментов, связанных с различной размерностью и масштабом размерного фактора t , выраженного в натуральных координатах, моделирование нами осуществляется в безразмерном нормированном факторе X [3].

$$X_j = \frac{t_j - t_0}{\Delta t}, \quad X_j \in [-1, +1], \quad j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где $t_0 = (t_{\min} + t_{\max})/2$ – основной уровень;

$\Delta t = (t_{\max} - t_{\min})/2$ – интервал варьирования размерного фактора t .

После замены размерного фактора t на безразмерный X , уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \psi(X) &= b_0 X_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + \dots + b_k X^k = \\ &= b_0 X_0 + \sum_{l=1}^k b_l X^l, \quad X \in [-1, +1], \end{aligned} \quad (3)$$

где b_l – безразмерный коэффициент уравнения, $l = 0, \dots, k, X_0 = 1$.

Однако уравнение (3) также имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что все факторы X^l взаимозависимы, что затрудняет интерпретацию параметра $\psi(X)$ и существенно усложняет расчет абсолютной ошибки моделирующей функции $\Delta\psi(X)$, которая необходима для полного комплекта результатов моделирования.

Существенный прогресс в повышение эффективности моделирования изучаемых объектов внес Дж. Форсайт, который предложил структуру моделирующей функции $\psi(X)$ в виде суммы ортогональных многочленов, а расчет коэффициентов моделирующей функции по критерию Гаусса – Лагранжа методом наименьших квадратов (МНК) [4].

Уравнение моделирующей функции в ортогональных многочленах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi(X) &= c_0 q_0 + c_1 q_1(X) + c_2 q_2(X) + \dots + \\ &+ c_k q_k(X) = \sum_{l=0}^k c_l q_l(X), \end{aligned} \quad (4)$$

где c_l – безразмерный коэффициент;

$q_l(X)$ – безразмерный ортогональный многочлен l -го порядка, $l = 0, 1, \dots, k$; $q_0(X) = 1$.

В научной литературе имеется большое количество публикаций, которые посвящены моделированию объектов, описываемых детерминированными закономерностями [2; 4-8]. В этом случае каждому независимому управляющему фактору t_j соответствует одно значение моделирующей функции $\psi(t_j)$.

Ортогональные многочлены задаются уравнениями [5]

$$\begin{cases} q_0(X) = 1 \\ q_1(X) = X - \alpha_{10} \\ q_2(X) = X^2 - \alpha_{21}X - \alpha_{20} \\ \dots \\ q_k(X) = X^k - \alpha_{k,k-1}X^{k-1} - \dots - \alpha_{k0}, \end{cases} \quad (5)$$

где $\alpha_{10}, \alpha_{21}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{k0}$ – коэффициенты, которые рассчитывают из условия ортогональности многочленов, задаваемых следующим уравнением:

$$\sum_{j=1}^N q_l(X_j) \cdot q_m(X_j) = \begin{cases} 0, & l \neq m \\ \sum_{j=1}^N q_l^2(X_j) > 0, & l = m \end{cases} \quad (6)$$

Для того, чтобы моделирующая функция $\psi(X)$ (уравнение (4)) «наилучшим образом» отражала дискретные экспериментальные значения моделируемой функции $Y_j(X_j)$, в данной работе коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_k при $N > k+1$ рассчитывают методом МНК

$$\varphi(c_0, c_1, c_2, \dots, c_k) = \sum_{j=1}^N [\psi(X_j) - Y_j(X_j)]^2 = \min, \quad (7)$$

где $\psi(X_j)$ – значение моделирующей функции при $X = X_j$ (уравнение (4)).

Необходимое условие минимума функции $\varphi(c_0, c_1, c_2, \dots, c_k)$

$$\partial\varphi/\partial c_l = 0, \quad l = 0, 1, \dots, k. \quad (8)$$

Система уравнений (8) после преобразования имеет следующий вид:

$$\begin{cases} c_0 \sum_{j=1}^N q_0^2 + c_1 \sum_{j=1}^N q_0 q_{1j} + c_2 \sum_{j=1}^N q_0 q_{2j} \dots + c_k \sum_{j=1}^N q_0 q_{kj} = \sum_{j=1}^N q_0 \bar{Y}_j \\ c_0 \sum_{j=1}^N q_0 q_{1j} + c_1 \sum_{j=1}^N q_{1j}^2 + c_2 \sum_{j=1}^N q_{1j} q_{2j} + \dots + c_k \sum_{j=1}^N q_{1j} q_{kj} = \sum_{j=1}^N q_{1j} \bar{Y}_j \\ \dots \\ c_0 \sum_{j=1}^N q_0 q_{kj} + c_1 \sum_{j=1}^N q_{1j} q_{kj} + c_2 \sum_{j=1}^N q_{2j} q_{kj} + \dots + c_k \sum_{j=1}^N q_{kj}^2 = \sum_{j=1}^N q_{kj} \bar{Y}_j \end{cases} \quad (9)$$

Так как в системе уравнений (9) многочлены ортогональны (система уравнений (6)), то эта система имеет диагональный вид и поэтому регрессионные коэффициенты $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ рассчитывают по достаточно простым формулам [3]

$$c_0 = \frac{\sum_{j=1}^N q_{0j} \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^N q_{0j}^2}, c_1 = \frac{\sum_{j=1}^N q_{1j} \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^N q_{1j}^2},$$

$$c_2 = \frac{\sum_{j=1}^N q_{2j} \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^N q_{2j}^2}, \dots, c_k = \frac{\sum_{j=1}^N q_{kj} \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^N q_{kj}^2}. \quad (10)$$

Абсолютная погрешность $\Delta Y(X)$ моделируемой функции равна [2]

$$\Delta \psi(X) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N [\psi(X_j) - Y_j(X_j)]^2}{k+1}}. \quad (11)$$

Очевидно, что чем выше порядок ортогональных многочленов, тем точнее моделирующая функция $\psi(X)$ отражает дискретные значения моделируемой функции $Y(X)$. Наилучшее среднее квадратичное приближение в случае объекта, описываемого детерминированными законами, достигается при таком значении коэффициента k , при котором абсолютная погрешность $\Delta \psi(X)$, рассчитанная по уравнению (11), равна инструментальной погрешности измерения $Y_j(X_j)$.

Стохастическому моделированию объектов в ортогональных многочленах в научной литературе посвящено значительно меньшее число публикаций, и порядок многочленов, используемых в них, не превышает $k = 3$ [7]. При стохастическом моделировании каждому управляющему фактору t_j соответствуют различные значения объекта, причем каждое из значений в отдельно взятом опыте реализуется концептуально непредсказуемо, даже при соблюдении одинаковых условий эксперимента.

Поясним методологию стохастического моделирования на конкретном примере (производство зерна). Производство зерна относится к классу сложных технических систем, так как состоит из большого количества подсистем (основная обработка почвы, внесение удобрений, предпосевная обработка почвы, посев, операции по уходу за посевами (подкормка, защита растений, орошение и др.), уборка, послеуборочная доработка продукции). Очевидно, что методология изучения основных закономерностей растениеводства должна базироваться на системном анализе. Кроме моделирования, перечисленных подсистем, необходимо также наличие некоторого числа математических уравнений, характеризующих функциональные связи между подсистемами, которые необходимы при объединении подсистем в единое целое. В растениеводстве в качестве таких связей используют, как правило, математические модели, отражающие зависимость недобора урожая зерновых культур от сроков выполнения производственных операций (пахота, посев, уборка) [8].

Моделирование процессов фотосинтеза, позволяющее установить зависимость прироста биомассы зерна на стадии молочно-воскового созревания, а также естественного процесса осыпания зерна на стадии уборки, с помощью детерминированных закономерностей, выработанных в молекулярной биологии, в настоящее время реализовать практически невозможно. Кроме того, детерминированное моделирование этих процессов в значительной степени осложняется непредсказуемыми колебаниями природно-климатических условий. Поэтому стохастическое моделирование производства зерна является единственным возможным способом изучения таких систем.

В результате агротехнических исследований установлено, что на величину собранного урожая значительное влияние оказывает соблюдение оптимальных сроков выполнения основных операций, возможно даже большее, чем их качество [8, 9]. В свою очередь, данный фактор оказывает существенное влияние на формирование рационального комплекса технических средств, что напрямую определяет эффективность производства (себестоимость зерна, производительность труда).

Алгоритм Форсайта, разработанный для моделирования детерминированных процессов, в целом можно использовать и для моделирования стохастических процессов, но с учетом того, что при обработке исходных экспериментальных данных следует использовать аппарат математической статистики. Поэтому можно ожидать, что значения коэффициентов a в ортогональных многочленах (система уравнений (5)), а также абсолютная погрешность прогнозирования изучаемого объекта, будут зависеть не только от порядка ортогональных многочленов k , но и от плана эксперимента, количества опытов N , числа дублей n в каждом опыте.

Целью работы является разработка методологии стохастического моделирования технологических процессов с помощью уравнений регрессии в ортогональных многочленах, а также иллюстрация разработанного алгоритма при решении конкретной народнохозяйственной задачи – математическое моделирование зависимости урожая озимой пшеницы от сроков посева.

Основная часть

Прежде чем перейти к моделированию технологического процесса, необходимо задать базу экспериментальных данных $Y_j(X_j)$, характеризующих этот процесс. Так как природа изучаемого объекта стохастическая, то получение экспериментальных данных должно осуществляться по заранее выбранному плану, матрица планирования которого состоит из N опытов ($j = 1, \dots, N$) и n дублей в каждом опыте ($i = 1, \dots, n$), а в качестве плана эксперимента использован равномерный симметричный

план (РСП), размерный фактор которого в натуральных координатах задается уравнением

$$t_j = t_{\min} + \frac{j-1}{N-1} \cdot (t_{\max} - t_{\min}),$$

$$t \in [t_{\min}, t_{\max}], \text{ при } j = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Равномерный симметричный план эксперимента в безразмерных нормированных координатах X после подстановки уравнения (12) в уравнение (2) задается следующим уравнением:

$$X_j = -1 + \frac{2(j-1)}{N-1}, \quad X_j \in [-1, +1],$$

при $j = 1, \dots, N.$ (13)

Если интервал варьирования фактора $X_j \in [-1, +1]$, а значения фактора антисимметричны относительно начала координат, то ортогональный многочлен $q_k(X)$ содержит только те степени фактора X , которые имеют одинаковую четность с номером k [5, 6]. Поэтому система уравнений (5) принимает следующий вид (для иллюстрации метода ограничимся случаем $k = 5$):

$$\begin{cases} q_0(X) = 1 \\ q_1(X) = X \\ q_2(X) = X^2 - \alpha_{20} \\ q_3(X) = X^3 - \alpha_{31}X \\ q_4(X) = X^4 - \alpha_{42}X^2 - \alpha_{40} \\ q_5(X) = X^5 - \alpha_{53}X^3 - \alpha_{51}X, \end{cases} \quad (14)$$

где $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$ – коэффициенты ортогональных многочленов.

Следует отметить, что в работе была сделана попытка рассчитать коэффициенты α по системе уравнений (5). Результат: $\alpha_{10}, \alpha_{21}, \alpha_{32}, \alpha_{30}, \alpha_{43}, \alpha_{41}, \alpha_{54}, \alpha_{52}, \alpha_{50}$ тождественно равны нулю, что подтвердило справедливость утверждения, сделанного в работах [5, 6], для детерминированных систем.

Так как факторы $q_0(X), q_1(X), q_2(X), q_3(X), q_4(X), q_5(X)$ ортогональны между собой, то система уравнений (9) имеет диагональный вид, а коэффициенты $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ рассчитываются по системе уравнений (10).

При расчете коэффициентов $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$, значения которых обеспечивают ортогональность многочленов $q_0(X), q_1(x), q_2(X), q_3(X), q_4(X), q_5(X)$, следует учесть, что при антисимметричности РСП

$$X_j = -X_{N-j+1} \text{ для } j = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

справедливы следующие формулы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N X_j \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^N X_j^{2m+1} \equiv 0 \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2. \quad (16)$$

Приведем еще одно очевидное равенство, которое будет полезно при расчете коэффициентов $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$.

$$\sum_{j=1}^N X_j^{2m} = \overline{X^{2m}} \cdot N, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Ниже приводится подробный расчет коэффициентов $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$.

$$1. \sum_{j=1}^N q_{1j} \cdot q_{0j} = \sum_{j=1}^N X_j \cdot 1 \equiv 0, \quad (18)$$

факторы (q_1, q_0) для РСП ортогональны всегда.

$$2. \begin{cases} \sum_{j=1}^N q_{2j} \cdot q_{0j} = \sum_{j=1}^N (X_j^2 - \alpha_{20}) \cdot 1 = \\ = (\overline{X^2} - \alpha_{20}) \cdot N = 0 \rightarrow \alpha_{20} = \overline{X^2}, \\ \sum_{j=1}^N q_{2j} \cdot q_{1j} = \sum_{j=1}^N (X_j^2 - \alpha_{20}) \cdot X_j \equiv 0 \end{cases}$$

факторы $(q_2, q_0), (q_2, q_1)$ для РСП ортогональны при $\alpha_{20} = \overline{X^2}$. (19)

$$3. \begin{cases} \sum_{j=1}^N q_{3j} q_{0j} = \sum_{j=1}^N (X_j^3 - X_j) \cdot 1 \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{3j} q_{1j} = \sum_{j=1}^N (X_j^3 - \alpha_{31} X_j) \cdot X_j = \\ = \sum_{j=1}^N X_j^4 - \alpha_{31} \sum_{j=1}^N X_j^2 = (\overline{X^4} - \alpha_{31} \overline{X^2}) \times \\ \times N = 0 \rightarrow \alpha_{31} = \overline{X^4} / \overline{X^2} \\ \sum_{j=1}^N q_{3j} q_{2j} = \sum_{j=1}^N (X_j^3 - \alpha_{31} X_j) \cdot (X_j^2 - \alpha_{20}) \equiv 0, \end{cases}$$

факторы $(q_3, q_0), (q_3, q_1), (q_3, q_2)$ для РСП ортогональны при $\alpha_{31} = \frac{\overline{X^4}}{\overline{X^2}}$. (20)

$$4. \begin{cases} \sum_{j=1}^N q_{4j} q_{0j} = \sum_{j=1}^N (X_j^4 - \alpha_{42} X_j^2 - \alpha_{40}) \cdot 1 = (\overline{X^4} - \alpha_{42} \overline{X^2} - \alpha_{40}) \cdot N = 0 \rightarrow \overline{X^4} - \alpha_{42} \overline{X^2} - \alpha_{40} = 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{4j} q_{1j} = \sum_{j=1}^N (X_j^4 - \alpha_{42} X_j^2 - \alpha_{40}) \cdot X_j \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{4j} q_{2j} = \sum_{j=1}^N (X_j^4 - \alpha_{42} X_j^2 - \alpha_{40}) \cdot (X_j^2 - \overline{X^2}) = \left[(\overline{X^6} - \overline{X^4} \cdot \overline{X^2}) - \alpha_{42} (\overline{X^4} - (\overline{X^2})^2) \right] \cdot N = 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{4j} q_{3j} = \sum_{j=1}^N (X_j^4 - \alpha_{42} X_j^2 - \alpha_{40}) \cdot (X_j^3 - \alpha_{31} X_j) \equiv 0 \end{cases} \quad (21)$$

Для расчета констант α_{42} , α_{40} следует воспользоваться 1-м и 3-м уравнениями системы (21)

$$\begin{cases} \alpha_{42} \overline{X^2} + \alpha_{40} = \overline{X^4} \\ \alpha_{42} (\overline{X^4} - (\overline{X^2})^2) = \overline{X^6} - \overline{X^4} \cdot \overline{X^2} \end{cases} \quad (22)$$

Из системы уравнений (22) следует, что факторы (q_4, q_0) , (q_4, q_1) , (q_4, q_2) , (q_4, q_3) – ортогональны при

$$\alpha_{42} = \frac{\overline{X^6} - \overline{X^4} \cdot \overline{X^2}}{\overline{X^4} - (\overline{X^2})^2}, \quad \alpha_{40} = \frac{(\overline{X^4})^2 - \overline{X^6} \cdot \overline{X^2}}{\overline{X^4} - (\overline{X^2})^2}. \quad (23)$$

$$5. \begin{cases} \sum_{j=1}^N q_{5j} q_{0j} = \sum_{j=1}^N (X_j^5 - \alpha_{53} X_j^3 - \alpha_{51} X_j) \cdot 1 \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{5j} q_{1j} = \sum_{j=1}^N (X_j^5 - \alpha_{53} X_j^3 - \alpha_{51} X_j) \cdot X_j = (\overline{X^6} - \alpha_{53} \overline{X^4} - \alpha_{51} \overline{X^2}) \cdot N = 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{5j} q_{2j} = \sum_{j=1}^N (X_j^5 - \alpha_{53} X_j^3 - \alpha_{51} X_j) \cdot (X_j^2 - \overline{X^2}) \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{5j} q_{3j} = \sum_{j=1}^N (X_j^5 - \alpha_{53} X_j^3 - \alpha_{51} X_j) \cdot \left(X_j^3 - \frac{\overline{X^4}}{X^2} X_j \right) = \left[\left(\overline{X^8} - \frac{\overline{X^4}}{X^2} \cdot \overline{X^6} \right) - \alpha_{53} \left(\overline{X^6} - \frac{\overline{X^4}}{X^2} \cdot \overline{X^4} \right) \right] \cdot N = 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{5j} q_{4j} = \sum_{j=1}^N (X_j^5 - \alpha_{53} X_j^3 - \alpha_{51} X_j) \cdot (X_j^4 - \alpha_{42} X_j^2 - \alpha_{40}) \equiv 0 \end{cases} \quad (24)$$

Для расчета констант α_{53} , α_{51} следует воспользоваться 2-м и 4-м уравнениями системы (24)

$$\begin{cases} \alpha_{53} \overline{X^4} + \alpha_{51} \overline{X^2} = \overline{X^6} \\ \alpha_{53} \left(\overline{X^6} - \frac{\overline{X^4}}{X^2} \cdot \overline{X^4} \right) = \left(\overline{X^8} - \frac{\overline{X^4}}{X^2} \cdot \overline{X^6} \right), \end{cases} \quad (25)$$

из системы уравнений (25) следует, что факторы (q_5, q_0) , (q_5, q_1) , (q_5, q_2) , (q_5, q_3) , (q_5, q_4) для РСР ортогональны при условии:

$$\alpha_{53} = \frac{\overline{X^8} \cdot \overline{X^2} - \overline{X^6} \cdot \overline{X^4}}{\overline{X^6} \cdot \overline{X^2} - (\overline{X^4})^2}, \quad \alpha_{51} = \frac{(\overline{X^6})^2 - \overline{X^8} \cdot \overline{X^4}}{\overline{X^6} \cdot \overline{X^2} - (\overline{X^4})^2}. \quad (26)$$

Таким образом, моделирующая функция $\psi(X)$ может быть представлена уравнением в ортогональных многочленах 5-го порядка

$$\psi(X) = c_0 + c_1 X + c_2 (X^2 - \alpha_{20}) + c_3 (X^3 - \alpha_{31} X) + c_4 (X^4 - \alpha_{42} X^2 - \alpha_{40}) + c_5 (X^5 - \alpha_{53} X^3 - \alpha_{51} X), \quad (27)$$

или с учетом уравнений (18)-(20) и систем уравнений (23), (26)

$$\left\{ \begin{aligned} \psi(X) = & c_0 + c_1 X + c_2 (X^2 - \overline{X^2}) + c_3 \left(X^3 - \frac{\overline{X^4}}{X^2} \times X \right) + c_4 \left(X^4 - \frac{\overline{X^6} - \overline{X^4} \times \overline{X^2}}{X^4 - (\overline{X^2})^2} \times X^2 - \frac{(\overline{X^4})^2 - \overline{X^6} \times \overline{X^2}}{X^4 - (\overline{X^2})^2} \right) + \\ & + c_5 \left(X^5 - \frac{\overline{X^8} \times \overline{X^2} - \overline{X^6} \times \overline{X^4}}{X^6 \times \overline{X^2} - (\overline{X^4})^2} X^3 - \frac{(\overline{X^6})^2 - \overline{X^8} \times \overline{X^4}}{X^6 \times \overline{X^2} - (\overline{X^4})^2} X \right) \end{aligned} \right. , \quad (28)$$

где коэффициенты $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ рассчитываются по системе уравнений (10).

В таблице 1 приведены результаты расчетов коэффициентов $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$, которые являются функциями только 4-х факторов: $\overline{X^2}, \overline{X^4}, \overline{X^6}, \overline{X^8}$. Для расчета коэффициентов α , например, в компьютерной программе MS Excel, в зависимости от числа опытов N , сначала, с учетом уравнения (13), формируют столбцы X^2, X^4, X^6, X^8 , затем рассчитывают их средние значения, потом по уравнениям (19), (20) и системам уравнений (23), (26) рассчитывают коэффициенты $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$.

Таблица 1. Коэффициенты α ортогональных многочленов для различных N

N	α_{20}	α_{31}	α_{42}	α_{40}	α_{53}	α_{51}
21	0,3667	0,6580	0,9357	-0,1018	1,2056	-0,2794
20	0,3684	0,6609	0,9395	-0,1026	1,2096	-0,2812
19	0,3704	0,6642	0,9436	-0,1035	1,2140	-0,2831
18	0,3725	0,6678	0,9481	-0,1044	1,2188	-0,2852
17	0,3750	0,6719	0,9531	-0,1055	1,2240	-0,2874
16	0,3778	0,6764	0,9587	-0,1066	1,2296	-0,2899
15	0,3810	0,6816	0,9650	-0,1080	1,2358	-0,2926
14	0,3846	0,6876	0,9721	-0,1094	1,2426	-0,2954
13	0,3889	0,6944	0,9802	-0,1111	1,2500	-0,2985
12	0,3939	0,7025	0,9894	-0,1130	1,2580	-0,3017
11	0,4000	0,7120	1,0000	-0,1152	1,2667	-0,3051
10	0,4074	0,7235	1,0123	-0,1177	1,2757	-0,3082
9	0,4167	0,7375	1,0268	-0,1205	1,2847	-0,3108
8	0,4286	0,7551	1,0437	-0,1237	1,2925	-0,3116

Как и предполагалось, значения ортогональных многочленов при стохастическом моделировании зависят от числа опытов N .

Проиллюстрируем применение разработанного алгоритма стохастического моделирования в ортогональных многочленах для моделирования зависимости недобора урожая озимой пшеницы при отклонении срока посева от оптимального значения. Исходные данные, а также предварительная обработка экспериментальных данных приведены в таблицах 2-3 [8, 9].

В таблице 3 приведены результаты предварительной обработки экспериментальных данных [3].

В таблицах 4-6 приведены значения ортогональных многочленов моделирующей функции ψ_j^p при $N = 11$; абсолютной погрешности коэффициентов c_k , а также результаты проверки коэффициентов c_k на значимость

по критерию Стьюдента; моделирующей функции $\psi(X)$ на адекватность по критерию Фишера [3].

Адекватность моделирующей функции проверяется по критерию Фишера

$$S_{ад}^2 = \frac{n \sum_{j=1}^N (\psi_j^p - \bar{Y}_j)^2}{N - B}; \quad (\text{табл. 6});$$

$$f_{ад} = N - B; \quad F_3 = \frac{S_{ад}^2}{S_{воспр}^2},$$

$$F_T = F_{N-B, N(n-1); 0,95},$$

так как $S_{ад}^2 > S_{воспр}^2$

Если $F_3 < F_T$, то уравнение регрессии адекватно, в противном случае – неадекватно [3].

Так как коэффициент c_5 незначим (табл. 5), то

$$\psi_4(X) = 14,64 - 4,5 \cdot X + 22,3 \times$$

$$\times (X^2 - 0,400) - 10,9 \times$$

$$\times (X^4 - X^2 + 0,115).$$

Полученное уравнение адекватно, так как $F_3 = 1,452 < 2,464 = F_{7,22; 0,95}$ (табл. 6).

Ортогональность многочленов позволяет рассчитать не только величину недобора урожая озимой пшеницы при отклонении оптимального срока посева от оптимального значения, но и ее абсолютную погрешность (уравнение (24))

$$\begin{aligned} \Delta \psi(X) = & t_{N(n-1); 0,95} \cdot \left(S^2(c_0) + q_1^2 S^2(c_1) + \right. \\ & + q_2^2 S^2(c_2) + q_3^2 S^2(b_3) + q_4^2 S^2(c_4) + \\ & \left. + q_5^2 S^2(c_5) \right)^{0,5}. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi(X) = & 2,074 \cdot \left(0,04278 + 0,1070 \cdot X^2 + \right. \\ & + 0,3428 \cdot (X^2 - 0,400)^2 + \\ & \left. + 4,464 \cdot (X^4 - X^2 + 0,115)^2 \right)^{0,5}. \end{aligned} \quad (30)$$

Таблица 2. Исходные данные по озимой пшенице и рассчитанные ортогональные многочлены

N	n	t _{min} , дн	t _{max} , дн	X ₀ , дн	ΔX, дн	α ₂₀	α ₃₁	α ₄₂	α ₄₀	α ₅₃	α ₅₁
11	3	-25	25	0	25	0,4000	0,7120	1,0000	-0,1152	1,2667	-0,3051

Таблица 3. Матрица планирования. Предварительная обработка экспериментальных данных

j	t, дн	Y _{1i} , %	Y _{2i} , %	Y _{3i} , %	\bar{Y}_j , %	S _j ²	Δ \bar{Y}_j , %
1	-25	30,1	32,3	33,6	32,0	3,130	4,4
2	-20	24,0	25,5	22,5	24,0	2,250	3,7
3	-15	18,1	19,2	16,7	18,0	1,570	3,1
4	-10	10,5	10,4	12,1	11,0	0,910	2,4
5	-5	6,2	5,2	6,6	6,0	0,520	1,8
6	0	4,3	4,4	3,3	4,0	0,370	1,5
7	5	4,7	5,8	4,5	5,0	0,490	1,7
8	10	8,1	9,0	9,9	9,0	0,810	2,2
9	15	14,0	13,2	11,8	13,0	1,240	2,8
10	20	17,1	18,3	15,6	17,0	1,830	3,4
11	25	21,9	20,5	23,6	22,0	2,410	3,9
G ₉ = 0,202 < G _{2, 11; 0,95} = 0,417; Сумма					161,0	15,53	31
$S^2_{\text{воспр}} = \sum_{j=1}^N S_j^2 / N = 1,412; f_{\text{воспр}} = N(n-1) = 22; \Delta\bar{Y}_j = \frac{t_{n-1; 0,95} \cdot S_j}{\sqrt{n}}$							

Таблица 4. Матрица моделирования.

Рассчитанные параметры ψ_j^p и их абсолютная погрешность $\Delta\psi_j^p$

j	\bar{Y}_j , %	q _{0j}	q _{1j}	q _{2j}	q _{3j}	q _{4j}	q _{5j}	ψ_j^p , %	$(\psi_j^p - \bar{Y}_j)^2$	Δ ψ_j^p , %	Δ \bar{Y}_j , %	Δ $\bar{Y}_j / \Delta\psi_j^p$
1	32,0	1	-1,000	0,600	-0,288	0,115	-0,038	31,22	0,603	1,2	4,4	3,7
2	24,0	1	-0,800	0,240	0,058	-0,115	0,077	24,82	0,665	0,9	3,7	4,1
3	18,0	1	-0,600	-0,040	0,211	-0,115	0,013	17,68	0,106	0,8	3,1	3,9
4	11,0	1	-0,400	-0,240	0,221	-0,019	-0,051	11,27	0,074	0,6	2,4	4,0
5	6,0	1	-0,200	-0,360	0,134	0,077	-0,051	6,65	0,427	0,7	1,8	2,6
6	4,0	1	0,000	-0,400	0,000	0,115	0,000	4,45	0,202	0,8	1,5	1,9
7	5,0	1	0,200	-0,360	-0,134	0,077	0,051	4,87	0,017	0,7	1,7	2,4
8	9,0	1	0,400	-0,240	-0,221	-0,019	0,051	7,71	1,670	0,6	2,2	3,7
9	13,0	1	0,600	-0,040	-0,211	-0,115	-0,013	12,33	0,449	0,8	2,8	3,5
10	17,0	1	0,800	0,240	-0,058	-0,115	-0,077	17,69	0,473	0,9	3,4	3,8
11	22,0	1	1,000	0,600	0,288	0,115	0,038	22,31	0,099	1,2	3,9	3,3
									φ = 4,784	0,8	2,8	3,5

Таблица 5. Коэффициенты уравнения моделирующей функции c_k и их значимость

	c ₀	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	
	14,64	-4,5	22,3	-2,1	-10,9	3	
$S^2(c_k) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n \sum_{j=1}^n q_{kj}^2}$	0,04278	0,1070	0,3428	1,190	4,464	18,41	
$S(c_k) = \sqrt{S^2(c_k)}$	0,2068	0,3270	0,5855	1,091	2,113	4,291	
t _{N(n-1); 0,95}	2,074	2,074	2,074	2,074	2,074	2,074	
Δc _k = t _{N(n-1); 0,95} · S(c _k)	0,43	0,7	1,2	2,3	4,4	9	B
Значимость коэффициента c _k равна 1 если Δc _k < c _k , в противном 0	1	1	1	0	1	0	4

Таблица 6. Результаты проверки уравнения моделируемой функции на адекватность

Уравнения	$S_{\text{воспр}}^2 (f_{\text{воспр}})$	$S_{\text{ад}}^2 (f_{\text{ад}})$	$F_{\text{э}}$	$F_{\text{табл}}$	Адекват.
$\Psi_0(X) = 14,64$	1,412 (22)	236,6 (10)	167,6	2,297	Нет
$\Psi_1(X) = 14,64 - 4,5X$	1,412 (22)	233,7 (9)	165,6	2,342	Нет
$\Psi_2(X) = 14,64 - 4,5X + 22,3 \cdot (X^2 - 0,400)$	1,412 (22)	6,514 (8)	4,613	2,397	Нет
$\Psi_3(X)^* = 14,64 - 4,5X + 22,3 \cdot (X^2 - 0,400)$	1,412 (22)	6,514 (8)	4,613	2,397	Нет
$\Psi_4 = 14,64 - 4,5X + 22,3 \cdot (X^2 - 0,400) - 10,9 \cdot (X^4 - X^2 + 0,115)$	1,412 (22)	2,050 (7)	1,452	2,464	Да

*Уравнение $\Psi_3(X) = \Psi_2(X)$, так как коэффициент c_3 – незначим

Следует обратить внимание на то, что уравнения моделирующей функции 0-го, 1-го, 2-го, 3-го порядков неадекватны (табл. 6). В случае ортогональности многочленов последовательное повышение порядка уравнения $\psi(X)$ не изменяет значения предыдущих коэффициентов c_k , что подтверждает независимость ортогональных многочленов. Так как уравнение 4-го порядка адекватно, коэффициент c_5 должен быть незначимым, что и подтверждается данными таблиц 5 и 6.

Следует обратить внимание еще на один результат расчета. Из данных таблицы 4 следует, что среднее значение абсолютной погрешности моделирующей функции $\Delta\psi(X)$ в 3 раза меньше, чем среднее значение абсолютной погрешности экспериментальных данных $\Delta\bar{Y}_j$. Объяснение этого явления достаточно простое и предсказуемое: среднее экспериментальное значение моделируемой функции \bar{Y}_j рассчитывается по 3-м дублям ($n = 3$), а значения моделирующей функции $\psi(X)$ – по 33-м экспериментальным точкам ($Nn = 33$). Поэтому точность определения последнего параметра в \sqrt{N} раз выше ($\sqrt{11} \approx 3,3$), чем первого. Вывод: математическая модель объекта позволяет делать прогноз точнее, чем породивший ее эксперимент.

На рисунке приведены графики, наглядно показывающие влияние отклонения срока посева озимой пшеницы от оптимального значения на недобор урожая.

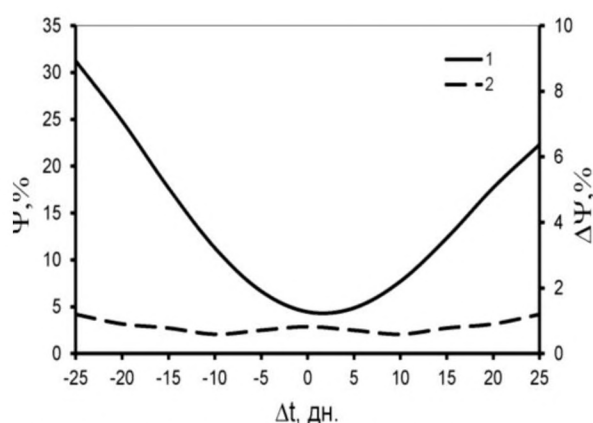


Рисунок. График зависимости недобора урожая озимой пшеницы $Y(\Delta t)$ (1) и абсолютной погрешности недобора урожая $\Delta Y(\Delta t)$ (2) при отклонении срока посева от оптимального значения Δt

Заключение

1. Разработан алгоритм стохастического моделирования технологических процессов растениеводства с помощью ортогональных многочленов. Ортогональная форма уравнений регрессии позволяет корректно определить минимальный порядок алгебраического полинома моделирующей функции, оценить вклад каждого фактора, а также рассчитать абсолютную ошибку при прогнозировании изучаемых объектов. Отличительная особенность стохастического моделирования в ортогональных многочленах от детерминированного моделирования заключается в том, что минимальный порядок ортогональных многочленов зависит от выбранного плана эксперимента, количества опытов и дублей в каждом опыте.

2. Разработанная стохастическая модель зависимости недобора урожая озимой пшеницы при отклонении срока посева от оптимального значения может быть использована в качестве уравнения функциональной связи при объединении подсистем в единую систему методом системного анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тарасенко, В.П. Прикладной системный анализ / В.П. Тарасенко. – М.: КНОРУС, 2010. – 224 с.
2. Вержбицкий, В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2001. – 104 с.
3. Леонов, А.Н. Основы научных исследований и моделирования / А.Н. Леонов, М.М. Дечко, В.Б. Ловкис. – Минск: БГАТУ, 2010. – 276 с.
4. Forsythe, G.E. Generation and use of orthogonal polynomial for data fitting with a digital computer / J.Soc.Indust. Appl. Math. – 1957. – V.5. – P. 74-88.
5. Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2005 – 480 с.
6. Сухопаров, С.Ю. Вывод рекуррентного соотношения ортогональных многочленов из процесса ортогонализации Грамма-Шмидта, а также схема применения полученного рекуррентного соотношения

ния / С.Ю. Сухопаров // arxiv:submit/1109657 [cs.NA] 8 Nov, 2014.

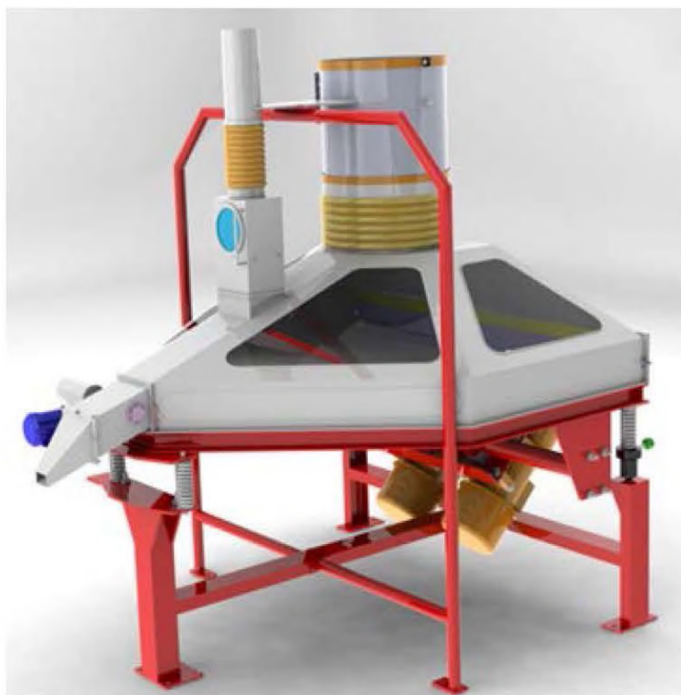
7. Леонов, А.Н. Моделирование зависимости фактической урожайности зерновых от сроков посева и уборки / А.Н. Леонов, Цинчжэнь Ли // Агропанорама. – 2018. – № 4. – С. 21-30.

8. Шило, И.Н. Ресурсосберегающие технологии сельскохозяйственного производства / И.Н. Шило, В.Н. Дашков. – Минск: БГАТУ, 2003. – С. 75-76.

9. Кадыров, М.А. О земледелии, селекции и рациональном хозяйствовании / М.А. Кадыров. – Минск: Несси, 2001. – 163 с.

ПОСТУПИЛА В РЕДАКЦИЮ 03.08.2023

Сепаратор вибропневматический



Предназначен для очистки зерновой массы от трудноотделимых примесей на зерноперерабатывающих предприятиях, элеваторах, комбикормовых заводах. Также может быть использован для подготовки семенного материала с целью предотвращения заражения спорыньей зерна будущего урожая на семенных станциях и в фермерских хозяйствах.

Применение в технологических линиях очистки зерна разработанного сепаратора позволит повысить эффективность очистки зерна от трудноотделимых примесей за счет системы периодического вывода фракции примесей, а также комплекта отражающих и отбойных

пластин, снижающих потери годного зерна с отходами.

Основные технические данные

Производительность, т/ч до	6
Коэффициент очистки, % до	95
Площадь ситовой поверхности, м ²	3,16
Диапазон регулировки угла наклона деки, град	2-8
Амплитуда колебаний, мм	2,5-3
Расход воздуха, м ³ /ч	10000
Установленная мощность привода, кВт	2×0,18
Диапазон регулировки частоты вращения электровибраторов, мин ⁻¹	800-1650
Разрежение в рабочей камере, Па	500-700
Габаритные размеры, мм (д ш в)	2240 2100 1960
Масса сепаратора, кг, не более	510