

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л. М. Акулович, Л. Е. Сергеев,  
А. А. Тиунчик, Е. В. Сенчуров

**ФОРМИРОВАНИЕ КАЧЕСТВА  
СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
ПРИ МАГНИТНО-АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКЕ**

Минск  
БГАТУ  
2016

УДК 621.923

**Акулович, Л. М.** Формирование качества сложнопрофильных поверхностей при магнитно-абразивной обработке / Л. М. Акулович, Л. Е. Сергеев, А. А. Тиунчик, Е. В. Сенчуров. – Минск : БГАТУ, 2016. – 296 с. : ил. – ISBN 978-985-519-816-6

В монографии приведены результаты исследования магнитно-абразивной обработки сложнопрофильных поверхностей, основанной на самоформировании режущего контура инструмента из ферроабразивных частиц при воздействии направленными потоками магнитного поля. Рассмотрено с позиций синергизма комплексное влияние компонентов рабочей технологической среды и описаны некоторые механизмы происходящих при этом явлений в зоне обработки. Описаны технологические основы формирования качества поверхностей сложной геометрической формы при магнитно-абразивной обработке.

Монография предназначена для научных и инженерно-технических работников НИИ, УВО, производственных предприятий, будет полезна студентам, магистрантам и аспирантам машиностроительных специальностей.

Табл. 21. Ил. 68. Библиогр.: 135 назв.

Рекомендовано к изданию научно-техническим советом  
УО «Белорусский государственный аграрный технический университет»  
(протокол № 1 от 25 февраля 2016 г.)

Рецензенты:

заведующий НИИЛ «Лазерных и плазменных технологий»  
НИЧ Белорусского национального технического университета,  
доктор технических наук, профессор *О. Г. Девойно*;  
доцент кафедры «Ремонт тракторов, автомобилей  
и сельскохозяйственных машин»  
УО «Белорусский государственный аграрный  
технический университет»,  
кандидат технических наук, доцент *Г. И. Анискович*

ISBN ISBN 978-985-519-816-6

© БГАТУ, 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. МЕТОДЫ ФИНИШНОЙ АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКИ, ФОРМИРУЮЩИЕ КАЧЕСТВО СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....	13
2. КОМПОНЕНТЫ, ФОРМИРУЮЩИЕ РАБОЧУЮ ТЕХНОЛОГИЧЕСКУЮ СРЕДУ ПРИ МАГНИТНО-АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКЕ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....	41
2.1. Композиционные ферроабразивные порошки.....	41
2.1.1. Формы абразивных зерен.....	48
2.1.2. Геометрические параметры однородной глобулярной модели.....	61
2.2. Смазочно-охлаждающее технологическое средство.....	67
2.2.1. Влияние смазочно-охлаждающих технологических средств на процесс дефектообразования при абразивной обработке.....	67
2.2.2. Исследование протекания смазочно-охлаждающего технологического средства через слой ферроабразивного порошка.....	77
2.3. Магнитное поле в рабочем зазоре.....	101
2.3.1. Влияние профиля полусных наконечников на топографию магнитного поля.....	101
2.3.2. Топография магнитного поля в процессе магнитно-абразивной обработки.....	119
2.4. Процесс формирования рабочей технологической среды при магнитно-абразивной обработке.....	129
3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ РАБОЧЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С ОБРАБАТЫВАЕМОЙ СЛОЖНОПРОФИЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ.....	134
3.1. Оценка сил, действующих на абразивное зерно при магнитно-абразивной обработке.....	135
3.2. Процесс резания ферроабразивным инструментом.....	138
3.2.1. Определение параметров рабочей поверхности ферроабразивного инструмента на основе моделирования.....	144
3.2.2. Силы резания при обработке ферроабразивным инструментом.....	148
3.2.3. Воздействие ферроабразивной щетки на обрабатываемую поверхность.....	150
3.3. Процесс деформирования поверхностного слоя детали при магнитно-абразивной обработке.....	154

3.3.1. Механизм деформации элемента стружки, снимаемой единичным абразивным зерном.....	154
3.3.2. Оценка влияния фактора пластической деформации на процесс магнитно-абразивной обработки.....	161
3.4. Механизм наводороживания обрабатываемой поверхности при магнитно-абразивной обработке.....	167
3.5. Кинетика износа ферроабразивного зерна в процессе магнитно-абразивной обработки.....	173
4. КАЧЕСТВО СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСЛЕ МАГНИТНО-АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКИ.....	178
4.1. Технология магнитно-абразивной обработки рукоятки микрофона.....	178
4.2. Технология магнитно-абразивной обработки полоза фигурного конька.....	247
4.3. Технология магнитно-абразивной обработки изделий из тонколистового материала.....	254
4.4. Технология магнитно-абразивной обработки прерывистых поверхностей.....	259
4.5. Магнитно-абразивная обработка эвольвентных поверхностей.....	266
4.6. Технология магнитно-абразивной обработки штока гидроцилиндра.....	273
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	281
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	283

## ВВЕДЕНИЕ

Ведущая роль в интенсификации развития всех отраслей экономики принадлежит машиностроению, которое призвано обеспечить реализацию технологий, направленных на снижение трудовых, материальных и энергетических затрат. Важной и ответственной задачей, стоящей перед машиностроением, является создание инновационных технологий, в которых все элементы технологической системы используются с максимальной эффективностью без нанесения ущерба окружающей среде, и принципиально новых машин и оборудования для реализации этих технологий, что позволяет увеличивать производительность труда, повышать качество и снижать себестоимость выпускаемых изделий. Повышение конкурентоспособности продукции является одной из важнейших задач современного машиностроения. Стремление производителей машиностроительной продукции поддерживать ее конкурентоспособность неизбежно приводит к повышению силовых и скоростных параметров мобильных машин, технологического оборудования и оснастки.

Одним из параметров, характеризующих конкурентоспособность сельскохозяйственной техники, является ее ресурс работы, который всегда лимитируется той или иной деталью или сборочной единицей. Особенно это актуально, если лимитирующий узел работает в условиях воздействия агрессивных сред, без смазочного материала, в контакте с частицами абразивных материалов и др. Поэтому актуальным является повышение ресурса работы деталей машин путем использования новых материалов и инновационных технологий. Обеспечение надежности изделий с повышенными скоростными и силовыми характеристиками требует совершенствования технологических процессов, обеспечивающих качество поверхностей при их изготовлении. В условиях конкуренции качество продукции должно расти опережающими темпами, а это возможно обеспечить только на основе научных исследований формирования показателей качества различными технологическими методами. Долговечность деталей во многом определяется состоянием поверхностного слоя, парамет-

ры которого формируются на протяжении всего технологического процесса изготовления и стадий эксплуатации машины. Научные исследования П. И. Ящерицына, А. М. Дальского, Э. В. Рыжова, В. М. Смелянского, их коллег и учеников, а также практика – показали, что при правильно назначенных режимах обработки на заключительных стадиях технологического маршрута, устраняющих накопленные дефекты на предшествующих операциях, можно увеличить долговечность детали в десятки раз.

С другой стороны, совершенствование конструкций машин непрерывно связано с повышением требований к эксплуатационным характеристикам материалов, из которых создаются детали. В настоящее время в машиностроении ускоренными темпами внедряются новые конструкционные материалы с повышенными прочностными свойствами. К ним относятся:

- объемно-легированные металлы и сплавы, компоненты которых, взаимодействуя между собой, образуют твердые растворы;

- металлы и сплавы с мелкозернистой структурой, в том числе с нанометровым масштабом размеров хотя бы в одном из трех измерений. Чем меньше размер зерна структуры металла, тем выше его прочность. Прочность оценивается по пределу текучести или предельному напряжению  $\sigma_t$ , при котором начинает проявляться текучесть материала. Текучесть сопровождается движением дефектов кристаллической структуры – дислокаций. Эффективным барьером для движения дислокаций служат границы зерен. Чем меньше зерно, тем чаще встречаются эти барьеры на пути движущихся дислокаций и тем большее напряжение требуется для пластического деформирования;

- сплавы с объемной аморфной структурой, характеризующейся беспорядочным расположением атомов, когда они не занимают определенного места относительно друг друга. Поэтому температура кристаллизации у таких сплавов не является фиксированной, и они характеризуются высокой прочностью и твердостью в сочетании с высокой пластичностью;

– композиционные материалы, состоящие из нескольких химически разнородных материалов и имеющие гетерогенную структуру. Эти материалы характеризуются новыми свойствами, которых не имеет ни один из входящих в них компонентов.

Растущие требования к повышению производительности машин и широкие возможности металлообрабатывающего оборудования с числовым программным управлением (ЧПУ) обуславливают использование в конструкциях производимых деталей с поверхностями сложного профиля. Например, использование в конструкциях металлообрабатывающих станков деталей со сложнопрофильными поверхностями позволяет упростить кинематику и уменьшить количество деталей в конструкциях отдельных узлов. Поэтому современный уровень развития техники характеризуется существенным расширением диапазона параметров и усложнением форм используемых рабочих поверхностей деталей с одновременным повышением требований к точности их изготовления. Расширение номенклатуры деталей с рабочими поверхностями сложной формы позволяет в значительной мере повысить эксплуатационные показатели машин и механизмов. Во многих случаях только усложнение формы и повышение точности размеров рабочей поверхности детали позволяет упростить конструкцию машин, получить новые показатели качества, расширить функциональные возможности, повысить надежность, ресурс, коэффициент полезного действия (КПД) и в целом улучшить другие эксплуатационные характеристики. В машиностроении существует широкая номенклатура изделий, имеющих сложную пространственную форму, технологической особенностью обработки которых являются сложности реализации траектории движения режущего инструмента и обеспечения однородности показателей качества поверхностей на различных участках профиля.

К поверхностям сложного профиля (сложнопрофильным) относятся поверхности, геометрическая форма которых отличается от плоскости или цилиндра. Сложнопрофильные поверхности применяют: в конструкциях изделий машино-, приборо-, станко-

авиа-, судостроения (копиры, распределительные и кулачковые механизмы, штампы, пресс-формы, лопатки турбин, шнеки и многие другие детали); в оборудовании по переработке сельскохозяйственного сырья (производство консервированной плодовоовощной продукции, производство кондитерских изделий, переработка продукции мясной, молочной, рыбной и других отраслей пищевой промышленности); а также в изделиях бытового назначения (светильники, кухонный инвентарь, декоративно-художественные изделия и др.). Использование сложнопрофильных поверхностей позволяет конструктивно просто реализовывать функциональные свойства изделий, например, задавать исполнительным органам одновременно закон перемещений и их величину (кулачковые механизмы двигателей внутреннего сгорания, механизмы подачи суппортов металлообрабатывающих станков), обеспечивать оптимальные условия газо-, гидродинамического течения материалов (лопатки турбин двигателей и генераторов, фильеры волочильных станов и пресс-форм) и т. п.

Однако усложнение формы поверхностей деталей создает проблемы технологического плана, связанные с обеспечением точности формы и эксплуатационных показателей качества поверхностного слоя. В то же время для обеспечения конкурентоспособности выпускаемых изделий к технологическим процессам механической обработки предъявляются требования высокой производительности и низкой энергоемкости. Для деталей, к которым предъявляются требования повышенного сопротивления пластической деформации, прочности, износостойкости, важными являются такие характеристики поверхности, как шероховатость, отсутствие микротрещин, микротвердость, коррозионная стойкость. Основные свойства поверхности формируются в процессе изготовления на финишных и отделочных операциях, поэтому решение указанной проблемы кроется в использовании инновационных технологий, основанных на управляемом характере взаимодействия инструмента с обрабатываемой поверхностью заготовки. Для формообразования сложнопрофильных поверхностей электрофизическими методами требуется изготовление соответствующих сложнопрофильных



инструментов-электродов, форма рабочей поверхности у которых является зеркальным отображением обрабатываемой поверхности. Поэтому электрические методы обработки находят ограниченное по объему применение в машиностроении.

Механическую обработку сложнопрофильных поверхностей традиционно производят на специальных станках, позволяющих осуществлять совокупность формообразующих движений. Широкое многообразие специальных станков обусловлено тем, что для каждого вида профиля поверхности требуются свои, отличающиеся от других, формообразующие движения. При этом для обработки резанием сложнопрофильных поверхностей требуется создание дорогостоящих специальных режущих инструментов, у которых профиль режущей кромки должен адекватно отражать геометрическую форму обрабатываемой поверхности. Недостатком процесса резания таким инструментом является изменение значений фактических углов резания (переднего, заднего, углов в плане) при обработке различных участков поверхности. Если для одного участка сложнопрофильной поверхности соотношение указанных параметров является оптимальным, то при переходе к обработке соседнего участка оптимальность нарушается. В результате параметры качества обработанной поверхности на различных участках отличаются друг от друга, и для обеспечения требований чертежа требуется дополнительная доводочная операция, которая выполняется, как правило, вручную и является трудоемкой.

Альтернативой обработке резанием являются электрофизические и электрохимические методы обработки, которые имеют принципиальные отличия от традиционных процессов резания. У этих методов механизм снятия припуска с поверхности и формообразование происходит под действием электрического, электромагнитного или ультразвукового поля. Процесс протекает без прямого контакта инструмента с заготовкой (имеется зазор). Однако для формообразования сложнопрофильных поверхностей электрофизическими методами требуется изготовление соответствующих сложнопрофильных

инструментов-электродов, форма рабочей поверхности у которых является зеркальным отображением обрабатываемой поверхности. По производительности электрофизические и электрохимические методы обработки уступают обработке резанием, поэтому они нашли ограниченное применение в машиностроении.

Среди финишных методов доминирующим является механическая абразивная обработка, которая нередко является единственно возможным способом обеспечения требуемого качества поверхности. Финишная и суперфинишная обработка материалов осуществляется, как правило, жестко связанным, свободным и подвижно-скоординированным абразивным зерном. Процесс резания жестко связанным абразивом осуществляется при сообщении заготовке или инструменту нескольких относительных движений. При обработке свободным абразивным зерном процесс резания производится при сообщении частицам порошка кинетической энергии относительно находящихся в покое или движущихся заготовок. При обработке подвижно-скоординированным абразивным зерном связующим веществом служит энергия магнитного, ультразвукового или других полей.

При абразивной обработке поверхностей инструментом с закрепленным зерном требуется профилирование инструмента как при его изготовлении, так и в процессе эксплуатации. Необходимость частой правки абразивных кругов в процессе шлифования вызвана потерей ими формы и точности профиля режущего контура. При традиционном шлифовании геометрически сложных поверхностей профилированным инструментом имеет место проблема обеспечить высокую точность и низкую шероховатость поверхности в труднодоступных (переходных) зонах. Эластичные абразивные инструменты (шлифовальная лента, фибровые диски, лепестковые круги и т. п.) занимают промежуточное место между шлифованием жесткими кругами и обработкой свободным абразивным зерном. Они широко применяются в машиностроении для подготовки поверхности под защитно-декоративные покрытия, для обработки заготовок из пластмасс, резины, древесины.

При любом способе финишной абразивной обработки важнейшим фактором является возможность изменять давление частиц абразивного порошка на обрабатываемую поверхность заготовки. В этом случае, в незакрепленном состоянии зерна абразива более полно используют свои режущие способности, так как происходит нивелирование их рабочих кромок относительно обрабатываемой поверхности, а также переориентация и перемещение частиц абразивного порошка в процессе обработки. Наличие у частиц абразивного порошка отрицательных передних углов и скругленных вершин вызывает при высоких скоростях и малых глубинах микрорезания интенсивное скольжение частиц порошка по материалу заготовки.

К одному из перспективных способов финишной обработки эластичным инструментом относится магнитно-абразивная обработка (МАО), который совмещает достоинства процессов резания, электроэрозионной и электрохимической обработки. Для реализации МАО не требуется изготавливать профилирующий абразивный инструмент, а также периодически его править, что в 2–3 раза снижает затраты на инструмент. Процесс протекает без прямого контакта инструмента с заготовкой. Под действием магнитного поля частицы незакрепленного абразива ориентируются наибольшей осью перпендикулярно обрабатываемой поверхности. Особенностью способа является ориентированное абразивное резание. В результате явления самоорганизации частицы незакрепленного абразива под действием магнитного поля по мере износа абразивной составляющей переориентируются в направлении, перпендикулярном обрабатываемой поверхности. В результате процесс микрорезания производится постоянно обновляющимися острыми кромками.

Перспектива МАО сложнопрофильных поверхностей сопряжена со стабилизацией параметров ориентированного абразивного резания при обработке различных участков. Для этого необходимо решить научную проблему управления формообразующими параметрами рабочей технологической среды в рабочем зазоре при МАО и целенаправленного изменения давления частиц абразивного порошка на обрабатываемую поверхность.

В монографии приведены результаты исследований процесса МАО, выполненных в Белорусском государственном аграрном техническом университете под научным руководством авторов. При подготовке монографии авторы ставили задачу на основе обобщения достигнутых результатов исследований МАО выработать технологические подходы формирования некоторых показателей качества сложнопрофильных поверхностей.

Участие авторов в написании монографии: Л. М. Акулович – введение, структура и общее редактирование, главы 2, 3; Л. Е. Сергеев – главы 2, 3, 4; А. А. Тиунчик – глава 4, Е. В. Сенчуров – главы 1, 4.

Авторы выражают благодарность научным сотрудникам лабораторий, аспирантам и магистрантам БГАТУ, принимавшим участие в проведении экспериментальных исследований.

Авторы считают своим долгом выразить признательность доктору технических наук, профессору О. Г. Девойно и кандидату технических наук, доценту Г. И. Анисковичу за рецензирование рукописи и полезные замечания, которые способствовали улучшению качества монографии.

## **1. МЕТОДЫ ФИНИШНОЙ АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКИ, ФОРМИРУЮЩИЕ КАЧЕСТВО СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Механическая абразивная обработка в настоящее время является основным методом формирования профиля рабочих поверхностей деталей машин, обеспечивая при этом заданные параметры шероховатости и физико-механических свойств. Среди финишных способов абразивная обработка поверхностей нередко является единственно возможным методом обеспечения требуемого качества поверхности.

Основные свойства поверхности формируются в процессе изготовления на завершающих операциях, поэтому им в технологических процессах уделяется особое внимание.

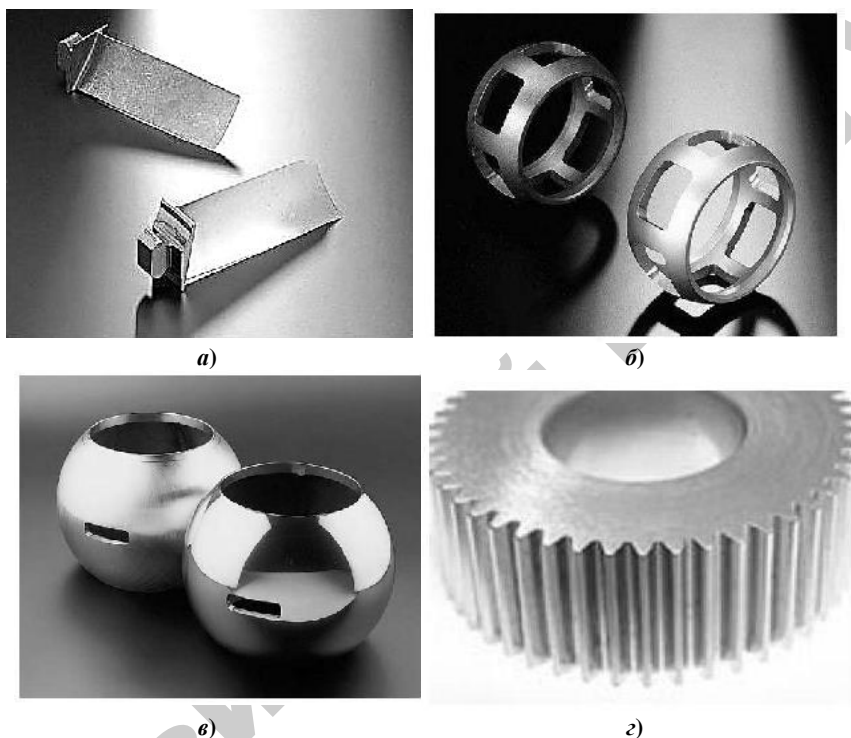
Существующие абразивные методы финишной обработки деталей машин позволяют достаточно эффективно производить обработку поверхностей различного профиля: цилиндрического, конического, сферического, сложного.

По методу формирования контура режущего лезвия инструмента существующие методы финишной абразивной обработки поверхностей разделяются на обработку закрепленным, свободным и подвижно-скоординированным зерном.

Современная промышленность располагает достаточно большим числом методов и способов обработки, обеспечивающих получение заданной шероховатости рабочей поверхности (рисунок 1.1). Основным направлением развития отделочных методов является совершенствование механической абразивной обработки, которая нередко является единственно возможным методом получения требуемого качества поверхности.

Качество поверхности во многом определяется состоянием поверхностного слоя. Для деталей, к которым предъявляются требования повышенного сопротивления пластической деформации, прочности, износостойкости, важными являются такие характеристики поверхности, как шероховатость, отсутствие микротрещин, микротвердость, коррозионная стойкость. Основные свойства поверхности формируются в процессе изготовления и особенно на отделочных операциях, поэтому им в технологических процессах уделяется особое внимание.

Возрастающие требования к надежности изготавливаемых деталей вызывают необходимость совершенствования технологического процесса их изготовления.



*а) лопатки турбин; б) сепараторы шаровых шарниров;  
в) клапаны шариковых кранов; г) зубчатые колеса*

**Рисунок 1.1. – Примеры сложнопрофильных поверхностей из различных отраслей промышленности**

Существующие способы финишной обработки деталей машин достаточно эффективны при обработке различных поверхностей: цилиндрических, конических, сферических и т. д.

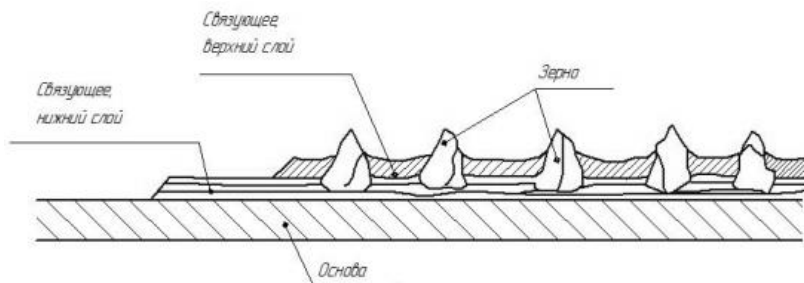
По виду режущего инструмента существующие методы финишной абразивной обработки можно разделить на абразивную обработку жестко-связанным, свободным и подвижно-скоординированным зерном [1].

В первом случае абразивные зерна неподвижно закрепляются (цементируются) в механической связке и образуют круг, брусок или гибкую абразивную ленту. Процесс резания осуществляется при сообщении детали или инструменту нескольких относительных движений.

Во втором случае зерна абразивного порошка при обработке остаются в свободном состоянии, процесс резания производится при сообщении элементам порошка кинетической энергии относительно находящихся в покое, вибрирующих или движущихся с постоянной скоростью изделий.

При абразивной обработке подвижно-скоординированным зерном роль связующего элемента выполняет энергия электромагнита. Если частицы механической связки дискретны, то электромагнитное поле непрерывно распределено, диссипицировано в пространстве рабочего зазора и может изменять свои параметры (напряженность, магнитная индукция и др.). Способность электромагнитного поля интерферировать, т. е., взаимодействуя, усиливать или ослаблять сцепление частиц абразивного порошка между собой, а также изменять их давление на обрабатываемую поверхность, создает возможность объединения в одном рабочем цикле черновой, чистовой и финишной операций. При закреплении абразивных частиц в механической связке интерференции не наблюдается и изменение давления абразивного инструмента на обрабатываемую поверхность осуществляется дискретно механизмами станка.

Шлифование [2–4] – это механический процесс снятия неровностей металла, обеспечивает получение высокого качества обработанной поверхности и точности размеров обрабатываемых деталей. Шлифование выполняется абразивными инструментами. Абразивный инструмент представляет собой твердое тело, состоящее из зерен абразивного (шлифовального) материала, скрепленных между собой связкой. Значительную часть объема абразивного инструмента занимают воздушные поры. Абразивные инструменты в подавляющем большинстве используются в виде шлифовальных кругов разнообразной формы. Кроме того, они могут использоваться в виде брусков, ленты (рисунок 1.2), абразивных кругов (рисунок 1.3), паст и порошков.



**Рисунок 1.2. – Структура шлифовальной ленты**

Процесс резания при шлифовании можно рассматривать как фрезерование многозубой фрезой с высокой скоростью. Каждое единичное абразивное зерно представляет собой режущее лезвие со случайными геометрическими параметрами, которые зависят не только от формы зерна, но и от положения его в абразивном инструменте. На рисунке 1.2. представлена схема расположения абразивных зерен на поверхности абразивного круга по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения круга.

Каждое единичное зерно срезает стружку очень малого переменного сечения. Обработанная поверхность образуется в результате совокупного действия большого числа абразивных зерен, расположенных на режущей поверхности абразивного инструмента. Срезаемая в процессе работы круга стружка располагается в порах между зернами. Разогревшаяся до высокой температуры, близкой к температуре плавления обрабатываемого материала, и размягчившаяся стружка забивает поры и налипает на поверхность круга, происходит так называемое «засаливание» его. При этом режущая способность шлифовального круга резко падает, ухудшается чистота и качество обработанной поверхности. Для восстановления режущей способности круга производится его правка, при которой с помощью правочных роликов или алмазных «карандашей» с режущей части круга удаляется поверхностный слой затупившихся и засалившихся зерен.

Хонингование и суперфиниширование [5, 6] – тонкая отделочная обработка заготовок мелкозернистыми абразивными



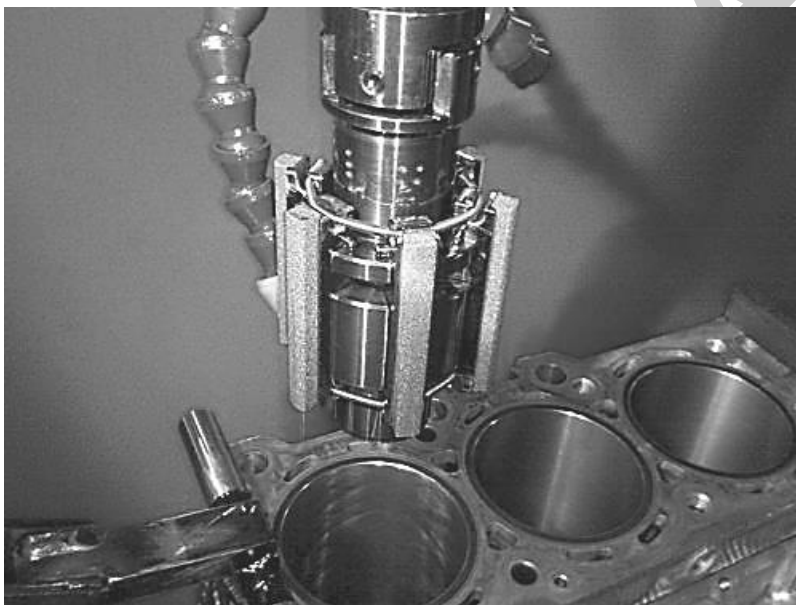
брусками, совершающими сложное движение относительно обрабатываемой поверхности. Процесс хонингования используют как способ обработки отверстий (рисунок 1.4), а процесс суперфиниширование – для обработки наружных цилиндрических поверхностей. К недостаткам хонингования и суперфиниширования относят нестабильность шероховатости поверхности при неоднородной структуре брусков, необходимость контроля брусков по твердости, налипание абразива при больших скоростях обработки, приработка и подналадка брусков при их смене.



**Рисунок 1.3. – Фотография гибкого абразивного круга**

Абразивная доводка (притирка) [7] осуществляется абразивно-доводочной смесью, нанесенной на поверхность притира (рисунок 1.5). Материал притира обычно выбирается более мягким по сравнению с обрабатываемым. При использовании данного способа обработки детали предварительно должны быть обработаны с высокой точностью и иметь малую шероховатость поверхности. Сам процесс доводки (притирки) является

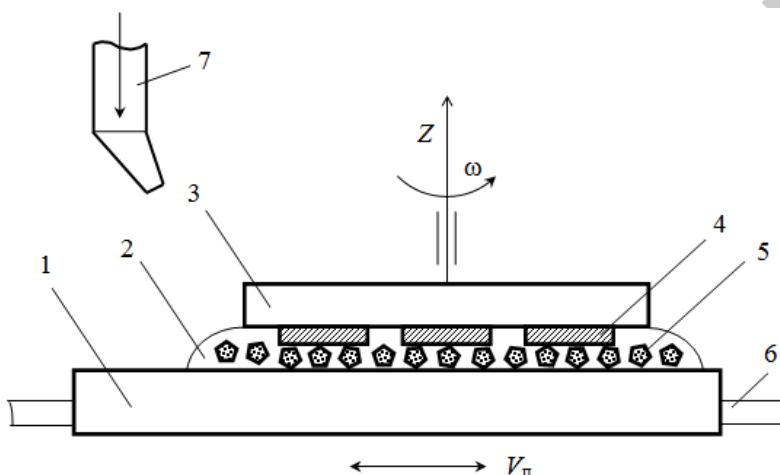
трудоемким, малопроизводительным, содержит, как правило, большой объем ручного труда, требует частой правки притиров для восстановления их исходной формы. Также существенным недостатком этого вида обработки является интенсивное шаржирование (насыщение поверхности инструментов (притиров) абразивным порошком или пастой) обрабатываемой поверхности абразивными зёрнами, что отрицательно влияет на их износостойкость.



**Рисунок 1.4. – Фотография рабочей зоны при хонинговании**

Объемная вибрационная обработка [8] – высокопроизводительный способ безразмерной обработки поверхностей заготовок, характеризующийся равномерным снятием гребешков микронеровностей под воздействием рабочей среды и вибраций, сообщаемых среде и заготовке одновременно. Объемная вибрационная обработка имеет следующие недостатки: неравномерный съем металла с различных участков поверхностей деталей; плохо обрабатываются труднодоступные участки (канавки, углубления и др.) поверхностей деталей; для получения

шероховатости, соответствующей  $Ra = 0,16-0,32$  мкм, необходима длительная обработка в несколько переходов со сменой наполнителя и составов технологической жидкости, что существенно увеличивает трудоемкость финишной операции; высокий уровень шума, сопровождающий работу виброустановок, ухудшает условия труда рабочих.



**1 – нижний притир; 2 – абразивная суспензия; 3 – верхний притир;  
4 – абразивные диски; 5 – абразивные зерна; 6 – стол; 7 – сопло**  
**Рисунок 1.5. – Схема резания при абразивной доводке**

Объемная центробежно-ротационная обработка [9] реализуется за счет быстрого относительного перемещения обрабатывающих и обрабатываемых тел в слое, примыкающем к поверхности вращающегося ротора, и за счет активного их перемешивания (ротации) в объеме рабочего резервуара (рисунок 1.6).

Недостатки данной обработки: высокая стоимость роторных устройств; ограниченность номенклатуры обрабатываемых деталей по массе и форме, т. е. не рекомендуется обрабатывать тяжелые (более 6–9 граммов) изделия во избежание их сильных взаимных столкновений и возникновения из-за этого дефектов поверхности и невозможно обрабатывать изделия со сложной и протяженной конфигурацией (кроме ювелирных цепочек).



**Рисунок 1.6. – Фотография рабочей зоны при объемной центробежно-ротационной обработке**

Струйно-абразивной обработкой [10] называется процесс полирования заготовок с помощью смеси жидкости и абразивных зерен (рисунок 1.7), подаваемой на заготовку из сопла со скоростью 50 м/с и более.

Недостатки струйно-абразивной обработки – необходимость закрепления детали, перемещения сопла вдоль детали, необходимость устройства для сбора и возврата в струйный аппарат абразивных частиц, высокий расход абразивного материала.

Турбоабразивная обработка [11] основана на использовании техники псевдооживления сыпучих материалов и заключается в создании абразивного кипящего (псевдооживленного) слоя, в который помещают обрабатываемую деталь, задавая в зависимости от ее формы различные виды движения.

Недостатками этой обработки являются малые величины удельного съема металла, обусловленные низким контактным давлением частиц абразива на обрабатываемую поверхность. Повышение скорости перемещения детали относительно абразивных

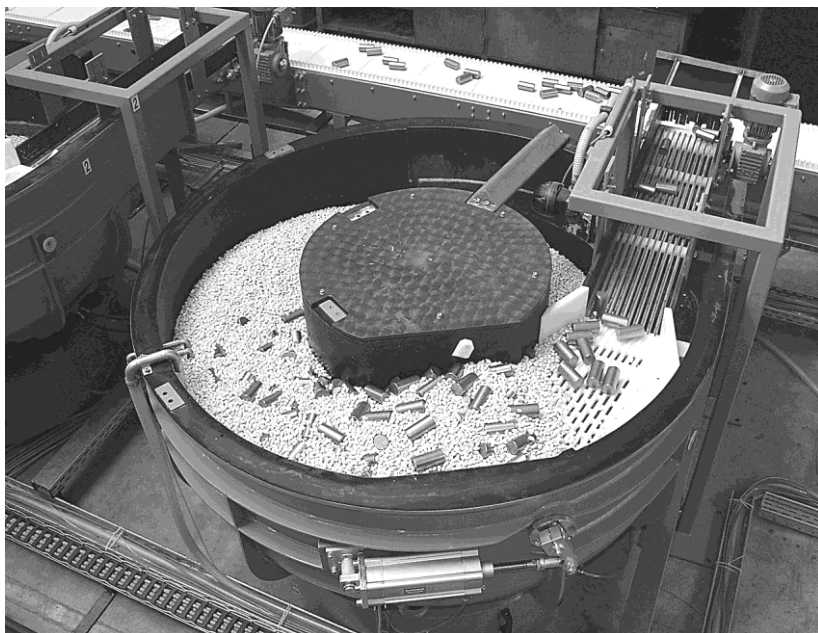
частиц шлифовального материала лимитируется образованием у поверхности детали пограничного воздушного слоя, который препятствует контакту абразивных частиц с обрабатываемой поверхностью и резко снижает эффективность обработки. Также при турбоабразивной обработке обработанная поверхность имеет кратерообразный рельеф, состоящий из большого числа микроцарапин, поэтому формируется матовая поверхность.



**Рисунок 1.7. – Фотография рабочей зоны при струйно-абразивной обработке**

Галтовочными методами [12, 13] можно выполнять полирование, безразмерное шлифование, упрочнение, очистку и зачистку.

В процессе галтовки (рисунок 1.8) в результате взаимодействия наполнителя и деталей, загруженных в контейнер, при вращении происходит соударения, скольжение и микрорезание поверхностей деталей абразивным наполнителем, вследствие чего снимается металл. Силы прижима деталей с частицами наполнителя невелики, съем металла также мал, поэтому галтовочные операции продолжаются от 5 до 100 ч.



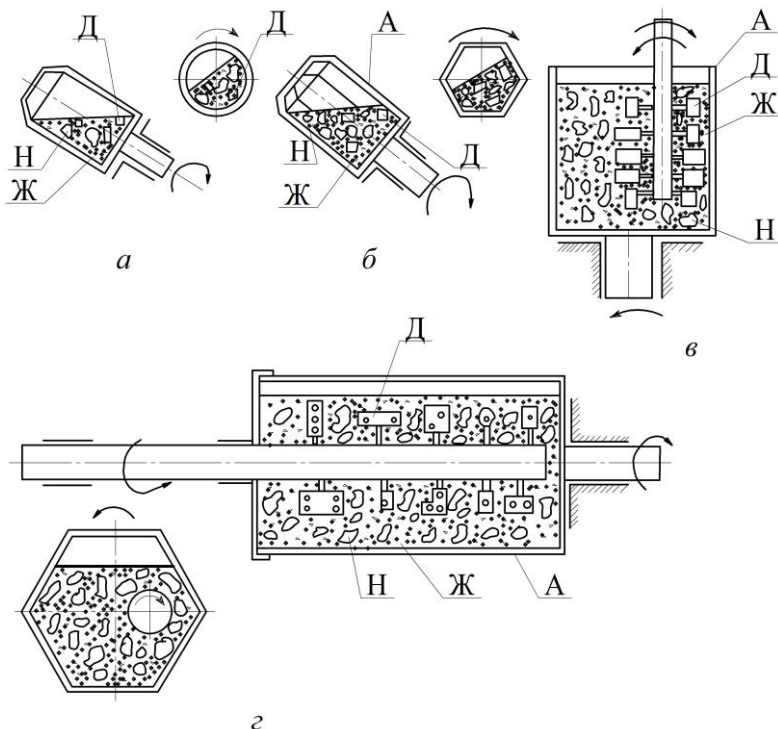
**Рисунок 1.8. – Фотография рабочей зоны галтовочного барабана**

Схемы обработки галтовочными методами разнообразны, но в основном это вращение круглых или граненых барабанов вокруг вертикальной, горизонтальной или наклонной оси (рисунок 1.9).

В круглых и граненых барабанах иногда делают небольшие поперечные ребра, улучшающие перемешивание деталей и интенсифицирующие процесс обработки. Детали загружают в барабан обычно навалом. Для интенсификации процесса обработки детали иногда закрепляют на отдельной оси и сообщают им дополнительное вращение.

В качестве инструмента при галтовочном методе применяют для очистки и зачистки деталей абразивный бой, гранулированный абразив и др.; для безразмерного шлифования – гранулированный абразив на керамической и вулканитовой связке, кварцит и др.; для полирования деталей – абразивное зерно, порошки и микропорошки М10...М50, деревянные шары, мацерат кукурузы, обрезки кожи, войлока, стальные полированные

шарики диаметром 0,4–0,9 мм и др. На производительность и качество полированных поверхностей оказывает влияние общий объем загруженной в барабан массы и соотношение в ней обрабатываемых деталей, абразивных и неабразивных материалов, состав рабочей жидкости, свойства и зернистость абразивных материалов, характеристики неабразивных наполнителей.



**а** – в наклонном круглом барабане; **б** – в наклонном граненом барабане; **в** – в круглом вертикальном барабане с закреплением и вращением детали; **г** – в граненом горизонтальном барабане с закреплением и вращением детали; А – кронштейн; Д – детали; Ж – жидкостная среда; Н – твердый наполнитель

**Рисунок 1.9. – Схемы обработки галтовочными методами**

К достоинствам метода галтовки можно отнести возможность обрабатывать мелкие детали, а также изделия, которые трудно обрабатываются на полированных станках или другими известными методами.

Недостатками являются: невозможность обработки очень мелких и высокоточных тонкостенных деталей; неравномерная интенсивность съема металла по поверхности, которая приводит к ухудшению обрабатываемости труднодоступных участков и поверхностей деталей (канавок, углублений, переходов, внутренних поверхностей и т. д.).

Более широкое распространение в промышленности получила обработка деталей во вращающихся барабанах. Это обусловлено простотой конструкции установки, реализующих данный метод, сравнительно высокой степенью механизации, возможностью одновременной обработки большого количества деталей. В настоящее время разработана много различных схем данного метода обработки, но все они в основном сводятся к вращению круглых или граненых барабанов вокруг горизонтальной или наклонной оси.

Сущность процесса заключается в следующем. Обрабатываемые детали и абразивные наполнители загружаются в барабан, который равномерно вращается вокруг оси со скоростью 0,5–1,0 м/с. При вращении абразивная среда и детали приводят в относительное движение, сопровождающееся их соударениями, скольжением и микрорезанием обрабатываемых поверхностей частицами абразивного наполнителя, что обеспечивает съем металла. Силы взаимодействия деталей с частицами наполнителя невелики, поэтому обработка во вращающихся барабанах продолжается от 5 до 100 ч.

В качестве абразивных наполнителей для предварительной обработки применяют бой шлифовальных кругов, гранулированный абразив на керамической и вулканитовой связке и др. На операциях полирования деталей используют абразивные зерна, порошки и микропорошки М10...М50, деревянные шары, обрезки кожи, войлока, полировальные стальные шарики диаметром 4–10 мм и т. п. [14]. В качестве смазочно-охлаждающей жидкости (СОЖ) обычно применяются растворы технического мыла в мягкой воде (0,2–0,5 %), едкого натра, кальцинированной соды.

Полирование деталей во вращающихся барабанах позволяет увеличить шероховатость их поверхностей на 2–3 класса, например с  $Ra$  2,5 мкм до  $Ra$  0,32 мкм или с  $Ra$  0,32–0,63 мкм до



$Ra$  0,08 мкм. Продолжительность обработки определяется экспериментально и зависит от многих факторов; скорость вращения барабана, общего объема загруженной в барабан массы и соотношения в ней деталей и абразивного наполнителя, состава и температуры рабочей жидкости, состава и свойств абразивной массы и неабразивных наполнителей [15].

Разновидность обработки во вращающихся барабанах – полирование деталей в барабанах с планетарным вращением. В этом случае обрабатываемые детали и абразивная среда под действием инерционных сил, возникающих при вращении барабана вокруг оси планшайбы и собственной оси, совершают сложное пространственное движение. Детали и наполнитель перемещаются с разными скоростями в разных направлениях, в результате чего происходит интенсивное взаимодействие деталей с частями абразивного наполнителя [14].

Исследованию процесса полирования деталей в планетарных установках посвящен ряд работ [16–19].

Необходимая степень уплотнения абразивной среды в барабанах достигается изменением скорости вращения планшайбы, а скорость относительного перемещения деталей и абразивных частиц определяется скоростью вращения барабанов вокруг собственной оси. Скорость вращения планшайбы обычно составляет  $7\text{--}10\text{ с}^{-1}$ , а барабанов  $5\text{--}40\text{ с}^{-1}$ .

Производительность процесса обработки в планетарных установках значительно выше, чем во вращающихся барабанах. Это позволяет снизить производительность полирования до 60...90 мин. При этом, учитывая то, что в барабан одновременно загружается большое количество деталей, данный метод обработки считается весьма эффективным, а потому находит широкое применение в производстве.

Однако и барабанные методы имеют недостатки. К ним относятся: неравномерный съем металла с поверхностей сложной формы; отсутствие эффективного воздействия абразивных наполнителей на труднодоступные участки профиля-канавки, углубления и т. п.; взаимные соударения деталей, приводящие к появлению забоин и вмятин на обрабатываемых поверхностях. Эти и другие недостатки ограничивают область применения барабанных методов в производстве.

На операциях отделочной обработки наружного профиля деталей типа колец, втулок и т. п. находит применение шпиндельная обработка. Сущность этого процесса заключается в том, что закрепленная на шпинделе и вращающаяся с высокой скоростью обрабатываемая деталь вводится в соприкосновение с абразивной средой, находящейся, например, в вибрационной камере [20]. В отличие от виброобработки, в данном случае главным движением является вращение обрабатываемой детали, а не колебание частиц рабочей среды. Вибрация поддерживает рабочую среду во взвешенном состоянии, обеспечивает ввод детали в рабочую зону и вывод из нее по окончании обработки, перемещивает и непрерывно подает свежие абразивные частицы к обрабатываемой поверхности. Иногда обрабатываемой детали помимо главного вращательного сообщают возвратно – поступательное или осциллирующее осевые движения, которые интенсифицируют процесс обработки. Наивысшая производительность достигается при сообщении детали планетарного вращения.

Величина съема металла с обрабатываемых поверхностей в основном зависит от влажности абразивной среды, определяющей ее давление на обрабатываемую поверхность, скорости вращения детали и продолжительности обработки.

Сравнительно высокая интенсивность съема металла дает возможность ограничить цикл обработки до 5–7 мин. За это время шероховатость поверхности снижается до  $Ra\ 0,20\text{--}0,32\ \mu\text{м}$  и в дальнейшем не изменяется. При этом в поверхностном слое деталей возникают сжимающие остаточные напряжения с глубиной залегания до 10–15 мкм. Погрешности макрогеометрии (волнистость, огранка) данный способ обработки практически не устраняет.

Недостатком шпиндельной виброобработки является то, что для получения деталей с шероховатостью  $Ra\ 0,16\text{--}0,32\ \mu\text{м}$  необходимо, чтобы исходная шероховатость была не выше  $Ra\ 0,64\text{--}1,25\ \mu\text{м}$ . При обработке деталей типа колец, втулок на их геометрическую точность существенное влияние оказывает биение шпинделя относительно оси вращения,

величина которого не должна превышать 0,1 мм. В противном случае наблюдается образование овала [21].

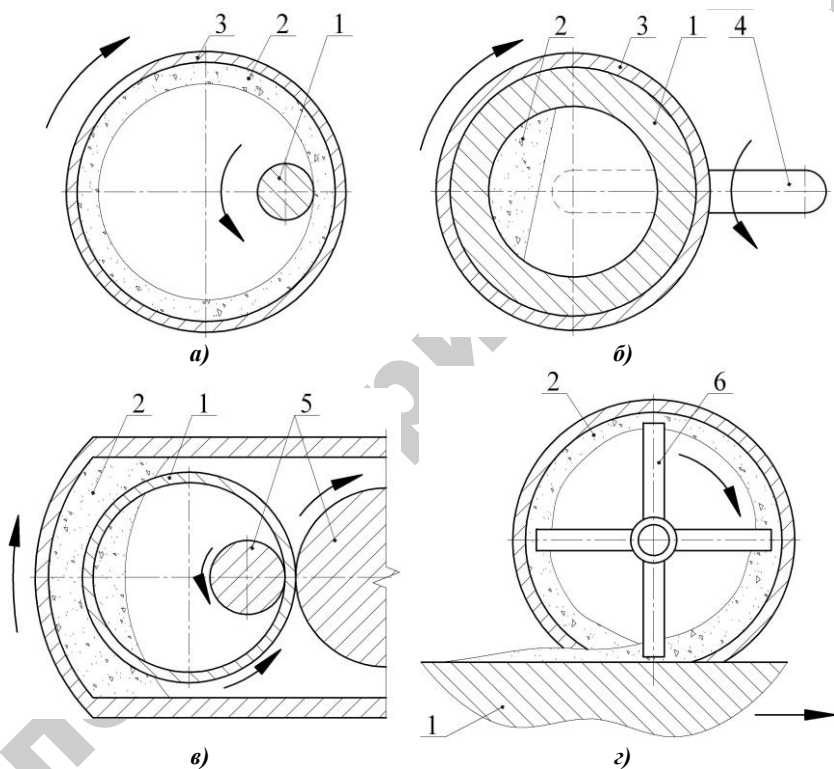
Таким образом, шпиндельная обработка не может быть использована на финишных операциях отделки наружных поверхностей сложнопрофильных деталей.

Перспективным методом полирования деталей является полирование абразивом, уплотненным инерционными силами [22, 23]. Обработка производится на специальных устройствах, позволяющих трансформировать гидроабразивную суспензию в уплотненный инерционными силами абразивный слой, контактирующий с обрабатываемой поверхностью, и обеспечить их относительное перемещение. При этом способы уплотнения и относительного перемещения деталей и обрабатываемого слоя могут быть различными. Для практической реализации этого метода требуется различного рода устройства, обеспечивающие формирование уплотненного слоя абразива и возможность контактирования его с поверхностью обрабатываемой детали. Абразивное воздействие осуществляется свободными абразивными частицами, находящимися в суспензии в уплотненном состоянии в процессе их перемещения относительно обрабатываемой детали поверхности при определенном контактом давлении на нее. Обработка производится во вращающемся барабане, в котором за счет сил инерции на внутренней стенке располагается абразивная суспензия. Для обработки деталь вводят в контакт с уплотненным абразивным слоем. Деталь и барабан имеют встречные направления вращения. Уплотненный абразивный слой вращается вместе с барабаном, обтекает погруженную в него деталь и обрабатывает ее поверхности. Абразивный слой в уплотненном состоянии обладает определенной упругостью и за счет податливости точно копирует профиль детали, производя обработку всех ее участков.

На рисунке 1.10 показаны схемы процесса обработки различных видов поверхностей деталей свободным абразивом, уплотненным инерционными силами.

По схеме рисунок 1.10, *a* свободный абразив уплотняется во вращающемся барабане. Под действием инерционных сил

абразивная суспензия прижимается к внутренней поверхности барабана и образует кольцо, которое в установленном режиме будет синхронно вращаться вместе с барабаном. Такое кольцо сохраняет форму при вращении, а степень уплотнения частиц определяется угловой скоростью вращения барабана. При этом межзеренное пространство в уплотненном абразивном кольце будет заполнено жидкостью суспензии.



1 – обрабатываемая деталь; 2 – свободный абразив; 3 – барабан; 4 – плечо вращения барабана вокруг внешней оси; 5 – прижимающие валики; 6 – ротор

**Рисунок 1.10. – Схемы обработки внешней (а), внутренней (б), одновременно внешней и внутренней (в) цилиндрических поверхностей и плоскости (г) свободным абразивом, уплотненным инерционными силами**

Поскольку твердые частицы уплотненного вращающегося слоя абразива обладают кинетической энергией, то при введении в этот слой детали, ее поверхность будет испытывать динамическое воздействие массы абразивных частиц. При ударе о поверхность и скольжении по ней абразивные частицы будут снимать мельчайшие частицы металла, и производить обработку поверхности. Если деталь с наружной поверхностью вращения, то для обеспечения нормальной обработки всей поверхности – детали необходимо сообщить вращение вокруг собственной оси.

Уплотненный абразивный слой обладает определенной упругостью и плотно облегает поверхность погруженной в него детали, точно копируя форму ее профиля. При этом обеспечивается практически однородное давление на все участки профильной поверхности и происходит их равномерная обработка. При обработке внутренних поверхностей вращения, уплотненный абразивный слой формируется внутри полости деталей (рисунок 1.10, б).

Весьма перспективным является решение проблемы для обработки как внутренних, так и внешних поверхностей деталей одновременно (рисунок 1.10, в).

Поверхности плоских деталей могут обрабатываться данным методом, если направить суспензию с уплотненным слоем свободного абразива на обрабатываемую поверхность. На рисунок 1.10, г, показана схема установки, в которой абразив уплотняется инерционными силами от вращения ротора с лопастями. Уплотненный абразивный слой направляется через окно в корпусе барабана на поверхность обрабатываемой детали.

Данный метод обеспечивает сочетание процессов обработки, смазки и охлаждения, осуществляющихся одновременно и неразрывно. Техническая жидкость (ТЖ) находится в зоне обработки под постоянным центробежным давлением, что обеспечивает эффективное проникание ее во все микропоры и микротрещины в поверхностях обрабатываемых деталей. Возможность циркуляции ТЖ обеспечивает эффективный отвод тепла и делает процесс обработки низкотемпературным.

Данный метод имеет ряд характерных и отличительных особенностей: возможность обработки различных видов поверхностей; автоматическое копирование профиля обрабатываемой поверхности «режущим инструментом»; активное действие ТЖ, проникающей непосредственно в зону обработки, эффективный отвод тепла и другие.

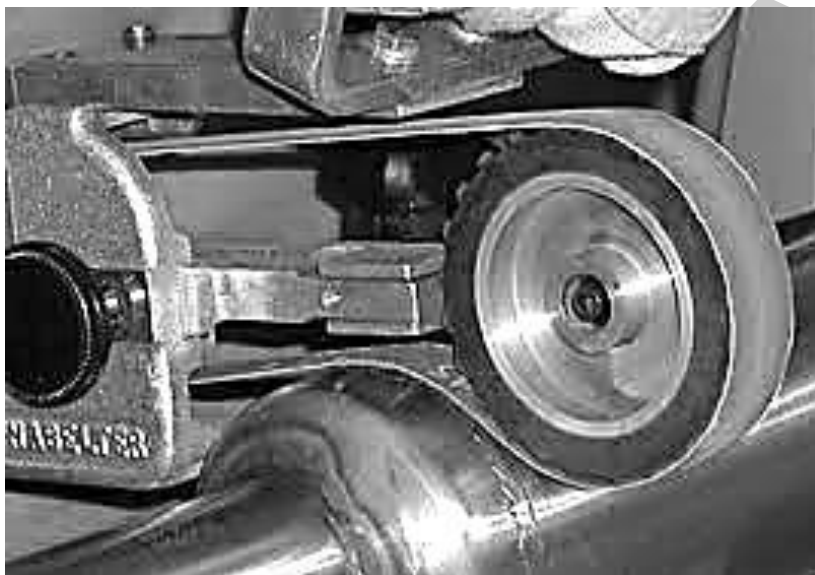
Однако этот способ обладает определенными недостатками при обработке деталей со сложной формой наружного профиля и значительными перепадами диаметров. Линейная скорость, а значит, и кинетическая энергия, абразивной частицы зависят от расстояния ее до центра вращения барабана. Частицы, движущиеся по удаленным траекториям, обладают большей кинетической энергией и при взаимодействии с обрабатываемой поверхностью интенсивнее происходит сьем металла. В связи с этим при глубоком профиле поверхности детали наблюдается его неравномерная обработка, так как наиболее эффективно снимается металл с выступающих участков профиля. Кроме того, при обработке данным способом уплотненный абразивный поток, вращающийся с высокой скоростью, производит интенсивное микрорезание и для получения обработанных поверхностей с шероховатостью  $Ra$  0,10–0,20 мкм необходима обработка в несколько проходов с последовательным уменьшением зернистости абразивного материала, что снижает производительность процесса.

Полированием абразивными лентами [24, 25] устраняются следы предыдущей обработки, и различные поверхностные неровности (штрихи, царапины и др. дефекты). Разница между шлифованием и полированием состоит в том, что при полировании снятие материала совершенно незначительно по сравнению со шлифованием.

Целью полирования является получение декоративного внешнего вида (глянца) и увеличение коррозионной стойкости детали (рисунок 1.11).

Полирование обладает рядом недостатков: большие временные затраты, обусловленные необходимостью обработки конструкций сложного профиля; высокая трудоемкость, обусловленная твердостью применяемых сплавов; неравномер-

ность снятия металла с поверхности изделия; образование на полированной поверхности слоя с сильно искаженной кристаллической решеткой, представляющего собой деформированные зерна и их фрагменты, которые вместе с инородными включениями являются по сути концентраторами напряжений и отрицательно сказываются в эксплуатации.



**Рисунок 1.11. – Фотография рабочей зоны при полировании абразивными лентами**

Магнитно-абразивная обработка (МАО) [26–28] – способ абразивной обработки, осуществляемый при движении заготовки и абразивных зерен относительно друг друга в магнитном поле (ГОСТ 23505-79) и обеспечивающий высокое качество поверхностей деталей (рисунок 1.12).

Все рассмотренные способы финишной абразивной обработки осуществляются с применением смазочно-охлаждающих технологических средств (СОТС).

Современные методы формообразования позволяют получать заготовки по форме и размерам близкие к готовым

деталям. Нерешенным остается вопрос получения заданных физико-механических свойств поверхностного слоя, а также качества поверхности. Определяющими в данном направлении являются финишные методы обработки как жестким, так и гибким инструментом.



**Рисунок 1.12. – Фотография рабочей зоны при магнитно-абразивной обработке**

МАО предполагает абразивное удаление припуска в присутствии магнитного поля при относительном перемещении абразивных зерен и обрабатываемой поверхности. Проводить такую обработку можно с применением различных абразивных инструментов: суспензий, ферроабразивных порошков (ФАП). Наибольшее распространение получили схемы процесса с ФАП, которые и отождествляются с термином «магнитно-абразивная обработка». Сущность метода: магнитно-абразивный порошок располагается между полюсами электромагнитов, создавая режущий инструмент, плотность которого можно варьировать, изменяя напряженность магнитного поля. При движении детали через рабочую зону порошок оказывает давление на деталь в каждой точке поверхности, что приводит к съему металла и сглаживанию микронеровностей.



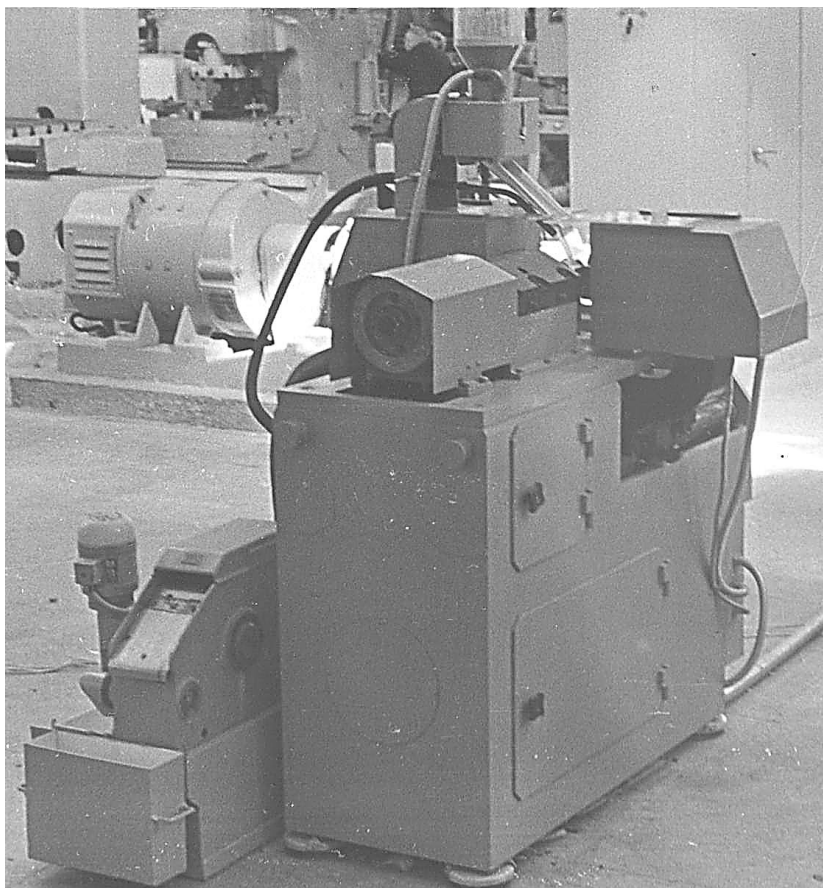
Особенностями являются: возможность нивелирования абразивных зерен относительно обрабатываемой поверхности; предотвращение перегрузки зерен и появления вспышек мгновенной температуры; отсутствие трения связки о материал детали; отсутствие причин, вызывающих изменение структуры материала в локальных зонах обрабатываемой поверхности и резкое уменьшение, по сравнению со шлифованием цементированным зерном, общей температуры резания. Силовое воздействие зерен порошка на обрабатываемую поверхность в условиях многократного пространственного перемагничивания детали при полировании вызывает упрочнение ее поверхностного слоя, дробление элементов кристаллической решетки с образованием более мелкодисперсной фазы и снижение остаточных растягивающих напряжений с переводом их в сжимающие.

Для реализации процесса МАО применяют спектр специальных металлообрабатывающих станков, оснащенных электромагнитной системой. Одним из таких станков является ФАС 2 (рисунок 1.13), который предназначен для магнитно-абразивной обработки деталей типа тел вращения, обладающих ферромагнитными свойствами. Станок оснащен приспособлениями для закрепления и обработки десяти типов деталей.

Станок состоит из следующих основных частей: станины, в которой размещаются двигатели приводов вращения и осцилляции детали, а также механизм осцилляции; привода вращения; узла шпинделя; магнитной системы; электромагнитного бункера; приспособления для закрепления деталей; задней бабки; механизма перемещения магнитной системы, установки насосной с магнитным сепаратором, пульта управления. К сердечникам электромагнитов магнитной системы крепятся сменные инструменты – полюсные наконечники с рабочим профилем, соответствующим профилю обрабатываемой поверхности.

Оснащая станок соответствующими приспособлениями, можно обрабатывать любые другие детали подобного типа с диаметром обрабатываемой поверхности не более 85 мм

и длиной обрабатываемой поверхности не более 80 мм. Технические характеристики станка ФАС 2 представлены в таблице 1.1.



**Рисунок 1.13. – Общий вид станка ФАС 2**

Полюсные наконечники устанавливаются с некоторым зазором (0,5–2 мм) с двух сторон соосно относительно обрабатываемой детали. Обработка на станке основана на принципе воздействия рабочей среды, удерживаемой магнитным полем в зазорах между полюсными наконечниками и деталью, на поверхность обрабатываемой детали, вращающейся и осциллирующей вдоль оси.

Таблица 1.1 – Техническая характеристика станка модели ФАС 2

Параметры	Значения
Габарит станка, мм:	
длина	2000
ширина	1600
высота	1960
Вес станка, кг	2000
Наибольшие габариты обрабатываемых деталей, мм:	
диаметр	85
длина поверхности обработки	80
Число оборотов шпинделя, об/мин:	
наибольшее	2840
наименьшее	240
Величина ходов осцилляции, мм	0,3;0,5; 1,3; 1,6; 2,5; 3,5; 4,1; 4,6
Длина хода магнитной системы, мм	400
Максимальная индукция в рабочих зазорах, Т	1,8
Суммарная максимальная мощность установленных электродвигателей, кВт	5,25
Напряжение питания силовых цепей, В	380/220
Напряжение питания цепей управления, В	127

Станок имеет два режима работы: наладочный и полуавтоматический. В наладочном режиме все механизмы станка приводятся в действие независимо друг от друга в любой последовательности нажатием на соответствующие кнопки пульта управления.

Основной рабочий режим – полуавтоматический. Работа в полуавтоматическом режиме происходит следующим образом: на узел шпинделя и заднюю бабку устанавливаются соответствующие

обрабатываемой детали приспособления для крепления детали. На сердечники магнитной системы устанавливаются соответствующие полюсные наконечники. Магнитная система маховиком перемещения подводится к детали и фиксируется зажимами в нужном положении. Тумблер переключения режимов работы на пульте управления переводится в положение «Наладка» и на пульт подается напряжение. Реле времени и переключателями напряжения, размещенными в шкафу управления, устанавливаются: длительность I обработки, II обработки, демагнитизация (например, 30 с, 20 с, 5 с), а также сила тока в рабочих катушках, необходимая для создания нужной индукции в рабочих зазорах при I обработке, II обработке и демагнитизации (например, 2 А, 2,5 А, 3 А). Тумблер переключения режимов работы на пульте управления переводится в положение «Автомат». Затем нажатием на кнопку «Цикл» станок переводится в действие. Дальнейшая работа происходит автоматически. На катушки магнитной системы подается напряжение, сердечники сближаются до соответствующих упоров, образуя между деталью и полюсными наконечниками необходимый рабочий зазор, в котором наводится магнитное поле, соответствующее I обработке. Одновременно включается насос подачи СОТС и магнитный сепаратор установки насосной. Затем из электромагнитного бункера на деталь подается доза ФАП, необходимая для обработки данной детали. Величина дозы устанавливается заранее перемещением верхней магнитной системы электромагнитного бункера.

Затем включаются двигатели вращения детали и осцилляции. Происходит I обработка. По истечении времени I обработки индукция в зазорах (сила тока в рабочих катушках) понижается до заранее установленного уровня. Происходит II обработка. По истечении времени II обработки включается демагнитизация (в катушках подается переменный ток 50 Гц, установленной заранее силы). По истечении времени демагнитизации все механизмы станка выключаются.

После снятия оператором со шпинделя обрабатываемой детали и установки новой с нажатием на кнопку «Цикл» работа станка повторяется по заданной программе.

Режимы работы станка – наладочный и полуавтоматический; емкость бака для СОТС – 60 л; емкость бункера для порошка – 4 л; суммарная максимальная мощность катушек электромагнитов – 4 кВт; максимальная мощность, потребляемая станком – 9,25 кВт.

Порядок настройки и регулирования: установить необходимую скорость обработки. Рекомендуемая скорость обработки – 120–200 м/мин. Причем для деталей диаметром от 55 до 85 мм скорость вращения вала двигателя должна быть 720 об/мин, а для деталей диаметром 55 мм и меньше – скорость вращения вала двигателя должна быть 1430 об/мин. Скорость вращения устанавливается тумблером на пульте управления. Рекомендуемая величина амплитуды – 1,6 мм. Установка амплитуды производится поворотом эксцентриковой втулки механизма осцилляции. Рекомендуемая скорость осцилляции – 10–12 м/мин.

Скорость вращения вала двигателя осцилляции при этом должна быть 720 об/мин. Скорость вращения устанавливается тумблером на пульте управления. Установить с помощью реле времени необходимую длительность I обработки, II обработки и демагнитизации. Регуляторами напряжения установить силу тока в рабочих катушках для получения нужной индукции в рабочих зазорах при I обработке, II обработке, демагнитизации. При установке силы тока на магнитных катушках необходимо пользоваться тарированным графиком, приведенным на рисунке 1.14.

Для повышения чистоты деталей и при рабочих зазорах 0,6–0,8 мм рекомендуемая индукция: I обработки – 1,5 Т, II обработки – 0,8–1,0 Т. Это соответствует току в рабочих катушках 6–7 А и 0,25–0,75 А соответственно. Ток демагнитизации – 2–3 А.

Установка силы тока контролируется амперметрами, смонтированными на пульте управления.

Перемещение верхней магнитной системы бункера настроит бункер на необходимую дозу порошка. Работая с пультом управления, последовательно проверить действие всех механизмов станка. При обратном вращении необходимо сменить фазировку подключения двигателя. При обнаружении утечки порошка при включенном бункере необходимо повысить ток в катушках бункера.

После выполнения этих требований станок готов к первоначальному пуску.

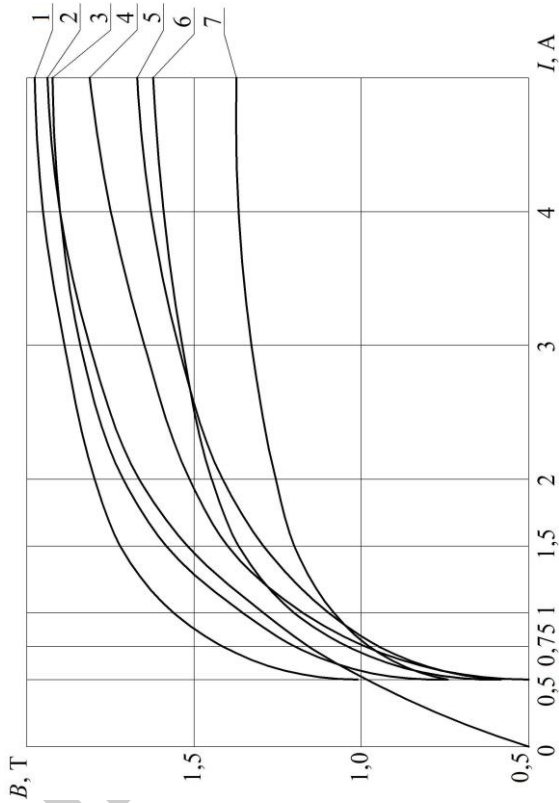
Первоначальный пуск: установить на шпиндель ручную обрабатываемую деталь; установить на сердечники полюсные наконечники, соответствующие обрабатываемой детали, и закрепить их штреверами с торцов сердечников; рукояткой перемещения магнитной системы подвести магнитную систему так, чтобы полюсные наконечники установились симметрично обрабатываемой поверхности детали: в наладочном режиме включить I обработку и (после сближения сердечников с полюсными наконечниками и образования рабочего зазора) убедиться, что в крайних положениях детали между торцами полюсных наконечников и буртиками детали остается гарантированный зазор не менее 0,3 мм. Закрепить магнитную систему в этом положении на направляющих рукоятками, расположенными снизу магнитной системы. Переключатель режимов работы установить в положении «Автомат». Нажатием на кнопку «Цикл» осуществить пуск станка. Работа его будет происходить по заданной программе.

Движение ФАП в рабочем зазоре при МАО и интенсивность съема микронеровностей с обрабатываемой поверхности определяется характером действия на контактирующие частицы сил на различных стадиях процесса абразивного воздействия.

Оборудование для МАО включает следующие основные системы:

- магнитная, состоящая из электрических магнитных катушек на постоянном выпрямленном ток и предназначенной для удержания ФАП;
- механическая, обеспечивающая позиционирование и закрепление обрабатываемых деталей в зоне обработки и сообщения им рабочих и вспомогательных движений, а также выполняющей функцию несущей системы;
- электрическая, предназначенная для питания ЭМС, привода и управления механизации МРС;
- система подачи СОТС и ФАП в зону обработки.

Одними из основных показателей качества поверхности является шероховатость. Сравнение методов финишной абразивной обработки по данному показателю представлено в таблице 1.2.



1 – внутреннее кольцо шарикоподшипника (сталь ШХ15); внутреннее кольцо иглольчатого подшипника (сталь 15Г1); 3 – внутреннее кольцо шарикоподшипника (сталь ШХ20СТ); 4 – внутреннее кольцо шарикоподшипника (сталь 9Х18); 5 – вкладыш шатуна (бронза Бр.АЖ9-4); 6 – валик шарнира рычага (сталь 45); 7 – вкладыш шатуна (бронза Бр.ОЦ10-2)

Рисунок 1.13. – Тарировочный график зависимости магнитной индукции в рабочем зазоре от силы тока на магнитных катушках

Таблица 1.2 – Показатели шероховатости поверхности при финишной абразивной обработке

Метод	Вид поверхности	Параметр шероховатости поверхности, $Ra$ , мкм	
		исходная	достигаемая
1	2	3	4
шлифование	цилиндрические	0,63-1,25	0,08-0,16
	эвольвентные	0,63-1,25	0,16-0,32
хонингование	цилиндрические	0,32-0,63	0,1-0,2
	эвольвентные	0,4-0,8	0,08-1,6
суперфиниширование	–	0,32–0,63	0,08–1,6
абразивная доводка	–	0,08–0,16	0,04–0,08
объемная вибрационная обработка	–	0,08–0,63	0,16–0,32
объемная центробежно-ротационная обработка	–	0,08–0,63	0,16–0,32
струйно-абразивная обработка	–	0,16–0,32	0,08–0,1
турбоабразивная обработка	–	0,63–1,25	0,16–0,32
галтовка	–	0,63–1,25	0,16–0,32
обработка деталей во вращающихся барабанах	–	0,63–1,25	0,2–0,32
шпиндельная обработка	–	0,63–1,25	0,16–0,32
полирование абразивом, уплотненным инерционными силами	–	0,63–1,25	0,1–0,2
полирование абразивными лентами	–	0,63–1,25	0,08–0,16
МАО	эвольвентные	1,6–2,0	0,4–0,5
	фасонные	0,63–3,2	0,02–0,16



## 2. КОМПОНЕНТЫ, ФОРМИРУЮЩИЕ РАБОЧУЮ ТЕХНОЛОГИЧЕСКУЮ СРЕДУ ПРИ МАГНИТНО-АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКЕ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### 2.1. Композиционные ферроабразивные порошки

В реальных условиях при магнитно-абразивной обработке действует одновременно комплекс факторов. Это строение и форма ферроабразивных порошков (ФАП), их состав, концентрация, размер частиц, а также распределение и способ закрепления абразивного элемента в магнитной матрице, его физико-механические свойства (микротвердость, хрупкость и другие), магнитные физико-механические свойства матрицы [29].

Сочетанием высоких абразивных и магнитных свойств обладают лишь композиционные ФАП [29].

В процессе исследований композиционных ФАП производился химический фазовый анализ образцов, основанный на использовании различной растворимости карбидов и железной матрицы в минеральных кислотах. Карбиды, выделенные таким путем, подвергали анализу на содержание карбидообразующего металла, а также связанного и свободного углерода. Съемку образцов осуществляли на дифрактометре ДРОН-2, систем Ti-C-Fe и Cr-C-Fe – с медным  $K_{\alpha}$ -, V-C-Fe – с хромовым  $K_{\alpha}$ - излучением.

При совместном нагревании смесей порошков Ti+C+Fe и V+C+Fe в весьма широких температурных и концентрационных интервалах основными конечными продуктами химического взаимодействия исходных компонентов являются карбиды титана, ванадия и железа (таблица 2.1). Следовательно, присутствие железа в процессе синтеза не препятствует образованию карбидов титана и ванадия. Синтез карбидов ванадия и титана практически завершается в температурном интервале 1400–1600°C. При этом образуются карбиды титана и ванадия с весьма высоким содержанием связанного углерода, достигающих 18,1 и 18,5 % соответственно. Химический состав карбидов титана и ванадия, параметры их кристаллических решеток и микротвердость хорошо согласуются.

Таблица 2.1 – Микротвердость и характеристика микроструктур псевдоплавленных ФАП на основе железа и карбидов титана, ванадия, хрома

Композиция	Массовое содержание карбида, %		Характеристика микроструктуры	Микротвердость, МПа · 10 <sup>3</sup>	
	Расчетное	Фактическое		MeC	Железная матрица
TiC-Fe	30	29,3	Карбид в виде овальных включений в железной матрице	30–31,5	3,1–3,7
	40	38,6		31–31,5	2,1–3,6
	50	47,1		28,3–30	1,5–3,1
	60	58,3	Хлопьеобразный карбид в железной матрице	31–31,5	2,5–3,2
	70	69,1		31–31,5	2,7–3,5
	80	78,9	Структура литого карбида	30,5–31,5	1,6–2,6
	90	89,3		31–31,5	1,7–3,5
VC-Fe	40	38,5	Глобули карбида ванадия в железной матрице	22	5,2–6,8
	50	47,7		24,7	3,8–5,2
	60	58,1		21,5	6,4–7,05
	70	68,3	Глобули карбида ванадия сблокированные, включения железа	22,7	2,4–8,4
	80	78,2		23,6	2,4–6,8
Cr-C-Fe	30	–	Пластинчатая микроструктура, перлитные включения отсутствуют	–	3,4–3,8
	40	–		–	6,7–7,4
	50	–		–	9,8–12
	80	17,1	Тонкодисперсные включения карбида хрома, пластинчатая микроструктура	–	13,4–15,2

Обращает на себя внимание тот факт, что практически во всех образцах суммарное содержание углерода выше расчетного. Это связано

с осуществлением процесса в графитотрубчатых электровакуумных печах и некоторым науглероживанием образцов материала тигля.

В системе карбид хрома – железо в исследуемом интервале температур и концентраций при совместном нагревании смесей Cr+C+Fe химическим, рентгеновским, металлографическим и микродюрOMETрическими методами центры образования абразива практически не обнаружены. То есть высший карбид хрома Cr<sub>3</sub>C<sub>2</sub> не образуется за исключением состава с расчетным содержанием карбида хрома в композиции, равным 80 %, хотя в продуктах химического взаимодействия практически весь углерод связан. Высокая химическая активность Cr по отношению к Fe, а также взаимная растворимость карбида хрома и железа приводит к образованию интерметаллического соединения FeCr и ряда сложных соединений в системе Cr-C-Fe (например, железохромового карбида (FeCr)<sub>3</sub>C<sub>7</sub>) [30] и затрудняет образование ярко выраженных фаз карбидов хрома.

Как отмечается в [31], высший карбид хрома Cr<sub>3</sub>C<sub>2</sub> никогда не обнаруживается в сталях. В сталях содержатся лишь Cr<sub>7</sub>C<sub>3</sub> и Cr<sub>23</sub>C<sub>6</sub>, которые растворяются в аустените.

Микроструктуру синтезированных композиций исследовали на оптическом микроскопе МИМ-8. В системах Ti-C-Fe и V-C-Fe (рисунки 2.1 и 2.2) на нетравленных шлифах хорошо видны две фазы: на светлом поле железной матрицы наблюдаются темные округлые пятна (глобулы) карбидов титана и ванадия. Глобулы карбидов незначительно различаются по размерам и весьма равномерно распределены в железной матрице.

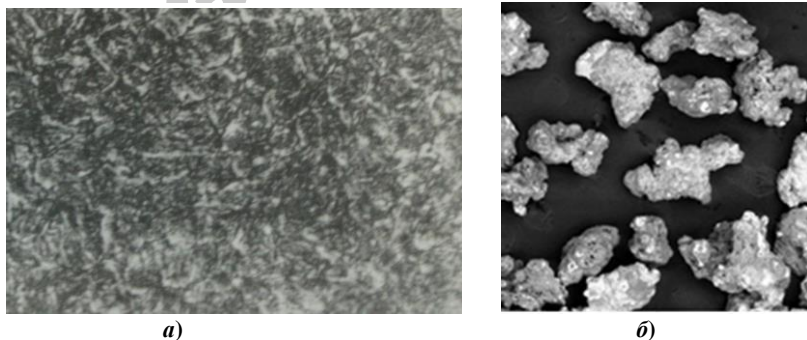
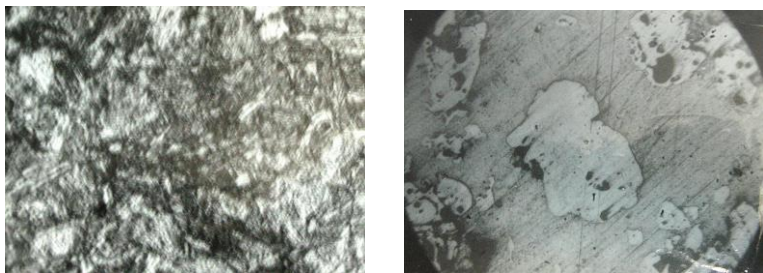


Рисунок 2.1. – Микроструктура (а) и форма (б) ФАП типа Fe-Ti

Размер глобулей зависит от концентрации карбидной фазы в композите. Так, при содержании 30–40 % карбида в магнитно-абразивном материале (МAM) размер зерна в поперечнике не превышает 10 мкм [32].



**Рисунок 2.2.**– Микроструктура (а) и форма (б) ФАП типа *Fe-V*

С увеличением концентрации карбида до 50–60 % этот показатель возрастает до 40–50 мкм. Дальнейшее повышение количества карбида в композиции приводит к группированию зерен в блоки. Образование карбидной фазы в виде округлых глобулей объясняется поверхностными явлениями на границе карбида титана и ванадия – расплав железа. Ограниченная растворимость карбидов титана и ванадия в железе [31] и стремление системы принять форму с минимальной энергией, а, следовательно, и с минимальной поверхностью раздела фаз приводят в конечном итоге к округлению, сглаживанию поверхности карбидных включений.

В композиции TiC-Fe трудно обнаружить взаимное растворение или проникновение фаз. В системе VC-Fe наблюдается область взаимного растворения на границе фаз карбид ванадия – железо в виде окаймления глобулей карбида ванадия. В системе Cr-C-Fe невозможно выделить какую-либо фазу, продукты взаимодействия здесь представляют собой фазы, взаимно проникающие друг в друга. Распределение железа, углерода, титана, ванадия и хрома в карбидных зернах, железной матрице и на их границе исследовали методом микрорентгеноспектрального анализа, основанного на возбуждении электронами характеристического рентгеновского спектра химических элементов в анализируемом образце, содержащихся в поверхностном слое обрабатываемого пятна толщиной 1–3 мкм [31].

Результаты исследований [31] подтверждают наличие областей с преимущественной концентрацией карбидообразующего металла (Ti, V) или железа; углерод концентрируется главным образом в области карбидообразующего металла, то есть в карбидном зерне, а в елезной матрице его относительно мало. Данные микрорентгеноспектрального и химического методов исследований полученных композиций хорошо согласуются.

По данным микрорентгеноспектрального анализа в полученной композиции на основе железа и карбидов хрома наблюдаются лишь зоны с большим или меньшим содержанием компонентов. Это также подтверждает факт значительного взаимного проникновения компонентов и отсутствие ярко выраженных областей карбидных фаз.

Физико-механические свойства ФАП в большой степени зависят от микротвердости абразивной и магнитной компоненты зерен-композиций. У синтезированных ФАП микротвердость TiC и VC равны 28000–315000 и 21500–24700 МПа соответственно, то есть они практически соответствуют чистым TiC и VC.

В системе Cr-C-Fe с увеличением концентрации карбидообразующей компоненты (Cr+C) наблюдается монотонный рост микротвердости от 3400–3800 МПа при расчетном содержании карбида хрома в композициях 30 % до 13400–15200 МПа при его 80 % содержании. Измерить микротвердость фаз карбидов хрома при их расчетной концентрации в композиции свыше 80 % не представлялось возможным в связи с очень малыми (до 5 мкм) размерами карбидных включений.

Намагниченность насыщения – важная характеристика, в значительной степени определяющая работоспособность ФАП. Прибор и методика для определения намагниченности насыщения описаны в [33]. Как показал магнитный анализ, наибольшей намагниченностью насыщения обладают МАП на основе карбида титана и железа. В ряду композиций на основе железа и карбидов титана, ванадия и хрома намагниченность насыщения убывает от карбида титана к карбиду хрома. С ростом концентрации абразива для каждой композиции намагниченность насыщения монотонно снижается.

Для сравнения определяли также намагниченность насыщения механических смесей порошков железа и карбидов титана,

ванадия и хрома. Из полученных данных следует, что намагниченность насыщения ФАП на основе карбида титана и железа практически не отличается от таковой для механических смесей  $TiC+Fe$  с равными концентрациями карбида титана. Для синтезированных композиций на основе карбидов ванадия и хрома намагниченность насыщения существенно ниже, чем у механических смесей  $VC+Fe$  и  $Cr_3C_2+Fe$ . Все это подтверждает наличие химического взаимодействия, особенно в системе  $Cr-C-Fe$ , и образование менее магнитных, чем железо, сложных железохромовых карбидов.

Частицы псевдоплавленных композиционных ФАП на основе железа и карбидов титана и ванадия имеют осколочную форму, характерную для порошков, полученных методом измельчения. Это неправильные многогранники со многими выделяющимися выступами зерен карбида, которые являются участками абразивного резания. Анализ строения зерен ФАП (форма зерна, распределение тугоплавкого абразива в магнитной матрице, его размер и структура, взаимодействие тугоплавкого абразива с железом) и их физических свойств (микротвердость составляющих фаз, удельная намагниченность насыщения) показывают, что эти характеристики взаимосвязаны и оказывают определяющее влияние на работоспособность ФАП.

При содержании карбида в композиции 30–40 %, низкий уровень взаимодействия карбида титана с железом при температуре синтеза, и, как следствие, высокие магнитные свойства материала обеспечивают высокий удельный съем металла и хорошее качество обработанной поверхности. Работоспособность псевдоплавленных ФАП определяли на кольцах из стали ШХ15 твердостью 58–61 HRC и с исходной шероховатостью поверхности  $Ra$  0,9–1,1 мкм. Режимы обработки были выбраны по методике [34].

При увеличении концентрации карбида титана в ФАП наблюдается рост его зерен, уменьшается магнитная проницаемость, возрастает хрупкость зерен-композиций, что и приводит к потере работоспособности.

Карбид ванадия имеет более низкую микротвердость по сравнению с карбидом титана и более сильно взаимодейству-

ет с железом в процессе синтеза. Это снижает магнитные свойства композиций и, в конечном итоге, обуславливает значительно более низкую их работоспособность, чем у ФАП на основе карбида титана и железа.

Отсутствие в системе Cr-C-Fe ярко выраженных режущих центров из высшего карбида, активное химическое взаимодействие и взаимное проникновение компонентов и, следовательно, весьма слабые магнитные свойства, сравнительно низкая микротвердость не позволяют получить высокого съема материала и хорошего качества поверхности.

Исследованы условия синтеза композиционных ФАП непосредственно из простых веществ. Установлено, что при совместном нагревании смесей порошков карбидообразующих переходных металлов (Ti, V, Cr), сажистого углерода и железа в температурном интервале 1300–2000°C преимущественно образуются карбиды титана и ванадия, равномерно распределенные в железной матрице в виде глобулей, форма и размер которых определяются концентрацией карбида в композите и режимом синтеза. Синтез карбида хрома Cr<sub>3</sub>C<sub>2</sub> в присутствии железа весьма затруднен.

Границы областей образовавшихся карбидов титана, ванадия в железной матрице имеют четкие очертания; уровень взаимного проникновения карбид–железо незначителен и не превышает 3–7 % от размера зерна (глобули) карбида в поперечнике. В ряду карбидообразующих металлов Ti-V-Cr степень химического взаимодействия их и образовавшихся карбидов с железом возрастает от титана к ванадию и хрому.

На основании данных исследований предложен способ получения композиционных ФАП на основе железа и карбидов титана, ванадия и установлены оптимальные составы и условия их синтеза.

Псевдоплавленные композиционные ФАП на основе карбидов титана и ванадия обладают высокими физико-механическими свойствами (прочностью зерен, абразивной способностью, удельной намагниченностью насыщения) и могут быть рекомендованы для обработки различных материалов, в особенности сталей.

### 2.1.1. Формы абразивных зерен

В настоящее время при производстве как абразивных материалов, так и абразивных инструментов практически не учитывается и не контролируется такой важный параметр как форма абразивных зерен. Между тем она (наряду с прочими параметрами) весьма сильно влияет на эксплуатационные характеристики абразивного инструмента, в составе которого находится зерно.

Исследование фракций выпускаемых стандартных ФАП показали, что в каждой фракции присутствуют зерна различных форм в определенном процентном соотношении. Следовательно, контроль формы зерен ФАП в инструменте включает в себя два аспекта:

- сужения спектра форм зерен при выпуске или специальной обработке абразивного зерна, то есть выделение различных фракций, в которых зерна будут иметь примерно одинаковые формы;

- изучение зависимостей эксплуатационных характеристик ФАП от формы зерен применяемой фракции.

Существует двойной подход к оценке формы абразивного зерна – качественная и количественная классификации. Различия в данных подходах приведены в таблице 2.2.

Оба эти подхода имеют свои области применения. Качественную классификацию можно, например, применять при первичной оценке спектра форм зерен, а количественную – для исследований как более точную.

Для исследования влияния формы абразивных зерен на эксплуатационные характеристики абразивного инструмента необходима именно количественная оценка. При этом критерии, по которым можно было бы оценить оптимальность методик количественной оценки формы зерен, в них отсутствуют. Все подобные исследования, как правило, основываются на принципе «черного ящика», то есть в них отслеживаются изменения выходных параметров (некоторые характеристики абразивного инструмента) в зависимости от изменений входного, то есть от величины, количественно характеризующей форму абразивного зерна. После проведения серии экспериментов делались выводы в зависимости выходных параметров



от входного. Как известно, дисперсия выходных параметров при таком принципе исследования – явление безусловно временное, поскольку мешает установить ясные зависимости между входным и выходными параметрами.

Таблица 2.2 – Основные различия между качественной и количественной классификациями

Основные различия	Качественная классификация	Количественная классификация
1	2	3
принцип оценки формы	отнесенные зерна по некоторым признакам в соответствующую группу форм (число групп невелико)	расчет для зерна некоторых числовых параметров, функционально связанных с его формой
трудоемкость оценки формы больших объемов зерен	низкая	высокая (при ручной обработки)
точность оценки формы единичного зерна	низкая	высокая

Наиболее распространенная и простая качественная классификация приводится в источниках [35, 36]. Ее принцип заключается в том, что по форме проекции абразивного зерна, полученной каким-либо методом, зерно относится в одну из групп форм согласно таблице 2.3.

Однако она обладает серьезными недостатками – субъективностью классифицирования, а также оценкой формы зерна по его проекции, тогда как само зерно считается объемным телом, вследствие чего оценка его формы получается неполной.

Более развитая качественная классификация, практически лишенная этих недостатков, приводится в источнике [37]. Согласно этой методике, для определения формы зерна необходимо измерить его габаритные размеры по длине ( $d_{k1}$ ), ширине ( $d_{k2}$ ) и высоте ( $d_{k3}$ ). Затем по их соотношению зерно относится в одну из групп форм (таблица 2.4).

Таблица 2.3 – Классификация абразивных зерен по их проекции

Название группы форм	Изометрические	Промежуточные	Пластинчатые
Вид проекции			

Таблица 2.4 – Классификация абразивных зерен по их габаритным размерам

Соотношение $d_{k1}:d_{k2}:d_{k3}$	1:1:1	1:1:0,33	1:0,33:0,33
Название группы форм	Изометрические	Пластинчатые	Игольчатые

Недостатки данной классификации: нестрогое определение габаритных размеров зерна и малое число групп, не охватывающих весь спектр форм зерен.

Авторами [38] предлагается качественная классификация, представляющая собой развитие концепции, предложенной в [37]. Суть ее состоит в следующем:

Для определения «габаритных размеров» зерна поместим его в декартову систему координат таким образом, чтобы его проекции на координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  (величины  $r_x$ ,  $r_y$  и  $r_z$  соответственно), удовлетворяли условиям (2.1) и (2.2).

$$r_x \rightarrow \max, r_y \rightarrow \max, r_z \rightarrow \max. \quad (2.1)$$

$$r_x < r_y < r_z. \quad (2.2)$$

Эти величины и будут габаритными размерами зерна по длине, широте и высоте соответственно. Практика показывает, что для принятой методики измерения габаритов зерна (с помещением его на горизонтальную плоскость) условия (2.1) и (2.2) выполняются в 98 % случаев. Однако для определения формы зерна важны не сами габаритные размеры, а их соотношения. Для этого введем величины соотношений:

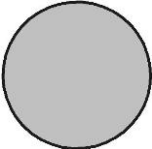
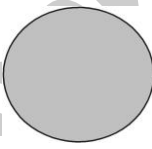
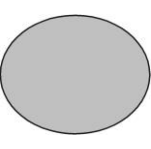
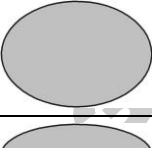
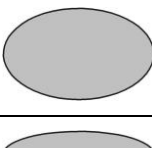
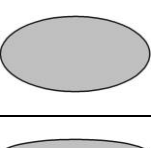

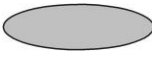
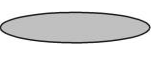
$$h = r_y / r_x; \quad (2.3)$$

$$v = r_z / r_x. \quad (2.4)$$

Эти соотношения будут непрерывными случайными величинами, распределенными в диапазоне  $[0;1]$ , что следует из (2.1) и (2.2). Таким образом, если по аналогии с таблицей 2.3 разделить диапазон измерения каждого отношения на 3 части, итого получаем  $3 \times 3 = 9$  групп форм, охватывающих весь спектр. Для определения числовых значений  $h$  или  $v$ , служащих границами групп форм, можно заменить модели проекции зерна в виде эллипсов соответствующими соотношениями осей (таблица 2.5).

Как следует из таблицы 2.5 «изометрической» форму зерна можно считать отношение размеров свыше 0,8; «промежуточной» – при его значении в диапазоне 0,8–0,5; пластинчатой – при отношении менее 0,5.

Таблица 2.5 – Классификация абразивных зерен по их проекции в виде эллипса

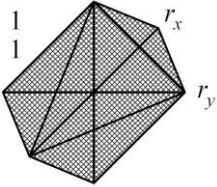
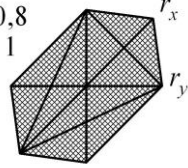
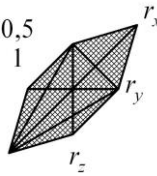
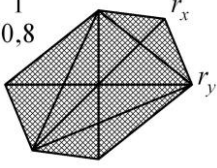
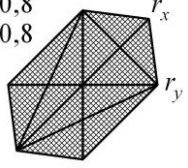
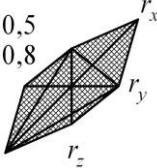
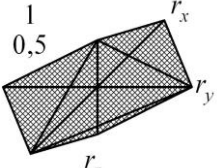
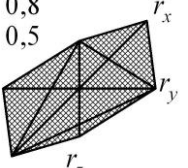
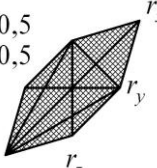
$r_y / r_x$	Проекция зерна	$r_y / r_x$	Проекция зерна	$r_y / r_x$	Проекция зерна
1		0,9		0,8	
0,7		0,6		0,5	
0,4		0,3		0,2	

В таблице 2.6 приводятся диапазоны величин  $h$  и  $v$ , а также объемные модели абразивного зерна для каждой группы, выполненные в виде многогранников. Для удобства пользования классификацией вводятся названия групп форм, соответствующие виду моделей зерна.

На основе предложенной качественной классификации проанализированы спектры форм зерен фракции различных абразивов, а также исследованы зависимости распределения форм

зерен от таких параметров, как его зернистость и вид абразивного материала. Методика измерения габаритных размеров состоит в следующем: зерно абразива помещается на горизонтальную поверхность. При этом оно занимает положение равновесия таким образом, что данная поверхность совпадает с координатной плоскостью  $xy$ , а зерно дает соответствующую проекцию.

Таблица 2.6 – Классификация абразивных зерен по их модели

<p>1. <math>h \in [1; 0,8)</math> <math>v \in [1; 0,8)</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>r_z</math></p> <p style="text-align: center;">Изометрические</p>	<p>4. <math>h \in [0,8; 0,5)</math> <math>v \in [1; 0,8)</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>r_z</math></p> <p style="text-align: center;">Удлиненные</p>	<p>7. <math>h \in [0,5; 0)</math> <math>v \in [1; 0,8)</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>r_z</math></p> <p style="text-align: center;">Игольчатые</p>
<p>2. <math>h \in [1; 0,8)</math> <math>v \in [0,8; 0,5)</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>r_z</math></p> <p style="text-align: center;">Уплощенные</p>	<p>5. <math>h \in [0,8; 0,5)</math> <math>v \in [0,8; 0,5)</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>r_z</math></p> <p style="text-align: center;">Промежуточные</p>	<p>8. <math>h \in [0,5; 0)</math> <math>v \in [0,8; 0,5)</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>r_z</math></p> <p style="text-align: center;">Узкопластинчатые</p>
<p>3. <math>h \in [1; 0,8)</math> <math>v \in [0,5; 0)</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>r_z</math></p> <p style="text-align: center;">Дисковидные</p>	<p>6. <math>h \in [0,8; 0,5)</math> <math>v \in [0,5; 0)</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>r_z</math></p> <p style="text-align: center;">Широкопластинчатые</p>	<p>9. <math>h \in [0,5; 0)</math> <math>v \in [0,5; 0)</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>r_z</math></p> <p style="text-align: center;">Мечевидные</p>

Лупою Бринелля у проекции зерна измерялись размеры  $r_x$  и  $r_y$ . Затем для сохранения положения зерна сверху на него наклеивалась прозрачная липкая лента. Лента поворачивалась таким образом, чтобы получить проекцию зерна в плоскости  $xz$ , и закреплялась в специальном приспособлении. Аналогичным образом у проекции измерялся размер  $r_z$ . Далее для зерна вычислялись отношения  $h$  и  $v$ , и в зависимости от их значений зерно относилось в соответствующую группу форм. Таким образом, для каждой группы форм подсчитывалось число попавших в нее зерен  $f_i$ . После обработки всех зерен подсчитывается процентные содержания групп форм в рассмотренной фракции абразива:

$$f_i (\%) = \frac{f_i}{n} 100 \%, \quad (2.5)$$

где  $n$  – общее число рассмотренных зерен.

Все существующие методики количественной оценки формы зерна также базируются на плоской проекции зерна, то есть:

- тем или иным способом получается проекция зерна на плоскость;
- измеряются некоторые геометрические характеристики этих проекций;
- по ним рассчитывается числовой параметр, называемый коэффициентом формы ( $K_\phi$ ).

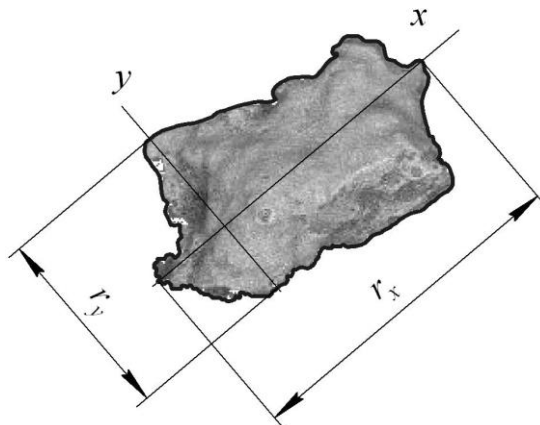
Согласно ГОСТам на шлифматериалы из алмаза (эльбора) и источнику [35] для расчета коэффициента формы необходимо получить проекцию формы зерна (рисунок 2.3)  $r_x$  и  $r_y$ . Коэффициент формы рассчитывается как отношение максимальной длины проекции к ее ширине:

$$K_\phi = r_x / r_y . \quad (2.6)$$

Несколько иная методика расчета коэффициента формы предлагается в источниках [39, 40]. Для расчета аналогичным образом получается проекция зерна.

За коэффициент формы зерна принимается отношение описанной вокруг проекции и вписанной в нее окружностей (рисунок 2.4):

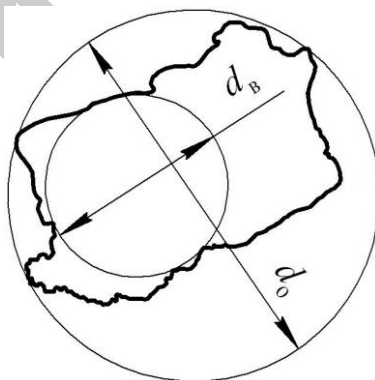
$$K_\phi = d_o / d_v . \quad (2.7)$$



**Рисунок 2.3. – Проекция формы абразивного зерна с габаритными размерами**

В различных источниках в одной и той же формуле расчета коэффициента формы может делиться меньшая величина большую либо наоборот. Так формула (2.7) приводится в источнике [39] а согласно источнику [36] коэффициент формы зерна рассчитывается следующим образом

$$K_{\phi} = d_{\text{в}} / d_{\text{о}} . \quad (2.8)$$



**Рисунок 2.4. – Проекция формы абразивного зерна с описываемой и вписанной окружностями**

Очевидно, что при расчете коэффициента формы по формуле (2.7) его значения будут лежать в диапазоне  $[1; +\infty)$ , а при расчете по формуле (2.8) –  $(0; 1]$ . С точки зрения большей определенности границ диапазона  $(0; 1]$  целесообразно преобразовать все нижеследующие расчетные формулы для определения коэффициента формы аналогично формуле (2.8).

Несомненным достоинством описанной методики оценки формы зерна является то, что проекция зерна может быть получена с любыми удобными для измерения размерами. Очевиден и ее недостаток – поскольку зерно абразива является объемным телом, оценка его формы по плоской проекции получается недостаточно точной.

Логично предположить, что методика определения коэффициента формы, наиболее точно отражающего форму зерна, должна базироваться на геометрических характеристиках самих зерен. Так, в химической технологии, где применяются сыпучие материалы [41], коэффициент формы частицы материала определяется как отношение площади ее поверхности к площади поверхности равновеликой ей сферы:

$$K_{\phi} = P_3 / P_{\text{сф}}. \quad (2.9)$$

Поскольку методики измерения площади частицы не существует, по аналогии с формулой (2.9) авторы предлагают рассчитывать коэффициент формы зерна абразива как отношения объема зерна к объему описанной вокруг него сферы:

$$K_{\phi} = V_3 / V_{\text{сф}}, \quad (2.10)$$

учитывая, что

$$V_{\text{сф}} = \frac{\pi d_{\text{сф}}^3}{6}.$$

Преобразуем формулу (2.10):

$$K_{\phi} = \frac{6V_3}{\pi d_{\text{сф}}^3} = 1,91 \frac{V_3}{d_{\text{сф}}^3}. \quad (2.11)$$

Проверка методики количественной оценки формы зерна по формуле (2.11) выявила затруднения в измерении объема зерна  $V_3$ . Размеры абразивных зерен весьма малы (поперечный размер зерен наиболее крупной зернистости не превышает 2 мм).

Поэтому все существующие методики непосредственного измерения объема зерна (например, иммерсионная) трудоемки и не обеспечивают достаточной точности (порядка  $10^{-10} \text{ м}^3$ ).

Это вынуждает вернуться к методике оценки формы, базирующейся на проекции зерна, но с целью учета формы зерна как объемного тела необходимо рассматривать не одну, а две его проекции. Поместим зерно  $1$  на горизонтальную поверхность как описано выше (рисунок 2.5) и свяжем с ним прямоугольную систему координат. Получим проекцию зерна  $2$  на горизонтальную плоскость  $xy$  и его проекцию  $3$  на перпендикулярную ей координатную плоскость  $xz$ . Для каждой независимой проекции зерна рассчитывается свой коэффициент формы, что позволяет достаточно точно количественно оценить форму зерна как объемного тела. Естественно, что методика при этом несколько усложняется. Количественную характеристику зерна можно записать в виде  $K_{\phi}^{(xy)} / K_{\phi}^{(xz)}$ .

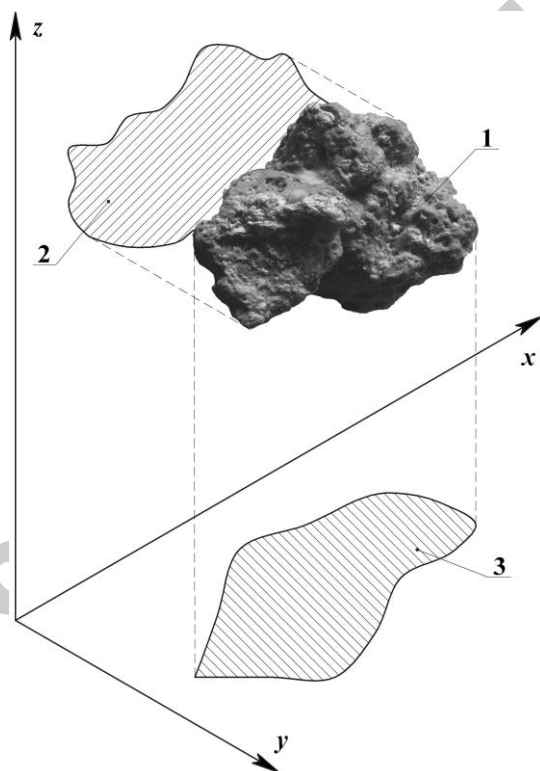
В данном случае, возникает проблема выбора наилучшей методики расчета коэффициента формы по проекции зерна. Приняв в качестве критерия выбора точность оценки формы зерна, можно сформулировать основное требование к методике расчета – коэффициент формы должен быть функционально связан с формой проекции зерна. Иначе говоря, каждой конкретной форме должно соответствовать некоторое конкретное значение коэффициента формы. Для существующей методики расчета по формуле (2.6) можно привести изображение, представленное на рисунке 2.6. Возьмем две проекции зерна ( $1$  и  $2$ ). Формы этих зерен, безусловно, весьма отличаются, но в то же время коэффициент формы этих проекций будет одним и тем же. Для расчета по формуле (2.8) рассуждения аналогичны. Недостатком существующих методик расчета, снижающим точность оценки формы зерна, является то, что определенному коэффициенту формы соответствует не одна форма, а некоторый диапазон форм.



Учитывая очевидный факт, где геометрической характеристикой проекции зерна, наиболее тесно связанной с его формой, является площадь проекции, в данной работе предлагается новая методика расчета коэффициента формы, точнее отражающая форму зерна.

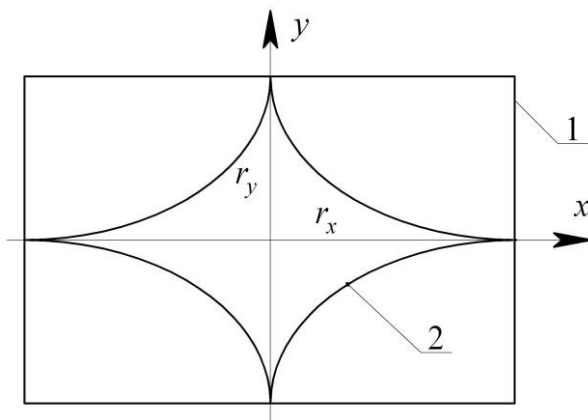
Согласно этой методике коэффициентом формы можно считать отношение площади проекции зерна к площади описанной вокруг нее окружности:

$$K_{\phi} = F_{\text{пз}} / F_0 . \quad (2.12)$$



1 – абразивное зерно; 2 – проекция зерна на вертикальную плоскость  $xz$ ;  
3 – проекция зерна на горизонтальную плоскость  $xy$

**Рисунок 2.5. – Абразивное зерно в прямоугольной системе координат**



1 – максимальная проекция зерна; 2 – минимальная проекция зерна

**Рисунок 2.6. – Идеализированные проекции зерен на плоскость  $xu$  для расчета (2.6)**

Учитывая, что

$$F_0 = \frac{\pi r_x^2}{4},$$

преобразуем формулу:

$$K_\phi = \frac{4F_{\text{пз}}}{\pi r_x^2} = 1,273 \frac{F_{\text{пз}}}{r_x^2}. \quad (2.13)$$

Для подтверждения преимуществ новой методики в [38] был проведен экспериментальный анализ всех приведенных методик расчета коэффициента формы по проекции зерна. Для обработки была принята выборка объемом 1000 зерен нормального электрокорунда 13А зернистостью 100. Абразивное зерно помещалось на горизонтальную поверхность, затем она заклеивалась в прозрачную пленку с сохранением своего положения. С помощью диапроектора, в который устанавливалась пленка с зерном, получалась его проекция (на плоскость  $xu$ ) с размерами, удобными для измерений. Измерялись следующие геометрические параметры проекции зерна:

- длина проекции  $r_x$ , равная диаметру описанной окружности;
- ширина проекции  $r_y$ ;
- диаметр вписанной окружности  $d_b$ ;
- площадь проекции  $F_{пз}$ .

Величины  $r_x$  и  $r_y$  измерялись непосредственно, а величины  $d_b$  и  $F_{пз}$  – с помощью специальных шаблоном.

Затем по измеренным параметрам проекции рассчитывались коэффициенты формы по соответствующим методикам:

$$K_{\phi}^{(1)} = r_x / r_y, \quad (2.14)$$

$$K_{\phi}^{(2)} = d_b / r_x, \quad (2.15)$$

$$K_{\phi}^{(3)} = 1,273 \frac{F_{пз}}{r_x^2}. \quad (2.16)$$

Также рассчитывалась необходимая для анализа величина разностей между коэффициентами формы, рассчитанными по разным методикам:

$$R_{1-2} = K_{\phi}^{(1)} - K_{\phi}^{(2)}, \quad (2.17)$$

$$R_{2-3} = K_{\phi}^{(2)} - K_{\phi}^{(3)}. \quad (2.18)$$

Значения коэффициентов форм можно группировать по интервалам с границами  $[1;0,995)$ ,  $[0,995;0,99)$ ,  $[0,99;0,985)$  и т. д.

Результат анализа полученных данных можно представить графически (рисунок 2.7). При условии, что геометрические параметры проекций были бы измерены абсолютно точно, данный коэффициент формы будет непрерывной случайной величиной, распределенной по некоторому закону в диапазоне  $(0;1]$ . Графически такая величина соответствует гладкой кривой (рисунок 2.7, поз. 1). В любой рассмотренной методике расчета коэффициента формы присутствуют следующие погрешности: конечность объема выборки, группировка значений коэффициентов формы по интервалам, неточность измерения геометрических параметров проекции, несовершенство самой методики прочее. Все это приводит к тому, что гистограммы распределения

коэффициентов формы отличаются от гладкой кривой, в них возникают «пики» на одних интервалах и «провалы» на других (рисунок 2.7, поз. 2 и 3).

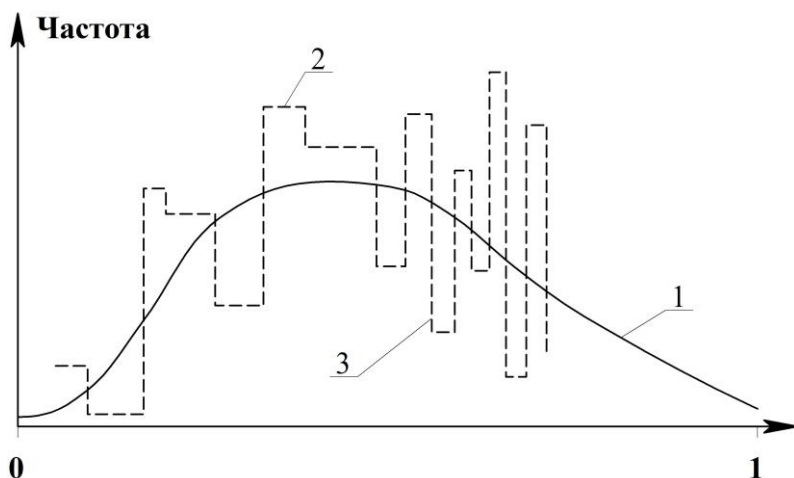


Рисунок 2.7. – Распределение коэффициентов формы абразивных зерен

Поскольку расчет коэффициентов форм по сравнительным методикам проводился на одних и тех же проекциях, то все погрешности оценки формы зерна у них были одинаковы, кроме погрешности собственно методики расчета. Следовательно, более точна та методика, гистограмма коэффициента формы которой ближе к гладкой кривой «идеального» распределения. Важен также анализ совпадения абсолютных значений коэффициентов, рассчитанных по разным методикам, что можно проанализировать по распределению разностей.

Анализ гистограмм [38] распределения разностей позволил сделать следующие выводы:

- порядка 80 % значений величины  $R_{2-3}$  лежит в диапазоне  $\pm 0,065$ , что говорит о весьма хорошем совпадении значений коэффициентов формы, полученных по методикам расчета (2.2) и (2.3);

- около 90 % значений величины  $R_{1-2}$  распределены практически равномерно в диапазоне от 0,01 до 0,2. Это говорит

о смещении коэффициентов, полученных по методике (2.1) в область ближе к единице, причем широта распределения разности  $R_{1-2}$  говорит о неравномерности смещения (то есть для разных форм проекций оно различно);

– точность оценки по методике расчета (2.1) (формула (2.14)) минимальна, поскольку имеет весьма значительное отклонение от гладкой кривой, а также существенно завышает против реального количества проекций зерен с коэффициентами форм в диапазоне (0,8;1];

– методики (2.2) и (2.3) (формулы (2.15) и (2.16)) вполне пригодны для использования – адекватно отображают форму проекций зерен и имеют много меньше отклонения от гладкой кривой, чем методика (2.1);

– методика (2.3) несколько ближе к кривой идеального распределения, чем методика (2.2) и, следовательно, точнее на 15–20 %, но и более трудоемка (при ручном измерении площади проекции зерна).

Наиболее широко распространенной и апробированной методикой количественной оценки формы зерен абразива до настоящего времени является методика (2.2) (формула (2.7) или (2.8) [36, 39, 40]).

Таким образом, можно рекомендовать для использования:

– методику качественной классификации для первичной экспресс-оценки спектра форм зерен стандартных фракций абразивов;

– методику (2.2) количественной оценки формы зерна для исследований, связанных с обработкой значительных объемов абразивных зерен;

– методику (2.3) количественной оценки формы зерна для исследований, связанных с единичными зёрнами абразива, либо с небольшими их объемами, при высоких требованиях к точности оценки формы зерна.

### **2.1.2. Геометрические параметры однородной глобулярной модели**

Если корпускулярная система, к которой относится ФАП в рабочем зазоре, допускает ее аппроксимацию глобулярной

моделью и достаточно ограничиться однородной моделью, то ее параметры определены следующим образом.

**I.** Число контактов. Необходимую для этого величину пористости  $\Pi$  получают из соотношения

$$\Pi = \frac{V_{\Pi}}{V_{\Pi} + V_M}, \quad (2.19)$$

где объем пор  $V_{\Pi}$  и объем материала  $V_M$  находят из истинной плотности [42].

Действительное число контактов в образце может варьировать от 2 до 12. Если распределение  $n$  симметрично, то найденное значение  $n$  имеет смысл среднего, совпадающего с преобладающим числом контактов. Если оно несимметрично – только среднего числа контактов. Полученная величина  $n$  является достаточно хорошей характеристикой систем с узким интервалом распределения этого параметра.

**II.** Размер глобул модели. Диаметр глобул модели ( $D$ ) может быть найден из величины поверхности  $S$  ( $\text{м}^2/\text{г}$ ) образца по формуле:

$$D = \frac{6 \cdot 10^4}{\delta_{\text{ист}} S}, \quad (2.20)$$

где  $\delta_{\text{ист}}$  – истинная плотность,  $\text{г}/\text{см}^3$ .

Размер частиц – наиболее достоверно определяемый параметр монодисперсных корпускулярных пористых систем, особенно в тех случаях, когда форма частиц геометрически правильна. Имеются многочисленные доказательства того, что размеры частиц, определяемые из величины поверхности практически идентичны с найденными другими независимыми методами.

**III.** Размер сужений (горл) пор. Оценка размера сужений пор в модели как диаметра вписанной окружности может быть получена из объема  $V$  и поверхности  $S$  пор подобно тому, как это

делается для цилиндрических пор, для которых как известно, из геометрии открытого цилиндра, выводится формула

$$d = \frac{4V}{S}. \quad (2.21)$$

По аналогии, для глобулярных систем можно принять

$$d_r = \frac{\gamma V}{S}. \quad (2.22)$$

Каков должен быть коэффициент  $\gamma$  в этом уравнении, если  $d_r$  имеет смысл диаметра вписанной в горло поры окружности? Пользуясь данными таблицей 2.7, из (2.22) его легко вычислить. Так, для  $n=6$   $V=0,476D^3$  и  $d_r=0,414D$ . Эти величины даны в расчете на один шар упаковки, поэтому, если частицы не очень малы, доступная поверхность каждой глобулы примерно равна ее геометрической поверхности  $S = \pi D^2$ . Тогда

$$0,414D = \gamma \frac{0,476D^3}{\pi D^2} \text{ и } \gamma = 2,74.$$

Аналогичные вычисления, сделанные для упаковок  $n = 12, 8, 4$  и  $3$  приводят к значениям  $\gamma = 2,64; 2,87; 2,83; 2,60$  соответственно. Таким образом,  $\gamma$  сохраняет примерно постоянное значение для любой из правильных упаковок. Средняя величина из пяти вычисленных значений составляет  $2,73$ . Поскольку величина  $\gamma$  очень слабо зависит от типа упаковки, можно предположить, что среднее ее значение применимо и для реальных систем из случайно упакованных глобул. Полученное среднее значение  $\gamma = 2,8$  находится в хорошем согласии с теорией, что дает возможность использовать это значение для оценки размера сужений в однородной модели, описывающей реальные кор-пускулярные системы по формуле

$$d_r = \frac{2,8V}{S}. \quad (2.23)$$

Таблица 2.7 – Результаты расчетов средних параметров ФАП

Номер образца	$V, \text{см}^3/\text{г}$	$\Pi, \%$	$n$
1	1,76	83,6	3,7
2	0,92	67,0	4,7
3	0,90	66,5	5,0
4	0,80	63,8	5,4
5	0,49	52,0	6,1
6	0,49	52,0	6,6
7	0,39	46,2	7,8

Из уравнения (2.23) можно получить соотношение между диаметром пор и диаметром частиц. Отсюда следует, что удельная поверхность пор

$$S_{\text{п}} = \frac{2,8V}{d_{\text{г}}} \quad (2.24)$$

С другой стороны, удельная поверхность частиц

$$S_{\text{ч}} = \frac{6}{\delta_{\text{ист}} D} \quad (2.25)$$

В уравнениях (2.24) и (2.25) примерно одно и то же допущение о равенстве доступной и геометрической поверхности системы. В корпускулярном пористом теле поверхность пор равна поверхности частиц:

$$\frac{2,8V}{d_{\text{г}}} = \frac{6}{\delta_{\text{ист}} D} \quad (2.26)$$

отсюда

$$d_{\text{г}} = \frac{\delta_{\text{ист}}}{2,14} VD \quad (2.27)$$



Уравнение (2.27) дает аналитическое выражение аксиомы о зависимости размера пор от размера частиц и плотности из упаковки. Действительно, в этом уравнении зависимость от  $D$  выражена явно; плотность упаковки определяется объемом пор: чем меньше  $V$ , тем плотнее упаковка и тем меньше размер пор. Во многих работах указывается, что размер пор приблизительно одного порядка с размером частиц.

**IV.** Распределение частиц по числам контактов. Если образец состоит из приблизительно одинаковых частиц, то размер пор и, в частности, размер их сужений может изменяться исключительно за счет изменения плотности упаковки частиц. Участки с рыхлой упаковкой образуют поры с широкими входами, участки с плотной упаковкой – поры с узкими входами.

Для получения распределения числа частиц по числам контактов интегральная кривая  $V = f(d)$ , полученная по какому-либо из экспериментальных методов, разбивается на участки. Для каждого из участков поры размером от  $d_i$  до  $d_{i+1}$  имеют объем

$$(\Delta V_i)_ч = (\Delta V_i)_п \frac{100 - \Pi_i}{\Pi_i}. \quad (2.28)$$

Объем одной частицы вычисляется из ее размера. Числа частиц  $N_i$  в рассматриваемом интервале получается делением их общего объема на объем одной частицы. Таким образом, в данном образце  $N_i$  частиц имеют среднее число контактов  $n_i$ .

**V.** Минимальный размер пор. Горло поры минимального размера в случайных упаковках может быть образовано тремя касающимися частицами. Если система действительно монодисперсна, то диаметр вписанной в горло поры окружности равен  $0,155D$ . Таким образом, минимальный размер пор в таких системах легко может быть вычислен из размера частиц, т. е. оценен из удельной поверхности образца

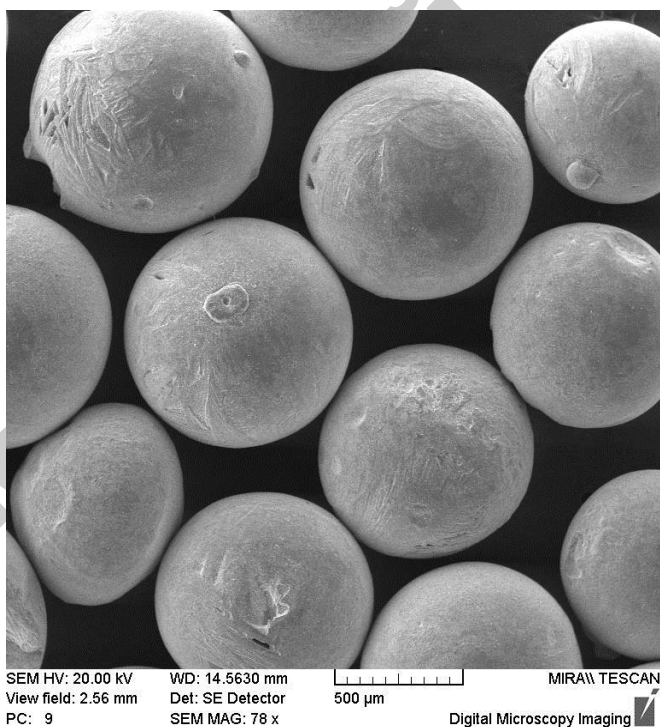
$$d_{\min} = \frac{0,155 \cdot 6 \cdot 10^4}{\delta_{\text{ист}} S} = \frac{0,93 \cdot 10^4}{\delta_{\text{ист}} S}. \quad (2.29)$$

Такое определение позволяет быстро оценить предельно малый размер пор, какой может оказаться в исследуемом образце

и сделать вывод о возможной роли этих пор в рассматриваемом процессе.

В качестве иллюстрации использования глобулярной модели проведены расчеты по описанной выше методике для типично глобулярных систем – ФАП на основе высокохромистого чугуна (рисунок 2.8).

Таким образом, использование однородной глобулярной модели дает возможность получить все основные геометрические параметры структуры ФАП, имеющие смысл средних значений для рассматриваемых образцов. Два главных параметра – размер глобул и число контактов – определяют численную величину производного параметра – размера горла пор. Средний размер горла пор  $d_r$  в корпускулярных системах является важной характеристикой при рассмотрении многих процессов.



**Рисунок 2.8. – Частицы ФАП на основе высокохромистого чугуна**

## **2.2. Смазочно-охлаждающие технологические средства**

При MAO следует выделить локальную, контактную и общую установившуюся температуру. Основными факторами влияющими на мощность теплового источника являются силы резания. Они определяются интенсивностью трения и деформации при контакте поверхностей ферроабразивной щетки и детали в локальной зоне и скоростью резания.

Одним из путей снижения тепловой напряженности, а, следовательно, и минимизации дефектов процесса MAO, является применение смазочно-охлаждающих технологических средств (СОТС). Их действия проявляется главным образом в следующих направлениях:

1. СОТС могут влиять на изменение сил резания.
2. СОТС могут существенно изменять интенсивность затупления зерен.
3. СОТС при MAO сталей и сплавов влияют на интенсивность теплообразования, распределение тепла, температуру в зоне контакта.

### **2.2.1. Влияние смазочно-охлаждающих технологических средств на процесс дефектообразования при абразивной обработке**

По данным большинства исследователей СОТС способствуют снижению коэффициента трения за счет их способности создавать достаточно устойчивые смазочные пленки на поверхностях абразивных зерен.

Так, С. Н. Корчак и В. Д. Эльянов [43, 44], отмечают, что снижение коэффициента и силы внешнего трения, в результате устранения контакта трущихся элементов, налипаний и задиров, при использовании масла, по сравнению с водными СОТС, объясняется способностью масляных СОТС создавать на поверхности шлифуемой детали масляных пленок, на разрушение которых будет расходоваться большая доля внешних сил.

В. Д. Эльянов [44] отмечает огромную роль в создании граничных смазочных пленок поверхностно-активных веществ (ПАВ), проявляющих адсорбционную активность на поверхностях раздела при абразивной обработке. Их действие заключается

в способности при определенных температурах создавать жидкие пленки, способные выдержать относительно высокие нагрузки, что способствует увеличению интенсивности съема металла, без опасения появления прижогов. В. Д. Эльянов также отмечает, что наиболее высокими смазывающими свойствами обладают масляные СОТС. Они существенно снижают температуру в рабочей зоне при абразивной обработке и глубину прижога. Исходя из опытов о влияние различных СОТС на степень прижога при финишной абразивной обработке, В. Д. Эльянов пришел к выводу, что интенсивность образования прижогов уменьшается в большей степени не за счет теплоотвода, а за счет улучшения условий резания и уменьшения сил трения.

С.Г. Энтелис [45] утверждает, что благодаря смазывающим свойствам СОТС уменьшается схватывание, механическое и диффузионное взаимодействие абразивных зерен и обрабатываемого металла вследствие образования граничных пленок.

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что в процессе MAO СОТС влияют на изменение сил резания путем уменьшения коэффициента трения, в связи с ее способностью создавать устойчивые смазочные пленки на поверхности абразивных зерен.

Данную зависимость можно проследить на примере формулы расчета силы резания, действующую на единичную режущую кромку изношенного абразивного зерна, приведенной в работе В. В. Федотова и А. А. Кузнецова:

$$F_p = \frac{2 \cdot 1,23 HV b_p (N + \tau_0 \pi b_p^2 h_{изм}^{2\nu_p} + N\beta) (y^{\nu_p+1} - h_{изм}^{\nu_p+1})}{N(\nu_p) + 1} + \left( \frac{\tau_0 \pi b_p^2 h_{изм}^{2\nu_p}}{N} + \beta \right) N, \quad (2.30)$$

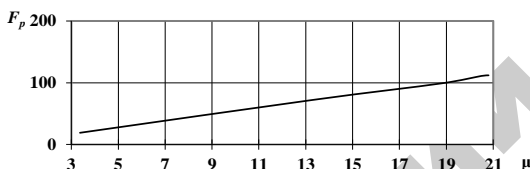
где  $N$  – сила нормального давления на зерно в процессе абразивной обработки;  $\mu$  – коэффициент трения скольжения;  $h_{изм}$  – высота износившейся части зерна;  $HV$  – твердость обрабатываемой поверхности;  $y$  – глубина внедрения абразивного зерна в обрабатываемую поверхность;  $\tau_0$ ,  $\beta$  – параметры, характеризующие свойства материала поверхностных слоев.

Значение коэффициента трения скольжения определяется как

$$\mu = \mu_0 = \frac{\tau}{p_r} = \frac{\tau_0 \pi b_p^2 h_{\text{изм}}^{2\nu_p}}{N} + \beta,$$

где  $p_r$  – касательные напряжения, действующие по контактной поверхности.

Как видно из графика (рисунок 2.9) величина силы резания прямо пропорциональна значению коэффициента трения скольжения  $\mu$ .



**Рисунок 2.9. – Зависимость силы резания от коэффициента трения скольжения  $\mu$**

Рассматривая вопрос о влиянии СОТС на износ и уменьшения режущей способности большинство исследователей [43-45] утверждают, что СОТС способствуют снижению затупления абразивного зерна, уменьшению налипания. Объясняют способностью СОТС создавать вязкие смазочные пленки, которые способствуют увеличению длины проскальзывания зерен по обрабатываемой поверхности. Исходя их формулы (2.30) изменение площадки износа косвенно влияет на коэффициент трения. Увеличение площадки износа влечет за собой увеличение коэффициента трения, а, следовательно, и сил резания. Таким образом, происходит интенсификация теплообразования и повышается вероятность появления прижогов.

СОТС при МАО сталей и сплавов влияют на интенсивность теплообразования, распределение тепла, температуру в зоне контакта.

Проводя анализ теплового баланса при абразивной обработке, Совкин [46] приводит данные различных исследователей. По данным А. И. Исаева, С. С. Силина и И. Ватнабе СОТС не играет роль в распределении теплоты в процессе абразивной обработки. Следовательно, по их мнению, СОТС практически не оказывает влияния на распределение теплоты в процессе абразивной обработки.

Е. Н. Маслов [47] в своей работе отмечает, что охлаждающее действие СОТС является основным, заключающемся в хорошем общем охлаждении детали в зоне обработки, снижающем ее температуру. Охлаждающая жидкость создает более благоприятные условия работы абразивного зерна и уменьшает вероятность получения большого числа глубоких (нерегулярных) рисков путем очищения зоны обработки и абразивного инструмента от мельчайшей металлической стружки и других отходов процесса. СОТС, по его мнению, не попадает непосредственно в зону микрорезания шлифующим зерном и поэтому мало влияет на величину мгновенных температур в зоне работы зерна.

М. Ю. Александрова, С. А. Добрынин, Г. И. Фирсов [48] считают, что охлаждение обрабатываемой детали жидкостями уменьшает общий нагрев поверхности, но не может заметно повлиять на скорость мгновенных нагревов и охлаждений поверхности, так как основная часть тепла отводится внутрь самого изделия.

Е. С. Киселев, В. Н. Ковальногов [47] отмечают, что охлаждающее действие СОТС состоит в отводе теплоты от нагретых участков зоны обработки и свободных поверхностей заготовки и круга за счет ее нагрева и парообразования.

Таким образом, СОТС уменьшают общий нагрев поверхности. Однако СОТС влияют на локальную температуру при МАО, вследствие подачи СОТС непосредственно в зону резания в отличие от шлифования. Это объясняется низкой температурой в данной зоне, наличием контактных давлений ввиду клинообразного зазора, обеспечивающего попадание СОТС в зону резания.

СОТС оказывают основное свое влияние как смазывающая среда, то есть влияют на коэффициент трения. За счет снижения коэффициента трения снижается сила резания и снижается

мощность теплового источника, от которого зависит максимальная температура в зоне резания единичного абразивного зерна. Охлаждающее влияние СОТС в зоне резания единичного абразивного зерна достаточно мало и может не учитываться при формировании модели теплораспределения и тепловыделения. Учет влияния СОТС рационально в первую очередь вести на этапе вычисления сил резания единичным абразивным зерном и в дальнейшем при расчете мощности теплового источника.

Особую роль СОТС имеют при МАО алюминиевых сплавов, относящихся к немагнитным материалам, в процессе которой отсутствуют силы магнитного поля между поверхностью изделия и частицами порошка. Притяжение режущих частиц обеспечивается только за счет внешнего магнитного поля, создаваемого электромагнитной системой. Для обеспечения требуемой производительности обработки используют различные методы как, например, восстановление исходной плотности режущей щетки путем введения в рабочую зону добавочных ферромагнитных тел [50].

Установлено, что имеются определенные интервалы режимов обработки, при которых процесс съема металла значительно снижается или прекращается совсем. Изменение производительности обработки в данном случае может быть объяснено теорией структурной приспособляемости металлов (СП), разработанной Б. И. Костецким [51].

Согласно теории СП при нагружении в тонких поверхностных слоях протекает пластическая деформация, ориентированная относительно направления перемещения твердых тел, в результате чего поверхностный слой изменяет свои свойства и переходит в активированное состояние. Взаимодействие поверхности металла с внешней средой путем адсорбционного, диффузионного или химического взаимодействия способствует переходу ее из термодинамически неустойчивого состояния в пассивное. Эти изменения в поверхностных слоях приводят к образованию новой фазы, так называемых вторичных структур, которые становятся объектом разрушения при последующей эксплуатации.

Как указывают авторы [52], варьируя такими характеристиками, как режимы обработки и состав СОТС, возможно осуществить изменение уровня износа трущихся тел в ту или иную

сторону. Установлено, что вторичные структуры имеют ультрадисперсное строение, метастабильны и являются твердыми растворами или химическими соединениями металлов и активных компонентов среды.

Кроме этого для изделий из алюминиевых сплавов, к которым предъявляются высокие требования к светоотражающей способности, существует проблема потемнения обработанной поверхности при МАО железосодержащими ФАП [53]. Хотя алюминий и его сплавы и относятся к некарбидообразующим элементам, он имеет менее достроенную  $d$  – электронную полосу по сравнению с железом, так как в периодической системе Д. И. Менделеева  $Al$  расположен левее железа  $Fe$ . Однако, согласно [54], именно такие элементы в сталях образуют карбиды, и поэтому, если  $Al$  и создает химическое соединение  $Al_3C_2$ , то оно совершенно отлично от карбидов металлов переходной группы типа  $Ti$ ,  $V$ ,  $Cr$ ,  $Ta$ , поскольку образуется за счет ковалентной связи и не характеризуется металлическими свойствами. Обладая «рыхлой» структурой, соединение  $Al_3C_2$  достаточно легко вымывается СОТС из рабочей зоны при соответствующих термодинамических условиях процесса МАО. Не принявший участия в данной химической реакции остаточный углерод в виде графита гетеродиффундирует на ювенильные поверхности, образуемые в процессе обработки, однако за счет последующего съема материала удаляется со стружкой. Таким образом, согласно [53] представлена картина взаимодействия ФАП с обрабатываемой поверхностью, однако она не является полной, поскольку при израсходованном уже запасе остаточного углерода в рабочем зазоре потемнение поверхностного слоя продолжается.

Поэтому объяснением этой причины перманентности потемнения алюминиевых сплавов является наличие в ФАП Ж15КТ железа, которое по сравнению с углеродом практически не растворяется в алюминии. Так как известно, что при эвтектической температуре в  $655\text{ }^{\circ}\text{C}$  его растворимость в алюминии не превышает  $0,03\text{ }\%$  [54]. Поэтому формируемая в процессе обработки структура эвтектики состоит из алюминия ( $Al$ ) и темных включений ( $Al_3Fe$ ), которые более устойчивы к вымыванию из зоны резания по причине активного внедрения в поверхностный слой.



Следовательно, для устранения данного эффекта необходимо провести коалесценцию получаемой эвтектики, т. е. образование избыточной фазы  $FeS$  и ее укрупнение, и поскольку любое количество серы или ее соединений образует сульфид железа, инертный по отношению к алюминию, то данный сульфид железа практически в нем не растворимый. Это позволяет эффективно выводить сульфид железа из рабочей зоны в виде шлама, что обеспечивает высокую светоотражательную способность обработанной поверхности.

Известны составы СОТС, которые нашли наибольшее применение при финишных методах обработки, как, например, состав, включающий масс. % [55]: нитрит натрия – 0,5–1,5; триэтаноламин – 3–12; триэтаноламиновое мыло олеиновой кислоты – 0,5–1,0; моноалкиловый эфир полиэтиленгликоля на основе первичных жирных спиртов фракции  $C_{10}$ – $C_{16}$  – 20–40 и остальное – вода, характеризуются образованием шлама на поверхности детали, расслоением концентрата при хранении и нестабильности свойств при длительной эксплуатации. Поэтому, задачей, направленной на повышение эффективности процесса МАО алюминиевых сплавов, является разработка и создание СОТС, обеспечивающего рост качества и производительности изготовления деталей машин и достижение требуемого уровня физико-химических характеристик при хранении, эксплуатации и утилизации данного комплексного соединения. Ранее проведенные исследования [56] показали, что эффективными аналогами вышеуказанных СОТС служат отечественные продукты на основе сульфогрупп и их производных. Самим группам, в том числе и их фрагментам присуща высокая солюбилизующая способность, что обеспечивает необходимые показатели смачивающего и моющего действия, стабильность концентратов и растворов и возможность приготовления в жесткой воде (4–6 мг экв./л).

Колебание загрязненности составов в процессе обработки, связанного как с качеством технического сырья, так и многократности оборота цикла участия в процессе МАО поверхностей алюминиевых деталей компенсируются широким интервалом  $pH$ , равным 8–10. Для решения поставленной задачи требуется создание нового вида СОТС, включающего триэтаноламинные

эфины синтетических жирных кислот фракции C<sub>7</sub>–C<sub>10</sub>, калиевые мыла олеиновой кислоты, нитрит натрия и воду, в который дополнительно вводится сульфозтоксилат натрия ТУ 6-01-1353–88, обладающий хорошей растворимостью в воде, придающий высокую устойчивость водному раствору и имеющий высокие пенообразующую и моющую способности. Предложенное сочетание компонентов позволяет получить материал с более высокими эксплуатационными характеристиками и наименьшими затратами по сравнению с известными аналогами.

Для проведения исследований были приготовлены составы концентрата СОТС, физико-механические свойства которых представлены в таблице 2.8.

Экспериментальные исследования известного [57] и предлагаемых составов СОТС проводились при следующих режимах и параметрах процесса МАО: магнитная индукция,  $B = 1,0$  Т; скорость резания,  $V_p = 2,5$  м/с; скорость осцилляции,  $V_o = 0,15$  м/с; амплитуда осцилляции,  $A = 1,0$  мм; величина рабочего зазора,  $\delta = 1,0$  мм; время обработки,  $t = 15–60$  с. ФАП – Ж15КТ ТУ 6-03-09-483–81, размерность зерна,  $\Delta = 200–315$  мкм.

Таблица 2.8 – Физико-механические свойства известного и предлагаемых составов

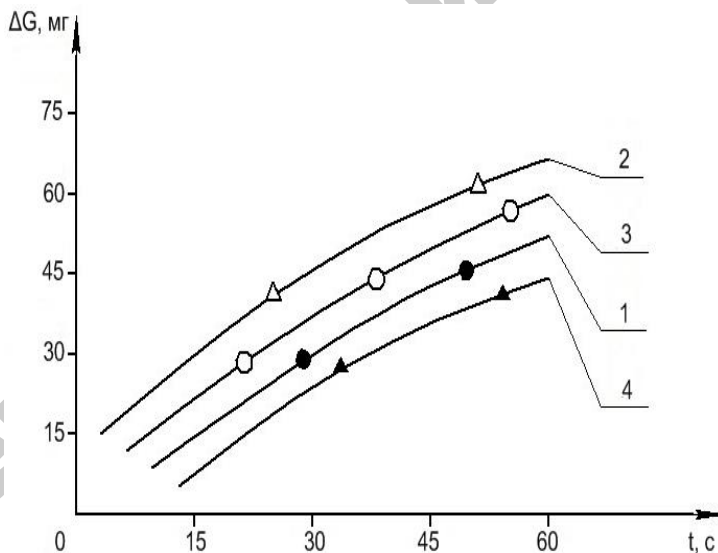
Показатель	Составы СОТС			
	прототип [58]	предлагаемые		
		1	2	3
Вязкость кинематическая при 50°С, сСт	40,51	43,67	45,02	46,83
рН 3%-го раствора	8,7	9,0	8,3	8,5
Склонность к пенообразованию, см <sup>3</sup>	730	670	650	640
Устойчивость, см <sup>3</sup>	160	135	160	150
Плотность, г/см <sup>3</sup>	1,09	0,87	0,94	1,00

В качестве образцов использовались втулки из алюминиевых сплавов АМг6 и Д16 ГОСТ 4784-97  $D \times d \times L = 36 \times 32 \times 32$  мм,

которые крепились на ферромагнитной оправке. Исходная шероховатость поверхности образца  $Ra_1 = 1,25 - 1,60$  мм. В процессе проведения исследований оценивался массовый съем материала ( $\Delta G$ , мг) и достигаемая шероховатость поверхности ( $Ra_2$ , мкм). Определение массы образцов на весах аналитических ВЛА-200м с точностью до  $\pm 0,001$  г. Исследование шероховатости поверхности образцов выполнялось на профилографе-профилометре мод. 250 Калибр посредством фиксации данных на профилограмме. Значение показателей для данных условий MAO устанавливалось как среднее арифметическое результатов измерений пяти образцов.

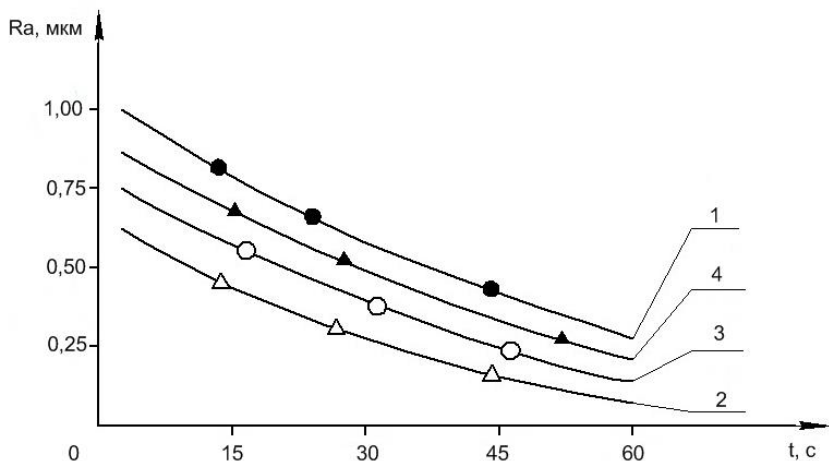
Результаты MAO образцов с использованием известного и предлагаемых составов СОТС приведены на рисунках 2.10–2.13.

Анализ результатов исследований показывает, что применение варианта СОТС №2 обеспечивает увеличение производительности процесса MAO в 1,1–1,35 раза и снижение шероховатости в 1,2–1,4 раза.

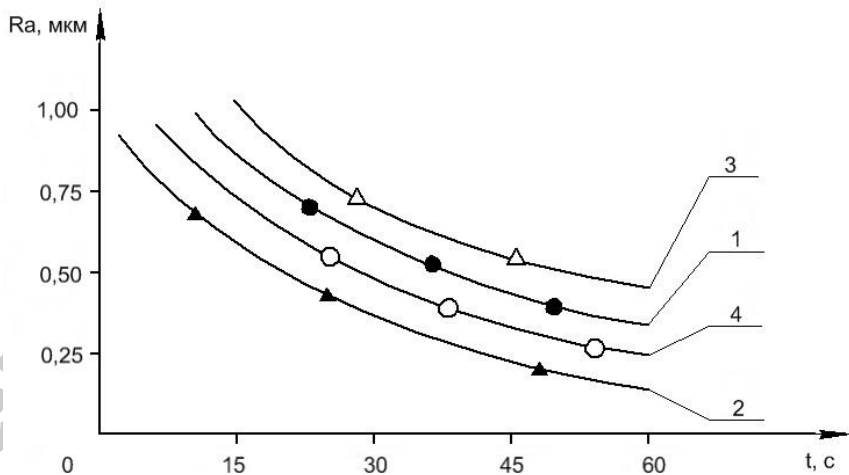


1 - состав I на основе сульфогрупп; 2 – состав II на основе сульфогрупп;  
3 – состав III на основе сульфогрупп; 4 – состав [57]

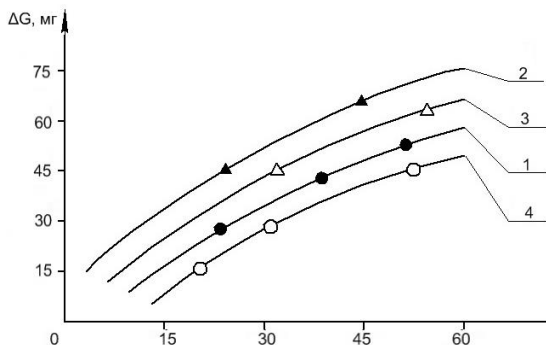
**Рисунок 2.10. – Производительность обработки методом MAO  
алюминиевого сплава АМгб**



1 - состав I на основе сульфогрупп; 2 - состав II на основе сульфогрупп;  
 3 - состав III на основе сульфогрупп; 4 - состав [57]  
**Рисунок 2.11. – Шероховатость поверхности после MAO алюминиевого сплава AMg6**



1 - состав I на основе сульфогрупп; 2 - состав II на основе сульфогрупп; 3 - состав III на основе сульфогрупп; 4 - состав [57]  
**Рисунок 2.12. – Шероховатость поверхности после MAO алюминиевого сплава D16**



1 - состав I на основе сульфогрупп; 2 – состав II на основе сульфогрупп;  
3 – состав III на основе сульфогрупп; 4 – состав [57]

**Рисунок 2.13. – Производительность обработки методом МАО  
алюминиевого сплава Д16**

### **2.2.2. Исследование протекания смазочно-охлаждающего технологического средства через слой ферроабразивного порошка**

Для изучения процесса транспортировки СОТС в зону резания и его обновления при МАО были проведены лабораторные эксперименты по протеканию жидкостей с различными физико-химическими свойствами через слой ФАП. В качестве исходных материалов и лабораторного оборудования использовались:

#### **1. Жидкости:**

- №1 - СОТС 1 (5 % водная водомасляная эмульсия – без ультразвуковой обработки);
- №2 - СОТС 2 (5 % водная водомасляная эмульсия – с ультразвуковой обработки 5 мин);
- №3 - раствор  $NaCl$  (10 г/л);
- №4 - техническая вода;
- №5 - дистиллированная вода.

#### **2. ФАП Ж15КТ.**

#### **3. Стеклообразная трубка различных диаметров:**

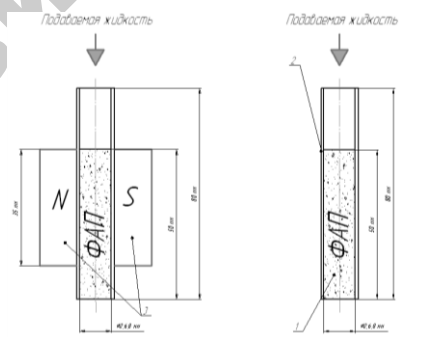
- 1 образец – внешний диаметр 12 мм, внутренний - 8 мм;
- 2 образец – внешний диаметр 8, внутренний - 6 мм;
- 3 образец – внешний диаметр 6 мм, внутренний - 2 мм.

#### **4. Постоянные магниты.**

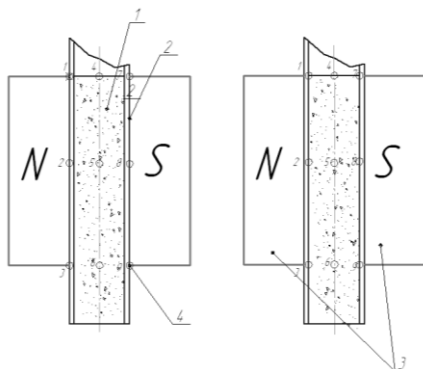
Для проведения экспериментов по диспергированию образца №2 было приготовлено 50 мл эмульсии. Диспергирование эмульсии СОТС осуществлялась с помощью ультразвукового диспергатора погружного типа (производство БГУИР, Беларусь). Ультразвуковую обработку вели на рабочей частоте 22 кГц при выходной мощности генератора 30 Вт. Продолжительность диспергирования на ультразвуковой установке эмульсии СОТС составляла 5 мин.

Методика проведения экспериментов по протеканию жидкости через слой ФАП заключается в следующем. В стеклянную трубку различных диаметров помещают ФАП и закрепляют ее на штатив. Через слой ФАП пропускали определенный объем жидкости (№1–№5). Все это фиксировали на фотокамеру. В дальнейшем при помощи ПК была произведена обработка данных в специальных программах для того, чтобы произвести вычисления об изменении скорости от времени протекания жидкости через слой ФАП. Эксперименты проводились с применением постоянных магнитов. На рисунке 2.14 приведена схема эксперимента.

Для проведения экспериментов по измерению магнитной индукции постоянного магнитного поля использовали тесламетр (ИМИ-1). При помощи тесламетра в определенных точках, представленных на рисунке 2.15, измерялась магнитная индукция  $B$ . Полученные данные приведены в таблицах 2.9–2.13.



1 – ФАП Ж15КТ; 2 – стеклянная трубка; 3 – постоянные магниты  
Рисунок 2.14. – Схема экспериментов по протеканию СОТС через ФАП



1 – ФАП Ж15КТ; 2 – стеклянная трубка; 3 – постоянные магниты;  
4 – точки, в которых проводили измерение магнитной индукции  $B$  (1...9), погрешность  $\pm 5\%$

**Рисунок 2.15. – Схема измерения магнитной индукции**

Таблица 2.9. – Изменение магнитной индукции  $B$  от диаметра  $d$  стеклянной трубки

Диаметр стеклянной трубки, $d$ , мм		Магнитная индукция, $B$ , Т								
		Точки измерения								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Трубка №1	12 мм	0,06	0,21	0,3	0,06	0,12	0,17	0,25	0,29	0,18
	8 мм	0,32	0,26	0,23	0,16	0,15	0,17	0,28	0,32	0,21
Трубка №2	8 мм	0,32	0,26	0,23	0,16	0,15	0,17	0,28	0,32	0,21
	6 мм	0,33	0,32	0,31	0,22	0,24	0,19	0,32	0,28	0,31
Трубка №3	6 мм	0,33	0,32	0,31	0,22	0,24	0,19	0,32	0,28	0,31
	2 мм	0,41	0,35	0,42	0,35	0,4	0,45	0,38	0,45	0,42

Для каждого из диаметров рассчитываем среднюю магнитную индукцию:

1) для внешнего диаметра:

– для  $d = 12$  мм:  $B_{\text{ср}} = 0,182$  Т;

– для  $d = 8$  мм:  $B_{\text{ср}} = 0,257$  Т;

– для  $d = 6$  мм:  $B_{\text{ср}} = 0,280$  Т;

2) для внутреннего диаметра:

– для  $d = 8$  мм:  $B_{\text{ср}} = 0,257$  Т;

– для  $d = 6$  мм:  $B_{\text{ср}} = 0,280$  Т;

– для  $d = 2$  мм:  $B_{\text{ср}} = 0,403$  Т.

Таблица 2.10 – Изменение высоты  $H$  столба от времени протекания  $t$  жидкости через ФАП без магнитного поля в трубке №1 (внутренний диаметр 8 мм)

Образец	Время протекания $t$ , с						
	1	2	5	10	15	20	25
СОТС 1	8	10	12	15	20	24	27
СОТС 2	7	8	14	17	19	22	25
<i>NaCl</i>	10	13	18	21	23	26	29
Техническая вода	12	15	18	23	29	33	35
Дистиллированная вода	12	15	18	25	31	34	36

Таблица 2.11 – Изменение высоты  $H$  столба от времени протекания  $t$  жидкости через ФАП с магнитным полем в трубке №1 (внутренний диаметр 8 мм)

Образец	Время протекания $t$ , с						
	1	2	5	10	15	20	25
СОТС 1	7	10	12	15	19	21	24
СОТС 2	7	9	11	14	17	19	23
<i>NaCl</i>	12	14	17	21	23	26	29
Техническая вода	12	16	18	23	29	32	34
Дистиллированная вода	12	15	19	24	30	33	35

Таблица 2.12 – Изменение скорости  $V$  от времени протекания  $t$  жидкости через ФАП без магнитного поля в трубке №1 (внутренний диаметр 8 мм)

Образец	Время протекания $t$ , с						
	1	2	5	10	15	20	25
СОТС 1	8	5	2,4	1,5	1,33	1,2	1,08
СОТС 2	7	4	2,8	1,7	1,26	1,1	1,0
<i>NaCl</i>	10	6,5	3,4	2,1	1,53	1,3	1,16
Техническая вода	12	7,5	3,4	2,3	1,93	1,65	1,4
Дистиллированная вода	12	7,5	3,4	2,5	2,03	1,7	1,44

Таблица 2.13 – Изменение скорости  $V$  от времени протекания  $t$  жидкости через ФАП с магнитным полем в трубке №1 (внутренний диаметр 8 мм)

Образец	Время протекания $t$ , с						
	1	2	5	10	15	20	25
СОТС 1	7	5	2,4	1,5	1,27	1,05	1,08
СОТС 2	7	4,5	2,2	1,4	1,13	0,95	0,91
<i>NaCl</i>	12	7	3,4	2,1	1,53	1,3	1,16
Техническая вода	12	8	3,6	2,3	1,92	1,6	1,45
Дистиллированная вода	12	7,5	3,8	2,4	2	1,65	1,4



Таким образом, в пограничном слое при наличии магнитного поля (магнитогидродинамическом пограничном слое) падение скорости при приближении к стенке связано с действием сил трения электромагнитных сил, т. е. обусловлено как обычной вязкостью, так и «магнитной» вязкостью жидкости, пренебрегать которыми в данном случае нельзя даже при больших значениях чисел Рейнольдса  $Re$ .

И. П. Вукалович отмечает, что характерные особенности магнитогидродинамического пограничного слоя, в частности его толщина, будут зависеть как от параметров движения, так и от параметров действующего магнитного поля.

Так как пограничный слой тонок, то движение в нем будет проходить в основном параллельно обтекаемой поверхности (стенке канала). По направлению нормали к стенке канала и вблизи последней скорость и напряженность магнитного поля меняются весьма быстро. Заметное изменение  $w_x$  и  $H_x$  происходит на расстоянии порядка толщины  $\delta$  пограничного слоя. Вдоль оси  $Ox$ , т. е. по направлению движения, скорость и напряженность магнитного поля меняются сравнительно медленно; заметное изменение  $w_x$  и  $H_x$  имеет место лишь на расстоянии  $l_0$ , где  $l_0$  характеристическая длина (в нашем случае расстояние от начала канала). Поэтому производные  $\vec{w}$  и  $\vec{H}$  по оси  $z$  велики по сравнению с производными по оси  $x$ .

Уравнение движения жидкости в пограничном слое описывает система уравнений (2.31).

$$\left. \begin{aligned} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{1}{4\pi\rho} \left( H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} - H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) = \\ = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{dx} \left( p + \frac{H_x^2}{8\pi} \right); \\ \frac{\partial}{\partial z} (w_z H_x - w_x H_z) - \nu_m \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} (2.31)$$

В ядре потока давление  $p$  согласно основным уравнениям магнитогидродинамического движения с напряжением магнитного и электрического полей соотношением

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{w_0^2}{2} + \frac{C[\vec{E}_0 \vec{H}_0] \vec{w}_0}{4\pi\rho w_0^2} = \text{const}.$$

В продольном магнитном поле (при параллельных  $\vec{w}_0$  и  $\vec{H}_0$ ), а также в поперечном магнитном поле  $\vec{E}_0 = 0$ ,

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{w_0^2}{2} = \text{const}.$$

Из этого следует, что в первом из уравнений (2.31) правая часть равна нулю.

Превышения энергии в пограничном слое определяется уравнением движения жидкости в пограничном слое и уравнением переноса теплоты в этом слое (2.32), которое имеет вид

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{v}{2c_p} \left( \frac{\partial w_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{v_m}{4\pi c_p \rho} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} \right)^2 + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (2.32)$$

Второй член правой части этого уравнения представляет собой джоулеву теплоту  $j^2/\beta\rho$ , выделяющуюся в единице массы жидкости.

Краевые условия для уравнений (2.31) и (2.32) магнитогидродинамического пограничного слоя:

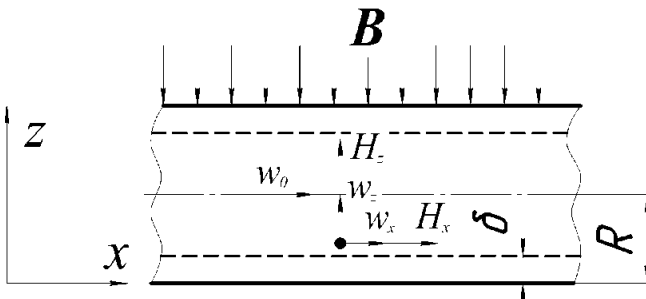
$$\begin{aligned} w_x = 0; \quad w_z = 0; \quad T = T_{\text{ст}} \quad \text{при } z = 0; \\ w_x = w_0; \quad \frac{\partial w_x}{\partial z} = 0; \quad T = T_0; \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \quad \text{при } z \geq \delta. \end{aligned}$$

Кроме этих условий, появляются еще дополнительные условия, связанные с природой обтекаемого тела и определяющие значения электрического и магнитного полей на поверхности

канала. При поперечном магнитном поле тангенциальная составляющая  $H_x$  магнитного поля внутри канала у его стенок и снаружи будут иметь противоположное направление.

В ламинарном магнитогидродинамическом слое (рисунок 2.16) параллельная обтекаемой поверхности (стенке канала) составляющая скорости изменяется с расстоянием от стенки канала линейно, подобно тому, как это имеет место быть в обычном ламинарном пограничном слое:

$$w_x = w_0 \frac{z}{\delta}.$$



**Рисунок 2.16. – Ламинарное течение СОТС в пористом канале при воздействии поперечного магнитного поля**

Введем безразмерные переменные  $x'$ ,  $z'$ ,  $w_x'$ ,  $w_z'$ ,  $H_x'$ ,  $H_z'$ , определяемые соотношениями

$$x = l_0 x'; \quad z = l_0 z'; \quad w_x = w_0 w_x'; \quad w_z = w_0 w_z'; \quad H_x = \sqrt{4\pi\rho w_0} H_x';$$

$$H_z = \sqrt{4\pi\rho w_0} H_z'.$$

Тогда из второго уравнения (2.31) получим

$$\text{Re}_m \left\{ \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x'} (w_z' H_x') dz' - \frac{\partial \varphi_e(y')}{\partial y'} \right\} + \frac{\partial H_z'}{\partial z'} = 0,$$

где  $\text{Re}_m$  – магнитное число Рейнольдса;  $\varphi_e$  – потенциал электрического поля.

В рассматриваемом случае  $E = 0$ , поэтому  $\frac{\partial \Phi_e}{\partial y'} = 0$ . Если магнитное число Рейнольдса мало, т.е.  $Re_m = 1$ , то первый член будет пренебрежительно мал, так что  $\frac{\partial H_z'}{\partial z'} = 0$ .

Таким образом, при малых значениях магнитного числа Рейнольдса нормальная составляющая магнитного поля меняется с изменением расстояния от стенки не значительно и может с достаточной степенью приближения считаться постоянной величиной, т.е.  $H_z = H_0$ .

Производную  $\frac{\partial H_z'}{\partial z'}$  легко определить из второго уравнения (2.31). Так как  $w_z = w_x$ , а  $H_x = H_z$ , то в первом члене этого уравнения можно пренебречь произведением  $w_z H_x$  по сравнению с  $w_x H_z$ ; произведя далее интеграцию и учитывая, что  $E$  равно нулю (или достаточно мало), получим (2.33)

$$-w_x H_0 - v_m \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0. \quad (2.33)$$

Чтобы найти коэффициент сопротивления пористого канала при ламинарном магнитогидродинамическом течении в случае  $Re_m \ll 1$  и поперечном магнитном поле членом  $\rho w_x w_z$  в выражении для  $\sigma$  при ламинарном течении можно пренебречь, член  $\frac{1}{4\pi} H_x H_z$  можно определить с помощью второго уравнения (2.31).

На участке стабилизации течения, т.е. при  $x \leq l_{\text{нач}}$ , плотность потока импульса постоянна и согласно уравнениям (2.31) и (2.33)

$$\sigma = -\eta \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{H_0^2}{4\pi v_m \eta}.$$

Переписав это соотношение в виде

$$\frac{\partial w_x}{\partial z} = -\frac{\sigma}{\eta} + \frac{H_0^2}{4\pi\nu_m\eta} \int w_x dz$$

и проинтегрировав от  $z=0$  до  $z=\frac{D}{2}$ , получим, учитывая что  $w_x$

пропорциональна  $z$ , а  $\sigma$  приближенно равна  $\xi_{пл} l_{нач} \frac{\rho w_0^2}{2}$  и от  $z$  не зависит,

$$w_0 = -\frac{\sigma}{\eta} \cdot \frac{D}{2} + \frac{H_0^2 w_0 D^2}{24\pi\nu_m\eta}.$$

Подставив вместо  $\sigma$  равное ему значение  $\frac{\xi}{8} \rho \bar{w}_0^2$ , получим

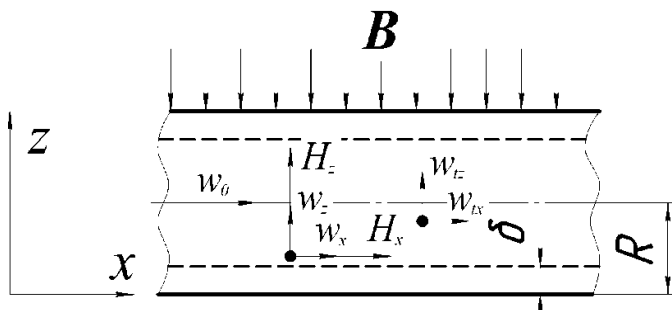
$$\xi = \xi_{H=0}(\text{Re})(1 - n\text{Ha}^2), \quad \text{Ha} = \frac{H_0 D}{\sqrt{4\pi\nu_m\eta}}, \quad (2.34)$$

где  $n$  – числовой коэффициент.

В формуле (2.34) Рейнольдса  $\text{Re}$  и Гартмана  $\text{H}$ , числа отнесены к диаметру порового канала. Уравнение (2.34) справедливо при относительно слабых магнитных полях.

При наличии магнитного поля критическое число Рейнольдса зависит от напряженности магнитного поля; при  $\text{Re}/\text{Ha} < 225$  течение является ламинарным, несмотря на то, что при  $H=0$  оно при том же числе Рейнольдса было турбулентным.

Чтобы найти распределение скоростей в турбулентном пограничном слое (рисунок 2.17), рассмотрим обтекание плоскопараллельным потоком бесконечно тонкой пластины, лежащей в плоскости  $XOY$ , перпендикулярно которой действует постоянное внешнее магнитное поле. Принимаем, что  $\text{Re}_m = 1$ .



**Рисунок 2.17. – Турбулентное течение СОТС в пористом канале при воздействии поперечного магнитного поля**

Турбулентное движение жидкости определяется осредненными уравнениями движения. Наиболее просто осредняются уравнения неразрывности для скоростного и магнитного полей:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

где  $w$  и  $H$  – средние значения скорости и напряженности магнитного поля.

Чтобы получить осредненное уравнение движения, прибавим к исходному неосредненному уравнению непрерывные уравнения неразрывности, умноженные соответственно на  $w_{\text{сх}}$  и  $-H_{\text{сх}}$ , заменим действительное значение скорости и напряженности магнитного поля на сумму их среднего и пульсационного значений, произведем осреднение и вычтем из них осредненные уравнения неразрывности, соответственно умноженные на  $w_x$  и  $-H_x$ , в результате получим

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{1}{4\pi\rho} \left( H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} - H_x \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\overline{\partial w_{tx}^2}}{\partial x} - \frac{1}{8\pi\rho} \cdot \frac{\overline{\partial H_{tz}^2}}{\partial x} + \dots$$

$$\times \left[ -\overline{w_{tx} w_{tz}} + \frac{1}{4\pi\rho} \overline{H_{tx} H_{tz}} + \nu \frac{\partial w_x}{\partial z} \right].$$

В рассматриваемом случае продольного обтекания бесконечной пластины компоненты векторов скорости  $\vec{w}$  и напряжения магнитного поля  $\vec{H}$  должны зависеть только от  $z$ , но не от  $x$ , а  $\partial p / \partial x = 0$  (так как все точки пластины эквивалентны), причем  $w_z = 0$ . Но если имеет  $H_x / \partial x = 0$ , то согласно уравнению неразрывности  $H_z / \partial z = 0$ , откуда следует, что  $H_z$  везде постоянное значение, равное  $H_0$ , т. е.  $H_z = H_0$ .

К этому результату можно прийти и из уравнения индукции, согласно которому в рассматриваемом случае  $\partial^2 H_z / \partial z^2 = 0$ . Соответственно этому из уравнения движения имеем

$$\frac{H_z}{4\pi} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \overline{\rho w_x w_{tz}} - \frac{1}{4\pi} \overline{H_{tx} H_{tz}} - \eta \frac{\partial w_x}{\partial z} \right].$$

Но выражение, стоящее в квадратных скобках, есть не что иное, как сумма осредненного выражения плотности потока импульса и величины  $-\rho w_x w_z + \frac{1}{4\pi} H_x H_z$ , т. е.

$$\frac{H_z}{4\pi} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\rho w_x w_z + \frac{1}{4\pi} H_x H_z \right).$$

Так как  $w_z = 0$ ,  $H_z = \text{const}$ , то

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, в случае продольного обтекания бесконечной пластины турбулентным потоком электропроводящей жидкости в постоянном поперечном магнитном поле плотность потока импульса имеет постоянное, не зависящее от  $x$  и  $z$  значение.

Определяем наведенное магнитное поле, т. е. продольную составляющую его  $H_x$ , из уравнения индукции, учитывая, что в рассматриваемом случае обтекания пластины  $w_z = 0$ ,  $H_z = H_0$ , имеем

$$v_m \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z}(w_x H_z),$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = -\frac{w_x H_0}{v_m}.$$

Для характеристики турбулентного движения необходимо знать величину пульсационной скорости и длину пути смещения турбулентных пульсаций.

Наличие поперечного магнитного поля приводит, как было показано выше, к появлению в левой части уравнения движения члена  $-\frac{1}{4\pi r} H_z \frac{\partial H_x}{\partial z}$ , равного  $\frac{w_x H_0^2}{4\pi r v_m}$ , вследствие чего уравнение для распределения плоских турбулентных пульсаций принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(v_t \omega) - \frac{H_0^2}{4\pi r v_m} \omega.$$

Здесь  $\omega = \partial w_x / \partial z$ ; турбулентная вязкость  $v_t$  может быть принята равной  $\alpha' z$ , где  $\alpha' = \text{const}$ ; пульсационная составляющая поперечной компоненты напряженности магнитного поля  $H_{tz}$  считается пренебрежительно малой, так как  $H_{tz} \propto \partial H_z / \partial z$ ,  $\partial H_z / \partial z = 0$  при  $\text{Re}_m = 1$ .



Решение уравнения для  $\omega$ , удовлетворяющее условиям:  
 $\omega = \infty$  при  $\tau = 0$ ,  $z = 0$ ;  $\omega = 0$  при  $\tau = \infty$  (или  $z = \infty$ );  $\int_0^{\infty} \omega dz = 0$   
 при  $\tau = \infty$  есть

$$\omega = \frac{\text{const}}{\tau^2} e^{-z/\alpha\tau} e^{-\beta\tau},$$

где  $\beta = \frac{H_0^2}{4\pi r v_m}$ .

Из условия максимума  $\omega$  при  $z = \text{const}$  имеем

$$-2\alpha'\tau + z - \alpha'\beta\tau^2 = 0. \quad (2.35)$$

Разрешив это квадратичное уравнение относительно  $\tau$  при малых  $\beta$  (удовлетворяющих условию  $\beta z / \alpha' < 1$ ), получим

$$\tau = \frac{z}{2\alpha'} - \frac{\beta z^2}{8\alpha'^2}.$$

Производная  $\partial z / \partial \tau$  определяет поперечную скорость турбулентных пульсаций  $w_H^*$  в присутствии магнитного поля; произведя дифференцирование выражения для  $\tau$ , получим

$$1 = \frac{w_H^*}{2\alpha'} - \frac{\beta z}{4\alpha'^2} w_H^*.$$

Из этого следует, что

$$w_H^* = 2\alpha' \left( 1 + \frac{\beta z}{2\alpha'} \right).$$

Чтобы найти длину пути смещения турбулентных пульсаций, подставим найденное значение  $\omega$  в отношение

$$l = \frac{\int_{\delta_{II}}^{\infty} \omega_t (z - \delta_{II}) dz}{\int_{\delta_{II}}^{\infty} \omega_t dz};$$

в результате получим

$$l_H = \frac{z}{2} \left( 1 - \frac{\beta z}{4\alpha'} \right).$$

Так как при отсутствии магнитного поля  $z/2 = l$ , а  $\alpha'$  мало отличается от  $\alpha$ , то приближенно

$$l_H = l \left( 1 - \frac{H_0^2 l}{4\pi\rho v_M w^*} \right). \quad (2.36)$$

Производная  $\partial w_x / \partial z$  в соответствии с отношением  $w^* = l_H \partial w_x / \partial z$  составит

$$\frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{2w^*}{z} \left( 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{H_0^2 z}{4\pi\rho v_M w^*} \right). \quad (2.37)$$

Из выражений (2.36) и (2.37) следует, что наложение поперечного магнитного поля приводит при турбулентном течении проводящей жидкости к некоторому уменьшению длины пути смещения скоростей. При этом в уравнении распределения скоростей наряду с характерным для турбулентного потока логарифмическим членом появляется линейный член.

Воспользовавшись выражением (2.35) и имея в виду, что решение уравнения относительно  $\omega$  для вязкого подслоя не должно сильно отличаться от известного решения для одномерных диффузий:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-z^2/4\nu\tau} e^{-\beta\tau},$$

и поэтому приводит, как в этом можно убедиться с помощью условия  $(\partial w_x / \partial \tau)_z = 0$ , к соотношению

$$\tau = \frac{z^2}{2\nu} - 2\beta\tau^2.$$

Из условия равенства  $z = \delta_{\Pi}$  частот турбулентных пульсаций и вязких возмущений находим (предварительно заменив в квадратных членах вследствие их малости  $\tau$  на  $\delta_{\Pi} / w^*$ )

$$\frac{\delta_{\Pi}}{2\alpha'} + \frac{\varepsilon\beta\delta_{\Pi}^2}{w^{*2}} = \frac{\delta_{\Pi}^2}{2E}.$$

Учитывая, что  $2\alpha' = w^*$ , имеем

$$\left( \frac{w^*\delta_{\Pi}}{\nu} \right)_H = \left( \frac{w^*\delta_{\Pi}}{\nu} \right)_{H=0} \times [1 + \varepsilon\text{Ha}^2(\delta_{\Pi})], \quad (2.38)$$

где коэффициент  $\varepsilon$  во всяком случае больше 0,5, а

$$\text{Ha}(\delta_{\Pi}) = \frac{H_0^2 \delta_{\Pi}^2}{4\pi r \nu v_m}.$$

Соотношение (2.38) связывает величины  $w^*\delta_{\Pi} / \nu$  при наличии магнитного поля и при отсутствии его.

Таким образом, наложение магнитного поля помимо уменьшения  $l$  приводит к увеличению величины  $w^*\delta_{\Pi} / \nu$ , характеризующей влияние вязкого подслоя. Все это означает, что внешнее магнитное поле стремится подавить турбулентность и ламинизировать поток жидкости. По этой же причине в присутствии магнитного поля переход ламинарного движения в турбулентный будет происходить при больших значениях

числа Рейнольдса, т. е. критическое число Рейнольдса является возрастающей функцией напряженности магнитного поля.

Это явление видно из уравнения (2.38). При переходе ламинарного движения в турбулентное по условию равенства при  $z = \delta_{\Pi}$  частот вязких возмущений и турбулентных пульсаций имеем для

канала  $\frac{2R}{w_0} = \frac{\delta_{\Pi}^2}{9\nu}$ ,  $w^*$  и  $w^*\delta_{\Pi}/\nu$  согласно выражению (2.38) увели-

чивается с  $H$ ; поэтому будет возрастать с  $H$  и величина

$$\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{\bar{w}2R}{\nu}.$$

Установим связь между значениями плоскости потока импульса и соответственно коэффициента сопротивления при наличии магнитного поля и при его отсутствии. На границе вязкого подслоя согласно общему выражению для плотности потока импульса

$$\sigma = -\eta \frac{w_x(\delta_{\Pi})}{\delta_{\Pi}} - \frac{H_x H_z}{4\pi}.$$

В рассматриваемом случае поперечного магнитного поля при  $\text{Re}_{\text{кр}} = 1$

$$H_x(\delta_{\Pi}) - H_x(z=0) = \int_0^{\delta_{\Pi}} \frac{w_x H_0}{\nu_m} dz.$$

Так как  $w_x = \frac{w_x(\delta_{\Pi})}{\delta_{\Pi}} z$ , а  $H_x$  при  $z=0$  считается равным ну-

лю, то при  $z = \delta_{\Pi}$   $H_x = -\frac{w_x(\delta_{\Pi})}{2\nu_m} \delta_{\Pi}$  и соответственно

$$\sigma = -\frac{\rho\nu w_x(\delta_{\Pi})}{\delta_{\Pi}} \left( \frac{H_0^2 \delta_{\Pi}^2}{8\pi\rho\nu\nu_m} \right).$$

По аналогии с соотношением (2.38) можно принять, что

$$\frac{w_x(\delta_{\Pi})}{\delta_{\Pi}} = \left[ \frac{w_x(\delta_{\Pi})}{\delta_{\Pi}} \right]_{H=0} [1 + \varepsilon' \text{Ha}^2(\delta_{\Pi})],$$

поэтому

$$\sigma = \sigma_{H=0} [1 + K' \text{Ha}^2(\delta_{\Pi})].$$

Применительно к течению в канале после замены в  $\text{Ha}^2(\delta_{\Pi})$  значения  $\delta_{\Pi}$  на  $av/w^*$  (где  $\delta_{\Pi}$  и  $w^*$  вследствие малости члена  $K' \text{Ha}^2(\delta_{\Pi})$  могут быть отнесены к течению при отсутствии магнитного поля, причем  $w^{*2} = \frac{\xi}{8} \bar{w}^2$ ) имеем

$$\sigma = E_{H=0} \left( 1 + K_t \frac{E^2}{\xi_{H=0} \text{Re}^2} \right); \quad \xi = \xi_{H=0} \left( 1 + K_t \frac{\text{Ha}^2}{\xi \text{Re}^2} \right), \quad (2.39)$$

где  $\text{Ha}$  и  $\text{Re}$  – числа Гартмана и Рейнольдса, отнесенные к диаметру канала;  $K_t$  – коэффициент (согласно опытным данным  $K_t = 4 \cdot 10^4$ ).

Из формулы (2.39) следует, что наложение поперечного магнитного поля приводит к увеличению коэффициента сопротивления.

Из этого следует, что при не очень больших числах Рейнольдса, наложение магнитного поля может существенно затормозить турбулентный механизм диссипации энергии (так как начальным этапом этого процесса является отбор энергии от осредненного потока продольными турбулентными пульсациями, а последние подавляются поперечным магнитным полем). Поэтому наложение поперечного магнитного поля приведет к уменьшению коэффициента сопротивления.

При достаточно больших числах Рейнольдса ламинизирующее действие магнитного поля проявляется слабо, вследствие

чего сопротивление движению возрастает с увеличением напряженности магнитного поля, как это следует из формулы (2.39). Таким образом, эта формула является предельной, т. е. относится к очень большим числам Рейнольдса ( $Re < 10^5$ ).

Движение СОТС под влиянием градиента давления производится вынужденным путем через РТС, поскольку проходя через нерегулярно расположенные поры между частицами ФАП, поток СОТС описывает сложную траекторию. Нерегулярность порового распределения обусловлена морфологией частиц ФАП и их перемещением относительно детали в трех координатных плоскостях, что обеспечивает перекрытие порового пространства как функции от времени. Это приводит к изменению проницаемости СОТС по причине изменения сопротивления РТС, в том числе и гидравлического, которое в свою очередь определяется течением СОТС в капиллярах пористой среды. Эта среда имеет различную конфигурацию, размеры и форму капиллярных сечений вдоль оси, и поэтому СОТС движется по разветвленной системе сообщающихся между собой пор. РТС имеет сложную иррегулярную структуру, которая обычно неизвестна, поэтому прямое описание движения СОТС связано с серьезными трудностями. Таким образом, встает вопрос о выборе характеристики РТС, определяющей ее пропускную способность, и вида течения СОТС, реализуемого в поровых каналах на различных режимах. В работах [59] показано, что закон Дарси носит локальный характер и недостаточно полно определяет фильтрационное течение в широком диапазоне сред и режимов протекания. Также важным вопросом для процесса МАО является критериальные соотношения основных типовых структур сред РТС по их характеристикам. Картина течения СОТС в каналах РТС представляется следующим образом: каждый капилляр является цепочкой пор разных форм и размеров, которые соединены каналами поперечного сечения, и действуют согласно принципу гофрированного материала при условии того, что поверхности каналов обладают определенным микрорельефом. Высотные и шаговые параметры шероховатости этого микрорельефа вполне соизмерены с поперечными размерами капилляров. Поскольку в процессе обработки материала при МАО производит «кипение» ферроабразивной «щетки» [53, 60],

то данное явления указывает на сжатие и расширение поровых каналов и служит причиной местных вихревых течений, которые проникают в ламинарное ядро потока СОТС в капилляре, приводя его в возмущение.

Подобное местное сжатие ламинарного ядра и образование указанных возмущений, латинизированных в области сжатия и расширения, приводит к росту средней скорости в ядре потока и появлению инерционной составляющей гидравлического сопротивления кроме ранее имеющейся вязкости [61]:

$$\frac{\Delta p}{h} = a\mu u + b\rho u^2, \quad (2.40)$$

где  $\Delta p$  – перепад давления СОТС в РТС, МПа;  $h$  – высота РТС, мм;  $a$  и  $b$  – безразмерные вязкостный и инерционный коэффициенты проницаемости соответственно ( $a = 1-1,6$ ,  $b = 1-50$ );  $\mu$  – динамическая вязкость СОТС, Па·с;  $u$  – скорость фильтрации, м/с;  $\rho$  – плотность РТС, кг/м<sup>3</sup>.

Первый член правой части уравнения учитывает силы вязкостного трения и отражает наличие ламинарного течения. Второй связан с присутствием в потоке, проходящим через РТС, возмущенного течения. При  $b = 0$  имеет место ламинарное течение, подчиняющееся закону Дарси.

Процесс местного возмущения и нарушения ламинарного течения происходит не одновременно во всех капиллярных и не по всей длине, а в определенных областях топологического пространства РТС. Поэтому имеется поток как с ламинарным течением, так и участки с возмущениями.

Согласно [62], распределение частиц ФАП и их относительное уплотнение в сравнении со свободной насыпкой в рабочем зазоре между оппозитно расположенными полюсными наконечниками имеет скачки уплотнения по краям рабочего зазора по ширине 2–3 мм. Проведенные исследования показали, что наименьшая пористость и соответственно наибольшая относительная плотность залегания частиц ФАП в РТС наблюдается по границе рабочего зазора, достигая максимальных значений на выходе из зазора и по его углам. Например, на участке в центре

РТС коэффициент уплотнения составил 0,9934, а на участке, параллельном уму, на границе – 1,3771, на перпендикулярном – 1,3991. Это указывает на неравномерность распределения частиц ФАП в РТС и неоднородность ее структуры в рабочем зазоре. Подобная картина объясняется особенностями протекания потока СОТС через различные по плотности области РТС в общем ее объеме. Центральная область РТС играет роль коллектора для порции СОТС, находящейся в рабочем зазоре, и содержит большую долю СОТС ввиду меньшего гидравлического сопротивления и большей проницаемости. Частицы ФАП этой области из-за изменения величины и направления магнитных силовых линий не всегда перпендикулярны в отличие от периферийного их расположения. Поэтому режущий контур РТС относительно поверхности детали подразделяется на две не строго разделенные области, определяемые равномерным переходом от периметра к центру. Превалирующим фактором периферийной зоны режущего контура ввиду более жесткого закрепления зерен ФАП является процесс резания, а по мере приближения к центру эта способность уменьшается и переходит в процес пластического деформирования или выглаживания по причине меньшей степени влияния и величины магнитодвижущей силы.

Следовательно, процесс МАО в отличие от других видов абразивной финишной обработки осуществляется по причине специфичности природы РТС: не раздельно резание и выглаживание при последующем переходе на другие режимы (скорость, подача и др.), а в одном цикле за счет особенности распределения магнитного потока по площади магнитопровода, в частности плоского законечника. Определенным образом это зависит от выбранных режимов обработки, которые должны носить характер оптимальных, поскольку переход на жесткие или мягкие режимы приводит к нарушению вышеописанного баланса.

Таким образом, возникает необходимость в убедительном объяснении физического смысла безразмерных вязкостных коэффициентов уравнения (2.40) и их критериальных соотношений, а также выбора характеристики РТС с целью выявления ее пропускной способности, на основании которой производится



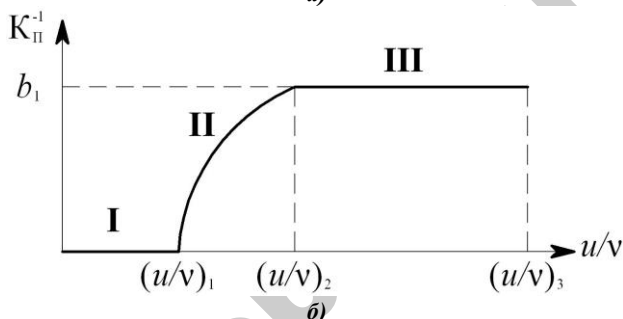
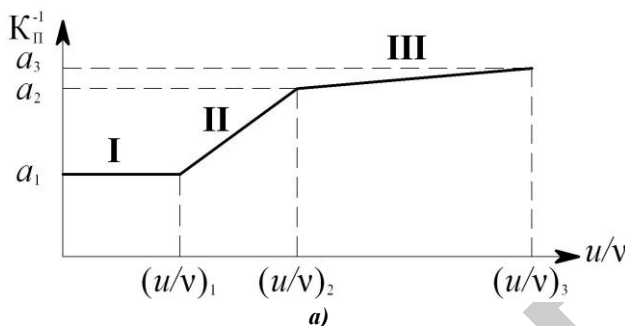
выбор компонентов РТС. Согласно [61], в качестве характеристики пропускной способности РТС предлагается ввести коэффициент проницаемости:

$$K_{\Pi}^{-1} = a_i + b \frac{u}{v}, \quad (2.41)$$

где  $v$  – кинематическая вязкость,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

На рисунке 2.18 представлен требуемый вид зависимости коэффициента проницаемости РТС  $K_{\Pi}^{-1}$  и безразмерных коэффициентов  $a$  и  $b$  от отношения скорости фильтрации и кинематической вязкости  $u/v$  СОРС. Поскольку получение полного турбулентного режима в ходе использования процесса MAO не обеспечивается, а присутствует переходной ламинарный с наложением местных турбулентных возмущений, получает развитие область нелинейной фильтрации, которая имеет вид II на рисунке 2.18,  $a$  и  $b$ .

Согласно данной зависимости эффективность РТС определяется правильным подбором СОРС и ее вязкостью, морфологией частиц ФАП, режимами и параметрами ЭМП и кинематикой MAO. В ходе прохождения процесса MAO первоначальное влияние вязкости СОРС не сказывается на эффективности РТС, по причине высокой вязкости эмульсолов происходит засаливание режущего контура, что отмечается в целом ряде работ [53, 56], и падения режущей способности. С целью ее повышения необходимо произвести активное перемешивание частиц ФАП путем изменения напряженности ЭМП и образования требуемого режима фильтрации СОРС, за что отвечает коэффициент  $b$ , либо изменить вязкость состава СОРС ( $v$ ) для удаления масляных отложений в поровом пространстве РТС, либо полностью заменить порцию ФАП для повышения скорости фильтрации ( $u$ ). В работе [63] показано, что перемешивание частиц ФАП в зоне обработки обеспечивает повышение производительности процесса MAO, однако оно более чем в 2 раза меньше первоначального. Остальные два предложения неприемлемы в силу технико-экономического фактора.



**Рисунок 2.18.** – Зависимость коэффициента проницаемости СОТС через АИ от отношения скорости фильтрации  $u$  и кинематической вязкости  $\nu$  при ламинарном (а) и турбулентном (б) потоке СОТС

Поэтому следующим этапом подбора СОТС для РТС является в уменьшении вязкости, но это приводит при сохранении развитого микрорельефа частиц ФАП, который гарантирует интенсивней сьем материала, к падению диспергирующей и смазывающей способностей при увеличении моющей и охлаждающий. Поэтому синтетические СОТС СинМА-1 и СинМА-2, обладая рядом положительных свойств, при своем использовании не обеспечивают такой производительности, как эмульсии, что приводит к повышенному износу частиц ФАП режущего контура.

Интенсивность накопления субстрата обработки после МАО зависит от соотношения частиц субстрата и поровых сужений (горло поры). В случае если характерный размер частиц субстрата больше характерного размера порового сужения, то частицы оседают на поверхности РТС, образуя внешнюю

фильтрационную корку с отсутствием проницаемости. Решение данной проблемы состоит в применении такого класса СОТС, которые обладают как высокими диспергирующими и смазывающими, так и моющей и охлаждающей способностями. Такими свойствами обладают представители полусинтетических СОТС, которые в своем составе имеют некоторое количество нефтяных масел. Примером эффективного использования полусинтетических СОТС является применение Аквапол-1 ТУ 38.1011061-86 при MAO цветных сплавов [64].

Однако наличие доли нефтяного масла в СОТС приводит к сводовой кольматации порового пространства РТС. С целью образования механизма мобилизации частиц в поток СОТС, совпадения их физических скоростей и создания ситуации, когда данные частицы полностью увлекаются несущей фазой, были применены СОТС с высокой пенообразующей способностью типа Пенол-1 и Пенол-2 ТУ 38-5901218-90. Пена и пористая среда в виде РТС вместе создают физический объект, который обладает рядом особых свойств. Структурообразование и течение пены в пористой среде является примером нелинейного гидродинамического процесса при учете эффектов смачивания и локальных пульсаций параметров газожидкостной системы. Кинетика трансформации и динамики течения газожидкостной системы при циклической подаче пенообразующего раствора СОТС Пенол-1 и Пенол-2 в насыщенную субстратов отходов РТС обеспечивается механизмом гидродинамической неустойчивости течения многофазной системы при наличие в данной системе волн давления, создаваемых вибрацией щеток ФАП. Пена в пористой среде представляет собой систему [65], эффект которой заключается в образовании аномально высокого сопротивления движению (на 1–3 порядка выше, чем у материальной жидкости), что является возможным инженерным решением задачи удаления субстрата отходов из РТС в процессе MAO. Большим достоинством использования пенного столба служит то, что для его получения требуется до 1 % пенообразующих ПАВ в СОТС, достаточно доступных и дешевых. Особенностью движения пены в РТС является «прыжковый» характер в расширениях поровых каналов, что служит причиной пульсаций давления в области, занятой пеной. При этом происходит медленная

фильтрация и вытеснение субстрата отходов РТС ввиду роста площади охвата пористой среды фрактальными «вязкими пальцами» пены. Установлено, что такое поведение пены обусловлено ее реопексией вследствие роста вязкости при увеличении скорости сдвига субстрата [65]. За счет генерации новых пленок пены и всасывания в порах пенообразующего раствора возрастает гидродинамическое сопротивление, которое при неблагоприятных условиях блокирует поровое пространство. Однако рост давления, вызванный образованием волн давления, вызванных вибрацией цепочек частиц ФАП, на следующей стадии фильтрации приводит к пиковому возрастанию проницаемости, что обуславливает движение пленок пены, которые захватывают субстрат и выводят его из порового пространства РТС. Это гарантирует рост эффективности процесса МАО, так как подобные структуры субстрата снижает диспергирование обрабатываемого материала.

Проблемой для процесса МАО является обработка алюминиевых сплавов потемнения обработанной поверхности при обработке железосодержащими ФАП. Следовательно, для устранения данного эффекта необходимо применять СОТС на основе сульфогрупп и их производных, которые обеспечивают образование избыточной фазы  $FeS$  и ее укрупнение, а поскольку любое количество серы или ее соединений образует сульфид железа, инертный по отношению к алюминию, то данный сульфид железа практически в нем не растворимый. Это позволяет эффективно выводить сульфид железа из рабочей зоны в виде шлама, что обеспечивает высокую светоотражательную способность обработанной поверхности.

Однако отказ от ранее применяемых СОТС и ФАП, которые достаточно эффективно проявляли свои технологические возможности в конкретных случаях применения МАО, неприемлем в силу экономических причин, поэтому решение данного противоречия является их применение не в виде отдельных компонентов в случайных комбинациях, в агрегатированном состоянии с выявлением его практической значимости. Также важным аспектом является влияние магнитного поля на физико-химические свойства СОТС и ФАП с учетом их кооперативного воздействия. Установление подобного механизма рецепции при наличии протекания химических реакций в РТС позволяет выявить структуру и физико-

механические характеристики РТС, а в дальнейшем – эффективность использования различных РТС для МАО определенных видов материалов. Поскольку все круглые молекулы, являющиеся громоздкими и сложными, обладают анизотропией, то под действием трансляции магнитного поля происходит формирование метастабильного расположения фрагментов молекул. Кинетика этого формирования в конечном счете приводит к ориентации полимеров, как агентов вещественной природы, в кластерную организацию, что проявляется в достаточно быстром переходе эмульсолов в режимы далекие от своего первоначального равновесия. Данный эффект проявляется в виде засаливания РТС.

Механизм действия МП на РТС представляется следующим образом: в СОТС происходит разрушение агрегатов, состоящих из субмикронных ферромагнитных частиц  $Fe$ , находящихся в определенной концентрации, которая по мере увеличения продолжительности процесса МАО возрастает, так как зерна ФАП обладает ферромагнитной матрицей. Подобное разрушение агрегатов приводит к резкому повышению центров кристаллизации масляных глобулей и формированию на поверхности феррообразивных частиц пузырьков газов микронных размеров, обеспечивая газлифтный эффект. В результате разрушения агрегатов парафинированные масляные глобули выпадают в виде тонкодисперсной и объемной взвеси, осаживаемой на микрорельефе частиц ФАП [66]. Известную роль при этом играет повышение температуры, но решающим фактором столь быстрого засаливания РТС в отличие от шлифования выступает значительное ускорение коагуляции и коалесценции масляных глобулей под действием МП [67].

## **2.3. Магнитное поле в рабочем зазоре**

### **2.3.1. Влияние профиля полюсных наконечников на топографию магнитного поля**

Увеличение магнитной индукции в рабочих зазорах до определенного момента сопровождается ростом всех трех составляющих силы резания ( $F_{MZ}$ ,  $F_{MV}$ ,  $F_{MX}$ ). По мере

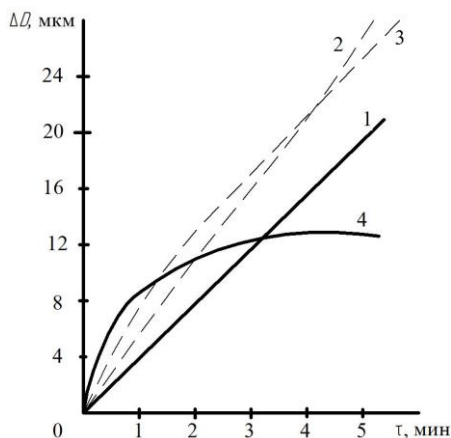
магнитного насыщения порошковой массы, заполняющей рабочие зазоры, картина магнитного поля на границах рабочих зазоров изменяется; увеличивается их магнитное сопротивление, которое становится близким по величине магнитному сопротивлению соседних воздушных участков, являющихся путями прохождения магнитных потоков утечки. В связи с этим плотности магнитных потоков утечки и основного потока, пронизывающего рабочий зазор, становятся соизмеримыми, а градиент магнитной индукции на границах рабочего зазора приближается к нулю. При этом, согласно формуле:

$$F_M = \frac{1}{\mu_0} VB \Delta B, \quad (2.42)$$

силы  $F_{MZ}$  и  $F_{MX}$  удерживающие порошок в рабочем зазоре и обеспечивающие осцилляцию зерен относительно изделия, уменьшаются. Последнее обстоятельство немедленно отражается на интенсивности обработки. Порошок силами трения выбрасывается из рабочих зазоров и процесс обработки быстро затухает. Это хорошо видно на графиках, полученных при разных магнитных индукциях в рабочих зазорах (рисунок 2.19).

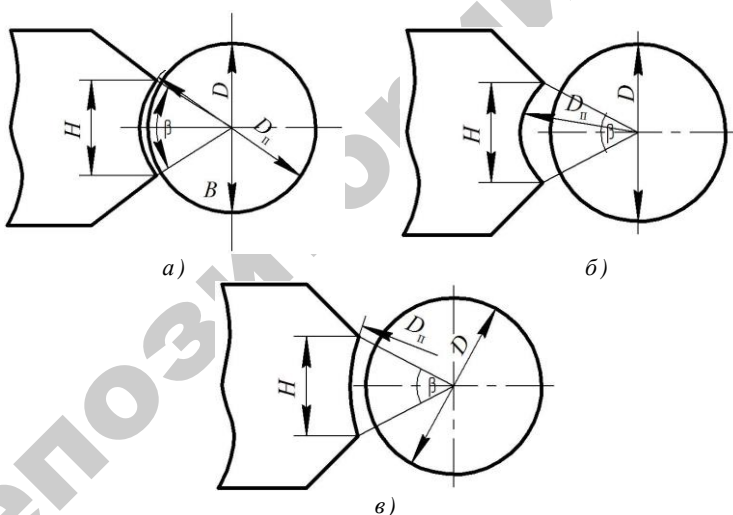
Наиболее благоприятными значениями магнитной индукции являются  $B = 0,8-1,2$  Т. Создавать более высокую магнитную индукцию в рабочих зазорах нет необходимости, поскольку это, наряду с увеличением нормальных сил резания, ухудшает условия удерживания порошка в рабочих зазорах и, кроме того, требует резкого увеличения мощности обмоток электромагнитного индуктора.

Геометрические размеры элементов полюсных наконечников отнесены к магнитным параметрам процесса полирования, поскольку они влияют на распределение основного магнитного потока внутри рабочего зазора и на соотношение между основным магнитным потоком  $\Phi_0$ , и магнитными потоками утечки  $\Phi_y$ . Необходимо отметить важность с этой точки зрения таких размеров, как величина рабочего зазора  $\delta$ , диаметр расточки полюса  $D_p$ , углы охвата  $\beta$  и наклона вспомогательных поверхностей  $\gamma$  (рисунок 2.20, а).



1 -  $B = 0,6 \text{ Т}$ ; 2 -  $B = 0,8 \text{ Т}$ ; 3 -  $B = 1,2 \text{ Т}$ ; 4 -  $B = 1,4 \text{ Т}$

Рисунок 2.19. – Влияние магнитной индукции на интенсивность сьема металла  $\Delta D$



а) концентричный; б) серповидный; в) расходящийся  
Рисунок 2.20. – Формы поперечного сечения зазоров

Величина рабочего зазора  $\delta$  измеряется вдоль силовых линий поля и определяет собой его магнитное сопротивление ( $R_M = \delta/\mu S$ ). ФАП имеет большое магнитное сопротивление,

и увеличение размера  $\delta$  влечет за собой заметное изменение в соотношении основного магнитного потока и потоков утечки. В свою очередь, как было показано выше, это соотношение определяет градиент магнитной индукции  $\Delta B$  на границах рабочего зазора и величину магнитных сил, удерживающих порошок внутри зазора. Увеличение  $\delta$  ослабляет магнитный поток внутри рабочего зазора, уменьшая при этом и силы  $F_{MY}$ . Появляется неравномерность магнитного потока на всей дуге рабочего зазора и вместе с ней – силы  $F_{MZ}$  вдоль всей дуги рабочего зазора. Из-за малых значений  $\Delta B_Z$ , вдоль дуги рабочего зазора (в том числе и на выходе из него) силы  $F_{MZ}$  невелики и обеспечить интенсивное полирование и надежное удерживание порошка в зоне обработки не в состоянии. Вместе с тем при этом появляются условия для возникновения колебательных движений цепочек зерен, Однако в результате низкой интенсивности полирования при больших значениях  $\delta$  такая схема обработки не находит применения. Влияние  $\delta$  на интенсивность резания, измеряемую съемом металла за первую минуту обработки, и на стойкость (сохранность) порции порошка можно проследить по зависимости

$$Q = qtb, \quad (2.43)$$

полученной при разных значениях  $\delta$  (таблица 2.14).

Таблица 2.14 – Интенсивность процесса MAO в зависимости от рабочего зазора  $\delta$

Рабочий зазор, $\delta$ , мм	Производительность съема материала, $q$ , мг/(см <sup>2</sup> ·мин)
1,0	25,4
1,5	29,1
2,5	25,5
3,0	20,6

При  $\delta = 3,5$  мм силы  $F_{MZ}$  оказываются настолько малыми, что уже после 15–20 с обработки рабочие зазоры остаются пустыми.

Зазоры с  $\delta < 1$  плохо заполняются ферромагнитным порошком, и сравнительно небольшое количество режущих



зерен в таких рабочих зазорах быстро теряет свои режущие свойства. Увеличение  $\delta$  позволяет разместить в рабочих зазорах большую порцию порошка. Зерна порошка в этом случае имеют большую свободу перемещений внутри зазора, необходимых для осуществления самозатачивания порошковой массы. Стойкость порции порошка и интенсивность резания увеличиваются. Чрезмерное увеличение  $\delta$  и соответственно магнитного сопротивления рабочих зазоров приводит к появлению больших потоков утечки, снижению тангенциальных магнитных сил и к плохому удерживанию порошка в зазорах.

По форме поперечного сечения рабочие зазоры разделяются на концентричные ( $D_n = D + 2\delta$ ), серповидные ( $D_n < D + 2\delta$ ) и расходящиеся ( $D_n > D + 2\delta$ ).

Для рабочих зазоров с концентрической формой поперечного сечения (рисунок 2.19, а). Порошок удерживается в рабочих зазорах, но тангенциальные магнитные силы на выходе из рабочего зазора еще недостаточно велики и поэтому зазоры сравнительно быстро пустеют (стойкость порции порошка мала).

В случае серповидной формы поперечного сечения рабочего зазора (рисунок 2.20, б) на выходе из него создается сконцентрированный магнитный поток, и на границе раздела порошок – воздух градиент  $\Delta B_z$  имеет большую величину. Соответственно большими оказываются и тангенциальные силы, удерживающие порошок в рабочем зазоре и обеспечивающие резание. Интенсивность резания при такой форме зазоров дополнительно увеличивается и за счет механического заклинивания порошка в зоне выхода из рабочего зазора. Порошок из средней части дуги зазора перемещается к выходу в этом случае не только под действием сил трения, возникающих между порошком и деталью, но и магнитными тангенциальными силами, которые внутри зазора направлены от середины к входу и выходу из зазора. Распорные силы в образовавшемся на выходе клине увеличивают нормальные силы, прижимающие зерна порошка к поверхности детали. Большие нормальные и тангенциальные силы, в свою очередь, обеспечивают высокую интенсивность процесса полирования.

Однако злоупотреблять большой серповидностью сечения рабочих зазоров не следует, так как в этом случае вся масса порошка скапливается у входа и выхода рабочего зазора, а остальная часть его оказывается пустой. В результате из-за малой площади действительного контакта порошковой массы с обрабатываемой поверхностью производительность полирования снижается.

Серповидность можно оценивать отношением

$$\Psi = \frac{D_n}{D + 2\delta}. \quad (2.44)$$

Для получения серповидного зазора необходимо обеспечить условие  $\Psi < 1$ , но с учетом приведенных выше рекомендаций следует придерживаться значения  $\Psi = 0,8-0,9$ .

При наличии расходящейся формы зазоров (рисунок 2.20, в) магнитная индукция постепенно убывает от середины к границам зазора. Тангенциальные магнитные силы имеют место по всей длине дуги рабочего зазора, но из-за плавного изменения магнитной индукции ( $\Delta B_z = 0$ ) величина их недостаточна для надежного удерживания порошка внутри зазоров.

Для полирования разнообразной номенклатуры деталей могут быть использованы одни и те же полюсные наконечники. Диаметр расточки полюсов  $D_n$ , определяют по меньшему диаметру обрабатываемой детали, задавшись максимальным рекомендованным значением  $\Psi$ . Для остальных диаметров деталей  $\Psi$  будет уменьшаться, т. е. условия полирования будут улучшаться. При определении диапазона диаметров поверхностей, обрабатываемых с одними полюсными наконечниками, необходимо учитывать, что увеличение диаметра детали приводит в этих условиях к увеличению машинного времени, потребного на полирование (рисунок 2.21, а).

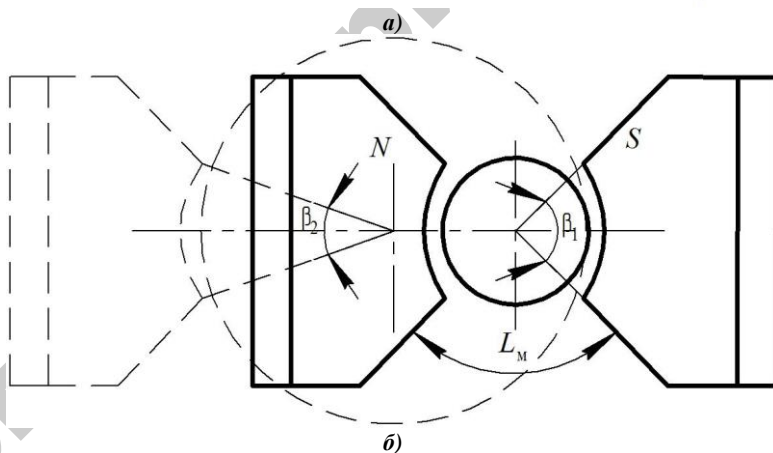
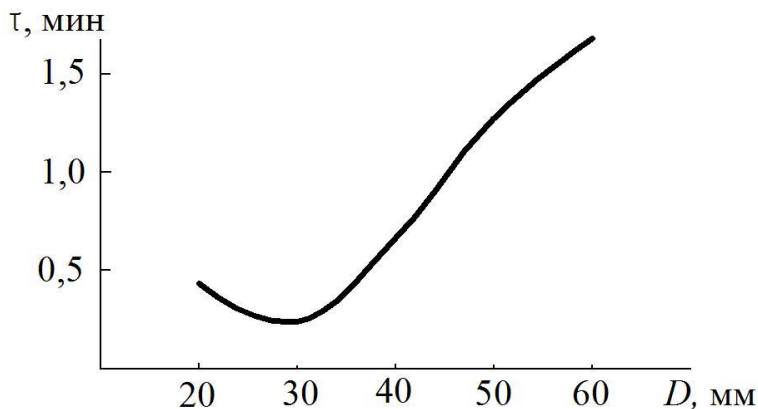
В приведенном примере фиксировалось время, необходимое для достижения 11-го класса шероховатости на закаленных валиках из стали У8А с исходной шероховатостью 8-го класса и с диаметрами  $D$ , изменявшимися от 20 до 60 мм. Полюсные

наконечники использовались одни и те же ( $D_n = 30$  мм). Переход от одного обрабатываемого диаметра к другому для поддержания постоянной скорости резания  $v_p$  сопровождался изменением частоты вращения детали. Одновременно с увеличением диаметра детали изменялись форма зазора ( $\Psi = \text{const}$ ) и угол охвата  $\beta$ , а следовательно, и магнитная проводимость воздушных участков, по которым проходят магнитные потоки утечки (рисунок 2.21, б).

При уменьшении угловой скорости вращения детали каждый участок обрабатываемой поверхности меньшее число раз в единицу времени вступал во взаимодействие с абразивной массой, размещенной в рабочих зазорах. Этим в основном и объясняется рост трудоемкости обработки с увеличением диаметра детали. Одновременно изменяется соотношение между постоянным количеством порошка и размерами обрабатываемой поверхности, что тоже должно приводить к увеличению трудоемкости. Изменение характера зависимости при  $D < 30$  мм объясняется расходящейся формой рабочих зазоров ( $\Psi > 1$ ) и малым расстоянием  $L_M$  между вспомогательными поверхностями полюсов. Последнее послужило причиной появления больших потоков утечки, еще большего уменьшения градиента магнитной индукции на выходе из рабочих зазоров, имеющих и без того неблагоприятную форму. Все это объясняет малую величину сил  $F_{MZ}$  и плохое удерживание порошка. Обработка валика с  $D = 20$  мм сопровождалась интенсивным выбрасыванием порошка из рабочих зазоров.

Если при изменении диаметра детали  $D$  одновременно менять и полюсные наконечники, поддерживая постоянным угол охвата  $\beta$ , то с увеличением  $D$  можно наблюдать даже интенсификацию полирования. На рисунке 2.22, а кривая  $q$  представляет результаты полирования с использованием сменных наконечников. Здесь сохранились неизменными все параметры режима полирования, включая и скорость резания  $V_p$  (частоту вращения детали уменьшали при увеличении  $D$ ). У сменных полюсных наконечников поддерживали постоянными угол охвата  $\beta = 90^\circ$  и форму рабочего зазора (рисунок 2.22, б). Оказалось, что удельный съем металла  $q$  (с  $1 \text{ см}^2$  поверхности

детали за 1 мин) с увеличением диаметра  $D$  возрастает. Поскольку частота вращения детали изменялась обратно пропорционально диаметру  $D$ , следовало бы ожидать совершенно противоположного. Наблюдаемый характер зависимости  $q = f(D)$  объясняется следующим.



а график зависимости; б схема обработки

**Рисунок 2.21. – Влияние диаметра обрабатываемой детали на длительность  $\tau$  МАО без изменения формы рабочего зазора**

Величина магнитного потока на любом участке прямо пропорциональна магнитной проводимости этого участка и падению

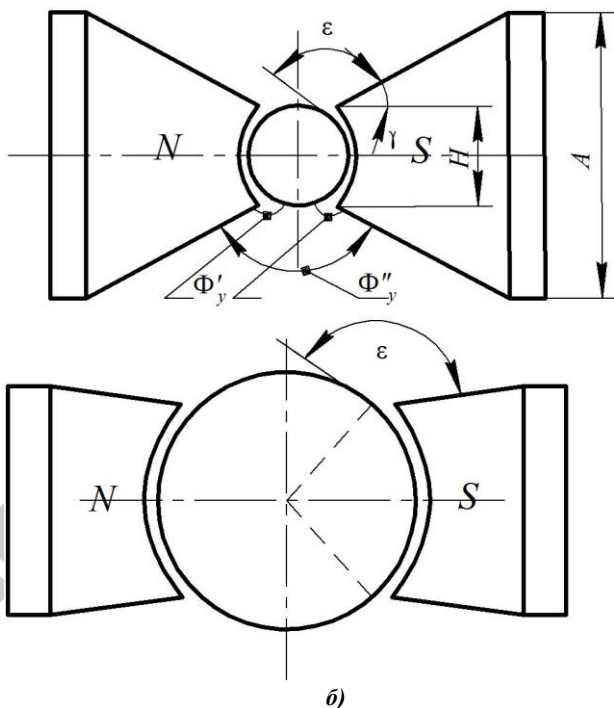
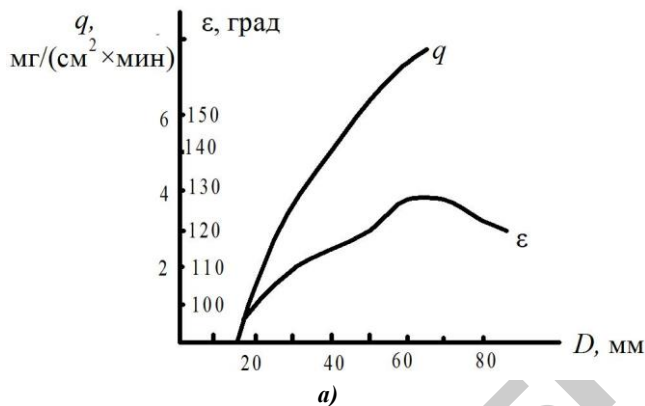
магнитного потенциала (м. д. с.)  $\Phi = GF$ . В свою очередь, проводимость  $G$  зависит от площади сечения участка, по которому проходит магнитный поток, и от длины его средней силовой линии. В простейшем случае:

$$G = \mu S / LM. \quad (2.45)$$

Для потоков утечки  $\Phi_y$  проводимость соответствующих воздушных участков будет обратно пропорциональна углу  $\varepsilon$  между вспомогательной поверхностью полюса и касательной к поверхности детали. В приведенном опыте одновременно с увеличением диаметра детали  $D$  изменялся угол  $\varepsilon$  (рисунок 2.22).

Максимум соответствует случаю, когда хорда полюса  $H$  приближается по величине к размеру  $A$  магнитопровода. Нетрудно заметить, что удельный съем металла с увеличением угла  $\varepsilon$  возрастает, а в области его максимума замедляется. Если при обработке больших по диаметру деталей плотность магнитного потока утечки  $\Phi_y$  пренебрежимо мала по сравнению с потоком  $\Phi$ , то для диаметров  $D < 30$  мм поток  $\Phi_y$  приобретает ощутимую величину за счет малого расстояния между полюсными наконечниками. Обработка деталей с  $D < 15$  мм при выбранных условиях полирования вообще оказалась невозможной. Порошок в этом случае выстраивается в цепочки из зерен вдоль силовых линий магнитного поля между полюсными наконечниками и не оказывает воздействия на обрабатываемую поверхность. Уменьшением угла охвата  $\beta$  и уменьшением угла  $\gamma$  можно добиться, чтобы порошок все же удерживался в рабочих зазорах при полировании деталей с  $D < 15$  мм. Для малых диаметров деталей ( $D < 10$  мм) с успехом может быть использована другая схема.

Исходя из вышеописанного, можно классифицировать виды MAO на группы по назначению магнитного поля, форме обрабатываемых поверхностей, типу используемого магнитного индуктора (МИ) и характеру магнитного поля (таблица 2.15), а также соотнести эту классификацию с разными схемами обработки (таблица 2.16).

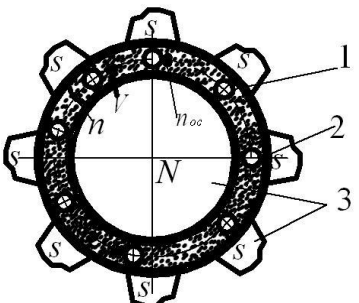
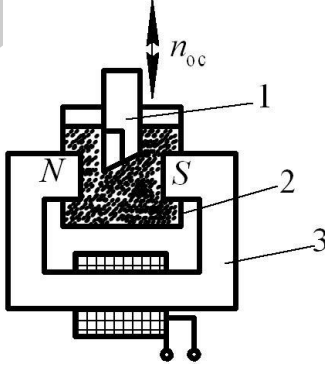


а) график зависимостей; б) схемы обработки  
 Рисунок 2.22. – Изменение удельного съема металла  $q$  и угла  $\varepsilon$  при  
 МАО деталей различных диаметров с использованием полюсных  
 наконечников различного профиля

Таблица 2.15 – Классификация видов МАО

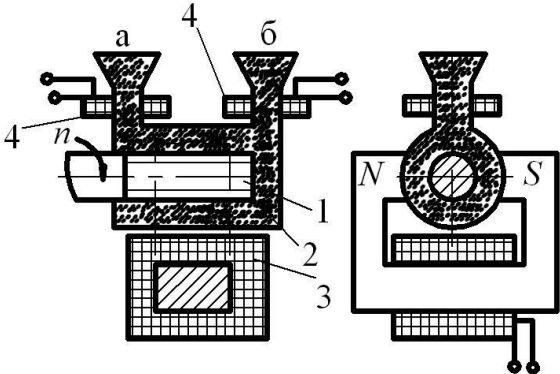
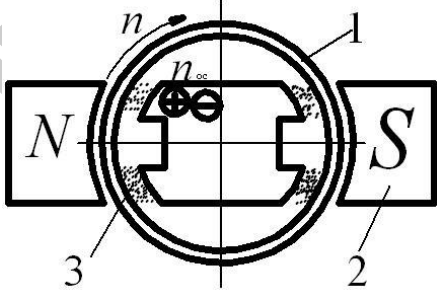
<i>По назначению магнитного поля</i>		
Шифр группы	Функции магнитного поля	
I	Формирование абразивного инструмента (АИ) из порошка, создание сил резания	
II	Формирование АИ из порошка, придание ему рабочих движений, создание сил резания	
III	Сообщение движений частицам, не сформированным в АИ	
IV	Сообщение рабочих движений заготовке или АИ, создание сил резания	
V	Интенсификация или улучшение качественных характеристик видов абразивной обработки	
A	Наружные поверхности тел вращения	
B	Внутренние поверхности тел вращения	
B	Плоские поверхности	
Г	Линейчатые и трехмерные фасонные поверхности	
<i>По типу используемого магнитного индуктора (МИ) и характеру магнитного поля</i>		
Шифр подгруппы	Характер магнитного поля	Тип МИ
1	Постоянное	Электромагнитный индуктор (ЭМИ), питаемый постоянным током
2	Переменное	ЭМИ, питаемый знакопеременным или пульсирующим током
3	Бегущее или вращающееся	ЭМИ, питаемый трехфазным знакопеременным или пульсирующим током
4	Постоянное	Индуктор на постоянных магнитах (ИПМ)

Таблица 2.16 – Виды МАО, относящиеся к различным группам классификации

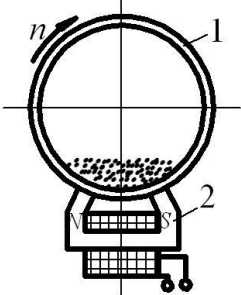
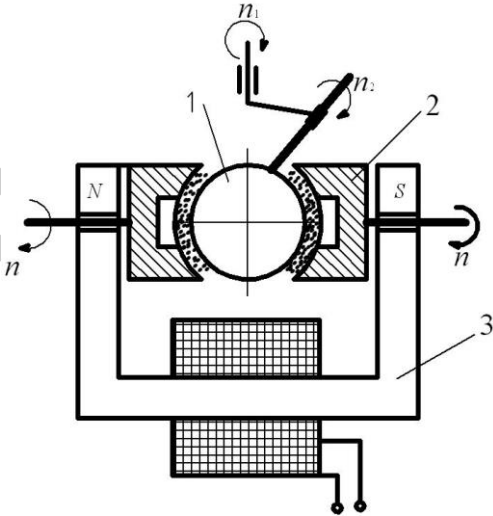
Шифр и операции МАО	Схема обработки
<p>1</p> <p>I-A-1 – МАО наружных цилиндрических и фасонных поверхностей тел вращения</p>	<p>2</p>  <p>1 – заготовки; 2 – кольцевая рабочая зона; 3 – полюсы ЭМИ постоянного тока</p> <p>Заготовки закреплены консольно и совершают вращение (<math>n</math>), осцилляцию (<math>n_{oc}</math>) и дополнительное движение (<math>V</math>). Магнитное поле сообщает АИ из порошка необходимую жесткость и создает силы резания</p>
<p>I-B-2 – МАО лезвий резцов</p>	 <p>1 – резец; 2 – камера с порошком; 3 – ЭМИ переменного тока</p> <p>Резец движется (<math>n_{oc}</math>) синхронно с включениями выключениями ЭМИ. При этом периодически изменяется жесткость порошка и осуществляется полирование резца без притупления его режущих кромок</p>



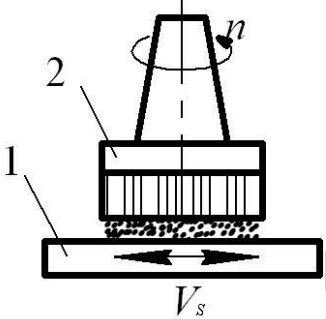
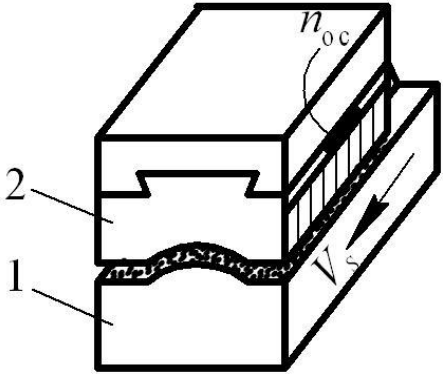
Продолжение таблицы 2.16

1	2
<p>I-Г-1 МАО поверхностей наружной резьбы</p>	 <p>1 – заготовка; 2 – камера с порошком; 3 – ЭМИ постоянного тока; 4 – электромагниты для создания сопротивления выходу порошка из камеры ЭМИ придает жесткость порошку и создает силы резания</p> <p>При вращения заготовки (<math>n</math>) ее резьбовая часть перемещает порошок по замкнутому пути (входные отверстия а и б камеры сообщаются). Обрабатывается одна сторона профиля резьбы; для обработки 2-й стороны изменяют направление вращения (<math>n</math>)</p>
<p>I-Б-1 – МАО отверстий штуков переменного сечения</p>	 <p>1 – заготовка; 2 – полюсы ЭМИ постоянного тока; 3 – порошок</p> <p>АИ из порошка формируется в рабочих зазорах между отверстием заготовки и внутренним полюсом. Обработка производится при вращении (<math>n</math>) заготовки и осцилляции (<math>n_{oc}</math>) полюса</p>

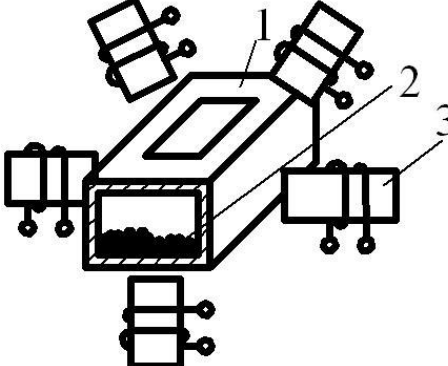
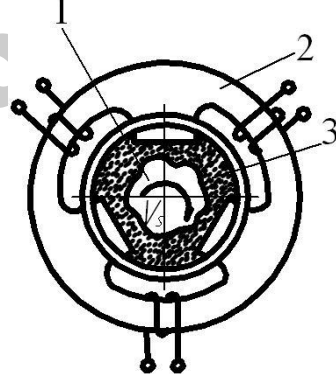
Продолжение таблицы 2.16

1	2
<p>I-Б-1 – МАО профильных отверстий тонкостенных изделий</p>	 <p>1 – немагнитная заготовка; 2 – ЭМИ постоянного тока</p> <p>Порошок размещен в отверстии обечайки, прижат магнитными силами к обрабатываемой поверхности и удерживается против полюсов ЭМИ. При вращении обечайки (<math>n</math>) обрабатывается отверстие</p>
<p>II-A-1 МАО наружных сферических поверхностей</p>	 <p>1 – заготовка; 2 – вращающиеся полюсы; 3 – ЭМИ постоянного тока</p> <p>АИ сформирован из порошка в рабочих зазорах и вращается (<math>n</math>) вместе с полюсами ЭМИ. Заготовка вращается одновременно собственной (<math>n_1</math>) и скрещивающейся (<math>n_2</math>) осей</p>

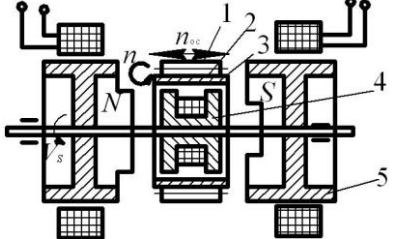
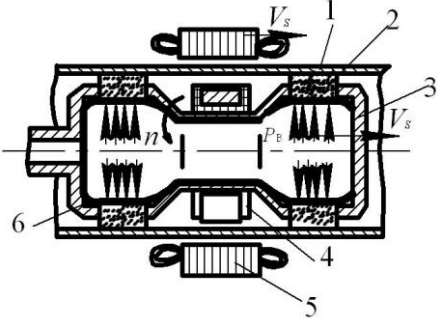
Продолжение таблицы 2.16

1	2
<p>П-Б-1 МАО наружных плоских поверхностей с элементами переменного профиля</p>	 <p>1 – заготовка; 2 – ИПМ</p> <p>Магнитное поле удерживает порошок на торцевой активной поверхности ИПМ, заставляя порошок вращаться вместе с вращающимся ИПМ (<math>n</math>) и одновременно создавая силы резания. Заготовке сообщается движение подачи (<math>V_s</math>)</p>
<p>П-Г-4– МАО фасонных линейчатых поверхностей</p>	 <p>1 – заготовка; 2 – осциллирующий ИПМ</p> <p>Активная поверхность ИПМ имеет форму обрабатываемой поверхности. Осцилляция ИПМ (<math>n_{oc}</math>) является главным движением резания. Заготовке сообщается движение подачи (<math>V_s</math>). Магнитное поле удерживает порошок в рабочем зазоре, сообщает ему осцилляцию вместе с ИПМ и создает силы резания</p>

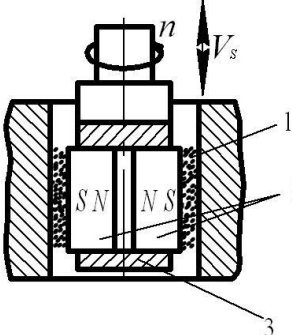
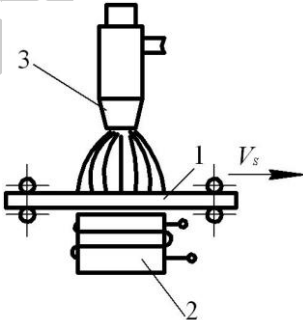
Продолжение таблицы 2.16

1	2
<p>Ш-ВГ-2 МАО внутренних поверхностей полых крупногаба- ритных заготовок</p>	 <p>1 – немагнитная заготовка; 2 – ферромагнитные тела; 3 – ЭМИ, питаемый пульсирующим током</p> <p>Рабочие тела размещены внутри заготовки и благодаря поочередно включаемым ЭМИ совершают разнонаправленные движения, воздействуя на стенки полости заготовки</p>
<p>Ш-АГ-3 МАО наружных по- верхностей немагнитных заготовок переменного профиля</p>	 <p>1 – заготовка; 2 – ЭМИ трехфазного тока; 3 – камера с порошком</p> <p>ЭМИ создает внутри камеры вращающееся магнитное поле, увлекающее за собой порошок. Зерна порошка воздействуют на поверхность заготовки и осуществляют ее обработку. Для равномерной обработки всех участков заготовке сообщается движение подачи (<math>V_s</math>)</p>

Продолжение таблицы 2.16

1	2
<p>IV-A-1 – МАО цилиндрических поверхностей заготовок малых диаметров с пазами и канавками</p>	 <p>1 – ферромагнитные заготовки; 2 – шлифовальная шкурка; 3 – неподвижный барабан; 4 – внутренний электромагнит; 5 – боковые электромагниты с зубчатыми сердечниками</p> <p>При вращение электромагнитов заготовки, прижатые к шлифовальной шкурке под воздействием магнитного притяжения электромагнита 4, обкатываются (<math>n</math>) по барабану и от притяжения электромагнитов 5 совершают осцилляция (<math>n_{oc}</math>). Во время этих движений шлифовальная шкурка обрабатывает поверхности заготовки</p>
<p>IV-B-3.1 – МАО отверстий немагнитных труб переменного сечения</p>	 <p>1 – заготовка; 2 – абразивные бруски; 3 – корпус АИ; 4 – ЭМИ постоянного тока; 5 – ЭМИ трехфазного тока; 6 – эластичный баллон</p> <p>Баллон заполнен сжатым воздухом (<math>P_B</math>) и прижимает абразивные бруски к обрабатываемой поверхности. ЭМИ перемещают вдоль заготовки (<math>V_s</math>), взаимодействие магнитных полей ЭМИ заставляет АИ вращаться (<math>n</math>) внутри заготовки, двигаться вдоль нее и осуществлять обработку отверстия</p>

Продолжение таблицы 2.16

1	2
<p>IV-Б-4 – МАО отверстий с глухими пазами</p>	 <p>1 – абразивные бруски; 2 – постоянные магниты; 3 – корпус хонинговальной головки</p> <p>Постоянные магниты с наклеенными на них абразивными брусками отталкиваются друг от друга и прижимают бруски к обрабатываемой поверхности. Рабочие движения (<math>n</math>, <math>V_s</math>) те же, что и при хонинговании без МА</p>
<p>V-B-1 – МАО обработка ли- стовых материалов, имеющих ре- льеф</p>	 <p>1 – листовый материал; 2 – ЭМИ постоянного тока; 3 – сопло, распыляющее абразивные зерна сжатым воздухом</p> <p>Абразивные зерна из электропроводного материала, перемещаясь в магнитном поле, одноименно заряжаются и отталкиваются. При этом обеспечивается равномерная обработка по всей ширине листа, перемещающегося с подачей (<math>V_s</math>)</p>

<p>V-B-2– MAO ребристойи гафрированных поверхностей</p>	 <p>1 –заготовка из ферромагнитного материала; 2 – ЭМИ переменного тока; 3 – ФАП MAO с созданием в заготовке переменного магнитного поля приводит к повышению стойкости шлифовального круга. Рабочие движения (<math>n</math>, <math>V_s</math>) те же, что и при шлифовании без MAO</p>
---	---

### 2.3.2. Топография магнитного поля в процессе магнитно-абразивной обработки

Рассмотрим процесс взаимодействия обрабатываемой поверхности и полюсного наконечника через магнитное поле в рабочем зазоре при MAO (рисунок 2.23). Учитывая большие радиальные размеры, эту задачу можно решить в декартовой системе координат. Пластина толщиной  $h$ , ширина которой для простоты принята за единицу, перемещается на расстоянии  $\delta$  со скоростью  $v$  под полюсами, которые возбуждают постоянное магнитное поле  $H_0$ , имеющее две составляющих:  $H_{0x}$  и  $H_{0z}$ ; поле безвихревое и его можно описать уравнением Лапласа [68]

$$\frac{\partial^2 H_{0x,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{0x,z}}{\partial z^2} = 0. \quad (2.46)$$

Поскольку вдоль оси  $x$  поле должно быть периодическим, для одной его составляющей будет справедливо выражение

$$H_{0z} = f_0(z) \cos \alpha x \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (2.47)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi}{\tau}. \quad (2.48)$$

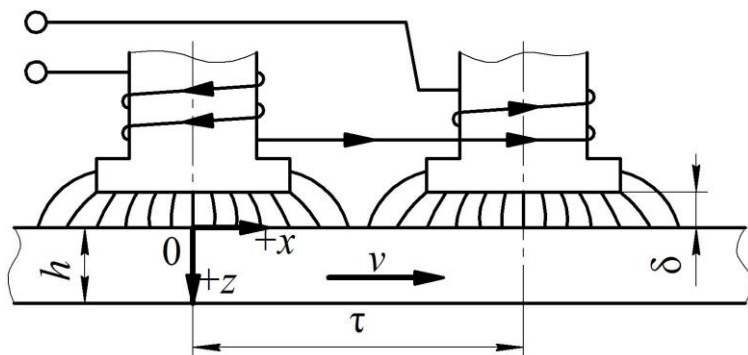


Рисунок 2.23. – Схема магнитно-абразивной обработки в декартовой системе координат

В сочетании с уравнением (4.1) получим дифференциальное уравнение для неизвестной функции:

$$f_0''(z) - a^2 f_0(z) = 0. \quad (2.49)$$

Решение его совместно с уравнением (4.2) дает:

$$H_{0z} = (C_1 e^{az} + C_2 e^{-az}) \cos ax. \quad (2.50)$$

Теперь рассмотрим упрощающее предположение, что толщина пластины  $h \rightarrow \infty$ . Полная обоснованность его станет ясна в дальнейшем. Учитывая конечные значения напряженности магнитного поля (2.50) при безграничном возрастании  $z$ , необходимо принять  $C_1 = 0$ .

На поверхности пластины при  $z = 0$  характер изменения этой составляющей напряженности магнитного поля известен:

$$H_{0z} = B_1 \cos ax. \quad (2.51)$$



Тогда для второй постоянной справедливо соотношение  $C_2 = B_1$  и соответствующая составляющая поля имеет вид:

$$H_{0z} = B_1 e^{-ax} \cos ax. \quad (2.52)$$

Подобным способом можно определить и вторую составляющую (это следует и из выражения для дивергенции):

$$H_{0z} = B_1 e^{-ax} \sin ax. \quad (2.53)$$

Когда пластина начинает двигаться, в ней будут индуцироваться вихревые токи. Необходимо выяснить, как проще всего использовать в данном случае производные векторов по времени. Для этого лучше всего провести следующую операцию:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = v \frac{\partial Z}{\partial x}. \quad (2.54)$$

Следовательно, достаточно у всех векторов производные по пространственной координате умножить на скорость.

Теперь исследуем соотношения, которые будут иметь место при движении. Вихревые токи создадут магнитное поле реакции  $H_r$ , которые будут накладываться на поле возбуждения. Следовательно, можно записать:

$$H = H_0 + H_r \quad (2.55)$$

Напряженность электрического поля удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\text{rot} E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.56)$$

Используя закон Ома, и принимая во внимание уравнение (2.55), получим:

$$\text{rot} \sigma = -\gamma \mu \left( \frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\partial H_r}{\partial t} \right). \quad (2.57)$$

Поскольку плотность тока связана также уравнением

$$\sigma = \text{rot}H_r. \quad (2.58)$$

Получим окончательное уравнение для решения нашей задачи

$$\text{rotrot}H_r = -\gamma\mu \left( \frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\partial H_r}{\partial t} \right). \quad (2.59)$$

Развернув левую часть уравнения, получим:

$$\frac{\partial H_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} = \gamma\mu \left( \frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\partial H_r}{\partial t} \right). \quad (2.60)$$

При движении в правой части этого уравнения производные будут:

$$\frac{\partial H_{0x}}{\partial t} = H_1 a v e^{-az} \cos ax \quad (2.61)$$

и

$$\frac{\partial H_{0z}}{\partial t} = -H_1 a v e^{-az} \sin ax. \quad (2.62)$$

Поле реакции должно быть периодическим в направлении оси  $x$  и в общем случае сдвинутым по отношению к начальному полю. Поэтому выбираем следующие формулы уравнений:

$$H_{rx} = f_1(z) \sin ax + f_2(z) \cos ax \quad (2.63)$$

и

$$H_{rz} = f_3(z) \sin ax + f_4(z) \cos ax. \quad (2.64)$$

Если подставим выражения (2.61)–(2.64) снова в уравнение (2.60), то после деления членов с  $\sin ax$  и незначительных преобразований получим:

$$a \frac{d^4 f_2}{dz^4} - b \frac{d^2 f_1}{dz^2} + c f_1 = -H_1 e^{-az}, \quad (2.65)$$

где для наглядности вновь введены обозначения:

$$\eta = \mu \gamma \nu; \quad (2.66)$$

$$a = \frac{1}{a^2 \eta^2}; \quad (2.67)$$

$$b = \frac{1}{\eta^2}; \quad (2.68)$$

$$c = 1 + \left( \frac{a}{\eta} \right)^2. \quad (2.69)$$

Совершенно аналогичные уравнения справедливы для остальных трех функций:  $f_2(z)$ ,  $f_3(z)$ , и  $f_4(z)$ . Частное решение уравнения (2.65) имеет вид:

$${}_1 f_1(z) = -H_1 e^{-az}, \quad (2.70)$$

а общее решение

$${}_2 f_1 = K_1 e^{r_1 z} + K_2 e^{r_2 z} + K_3 e^{r_3 z} + K e^{r_4 z}. \quad (2.71)$$

Величины  $r_{1,2,3,4}$  – корни характеристического уравнения

$$ar^4 - br^2 + c = 0 \quad (2.72)$$

и, следовательно,

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{c}{a}}}. \quad (2.73)$$

В общем случае это комплексные числа, которые можно представить в виде:

$$R = x + jv, \quad (2.74)$$

где

$$x = \pm \sqrt{\frac{a}{2} \sqrt{\eta^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}} \quad (2.75)$$

и

$$v = \pm \sqrt{\frac{a}{2} \sqrt{\eta^2 + a^2} - \frac{a^2}{2}}. \quad (2.76)$$

Принимая во внимание то обстоятельство, что с увеличением  $z$  все члены функции должны уменьшаться, действительные части корней (2.74) должны иметь только отрицательные значения. С новыми постоянными отдельные функции от  $f_1$  до  $f_4$ , будут иметь вид:

$$f_1 = C_1 e^{-xz} \sin vz + C_2 e^{-xz} \cos vz - H_1 e^{-az}, \quad (2.77)$$

$$f_2 = -C_2 e^{-xz} \sin vz - C_1 e^{-xz} \cos vz, \quad (2.78)$$

$$f_3 = C_4 e^{-xz} \sin vz - C_3 e^{-xz} \cos vz, \quad (2.79)$$

$$f_4 = C_3 e^{-xz} \sin vz + C_4 e^{-xz} \cos vz - H_1 e^{az}. \quad (2.80)$$

Тогда для составляющих магнитного поля получим уравнения:

$$H_{rx} = -H_1 e^{-az} \sin ax + [C_1 \cos(ax - vz) + C_2 \sin(ax - vz)] e^{-xz}, \quad (2.81)$$

$$H_{rz} = -H_1 e^{-az} \cos ax + [C_4 \cos(ax - vz) - C_3 \sin(ax - vz)] e^{-xz}. \quad (2.82)$$

Раскрыв

$$\operatorname{div} H = 0, \quad (2.83)$$

получим два уравнения для определения постоянных интегрирования в виде:

$$aC_1 - xC_3 - vC_4 = 0, \quad (2.84)$$

$$aC_2 - xC_4 + vC_3 = 0. \quad (2.85)$$

На поверхности пластины из уравнения (2.82) имеем:

$$(C_4 - H_1) \cos ax - C_3 \sin ax = H_{rz}(z=0), \quad (2.86)$$

и, наконец, из выражения

$$\sigma = \text{rot}H_r \quad (2.87)$$

получаем

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{-xC_1 - vC_2 + aC_2}{\mu} e^{-xz} \cos(ax - vz) + \\ & + \frac{-xC_2 + vC_1 + aC_4}{\mu} e^{-xz} \sin(ax - vz). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Если пренебрежем рассеянием и магнитным сопротивлением стали, все магнитное напряжение придется на воздушный зазор. В общем случае можно записать

$$\oint H_r ds = \iint \sigma dx dz. \quad (2.89)$$

Для больших значений высоты пластины  $h$  уравнение (2.89) записывается следующим образом

$$\delta H_{rz(x=0)} - \delta H_{rz}(x) = \int_0^x \int_0^\infty \sigma dx dz. \quad (2.90)$$

Так как величина  $H_{rz(x=0)}$  соответствует нижнему пределу первого интеграла, имеет также силу неопределенный интеграл

$$H_{rz}(x) = \frac{1}{\delta} \int_0^{\infty} dx \int \sigma dx. \quad (2.91)$$

Тогда получим:

$$H_{rz}(x) = \frac{1}{\alpha\delta} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \left\{ \left[ \frac{v}{\mu}(-xC_1 - vC_2 + aC_3) + \frac{x}{\mu}(-xC_2 + vC_1 + aC_4) \right] \times \right. \\ \left. \times \cos ax - \left[ \frac{x}{\mu}(-xC_1 - vC_2 + aC_3) - \frac{v}{\mu}(-xC_2 + vC_1 + aC_4) \right] \sin ax \right\}. \quad (2.92)$$

Однако для этой величины справедливо и уравнение (2.82) при  $z = 0$ . Тем самым получаем еще одно уравнение для определения всех четырех постоянных. После простых, но трудоемких выкладок окончательно получим:

$$C_1 = \frac{d}{a} \cdot \frac{-xk + y(n+d)}{(n+d)^2 + k^2} \cdot H_1, \quad (2.93)$$

$$C_2 = \frac{d}{a} \cdot \frac{-yk + z(n-d)}{(n+d)^2 + k^2} \cdot H_1, \quad (2.94)$$

$$C_3 = \frac{d(n+d)}{(n+d)^2 + k^2} \cdot H_1, \quad (2.95)$$

$$C_4 = \frac{-dk}{(n+d)^2 + k^2} \cdot H_1. \quad (2.96)$$

Для упрощения записи снова введем следующие обозначения:

$$k = \frac{-x\eta}{a(x^2 - y^2)}, \quad (2.97)$$

$$n = \frac{vr_1}{a(x^2 + y^2)}, \quad (2.98)$$

$$d = \mu\delta. \quad (2.99)$$

Теперь с помощью уравнения (2.88) можно, наконец, выразить плотность тока, индуктируемого в пластине при движении, в виде:

$$\sigma = -H_1 \nu \gamma \mu \delta \frac{e^{-xz}}{\sqrt{(n+d)^2 + k^2}} \cos(ax - vz - \varphi). \quad (2.100)$$

При этом тангенс угла сдвига фаз

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{n+d}. \quad (2.101)$$

Из уравнения ясно, что при увеличении скорости  $\nu$  увеличивается и угол  $\varphi$ . Этот угол зависит также от  $\mu$  и  $\gamma$ . Плотности тока убывают внутри пластины по экспоненте  $e^{-xz}$ , где  $x$  с увеличением скорости увеличивается. Следовательно, плотность тока быстро убывает с увеличением глубины (электромагнитный процесс протекает в тонком поверхностном слое в пределах известной глубины проникновения).

Тогда для напряженности магнитного поля внутри пластины справедливы уравнения:

$$H_{rx} = H_1 \frac{d}{\sqrt{(n+d)^2 + k^2}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}} e^{-xz} \sin(ax - vz - \varphi_x) \quad (2.102)$$

и

$$H_{rz} = H_1 \frac{d}{\sqrt{(n+d)^2 + k^2}} e^{-xz} \sin(ax - vz - \varphi_z), \quad (2.103)$$

из которых для фазовых углов получим выражения:

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{xk - y(n+d)}{yk + x(n+d)}, \quad (2.104)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_z = \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.105)$$

Нейтральная ось, которая в состоянии покоя совпадает с осями обоих полюсов, теперь наклонена на угол  $x$ , определяемый уравнением (2.102) при  $H_{rx} = 0$ :

$$\operatorname{tg} x = \frac{v}{a} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\eta}{a}\right)^2} - \frac{1}{2}}. \quad (2.106)$$

Характер изменения напряженности магнитного поля, соответственно его искажения, ясен из рисунка 2.24. В общем случае на участке одного полюса получим:

$$P = \frac{1}{\gamma} \iint |\sigma|^2 dx dz = \frac{H_1^2 v^2 \gamma \mu^2 \delta^2}{(n+d)^2 + k^2} \times \int_0^{\tau} \int_0^{\infty} e^{-2xz} \cos(ax - vz - \varphi) dx dz. \quad (2.107)$$

Пределы интегрирования от 0 до  $\infty$  допустимы, поскольку функция очень быстро убывает с ростом  $z$ . После проведения указанных операций и преобразования для  $2p$  полюсов получим:

$$P = \frac{p}{2} \tau \gamma v^2 H_1 \frac{d^2}{x \left[ (n+d^2) + k^2 \right]}. \quad (2.108)$$

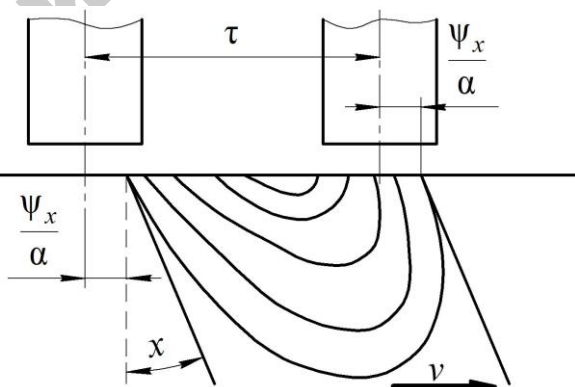


Рисунок 2.24. – Топография магнитного поля в рабочем зазоре при магнитно-абразивной обработке



При малой скорости получим приближенное выражение

$$P = \frac{P}{2} \tau \gamma \nu H_1^2 \sqrt{\frac{2\nu\tau}{\pi\gamma\mu}}. \quad (2.109)$$

В этой области скоростей потери возрастают пропорционально  $\nu^{3/2}$ .

#### **2.4. Процесс формирования рабочей технологической среды при магнитно-абразивной обработке**

Процесс MAO характеризуется многообразием используемых инструментальных материалов, специфичностью операций и машин и типом производства. Одним из важных аспектов системы MAO является применение РТС, состоящей из ФАП и СОТС, формируемой электромагнитным полем (ЭМП). Путем варьирования состава РТС производится требуемое изменение параметров процесса резания при MAO. Если ранее эффективность данного процесса оценивалась созданием новых видов ФАП и СОТС, то на сегодняшний день повышение эффективности следует производить через синергетическое воздействие параметров для решения этой задачи. Это связано с тем, что показатели свойств, входящих в систему компонентов выше, чем в отдельности у каждого из компонентов. Примером служит MAO алюминиевых сплавов при использовании ФАП Ж15КТ и различных составов СОТС типа СинМА-1 и СинМА-2, которые при данной обработке не обеспечивают необходимые показатели качества, но при обработке черных металлов обладают высокой эффективностью. В тоже время установлено что обеспечение роста интенсивности MAO алюминиевых сплавов обеспечивается применением ФАП на основе сплава  $SiC$  и СОТС, включающего глицерин, что требует всестороннего исследования и разработки специальных РТС, как для различных поверхностей, так и марок материалов. Случайный подбор ФАП и СОТС не является рентабельным поскольку их многообразие связано с постоянным риском неполучения требуемых выходных

показателей процесса и ростом затрат. При реализации процесса МАО важными факторами служит химическая инертность как самих компонентов РТС, так инструментального и обрабатываемого материалов. Поэтому выход на следующую качественную ступень создания режущего инструмента для МАО в виде РТС позволяет снизить его номенклатуру, оптимизировать режимы обработки, стабилизировать параметры процесса резания и повысить эффективность производства деталей машин. Однако, например, одна из трудностей создания РТС заключается в том, что СОТС при обработке деталей выступает не только как средство для охлаждения, но и как элемент по транспортировке поверхностноактивных веществ, будучи при этом электролитом второго рода. Поэтому системный подход к решению задачи исследования и разработки РТС для МАО заключается в получении закономерностей процесса МАО путем определения зависимостей между различными параметрами.

Процесс финишной обработки, в том числе МАО, представляя собой систему, в свою очередь разделяется на подсистемы. Одной из таких подсистем МАО является РТС, которая состоит, как указывалось выше из ансамбля ФАП, ЭМП и СОТС, находящегося в некотором фазовом состоянии, образованном через фазовый переход намагничиванием через ЭМП. Задача фактического моделирования РТС состоит в необходимости максимального приближения к реальной системе как кооперативной и согласованной через анализ РТС для получения устойчивости структуры и последующего синтеза. Оценка РТС производится через основные воздействия инструмента на обрабатываемую поверхность детали, которыми являются диспергирующее, моющее, смазывающее, охлаждающее и химическое в соответствии с характеристикой их производства (таблица 2.17).

Реализация исследования РТС как подсистемы МАО производится через условия ковариантности. Возникает необходимость учета не только имеющихся факторов, но и новых, таких как ее проницаемость, твердость и структура, которые более точно отражают сущность РТС. Осмысление процесса МАО требует реализации перехода от фрагментного характера понимания и восприятия данного процесса к его феноменологической роли и занимаемой позиции в общем ряду финишных абразивных методов. Это позволяет

путем введения необходимых для данного состояния РТС как подсистемы MAO факторов отвечающих его характеристическому образу при исключении бесконечного поиска и дополнительного включения функциональных компонентов обеспечить активацию имеющего комплекса.

Таблица 2.17 – Основные воздействия РТС на обрабатываемую поверхность детали

Действие	Характер протекающих процессов
Диспергирующее	Создание инструмента, состоящего из пористого тела, твердого тела, расклинивающий эффект
Моющее	Адсорбция с образованием многослойных структурных упорядоченных пленок
Смазывающее	Физическая или химическая адсорбция с образованием граничного слоя
Охлаждающее	Тепловой на основе теплообмена
Химическое	Образование химических пленок
Пластифицирующее	Пластическая деформация микрорельефа поверхностного слоя

Проведенный анализ показывает, что присутствует необходимость учета ранее указанных факторов (магнитная индукция, величина рабочего зазора и т. д.) которые характеризуются как процесс MAO, так и его отдельные подсистемы, в том числе РТС, однако отсутствие их взаимодействия и взаимовлияния друг на друга резко снижает понимание данного процесса. Поэтому согласно положений ковариантности обработки приняты к рассмотрению такие характеристики как твердость инструмента, его связка, пористость, концентрация зерен в объеме инструмента, удельный расход СОТС. Однако, если для хонингования и других способов финишной обработки с жестким закреплением зерна существуют прямые методы определения вышесказанных характеристик, то для MAO в силу специфичности это определение некоторых из них затруднено. Например, пористость твердого хона представлена из-за присутствия каверн общей и активной пористостью, которая вычисляется следующей формулой

$$V_0 = V_a + V_n.$$

При МАО активная пористость в силу строгой ориентированности цепочек феррообразивных частиц максимального приближена значению к общей. Наложение ЭМП приводит к росту вязкости путем приобретения вклада от магнитного поля, называемого магнитной вязкостью, что изменяет первоначальную величину и ставит трудности при установлении ее действительного значения, поскольку при намагниченности насыщения 50 кА/м и градиенте магнитной индукции 10 Т/м возможно 30–кратное увеличение плотности магнитной жидкости.

Для сравнительного анализа роли СОТС при МАО необходимо провести оценку его поведения в пористом скелете феррообразивной «щетке» и проблемы его поведения в процессе микрорезания при учете фактора вязкости, как одного из определяющих. Согласно пористости щетки СОТС проникает в зону непосредственного контакта ФАП и детали, и с учетом высокой химической активности обеспечивает аддитивность съема материала. Пористый скелет РТС должен отвечать жестким требованиям проницаемости, коррозионной стойкости, порораспределения, многократной регенерации, высокому ресурсу. Согласно принципу распределения силовых линий ЭМП, пористый скелет РТС характеризуется переменной в направлении фильтрации поровой структурой, что обеспечивает высокую проницаемость в зоне обработки. Однако неравномерное осаждение фильтруемого загрязнителя осуществляет постепенное закупоривание пор, что требует применения особых приемов очистки. Одним из таких приемов является изменение напряженности ЭМП, что приводит к ослаблению прочности связи цепочек РТС и возможности удаления отходов из зоны обработки по причине роста вибрации. Кинетика осаждения и последующего закупоривания пор субстратом отходов обработки, стружки, СОТС и других загрязнений состоит в прямом столкновении частицы субстрата со стенкой поры и поверхностью зерна ФАП, прямым или косвенным захватом и ростом балласта субстрата в данном сечении РТС. Возрастание неоднородности характеристик поровой структуры РТС по фронту раздела «обрабатываемый материал – ФАП» и остального

объема РТС вызывает резкое уменьшение пористости и среднего размера пор, и, как следствие, уменьшение, а начиная с некоторого момента, и полное прекращение интегральной проницаемости РТС. Поэтому наличие высокой вязкости СОТС приводит к тому, что при быстром уменьшении пористости вблизи передней поверхности РТС происходит облитерация пор в какой-то плоскости, перпендикулярной направлению потока СОТС, а размер пор становится равным размеру субстрата. Следовательно, для повышения эффективности проницаемости РТС требуется обеспечить снижение вязкости СОТС, однако подобная сублимация связана с падением смазывающей и диспергирующей функций СОТС. Поэтому широко применяемая группа эмульсолов типа Укринол, ЭТ-2 неприменима для МАО по причине образования в процессе обработки неустраняемой пленки шлама. Использование синтетических СОТС типа СинМА-1 и СинМА-2 гарантирует рост моющей и охлаждающей способности РТС, однако при этом снижается интенсивность съема материала. Таким образом, возникает необходимость смещения области оптимума данных факторов при изменении состава СОТС.

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ РАБОЧЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С ОБРАБАТЫВАЕМОЙ СЛОЖНОПРОФИЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В результате анализа теоретических концепций, раскрывающих механизм процесса МАО (пластическая деформация, диспергирование материала, электрохимические явления, действие вихревых токов, проявление эффекта П. А. Ребиндера), предложено рассматривать данный процесс как следствие циклического механо-магнитно-электрохимического эффекта в рабочей среде. В местах взаимодействия материала и ферроабразивного зерна происходит образование поверхности дефектов и концепции напряжений. Рабочая среда воздействует химически, увеличивая расширения трещин, и электрохимически, способствуя ускорению развития трещины. Функционирует микропара: вершина трещины, представляющая ювенильную поверхность – анод, остальная поверхность под оксидной пленкой – катод. Происходит расклинивание микротрещины под воздействием гидродинамического эффекта. Выделяющийся на катодных участках водород приводит к частичному восстановлению оксидной пленки. Микропара под воздействием вихревых токов смещается по поверхности, до расклинивания трещины продуктами ПАВ, в вершине происходит изменение знака на отрицательный. Интенсивное выделение водорода на катоде приводит к дальнейшему охрупчиванию и разрушению металла.

Производительность процесса диспергирования материала и его пластической деформации обеспечивается следующими факторами: структурная гетерогенность поверхности, неоднородность оксидных пленок, наличие загрязнений, щелевые эффекты, микрорельеф, микротрещины, локальные внешние и внутренние напряжения и неравномерность их распределения по поверхности детали, а также концентрация агрессивных веществ в СОТС. Следовательно, росту интенсивности процесса МАО способствуют: проникновение СОТС в микротрещины, химическое растворение металла, образование и функционирование макропары – «вершина – поверхность трещины», расклинивающий эффект продуктами СОТС и обработки, наводороживание металла и образование гидридов металла,

приводящих к охрупчиванию поверхностного слоя. Данные факторы действуют непрерывно во времени, что способствует процессу разрушения материала.

### **3.1. Оценка сил, действующих на абразивное зерно при магнитно-абразивной обработке**

Общим для всех известных схем МАО является то, что:

- роль режущего инструмента выполняет порция ФАП;
- заготовку размещают между полюсами магнитного индуктора либо рядом с ними;
- пространство между индуктором и заготовкой частично или полностью заполняют ферроабразивным порошком.

Порция ФАП при включенном магнитном поле удерживается силами магнитного поля в рабочем пространстве и оказывается прижатой к обрабатываемой поверхности. При движении заготовки относительно полюсов индуктора (или наоборот) осуществляется полирование. При этом удаляется припуск и формируется поверхность с новым микрорельефом и измененными физико-механическими свойствами поверхностного слоя.

Вся порция порошка, помещенного в рабочий зазор, под действием сил трения со стороны двигающейся заготовки (или полюса) смещается в направлении движения и уплотняется, встречая там основное сопротивление со стороны магнитного поля. Силы трения между зернами и поверхностью полюса помогают магнитному полю удерживать порошок внутри рабочего зазора. В частности, граничащие с заготовкой зерна медленно двигаются к выходу из магнитного поля полюса.

При МАО основное абразивное воздействие на поверхность детали происходит на дуге контакта с ферроабразивной «щеткой». Дуга контакта определяется предельно возможной жесткостью ферроабразивной «щетки» при конкретных технологических параметрах процесса полирования. Следовательно, основное воздействие производит упругодеформируемый ферроабразивный слой, форма которого обратна профилю детали. В связи с этим необходимо выявить основные закономерности процесса взаимодействия детали с упругодеформированным дискретным ферроабразивным слоем.

В настоящее время существует несколько противоречивых гипотез, объясняющих процесс съема металла при МАО. Это объясняется сложностью явлений, происходящих в зоне обработки.

В работе [69] показано, что, кроме ориентированного абразивного резания, при обработке деталей в магнитном поле ферромагнитными порошками наблюдается воздействие малых электрических токов, протекающих между ферромагнитным рабочим элементом и поверхностью детали. При этом суммарный съем металла микротоками лишь немного меньше величины съема металла, получаемого за счет процесса абразивного резания.

Ю. М. Барон [70, 71] считает, что съем металла осуществляется путем механического резания под действием нормальных и тангенциальных сил магнитного происхождения.

Постоянное перемешивание ферромагнитной абразивной массы и непрерывное вступление в контакт с деталью новых режущих кромок являются особенностью МАО, частично объясняющей его высокую эффективность, но, согласно [26], гипотеза ориентированного абразивного резания в процессе обработки не может служить объяснением его высокой эффективности.

В. И. Жданович в результате проведенных экспериментов и анализа профилограмм микроцарапин установил, что процесс удаления металла сопровождается не только отделением микростружек, но и в некоторых условиях происходит перемещение металла на края микронеровностей, что говорит о наличии пластического деформирования обрабатываемой поверхности. Также отмечается, что при МАО имеет место электромагнитный характер действия сил, которые обеспечивают притяжение зерен к обрабатываемой поверхности и их удержание в рабочем зазоре. Специфика поведения мелкодисперсной ферромагнитной системы (рабочего порошка) в рабочих зазорах обуславливает возникновение дополнительного механического давления магнитно-абразивной массы на обрабатываемую поверхность, что было экспериментально зафиксировано в работе [72].

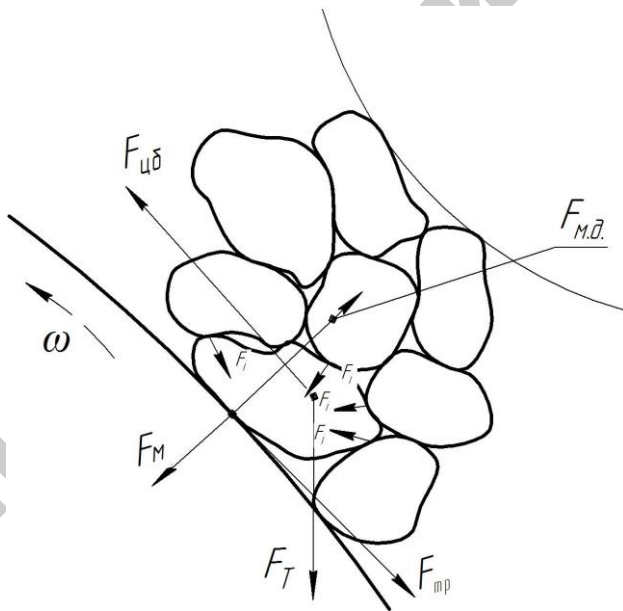
В работе [73] утверждается, что при магнитно-абразивной обработке имеет место пластическое деформирование поверхностного слоя, а это значит, что исключается оплавление



обрабатываемой поверхности микротоками, так как оплавленный поверхностный слой характеризуется совершенно другими закономерностями формирования.

Общим для всех упомянутых работ является утверждение о том, что одной из основных характеристик при магнитно-абразивной обработке является давление ферроабразивного порошка на обрабатываемую поверхность детали. Давление ФАП определяет характер протекания абразивного воздействия.

На каждое зерно ферроабразивного порошка, находящегося в рабочем зазоре, действует комплекс сил магнитного, электромагнитного и механического происхождения (рисунок 3.1). Состав сил определяется характером внешнего магнитного поля, электропроводимостью материала порошка; выбранной схемой обработки; механическими характеристиками порошковой среды; формами и размерами зерен; свойствами применяемого СОТС.



$\vec{F}_M$  – магнитная сила;  $\vec{F}_i$  – инерционная сила;  $\vec{F}_{цб}$  – центробежная сила;  
 $\vec{F}_{мд}$  – сила механического давления;  $\vec{F}_{тр}$  – сила трения;  $\vec{F}_T$  – сила тяжести

Рисунок 3.1. – Схема сил, действующих на зерна ФАП

Результирующая сила  $F$ , действующая на единичное зерно порошковой среды в рабочем зазоре, является векторной суммой составляющих ее сил и определяется по формуле

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_i + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{мд} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_T, \quad (3.1)$$

где  $\vec{F}_m$  – магнитная сила;  $\vec{F}_i$  – инерционная сила;  $\vec{F}_{цб}$  – центробежная сила;  $\vec{F}_{мд}$  – сила механического давления;  $\vec{F}_{тр}$  – сила трения;  $\vec{F}_T$  – сила тяжести.

В каждом конкретном способе МАО действуют все или только часть перечисленных сил. Численное значение сил механического давления и трения, действующих на отдельное зерно со стороны окружающей порошковой среды, может быть получено только в ходе расчета взаимодействия в рабочем зазоре.

Суммарная сила  $F$ , действующая на зерно ФАП, составляет  $(0,5 - 16)10^{-3}$  Н. При обработке материалов с низкой магнитной проницаемостью значение результирующей силы значительно снижается. Учитывая, что  $F_m$  является одной из основных составляющих силы  $F$  при МАО, возникает необходимость компенсации магнитной силы при обработке материалов с низкой магнитной проницаемостью. При более высоких силах, действующих на зерно порошка  $(20 - 50)10^{-3}$  Н, происходит более интенсивное снятие микростружки.

Для увеличения давления, действующего на зерно ФАП, необходимо создать в зоне обработки дополнительные силы, которые позволят увеличить суммарную силу, действующую на ФАП, и, следовательно, интенсифицировать процесс обработки, компенсируя низкую магнитную проницаемость (например, при обработке цветных металлов, твердых сплавов).

### 3.2. Процесс резания ферроабразивным инструментом

Процесс резания связанным абразивным зерном и закономерности образования шероховатости поверхности исследовались многими авторами, так как эти процессы являются

основополагающими, раскрывают сущность абразивного воздействия и дают возможность установить оптимальные технологические режимы процесса обработки. Имеется большое количество работ по исследованию данных вопросов в области шлифования абразивными кругами и лентами, хонингования, доводки и полировки деталей. В настоящее время проводятся широкие исследования МАО.

Необходимо отметить, что наряду с общими закономерностями в процессах резания абразивным зерном в перечисленных методах обработки имеются и свои специфические особенности. Поэтому излагаются основные взгляды на процесс резания, вытекающие из работ Е. Н. Маслова, А. Н. Богомолова и других авторов.

Практически при любом виде абразивной обработки оказывается абразивное воздействие совокупности единичных зерен на обрабатываемую поверхность. Конкретное абразивное зерно в зависимости от материала абразива и его зернистости имеет определенные геометрические размеры, радиус округления  $\rho$  и угол между гранями, образующими вершину зерна  $\gamma_i$ .

Внедрение вершины абразивного зерна в металл поверхности обрабатываемой детали зависит от приложенной к зерну нагрузки, величины радиуса округления вершины и физико-механических свойств материала детали.

Удаление металла с обрабатываемой поверхности при абразивной обработке происходит за счет микрорезания, т. е. царапания ее абразивными зернами. По предложенной Е. Н. Масловым [47] схеме процесса царапания предполагается, что вершины абразивных зерен имеют радиусы округления, благодаря которым обеспечиваются их динамическая прочность и работоспособность. Наличие радиуса округления у вершин абразивного зерна приводит к тому, что передний угол при резании имеет отрицательное значение. Величина его определяется из выражения

$$\gamma_i = \arcsin \frac{\rho - h_i}{\rho}, \quad (3.2)$$

где  $h_i$  – толщина снимаемого слоя металла в точке  $i$  линии контактирования зерна с обрабатываемой поверхностью;  $\rho$  – радиус округления вершины абразивного зерна.

Значение угла резания  $\delta$  в этом случае

$$\delta_i = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\rho - h_i}{\rho}. \quad (3.3)$$

Величины углов  $\gamma_i$  и  $\delta_i$  имеют большое значение в процессе резания. Значения этих углов, как видно из приведенных формул, зависят от глубины  $h$  внедрения абразивного зерна в металл и радиуса округления вершин  $\rho$ . При малых значениях  $h$  величины этих углов становятся настолько большими, что делают практически невозможным процесс резания, т. е. удаление металла. При этом происходит только смятие металла или его пластическое деформирование. При незначительных величинах  $h$  может иметь место только процесс упругого деформирования поверхностного слоя металла.

С увеличением глубины внедрения вершины абразивного зерна, в металл поверхности обрабатываемой детали происходит увеличение объема металла, подвергаемого пластическому деформированию, как впереди абразивного зерна, так и по бокам его и ниже линии среза. При определенном критическом значении глубины внедрения перемещение абразивного зерна сопровождается снятием стружки. Как показали исследования, процесс снятия стружки становится возможным при напряжениях по линии скальвания, превышающих обычно сопротивление материала срезу.

Из приведенного следует, что в зависимости от фактического отношения глубины внедрения абразивного зерна в материал к радиусу округления вершины зерна абразивное воздействие на обрабатываемую поверхность может производиться в виде упругого, пластического деформирования и микрорезания. При этом одно и то же абразивное зерно в зависимости от величины внедрения в материал может оказывать упругое или пластическое деформирование либо производить микрорезание.

Если совокупность абразивных зерен закреплена связкой в форме абразивного круга, бруска или абразивного полотна, то, как правило, они располагаются над рабочей поверхностью на разных уровнях. В связи с этим внедрение их в поверхность обрабатываемой детали производится на различную глубину, и в процессе обработки имеют место все три вида абразивного воздействия одновременно. Производительность процесса и качественные характеристики поверхности обрабатываемой детали зависят от соотношения видов абразивного воздействия.

Пластическое деформирование и физико-механические свойства металла обрабатываемой детали имеют большое значение в процессе стружкообразования при абразивной обработке. Установлено, что при одних и тех же условиях микрорезания единичным абразивным зерном с повышением пластичности металла увеличивается количество металла, пластически отесняемого по краям царапины, и уменьшается доля металла, который удаляется в форме микростружки. Это приводит к ухудшению обрабатываемости деталей абразивным инструментом. В более прочных и хрупких материалах, наоборот, доля пластически вытесняемого металла уменьшается, а удаляемого в виде микростружки – возрастает. Количественная оценка этого явления производится с помощью коэффициента стружкообразования  $K = V_c/V_{ц}$ , где  $V_c$  – объем металла, удаленного в виде микростружки;  $V_{ц}$  – теоретический объем царапины. При  $K = 0$  имеет место только пластическое деформирование металла. С увеличением значения  $K$  сьем металла возрастает.

С учетом того, что практически при любом процессе абразивной обработки наряду со снятием металла в форме микростружки происходит и пластическая деформация, значение коэффициента стружкообразования будет всегда меньше единицы.

Известно, что поверхность большинства абразивных зерен имеет определенную шероховатость, обусловленную внутренним несовершенством кристалла и условиями его возникновения. Вследствие этого поверхность вершин зерен представляет собой совокупность непрерывно чередующихся микровыступов и субмикровыступов, которые играют определенную роль в процессе резания металла.

Внешняя сила, действующая на единичное абразивное зерно, может быть разложена на нормальную силу  $P_y$ , прижимающую зерно к обрабатываемой поверхности, и тангенциальную силу  $P_z$ , возникающую при перемещении абразивного зерна и срезающую металл. При обработке связанным абразивом соотношение этих сил зависит от фактического переднего угла  $\gamma$  и коэффициента трения при микрорезании  $f$ .

Теоретическими и экспериментальными исследованиями доказано, что при одном и том же радиусе округления вершины абразивного зерна с уменьшением его внедрения в металл увеличивается передний угол  $\gamma$  и отношение  $P_y/P_z$  значительно возрастает. При определенных значениях  $h$  и  $f$  отношение этих сил может быть очень большим.

Поскольку угол резания является тупым, то увеличение силы  $P_y$  вызывает деформацию сжатия металла, в результате которой повышается сопротивление сдвигу деформируемого слоя вследствие увеличения силы трения в плоскости скалывания при отведении стружки. Увеличивается при этом и сила внешнего трения между поверхностью абразивного зерна и поверхностью обрабатываемого материала. Возникающие в процессе резания абсолютные значения сил  $P_y$  и  $P_z$  зависят от физико-механических свойств обрабатываемого материала и толщины среза  $h$ . С увеличением прочности обрабатываемого материала и глубины среза  $h$  значения этих сил возрастают. Но при этом нормальная сила  $P_y$  всегда больше тангенциальной  $P_z$ .

Установлено [74], что при малом давлении абразивного зерна на обрабатываемый материал происходит только скольжение зерна по поверхности материала и соотношение сил  $P_z = P_y/f$ , где  $f$  – коэффициент трения абразива по обрабатываемому материалу. В этом случае удельный вес работы трения при абразивном воздействии составляет 100 %.

В зоне упругого и пластического деформирования соотношение сил определяется из выражения  $P_z = P_y/F'$ . Здесь  $F'$  – площадь поперечного сечения деформированного слоя. Зависимость показывает, что в области пластических деформаций деформирующая сила  $P_z$  уменьшается с увеличением площади поперечного сечения деформированного слоя.

В зоне микрорезания имеет место зависимость  $P_z = P_y/F$ , где  $F$  – площадь поперечного сечения царапины.

Как известно, условное напряжение микрорезания при абразивной обработке характеризуется отношением  $P_{\text{усл}} = P_y/F$ . Выполненными исследованиями было установлено, что увеличение толщины снимаемого слоя при микрорезании, а следовательно, и площади поперечного сечения царапины при тупом угле резания практически не изменяет работы деформирования. Этим объясняется тот факт, что при значительных толщинах снимаемых слоев условное напряжение микрорезания мало зависит от изменения толщины снимаемого слоя.

И. И. Богомоловым экспериментальным путем [75] было подтверждено, что абсолютное значение силы  $P_z$ , а следовательно, и условное напряжение микрорезания определяются главным образом физико-механическими свойствами абразива и обрабатываемого материала.

В связи с изложенным можно сделать вывод, что при любом виде абразивного воздействия на поверхность обрабатываемой детали большую роль играет сила трения. Если удельный вес работы трения при активном микрорезании составляет 80 %, то при обработке ферроабразивным инструментом из-за разности зерен, значительная часть которых оказывает только упругое и пластическое деформирование, работа трения будет еще больше. Если учесть еще трение связки о поверхность обрабатываемой детали и адгезионное налипание металла на абразивные зерна, то удельный вес работы трения при обработке связанным абразивом, по данным [75], достигает 95–98 %. Это делает особенно актуальной проблему уменьшения трения при обработке связанным абразивом за счет применения рациональной смазки и других мер.

Возникающие при абразивной обработке усилия резания в числе прочих факторов определяют работоспособность абразивного зерна. Если усилия резания достигают величины прочности зерна или прочности закрепления его в связке, то происходит частичное разрушение зерна или выкрошивание его из связки. При этом имеет место самозатачивание абразивного инструмента.

Процесс обработки поверхностей деталей уплотненным абразивом имеет характерные особенности как в области абразивного воздействия, так и в закономерностях формирования качественных характеристик поверхностного слоя. Эти особенности обусловлены следующими причинами.

1. Абразивное зерно не закреплено, как в абразивных инструментах, поэтому контактирует с обрабатываемым материалом не одной какой-то вершиной, а последовательно всеми гранями, ребрами и вершинами. В связи с этим форма абразивного зерна играет в этом процессе более значимую роль.

2. Единичное абразивное зерно прижимается к обрабатываемой поверхности постоянной по величине силой, значение которой определяется комплексом сил. Следовательно, усилия резания в этом случае будут ограничиваться конечными значениями.

3. Плотность абразивных зерен в зоне контактирования уплотненного абразивного слоя с обрабатываемой поверхностью будет выше, чем в случае обработки связанным абразивом.

Из рассмотренных в предыдущей главе способов обработки деталей уплотненным абразивом последний является наиболее характерным для этого метода обработки. Поэтому ниже вопросы процесса резания и образования шероховатости поверхности будут рассмотрены применительно к этому способу, хотя многие закономерности этих процессов носят общий характер и применимы в других случаях к этому методу обработки.

### **3.2.1. Определение параметров рабочей поверхности ферроабразивного инструмента на основе моделирования**

При расчете режимов резания и определении параметров шероховатости обработанной поверхности при МАО важно представлять состояние рабочей поверхности абразивного инструмента. Экспериментальное исследование рабочей поверхности абразивного инструмента связано со значительными затратами времени, не имеет единой методики, а разница в измерениях может достигать более 60 % [76]. В этой связи моделирование рабочей поверхности абразивного



инструмента предпочтительнее, поскольку дает возможность более глубоко анализировать протекающие при абразивной обработке процессы.

При моделировании процесса взаимодействия единичного абразивного зерна, представленного эллипсоидом вращения, с обрабатываемой поверхностью было принято, что пространственное распределение зерен по высоте поверхностного слоя инструмента подчиняется функции Ферми–Дирака для распределения электронов в твердом теле [77]. При разработке модели рабочей поверхности абразивного инструмента учитывали, что пространственное расположение зерен абразивных материалов, аппроксимированных эллипсоидом вращения, практически всегда будет иметь отклонение, что вызвано наклоном массива частиц ФАП.

Особенности предлагаемого подхода по разделению абразивных зерен на рабочей поверхности инструмента на режущие и просто деформирующие подробно изложены в [78]. Процентное содержание режущих зерен принимаем равным отношению количества зерен с ненулевой режущей площадью передней поверхности к общему количеству рабочих зерен  $N$ :

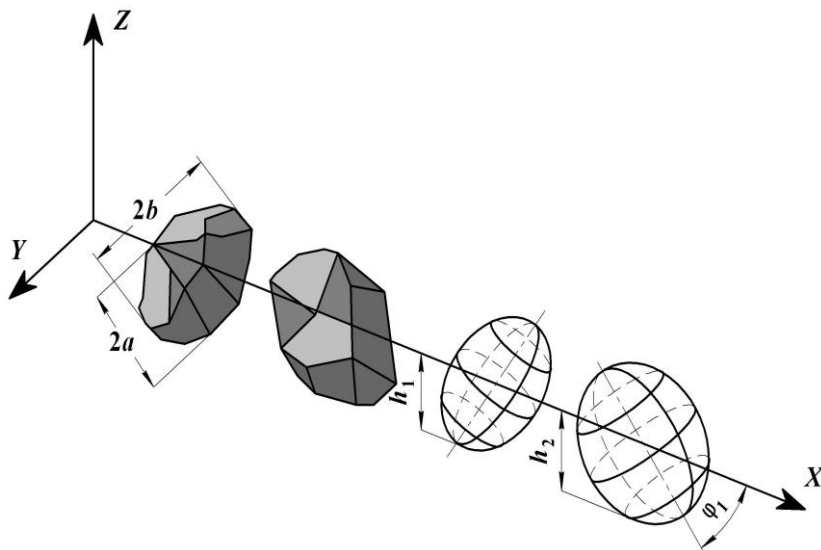
$$N_{\text{реж}} = \frac{\sum_{k_3=1}^z (S_p[k_3] > 0)}{\sum_{k_3=1}^z ((S_p[k_3] + S_d[k_3]) > 0)} 100\% , \quad (3.4)$$

где индексы у единиц обозначают, что суммирование выполняется только при соответствующих условиях.

Количество деформирующих зерен

$$N_{\text{деф}} = \frac{\sum_{k_3=1}^z (S_d[k_3] > 0 \text{ при } S_p=0)}{\sum_{k_3=1}^z ((S_p[k_3] + S_d[k_3]) > 0)} 100\% . \quad (3.5)$$

Для определения количества абразивных зерен  $Z$ , принимающих участие в процессе обработки, рассчитывали среднестатистическое расстояние между зернами в связке (рисунок 3.2).



**Рисунок 3.2. – Схема вариантов расположения абразивных зерен, участвующих в процессе обработки**

Опуская промежуточные преобразования, получаем, что количество абразивных зерен в единице объема абразивосодержащего материала будет вычисляться следующим образом:

$$Z = \frac{\frac{V_0 k}{100}}{\sum_{y=1}^{2b} \pi a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}, \quad (3.6)$$

где  $V_0$  – единичный объем рабочего слоя абразивного инструмента;  $k$  – объемная концентрация абразивного материала (в процентах);  $a, b$  — полуоси эллипсоида вращения.

Тогда среднестатистическое расстояние  $l_c$  между зернами в связке определим как отношение длины ребра единицы объема к количеству зерен, расположенных вдоль этого ребра:

$$l_c = \frac{\sqrt[3]{V_0}}{Z} = \sqrt[3]{\frac{100}{k} \sum_{y=1}^{2u} \pi a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}. \quad (3.7)$$

Реальное значение расстояния между вершинами зерен будет находиться в пределах

$$(d_3^1 + d_3^2) \leq l_\phi \leq l_c, \quad (3.8)$$

где  $d_3^1$  и  $d_3^2$  – размеры от вершины зерна до его границы в направлении последующего и предыдущего зерен соответственно (зависят от зернистости и пространственной ориентации зерен).

Выражение (3.8), характеризующее реальное расположение зерна в профиле ферроабразивного инструмента, учтено при реализации модели с использованием генератора случайных чисел.

Максимальное расхождение величины среднестатистического расстояния не превышает 15 %, что, учитывая хаотичность расположения зерен в рабочем зазоре, можно считать вполне приемлемым.

Точность описания процесса формирования абразивной поверхности в значительной степени определяется точностью расчета количества рабочих абразивных зерен. Для оценки адекватности полученных математических зависимостей по определению количества зерен на поверхности абразивного инструмента был проведен сравнительный анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований различных авторов [79].

Очевидно, что предложенный порядок расчета количества активных зерен в целом совпадает с теориями других исследователей. Причина количественного отличия состо-

ит, во-первых, в разделении активных зерен в нашей модели на режущие и деформирующие и, во-вторых, общее количество активных зерен по предлагаемой модели больше вследствие более точного расчета количества деформирующих зерен. В предлагаемой модели учитываются все абразивные зерна, в какой-либо степени вступившие в контакт с обрабатываемым материалом. Поэтому количество деформирующих зерен увеличивается за счет случаев, когда расположенное зерно только касается вершины микронеровности, не производя ни работы резания, ни работы деформирования поверхностного слоя. При проведении экспериментальных исследований такие случаи могут быть незарегистрированы, так как при контроле тепловых импульсов, на фоне других контактирующих зерен, выделяемое тепло не дает импульса. При визуальном контроле этот контакт не фиксируется, поскольку после прохождения такого зерна на обрабатываемой поверхности не останется отдельной риски, так как зерно касается боковой поверхности микронеровности.

Таким образом, имеется кинематическая модель механизма взаимодействия абразивных зерен с обрабатываемой поверхностью, учитывающая их пространственную ориентацию в матрице абразивного инструмента и позволяющая дифференцированно определять количество режуще-деформирующих и деформирующих зерен, в том числе для микрорельефов с перекрещивающимися штрихами обработки и не имеющими определенного направления штриха.

### **3.2.2. Силы резания при обработке ферроабразивным инструментом**

При обработке деталей уплотненным потоком свободного абразива имеет место относительное перемещение абразивного зерна и обрабатываемой поверхности. Абразивное зерно в зоне контактирования с поверхностью вдавливается в металл на определенную глубину  $h$  под действием суммарной силы  $P_{\Sigma N}$ , которая создается центробежными силами и давлением лежащих выше слоев абразивных зерен. Значение суммарной силы

для обработки может быть вычислено с учетом давления сил, лежащих выше абразивных зерен в уплотненном бруске.

При абразивной обработке на единичное зерно будут действовать приведенная нормальная сила  $Q$  и сила трения  $T$  (рисунок 3.3). Указанные силы можно приложить в некоторой точке в середине дуги контактирования абразивного зерна с металлом.

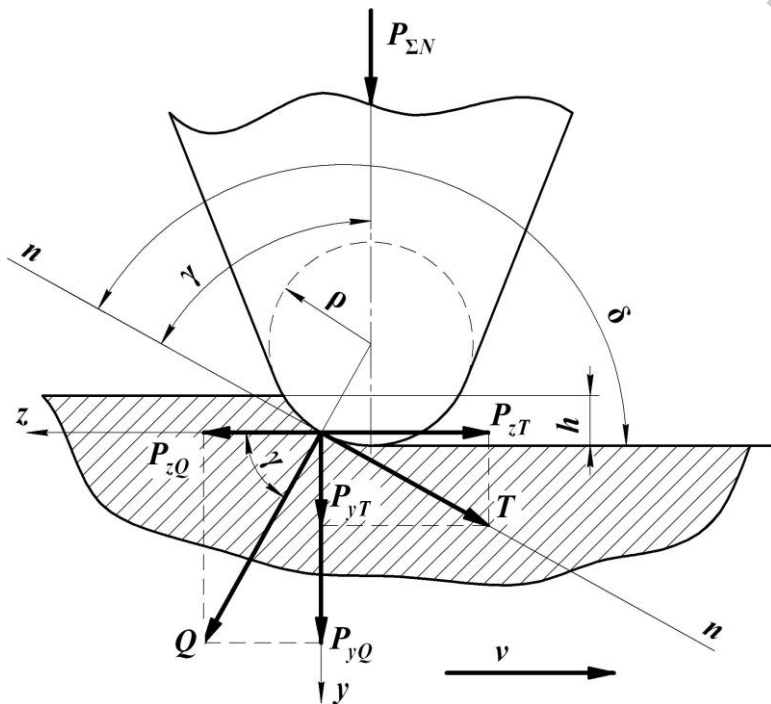


Рисунок 3.3. – Схема действующих сил при микрорезании единичным абразивным зерном

Раскладывая их по направлениям осей  $x$  и  $y$ , можем определить силу  $P_y$ , прижимающую абразивное зерно к обрабатываемой поверхности, и  $P_z$ , которая срезает микростружку:

$$P_{zQ} = Q \cos \gamma ; P_{yQ} = Q \sin \gamma ;$$

$$P_{zT} = T \sin \gamma ; P_{yT} = T \cos \gamma ;$$

$$P_y = P_{yQ} + P_{yT} = Q \sin \gamma + T \cos \gamma;$$

$$P_z = P_{zQ} + P_{zT} = Q \cos \gamma + T \sin \gamma$$

или

$$P_y = Q(\sin \gamma + f \cos \gamma);$$

$$P_z = Q(\cos \gamma + f \sin \gamma),$$

откуда получаем

$$Q = \frac{P_{\Sigma N}}{\sin \gamma + f \cos \gamma},$$

Теперь находим выражение для срезающей силы

$$P_z = \frac{P_{\Sigma N} (\operatorname{ctg} \gamma - f)}{1 + f \operatorname{ctg} \gamma}.$$

### 3.2.3. Воздействие ферроабразивной щетки на обрабатываемую поверхность

Способ MAO деталей, как было указано выше, имеет характерные особенности взаимодействия абразива с обрабатываемой поверхностью. Раскрытие динамики этого взаимодействия и ее закономерностей крайне важно как в теоретическом плане, так и с практической стороны, потому что это позволит объяснить зависимости характеристик технологического процесса от условий обработки и даст возможность обоснованно выбирать режимы обработки и параметры MAO.

Предварительный анализ показывает, что в рассматриваемом способе имеет место довольно интенсивный сьем металла, и в процессе обработки улучшаются качественные характеристики обрабатываемой поверхности, а ее шероховатость снижается до  $Ra$  0,4–1,2 мкм. Все это дает основание предположить, что при абразивном воздействии происходит резание металла абразивными частицами.

Вместе с тем известно, что практически любой способ абразивного микрорезания сопровождается упругим и пластическим деформированием. В связи с этим очень задача состоит в том, чтобы установить наличие условий для этих видов абразивного воздействия, подтвердить теоретически и экспериментально их наличие и роль в процессе обработки, а также оценить их соотношение и значение в формировании шероховатости обрабатываемой поверхности.

Нами сделана попытка решить поставленную задачу, используя известные в этой области работы И. В. Крагельского, Е. Н. Маслова, В. Н. Кашеева и др. [47, 80, 81].

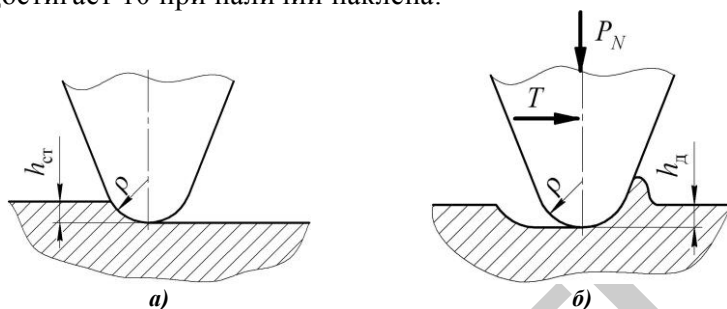
При вдавливании сферического индентора в деформируемое пространство, аналогом которого является и единичное абразивное зерно с радиусом округления вершины  $\rho$ , происходит его заглубление в металл. При этом под действием приложенной силы  $P_{\Sigma N}$  в статическом состоянии величина внедрения составит  $h_{\text{ст}}$  (рисунок 3.4). Установлено [80, 82], что при углублении индентора металл по краям выпучивается. Углубление под действием приложенной силы продолжается до тех пор, пока напряжение на контактной поверхности не делается равным твердости  $C_{\sigma_s}$ . Величина внедрения

$$h_{\text{ст}} = \frac{P_{\Sigma N}}{2\pi\rho C_{\sigma_s}}, \quad (3.9)$$

где  $C_{\sigma_s} = q$  – среднее напряжение на контактной поверхности;  $\sigma_s$  – предел текучести материала.

В приведенных условиях вдавливания индентора на контактной поверхности возникает сложное напряженное состояние, и переход от упругости к пластичности затрудняется вследствие возникновения дополнительных напряжений, действующих в перпендикулярных направлениях. При этом значительно повышается несущая способность контактной поверхности, которая оценивается коэффициентом  $C_{\sigma_s}$ . По

данным исследований, значение этого коэффициента колеблется от 1 до 6 для металла в нормальном состоянии и достигает 10 при наличии наклепа.



**Рисунок 3.4. – Схемы вдавливания сферического индентора в металл при статическом (а) и динамическом (б) нагружении**

При динамическом нагружении индентора, когда действует тангенциальная сила  $T$ , происходит смещение его в тангенциальном направлении. При этом половина поверхности со стороны приложенной силы разгружается, и нагрузку воспринимает только одна полуповерхность. Поскольку среднее напряжение на контактной поверхности принимается равным при статическом и динамическом нагружениях, то в случае динамического нагружения имеет место дополнительное углубление индентора до тех пор, пока площадь передней полуповерхности не станет равной площади всего отпечатка при статическом нагружении. Величина внедрения индентора при динамическом нагружении

$$h_{\text{д}} = \frac{P_{\Sigma N} \sqrt{1 + f^2}}{\pi r C_{\sigma_s}}, \quad (3.10)$$

где  $f$  — коэффициент трения скольжения.

В начальной стадии нагружения индентора имеет место упругая деформация поверхности. Величина этой деформации зависит от физико-механических свойств металла. При определенном внедрении индентора имеет место переход от упругой деформации к пластической. Граничное условие для такого перехода



$$h = 2,4\rho(C_{\sigma_s}/E)^2, \quad (3.11)$$

где  $E$  – модуль упругости материала.

Для конкретного материала с заданными физико-механическими характеристиками условие это можно всегда определить в числовом выражении и представить в виде  $h/\rho \geq K_{\text{уп}}$ . Здесь  $K_{\text{уп}} = 2,4(C_{\sigma_s}/E)$  – коэффициент перехода от упругой деформации к пластической. При  $h/\rho \leq K_{\text{уп}}$  имеет место упругая деформация, а при  $h/\rho \geq K_{\text{уп}}$  – пластическая.

Таким образом, при внедрении абразивного зерна в поверхность металла на величину (3.10) наблюдается пластическое деформирование металла. При движении индентора происходит обтекание металла и вытеснение его вокруг индентора.

В процессе дальнейшего углубления на определенном уровне  $h$  наступает затормаживание металла перед индентором, обтекание прекращается и начинается нагребание металла, а затем скалывание. При этом происходит отделение металла, т. е. идет процесс микрорезания. Сдвиг металла происходит в направлении движения в плоскости касания.

И. В. Крагельским и Б. А. Друяновым [80, 83] установлено граничное условие перехода пластического деформирования в микрорезание:

$$h = 0,5\rho\left(1 - \frac{2\tau}{\sigma_s}\right), \quad (3.12)$$

где  $\tau$  – прочность на срез адгезионной связи.

Так как процесс микрорезания наступает после того, как скольжение металла по передней поверхности прекращается, то он как бы прилипает к ней. Реальное абразивное зерно имеет не идеально гладкие поверхности, а покрытые определенным микрорельефом. Последний, как указано выше, представляет собой совокупность непрерывно чередующихся микровыступов и субмикровыступов. В связи с этим можно предположить, что прекращение скольжения металла связано с его затормаживани-

ем во впадинах микрорельефа и субмикрорельефа, суммарное действие которых увеличивается с ростом внедрения зерна в металл, и при значении  $h_{кр}$  величина  $\tau$  оказывается эквивалентной прочности материала на срез.

Такой же точки зрения на природу перехода от пластического отеснения металла к микрорезанию придерживаются Ю. В. Полянсков и др. [84], которые отмечают, что если принимать во внимание реальное строение рабочей поверхности абразивного зерна, то переход от пластического деформирования к микрорезанию определяется параметрами субмикрорельефа абразивного зерна. Поэтому при определенном допущении можно представить условие перехода от пластического деформирования к микрорезанию в виде  $h/\rho \leq K_{пм}$ , где  $K_{пм} = 0,5 - [\tau_{ср}]/\sigma_s$ ;  $[\tau_{ср}]$  – допустимое напряжение металла на срез.

Приведенное условие позволяет установить зоны абразивного воздействия: зону пластического деформирования  $K_{уп} \leq h/\rho \leq K_{пм}$  и зону микрорезания  $h/\rho \geq K_{пм}$ .

В процессах обработки свободного абразива может быть найдена нормальная суммарная сила  $P_{\Sigma N}$ , действующая на единичное абразивное зерно. Это дает возможность определить величину внедрения  $h_{ст}$  и  $h_{д}$  для абразивных зерен с заданными параметрами и, зная физико-механические характеристики обрабатываемого материала, позволяет проанализировать характер абразивного воздействия.

### **3.3. Процесс деформирования поверхностного слоя детали при магнитно-абразивной обработке**

#### **3.3.1. Механизм деформации элемента стружки, снимаемой единичным абразивным зерном**

Происходящие процессы в малом объеме обрабатываемого материала вокруг режущих кромок абразивных зерен определяют качественные показатели работы ансамбля частиц ФАП, получаемой обработанной поверхности и обрабатываемости самого материала детали. Многими известными учеными (А. В. Гордеевым,

И. П. Захаренко, Е. Н. Масловым, П. И. Ящерицыным, А. Б. Якимовым, Д. Г. Евсеевым, С. А. Поповым, Ю. Н. Полянчиковым, Э. В. Рыжовым, С. С. Силиным, Л. Н. Филимоновым, В. А. Хрульковым, Л. В. Худобиным, В. М. Шумячером, В. Ф. Макаровым и др.) созданы научные основы абразивной обработки, которые широко и успешно применяются в различных отраслях машиностроения.

Известно, что основная доля тепла, выделяемого в процессе абразивной обработки, поглощается обрабатываемой деталью, и составляет 40–90 % от общего количества тепла. Поглощаемое деталью тепло приводит к упругим и пластическим деформациям обрабатываемого материала в зоне резания, которые в свою очередь являются источником излучения тепловой энергии, влияющим на качество обрабатываемой поверхности.

Задачи исследований: определение деформации элемента стружки, снимаемой при абразивной обработке одним зерном под действием силы  $P_z$  с учетом скорости резания и температуры в зоне контакта.

Потенциальная энергия упругой деформации  $U$  тела определяется по формуле [85]

$$U = \int \frac{1}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right] dV. \quad (3.13)$$

Если ввести относительные удлинения по осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$   $\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$ ;  $\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$ ;  $\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$ , относительные сдвиги сечений  $\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$ ;  $\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$ ;  $\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$  и относительное изменение объема  $\varepsilon = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ , то получим

$$U = \int G \left[ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon^2 \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \right] dV, \quad (3.14)$$

где  $G$  – модуль сдвига;  $E$  – модуль упругости  $E=2G(1+\nu)$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона  $\nu=\varepsilon_{\text{поп}}/\varepsilon_{\text{прод}}$ ;  $\varepsilon_{\text{поп}}$ ,  $\varepsilon_{\text{прод}}$  – поперечное и продольное удлинения.

Определим энергию деформации элемента стружки, снимаемой при абразивной обработке одним зерном, вдоль оси  $Z$  с силой резания  $P_z$  (рисунок 3.5).

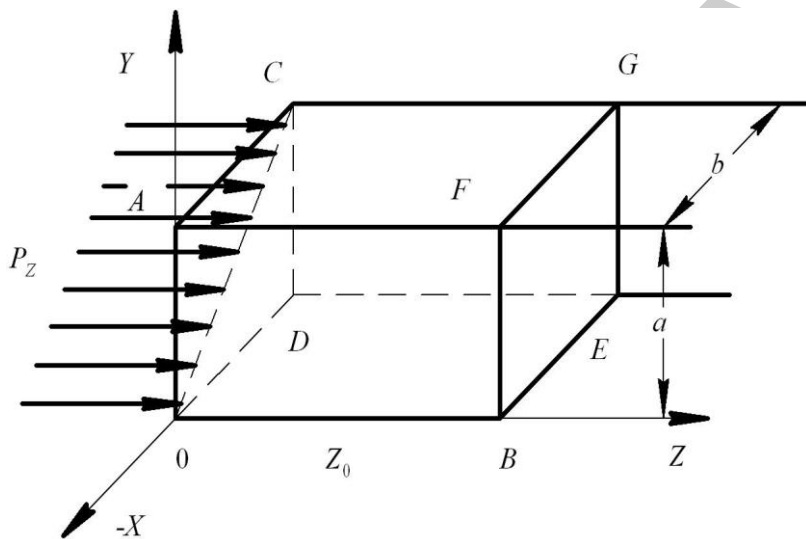


Рисунок 3.5. – Схема действия сил

Деформация элемента  $OACDEBFG$  направлена по оси  $Z$  при сжатии и по оси  $Y$  при растяжении. Упругая деформация происходит по треугольнику  $AOF$ , пластическая деформация или сдвиг – по линии  $O_1F$  (рисунок 3.6). По линиям  $OO_1B$  и  $OA$  в сечениях плоскостей  $XOZ$  и  $XOY$  и по бокам сжимаемой стружки возникают касательные напряжения –  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ . Рассматриваемый элемент стружки сжимается на величину объема  $OAA_1O_1$  под действием  $P_z$  и выдавливается в объем  $A_1O_2F$  в результате действия касательных напряжений по торцу и бокам элементов  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ . Поэтому деформированный объем  $O_1O_2FB$  будет равен

$$V_{\text{деф}} = ab \left[ \left( 1 + \frac{\nu P_z}{2abE} \right) z_0 - \frac{P_z}{bE} - \frac{\nu}{2} \frac{P_z^2}{ab^2 E^2} \right]. \quad (3.15)$$

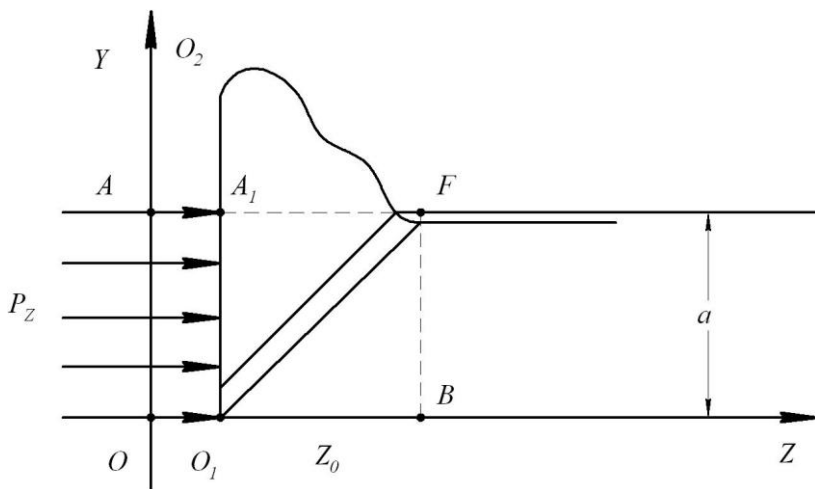


Рисунок 3.6. – Схема деформации стружки

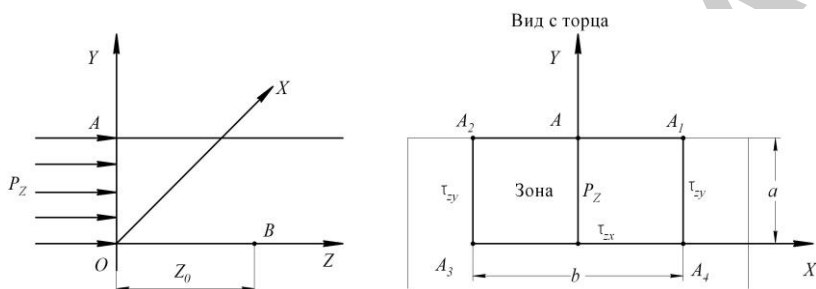
Сила  $P_z$  по  $OX$  (рисунок 3.7) будет создавать изгибающий момент

$$M = P_z \frac{1}{2} (a + \varepsilon_{\text{поп}}). \quad (3.16)$$

Величина момента  $M$  изгибает полосу  $abz_0$ , стружка одного зерна толщиной  $a$  и шириной  $b$  должна «наплывать» на зерно и закручиваться по ходу процесса. При абразивной обработке деформация стружки происходит не плавно, а слоями по линии  $OO_1$  (рисунок 3.8). По линии  $OO_2$  проходит пластическое течение стружки, при котором изгибающий момент (3.16) увеличивается до величины достаточной для отрыва стружки от зерна и увода ее в межзеренное пространство  $O_2O_3$ . Пластическое течение по линии  $OO_1$  (а не точно по оси  $Z$ ) объясняется именно наличием значительного изгибающего момента, действие которого ускоряет пластическую деформацию. По линии  $OO_1$  происходит од-

новременно и сжатие снимаемого слоя обрабатываемой поверхности детали. Объемная деформация  $OO_2O_1$  шириной  $b$  приводит к возникновению наплыва толщиной  $\varepsilon_{\text{ноп}}$  (рисунок 3.8) и изменению всего объема на величину:

$$\Delta V = V - V_{\text{деф}} = ab \left\{ z_0 - \left[ \left( 1 + \frac{vP_z}{2abE} \right) z_0 - \frac{P_z}{bE} - \frac{v}{2} \frac{P_z^2}{ab^2E^2} \right] \right\}. \quad (3.17)$$



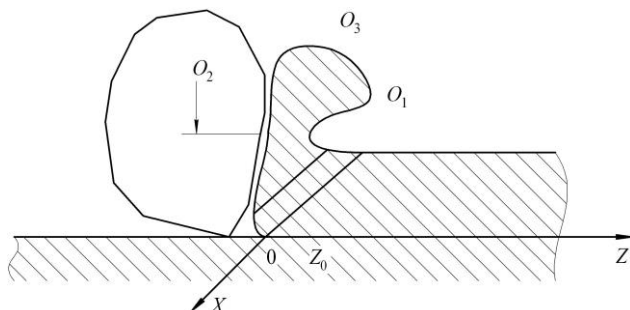
**Рисунок 3.7. – Схема действия касательных напряжений**

Изменение объема сопровождается выделением тепловой энергии и нагревом стружки. Величина нагрева зависит от скорости деформации, т.е. от скорости резания.

На расплав толщины слоя пластической деформации  $h_c$  необходимо затратить теплоту плавления стружки  $Q_{\text{пс}}$  от одного абразивного зерна:

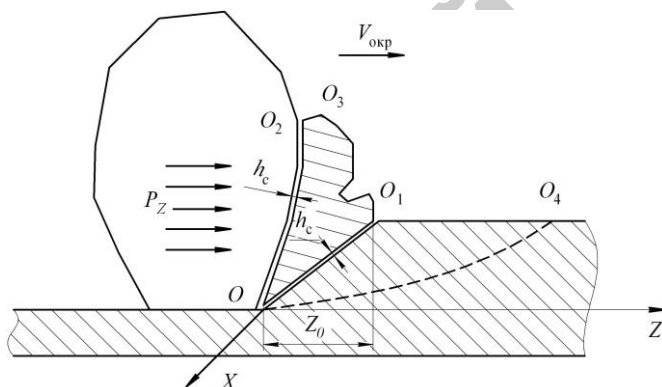
$$Q_{\text{пс}} = h_c L_{O_2O_1} b Q_{\text{п}} \gamma_{\text{М}}, \quad (3.18)$$

где  $Q_{\text{п}}$  – теплота плавления;  $\gamma_{\text{М}}$  – удельный вес;  $b$ ,  $L_{O_2O_1}$  – размеры зерна.



**Рисунок 3.8. – Схема деформации**

Если полного расплава не происходит, то стружка успевает отделиться от обрабатываемой детали со скоростью  $V_{\text{окр}}$  (рисунок 3.9). Элемент стружки  $OO_2O_3O_1$  находится в состоянии объемного сжатия.



**Рисунок 3.9. – Этапы формирования стружки**

По поверхностям  $OO_2$  и  $OO_1$  объем сжимается непосредственно под действием сил резания  $P_z$ . По поверхности  $O_2O_3O_1$ , которая условно считается свободной от нормальных напряжений, момент (3.16) создает деформацию сжатия самой поверхности. Тогда за модель деформации элемента стружки  $OO_2O_3O_1$  можно взять модель стесненного сжатия с одной только «полу-свободной» поверхностью  $O_3O_1$ , в сторону которой происходит вытеснение материала стружки при действии  $P_z$ . Стружка раска-

ляется и закручивается. Следовательно, изменение температуры составит

$$\Delta\theta = \theta_{\text{конечное}} - \theta_{\text{начальное}} = \frac{\Delta V}{V\beta} \geq \frac{\left[ \left( 1 + \frac{\nu P_z}{2abE} \right) z_0 - \frac{P_z}{bE} - \frac{\nu}{2} \frac{P_z^2}{ab^2 E^2} \right]}{\beta z_0}, \quad (3.19)$$

где  $P$  – коэффициент объемного температурного расширения.

Чтобы разогреть массу стружки объемом  $bS_{OO_2O_3O_1}$  от  $\theta_{\text{начальное}}$  до  $\theta_{\text{конечное}}$  необходимо затратить количество тепла [86]

$$Q_M = \frac{1}{2} C_p \gamma_M ab z_0 \Delta\theta, \quad (3.20)$$

где  $C_p$  – изобарная теплоемкость обрабатываемого материала.

Считая, что пластические деформации происходят в тонком слое  $OO_1$ ,  $OO_2$  (рисунок 3.9) можно принять, что остальная масса стружки находится в состоянии упругой деформации. Выделяемая тепловая энергия должна соответствовать энергии, необходимой объему обрабатываемой детали, равному  $V_{\text{деф}}$ , и расширяться до  $V$  при нагревании.

При МАО возникают потери механической энергии на изменение формы деформируемого тела, на его передвижение с некоторой скоростью с преодолением касательных напряжений, на расплав или размягчение слоя  $L_{O_2O_1}$ . Поэтому реальное выделение тепла  $Q_p$  при деформации

$$Q_p = k(Q_M + Q_{\text{ис}}), \quad (3.21)$$

где  $k$  – коэффициент, учитывающий истинное выделение тепловой энергии.



В рассматриваемых условиях  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ;  $\tau_{xy} = 0$ ;  
 $\tau_{xz} = \tau_{zy} = \frac{P_z}{(2a+b)z_0}$ ;  $\sigma_z = \frac{P_z}{ab}$ . Тогда потенциальная энергия  
 упругой деформации

$$U = \frac{P_z^2}{2E} \left( \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{4(1+\nu)}{(2a+b)^2 z_0^2} \right) ab z_0. \quad (3.22)$$

Формулы (3.17)–(3.22) позволяют для конкретных глубин резания определять оптимальные значения  $a$ ,  $b$ ,  $l$  для достижения максимальной производительности. За счет регулирования температуры МАО, возникающей под действием деформаций, можно управлять качеством обрабатываемой поверхности.

### 3.3.2. Оценка влияния фактора пластической деформации на процесс магнитно-абразивной обработки

При напряжении, равным или превышающем предел текучести, происходит пластическая деформация металла, сопровождающаяся движением дислокаций. Механические напряжения смещают атомы металла из их равновесного положения в кристаллической решетке и тем самым увеличивают их энергию. Энергия атома, находящегося на линии дислокаций, на 42 кДж/моль выше энергии атома в равновесном состоянии [87]. Для того, чтобы перейти в дислоцированное состояние, атом должен сместиться из равновесного положения на расстояние

$$l_{см} = \varepsilon_d a,$$

где  $\varepsilon_d$  – величина деформации;  $a$  – минимальное межатомное расстояние.

Атом переходит в дислоцированное состояние тогда, когда смещение его от равновесное состояние отвечает деформации  $\varepsilon_d$ . При пластической деформации смещение атомов происходит обычно в плоскостях, расположенных под углом в  $45^\circ$  к действующему напряжению  $\sigma$ , МПа. Следовательно,

сдвиговое напряжение  $\sigma_1$ , действующее на атом, можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma \cos 45^\circ; \\ \sigma &= \varepsilon E,\end{aligned}$$

отсюда

$$\sigma = \frac{\varepsilon E}{\cos 45^\circ}.$$

При разрушении металла, иначе говоря, при напряжении, равном пределу прочности согласно [82], плотность дислокаций должна быть близкой к  $10^{12} \text{ см}^{-2}$ . Плоское скольжение дислокаций, вызывающее образование трещины, происходит в том случае, когда движение дислокаций блокируется каким-либо препятствием, например ферроабразивным зерном. Путь, пройденный дислокацией до блокировки, составляет  $L = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ . Скорость перемещения дислокации в кристаллической решетке в первом приближении равна

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 \exp \left[ - \frac{Q - V\gamma\sigma}{RT} \right],$$

где  $\dot{\varepsilon}_0$  – скорость звука в стали,  $\dot{\varepsilon}_0 = 4,9 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ ;  $Q$  – энергия активации самодиффузии в аустените,  $Q = 272 \text{ кДж/моль}$ ;  $V$  – активный объем,  $V = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ кДж/(моль} \cdot \text{МПа)}$ ;  $\gamma$  – коэффициент перенапряжения,  $\gamma = 150 \div 200$ .

Время до образования скопления дислокаций или до момента начала разрушения определяется по следующей формуле:

$$\tau = \frac{L}{\dot{\varepsilon} \cdot 3600}.$$

Согласно [89], процесс развития трещин – процесс электрохимический. Исходя из данных представлений, необходимо оценить связь между пределом прочности  $\sigma_b$  и пределом текучести  $\sigma_T$ . В соответствии с этим справедлива зависимость

$$0,5Q - V\gamma_T\sigma_{-1} = Q - V\gamma_B\sigma_B,$$

$$\text{где } \gamma_T = \frac{0,3G}{0,7\sigma_T}; \gamma_B = \frac{0,6E}{\sigma_B}.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что синергетическое влияние процесса MAO, заключающееся в комплексном воздействии указанных выше факторов, приводит к снижению предела прочности обрабатываемого материала, которое в среднем составляет 60 % от предела текучести. Данное обстоятельство во многом объясняет тот факт, что при достаточно небольших развиваемых в зоне резания давлениях инструмента (0,4–2 МПа) на обрабатываемую поверхность осуществляется сравнительно высокий сьем материала, сопоставимый с другими финишными методами обработки.

Таблица 3.1 – Рекомендации по применению составов РТС [28, 29, 90]

Рабочая технологическая среда			Обрабатываемый материал	Параметры и режимы МАО	Выходной показатель	Область применения
ФАП	СОТС	ЭМП				
1	2	3	4	5	6	7
На основе износостойкого белого чугуна	Укринол-1	0,9–1,1 Т, электромагнитные индукторы переменного тока	Немагнитные материалы	$V_p=0,5–1,5$ м/с $V_o=0,05–0,15$ м/с $\delta=0,8–1,2$ мм $A=1–3$ мм $\Delta=0,16/0,25$ мкм	Микротвердость 400–600 HV	Упрочнение поверхностного слоя обрабатываемой детали
На основе отходов быстрорежущей стали	Аквапол-1	0,8–1,0 Т, электромагнитный индуктор переменного тока	Медные сплавы, немагнитные материалы	$V_p=0,5–2,5$ м/с $V_o=0,1–0,2$ м/с $\delta=0,5–1$ мм $A=0,5–2$ мм $\Delta=0,06/0,16$ мкм	Светоотражающая способность поверхности 75–80 %, параметр шероховатости $Ra=0,05–0,07$ мкм	Обеспечение высокой светоотражающей способности
На основе боридов железа	На основе эмпикола	0,6–0,9 Т, электромагнитные индукторы переменного тока	Конструкционные и легированные стали, сплавы цветных металлов	$V_p=0,5–2,5$ м/с $V_o=0,1–0,2$ м/с $\delta=1–2$ мм $A=1–5$ мм $\Delta=0,1/0,3$ мкм	Радиусы скругления 0,2–0,3 мм, время удаления заусенцев 1–3 мин	Скругление острых кромок, удаление заусенцев
Ж15КТ	Пенол-1 или Пенол-2	0,7–0,8 Т, электромагнитные индукторы переменного тока	Углеродистые и легированные стали повышенной твердости	$V_p=0,5–2,0$ м/с $V_o=0,1–0,2$ м/с $\delta=0,5–2$ мм $A=1–2$ мм $\Delta=0,16/0,25$ мкм	Величина размерного сема 10–15 мкм, параметр шероховатости $Ra=0,04–0,1$ мкм	Удаление масляных пленок, следов коррозии и окалины

Продолжение табл. 3.1

1	2	3	4	5	6	7
На основе нитридов и карбидов титана	Синхо-2м	0,4–0,6 Т, индукторы на постоянных магнитах	Немагнитные материалы	$V_p=0,5-1,0$ м/с $n_{дв.х}=700-800$ дв.х/мин, $\delta=0,8-1$ мм $A=1-2$ мм $\Delta=0,1/0,16$ мкм	Параметр шероховатости $Ra=0,6-0,8$ мкм	Обработка длинномерных отверстий
<i>Fe-TiC</i>	СинМА-2 с присоединением лигно-сульфонатов	0,6–1,2 Т, электромагнитные индукторы трехфазного тока	Ферромагнитные и немагнитные материалы	$V_p=0,5-3,0$ м/с $V_0=0,05-0,25$ м/с $\delta=0,8-2$ мм $A=1-5$ мм $\Delta=0,1/0,315$ мкм	Величина размерного съема 10–20 мкм, параметр шероховатости $Ra=0,05-0,2$ мкм	Обработка цилиндрических, конических и фасонных поверхностей деталей малого диаметра (до 20 мм)
<i>Fe-TiC</i>	СинМА-1 с присадкой лигно-сульфонатов	0,9–1,2 Т, электромагнитные индукторы трехфазного тока	Твердые сплавы	$V_p=0,5-1,0$ м/с $V_0=0,05-0,1$ м/с $\delta=1-2$ мм $A=2-5$ мм $\Delta=0,1/0,2$ мкм	Радиусы скругления 0,01–0,02 мм, параметр шероховатости $Ra=0,05-0,2$ мкм	Полирование режущей части металлообрабатывающего инструмента
На основе отходов быстрорежущей стали	Синхо-2м	0,4–0,6 Т, индукторы на постоянных магнитах	Немагнитные материалы	$V_p=1,0-3,0$ м/с $V_0=0,1-0,2$ м/с $\delta=1$ мм $A=1-3$ мм $\Delta=0,2/0,315$ мкм	Параметр шероховатости $Ra=0,6-0,8$ мкм	Обработка отверстий малого диаметра

Продолжение табл. 3.1

<i>Fe-TiC</i>	СинМА-1	0,6–0,9 Т, электромагнитные индукторы трехфазного тока	Ферромагнитные материалы	$V_p=0,1-0,5$ м/с $V_o=0,1$ м/с $\delta=1$ мм $A=1-3$ мм $\Delta=0,1/0,2$ мкм	Параметр шероховатости $Ra=0,1-0,6$ мкм	Обработка цилиндрических поверхностей крупногабаритных деталей
На основе оксидов вольфрама	Пенол-1 или Пенол-2	0,4–0,6 Т, индукторы на постоянных магнитах	Ферромагнитные и немагнитные материалы	$V_p=0,5-2,5$ м/с $V_o=0,1-0,15$ м/с $\delta=1-2$ мм $A=1-2$ мм $\Delta=0,2/0,3/15$ мкм	Параметр шероховатости $Ra=0,4-0,8$ мкм	Обработка плоскостей и получение рельефных изображений
Ферабраз-1	СинМА-1	0,7–0,9 Т, электромагнитные индукторы трехфазного тока	Инструментальные стали	$V_p=0,5-1,0$ м/с $V_o=0,05-0,15$ м/с $\delta=1$ мм $A=1-5$ мм $\Delta=0,2/0,3/15$ мкм	Параметр шероховатости $Ra=0,8-1,0$ мкм	Спиральные поверхности, метчики, сверла
<i>Fe-TiC</i>	На основе Неонола	0,8–1,0 Т, электромагнитные индукторы трехфазного тока	Углеродистые и легированные стали повышенной твердости	$V_p=1,0-2,0$ м/с $V_o=0,1-0,2$ м/с $\delta=1$ мм $A=1-2$ мм $\Delta=0,1/0,3/15$ мкм	Класс точности 6–9 по ГОСТ 3722-81	Обработка прерывистых поверхностей (шлицы, зубчатые колеса и др.)
Магнитно-абразивная паста на основе индустриального масла и окиси хрома		0,3–1,2 Т, электромагнитные индукторы трехфазного тока	Легированные стали повышенной твердости	Рабочее давление 0,12–0,28 МПа, $n=200-320$ мин <sup>-1</sup> , $I=2,5-3$ А, Диаметр диска 140–200 мм	Степень точности 16 по ГОСТ 3722-81	Обработка сферических поверхностей (шариков)

Продолжение табл. 3.1

<i>Fe-TiC</i>	Аквапол-1	0,8–1,2 Т, электромагнитные индукторы трехфазного тока	Углеродистые стали и твердые сплавы	$V_p=1,0-1,8$ м/с $V_o=0,1-0,2$ м/с $\delta=1$ мм $A=2-3$ мм $\Delta=0,2/0,3/15$ мкм	Параметр шероховатости $Ra=1,0-2,0$ мкм, микротвердость $1000-1500 HV$	Обработка сборных изделий из разных материалов
На основе отходов быстрорежущей стали	На основе сульфо- этоксилата натрия	0,7–0,9 Т, электромагнитные индукторы переменного тока	Алюминиевые сплавы	$V_p=1,0-3,0$ м/с $V_o=0,2-0,25$ м/с $\delta=0,8-1$ мм $A=1$ мм $\Delta=0,06/0,16$ мкм	Светоотражающая способность по- верхности 75– 85 %	Обработка декоративных изделий, светоотражательных элементов осветительной ппаратуры

Репозиторий БГАТУ



### 3.4. Механизм наводороживания обрабатываемой поверхности при магнитно-абразивной обработке

Энергия поверхностных атомов металла может резко изменяться вследствие протекания на его поверхности электрохимических процессов. Если стационарный потенциал металла более положителен, чем потенциал нулевого заряда, молекулы воды в двойном электрическом слое ориентированы к металлу отрицательным зарядом диполя. При этом энергия электрона в поверхностном слое металла возрастает. При температуре, близкой к 20–30 °С, электроны в металле занимают энергетические уровни с минимальной энергией. По этой причине электрон отдает избыточную энергию поверхностному слою металла, который получает дополнительную энергию

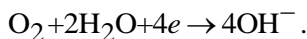
$$\Delta Q = \alpha_n F (E_{\text{ст}} - E_{\text{н.з}}),$$

где  $\alpha$  – коэффициент переноса;  $n$  – валентность металла;  $F$  – 96,5 кДж/эВ;  $E_{\text{ст}}$  – стационарный потенциал металла;  $E_{\text{н.з}}$  – потенциал нулевого заряда.

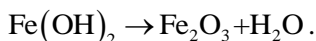
Поскольку в ходе протекания процесса МАО металл находится в активном состоянии, то энергия поверхностного слоя атомов увеличивается на  $\Delta Q$ . Соответственно снижается эффективная энергия активации движения дислокаций и ускоряется их перемещение. Последнее обстоятельство ведет к уменьшению напряжения для образования плоского скольжения дислокаций и зарождение трещин.

Значение стационарного потенциала зависит от концентрации кислорода. Поскольку СинМА-1 и СинМА-2, а также другие СОТС, применяемые для процесса МАО, являются производными на основе олигомеров (связанного с кислородом) [91, 92], то служат активатором в виде окислителя. Трещинообразование происходит в том случае, когда стационарный потенциал более положителен, чем потенциал пробоя. В основном деполяризация происходит за счет разряда ионизации атомов кислорода. Кислородная деполяризация происходит при

наличии кислорода в растворе рабочей среды, при этом образуются ионы гидроксила:



Ионы  $\text{Fe}^{+n}$  и  $\text{OH}^-$  направляются друг к другу и образуют осадок  $\text{Fe}(\text{OH})_2$ , который в свою очередь разлагается на оксиды железа и воду:



Данный процесс происходит на различных участках поверхности металла и определяется наличием блуждающих и вихревых токов, обусловленных влиянием магнитного поля. При этом на величину потенциала влияет концентрация ионов водорода (водородный потенциал рН), а также совместно протекающие процессы типа выделения водорода, образование ионов  $\text{OH}^-$  и реакции, приводящие к появлению пленок. Зависимость потенциала от концентрации ионов металла, водорода и кислорода, которая изменяется от прохождения по поверхности и в рабочей среде вихревых токов, определяется уравнением Нернста:

$$E = E_{\text{H}} + \frac{RT}{nF} \ln C_{\text{Me}^{+n}},$$

где  $E_{\text{H}}$  – нормальный потенциал данного металла;  $R$  – газовая постоянная,  $R = 8,341$  Дж/(моль·К);  $T$  – абсолютная температура, К;  $F$  – число Фарадея,  $F = 96480$  Кл/моль;  $n$  – валентность ионов металла;  $C_{\text{Me}^{+n}}$  – концентрация собственных ионов металла в рабочей среде, моль/л.

Образование гидрата  $\text{Fe}-\text{Fe}(\text{OH})_2$  позволяет ферроабразивному зерну с меньшим динамическим усилием осуществить съем материала. Кроме того, получение этого гидрата приводит к его

растворению в СОТС, обеспечивая вынос данного продукта из зоны обработки.

Поскольку в процессе МАО к СОТС как природных, так и синтезированных, которым сопутствуют свободные радикалы, присоединяется большое количество примесей, то такой сложный возникающий состав изменяет процессы взаимодействия между компонентами системы СОТС. Ориентационная напряженность этой среды с учетом ферромагнитных включений (стружка, продукты разрушения частиц ФАП и т. д.) меняет концентрационные эффекты, что обеспечивает иной порядок и уровень протекания химических реакций, которые проходят через «туннелирование под барьером» под действием МП как катализатора и становятся реакционноспособными. Таким образом, осуществляется переключением каналов химической реакции и создается их новый, уже магнитный, сценарий рекомбинации химических реакций радикалов типа синглет-триплетных переходов. В случае неоднородности ЭМП важную роль играет анизотропия диамагнитной восприимчивости полимеров в виде диамагнитного отклика. Следовательно, обнаружение механизма влияния ЭМП на промежуточные состояния, определяющие кинематику сложных многостадийных гомогенных и гетерогенных химических реакций, определяет всякий раз эффективность использования РТС для определенных групп и марок материалов, подвергаемых обработке методом МАО.

При наличии в дисперсионной среде СОТС ионов ионостабилизированных примесей под влиянием ЭМП проявляется электрический характер процессов, что сопровождается нарушением водородных связей и приводит к протеканию электро-механических реакций ввиду нарушения электронейтральности, анодному растворению металлов и выделению водорода.

Поверхность обрабатываемого материала представляет собой многоэлектродный гальванический элемент, состоящий из двух или более электродов и характеризующийся как система участков «катод–анод». Электрохимическая неоднородность «металл–электролит» вызывается рядом причин, например для стали 20, структура которой перлит–феррит, таковой причиной является структурно-фазовая неоднородность. Феррит имеет более отрицательный электродный потенциал в создавшемся галь-

ваническим элементе и является анодом, а перлит – катодом [93]. В случае абразивной обработки, в частности методом MAO, электрохимическая неоднородность поверхности такого металла приводит к дифференциации последней на анодные (с более отрицательным электронным потенциалом) и катодные (с более положительным электронным потенциалом) составляющие.

Электрохимическое растворение металла состоит из двух основных процессов:

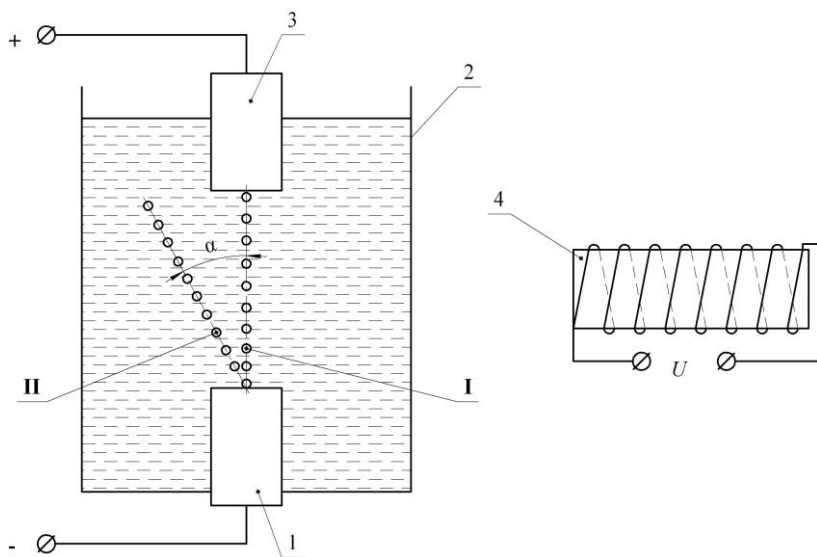
– переход электронов в металле от анодных участков к катодным, и атомов и катионов в СОТС;

– под действием МП происходит процесс сдвига потенциала разрушения металла в отрицательную область, что приводит к снижению предела прочности металла, а вызванный этим процесс термодинамической нестабильности металла преобладает над процессом поляризации.

В результате проведенных исследований установлено, что при наложении МП в электролите происходит отклонение пути перехода образующегося водорода от анода к катоду в соответствии с расположением электролита при величине магнитной индукции  $B = 0,15 \text{ Т}$  [94] (рисунок 3.10), что указывает на активность процесса поляризации.

Таким образом, наличие комплекса факторов, степень которых следует выделить, находятся: влияние МП на структуру и свойства поверхностного слоя детали; поверхностное деформирование материала; микрорезание поверхностного слоя; анодное растворение поверхностного слоя. Все это обеспечивает эффективность процесса MAO при создании равномерности давления РТС на труднодоступные и «теневые» участки обрабатываемой поверхности деталей машин. Кооперативность действия компонентов РТС позволяет получить при необходимой плотности МП необходимый уровень выходных показателей по производительности и качеству обработки различных материалов. В таблице 3.1 приводятся рекомендуемые наборы компонентов РТС (ФАП, СОТС, ЭМП) как традиционно применяемых, так и вновь разработанных при учете их химической инертности, пенообразующей способности и ряда других факторов, в условиях их взаимного влияния и взаимодействия, обеспечивающих ковариантность контактирования трущей-

ся пары и рост эффективности процесса МАО сложнопрофильных поверхностей.



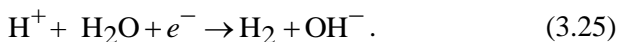
1 – анод; 2 – ванна с электролитом; 3 – катод; 4 – электромагнит;  
 I – траектория потока водорода без воздействия электромагнитного поля;  
 II – траектория потока водорода при воздействии электромагнитного поля  
**Рисунок 3.10. – Схема траектории движения водорода от анода к катоду**

Наводороживание металла при таком электрохимическом процессе как МАО происходит путем диффузии в глубь металла атомов водорода, появляющихся на его поверхности в результате микроразрядов в цепочках ферроабразивной щетки и разложения молекул воды, присутствующих в СОТС:



Основная масса атомов молизуется на поверхности металла по одному из следующих вариантов:





Скорость общего процесса выделения водорода зависит от соответствия скоростей этих частных реакций (3.23)–(3.25). Наводороживание характеризуется более высокой диффузионной подвижностью водорода и значительным влиянием адсорбированного водорода на физико-механические свойства металла. Водород в молекулярной форме не способен проникать в металл в пассивном состоянии и удаляется с его поверхности, диффундируя в раствор РЖ в виде газовых пузырьков. Стимуляторами наводороживания могут являться даже незначительные загрязнения поверхности, рН раствора РЖ, температура протекания процесса. Установлено, что наводороживание сталей уменьшается при увеличении температуры свыше 353 К, так и при ее уменьшении до 313 К [95]. Именно в этих температурных пределах осуществляется процесс МАО, что указывает на эффективность этого явления при охрупчивании металла и объясняет механизм повышения массового съема материала, как например стали ШХ15 ГОСТ 801–78 с твердостью 62–65 НРС.

Наводороживанию подвергается относительно тонкий поверхностный слой, толщина которого варьируется от 5 до 15 мкм, имеющий специфическое напряженно-деформированное состояние. Он образуется в ходе протекания процесса МАО путем динамического воздействия зерен ФАП на обрабатываемую поверхность и значительно отличается от более глубоких слоев по своей микроструктуре. Таким образом, накопление дислокаций, образование микроцарапин и микроскобление поверхности режущими гранями зерен ФАП благоприятствует возникновению субмикро- и микроколлекторов, заполняющихся молизирующимся в них водородом, диффундирующим через тонкий поверхностный слой металла. В результате давление водорода в этих коллекторах достигает значений, сравнимых с прочностными характеристиками материала. Кроме указанных выше коллекторов, заполненных молекулярным водородом, атомарный или диффузионно-подвижный водород попадает в область вакансий и дислокаций внутренней структуры металла, вызванных локальными напряжениями.

В результате возникает сугубо неравномерное распределение водорода по глубине, характеризуется максимумом водородосодержания, приходящимся на указанный выше тонкий поверхностный слой и облегчающим процесс его диспергирования. Следовательно, накопление повреждений структуры материала при обработке методом МАО и аномально высокое насыщение его водородом приводит к падению таких механических характеристик, как выносливость при циклическом деформировании. Вместе с тем закономерное деформирование зерен ФАП приводит к перераспределению водорода по глубине металла и дальнейшему увеличению толщины водородосодержащего слоя.

Таким образом, механизм охрупчивания металлов в процессе протекания такой механической обработки, как МАО, заключается в проникновении абсорбированного водорода в дефекты кристаллической решетки, создании давления молекулярным водородом в коллекторах в глубине поверхностного слоя и ослаблении силы связи между атомами железа в его решетке. Возникновение дислокаций, обусловленных влиянием пластической деформации, приводит к росту концентрации водорода на границах зерен, фаз и других препятствий, где могут скапливаться дислокации. Данные явления, как указывалось ранее, способствуют повышению производительности процесса МАО и обеспечивают эффективность съема обрабатываемого материала.

### **3.5. Кинетика износа ферроабразивного зерна в процессе магнитно-абразивной обработки**

В теории абразивной обработки следует считать устоявшейся объемную модель зерна без какой-либо площадки износа, хотя площадка образуется на единичной режущей кромке при первом контакте ее с обрабатываемым материалом.

Рассмотрим износ абразивной режущей кромки в процессе МАО с постоянной окружной скоростью  $V$ . В теории абразивного резания следует считать устоявшейся объемную модель зерна (сфера, пирамида, конус, эллипс, цилиндр и др.), и, следовательно, необходимо учитывать распределение сил резания не по

некоторой приближенной плоскости, а по передней части боковой поверхности режущей кромки.

Пусть режущая кромка представляет параболоид вращения

$$x^2 + z^2 = b_p^2 y^{2\nu_p}, \quad (3.26)$$

где  $y$  – глубина внедрения зерна в обрабатываемую поверхность;  $\nu_p \in [0; 2]$ .

Параметр  $h_{\text{изм}}$  характеризует высоту износившейся части зерна. Ось  $y$  направлена от вершины в глубь зерна. Ось симметрии образующей кромки нормальна к обрабатываемой поверхности (рисунок 3.11).

Сила резания, действующая на зерно в процессе МАО:

$$F_p = p_k S_1 + F_{\text{тр}}, \quad (3.27)$$

где  $S_1$  – площадь нормального сечения, износившейся истиранием режущей кромки;

$$S_1 = 2 \int_{h_{\text{изм}}}^y b_p^2 y^{2\nu_p} dy = \frac{2b_p (y^{2\nu_p+1} - h_{\text{изм}}^{2\nu_p+1})}{\nu_p + 1}, \quad (3.28)$$

где  $p_k$  – касательные напряжения, действующие по контактной поверхности;

$$p_k = \sigma_n (1 + \mu), \quad (3.29)$$

где  $\sigma_n$  – нормальные напряжения.

В соответствии с [96], существует тесная связь между контактными напряжениями и твердостью при вдавливании алмазного наконечника с различными углами при вершине и твердостью обрабатываемого материала HV 6–1500. Предположим, что данная зависимость имеет место и в случае любого



другого материала индентора, т.е.  $\sigma_n = \alpha HV$ , где  $HV$  – твердость обрабатываемой поверхности, поскольку напряжения на передней поверхности режущей кромки не могут превышать предельных значений для более мягкой поверхности из пары «обрабатываемый материал–инструментальный материал».

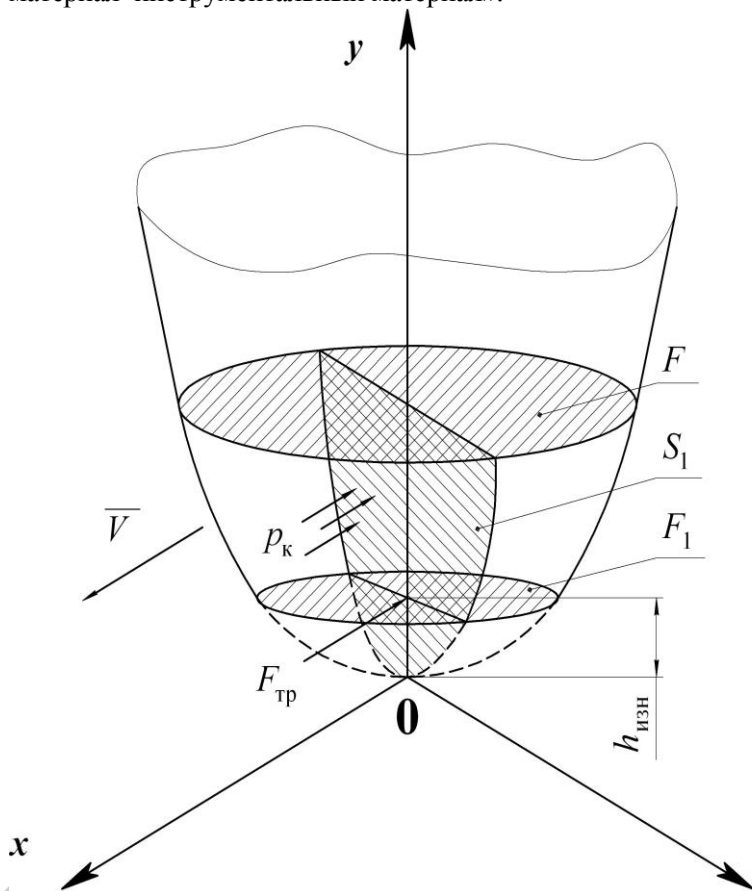


Рисунок 3.11. – Модель формы режущей кромки абразивного зерна

Сила трения между площадкой износа и обрабатываемой поверхностью рассчитывается по следующей формуле:

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (3.30)$$

где  $N$  – сила нормального давления на абразивное зерно в процессе МАО;  $\mu$  – коэффициент трения скольжения.

Согласно [97], значение коэффициента трения скольжения  $\mu$  определяется суммой адгезионной  $\mu_a$  и деформационной  $\mu_d$  составляющих, т. е.

$$\mu = \mu_a + \mu_d. \quad (3.31)$$

Деформационная составляющая  $\mu_d$  при трении скольжения имеет существенное значение для весьма шероховатых поверхностей и полимерных материалов, что обусловлено потерями повторного передеформирования тонких поверхностных слоев. Соотношение между адгезионной и деформационной составляющими для металлов таково, что при погрешности порядка 1 % значением  $\mu_d$  можно пренебречь. Таким образом, принимаем  $\mu = \mu_a$ , так как  $\mu_d$  стремится к нулю.

Прочность адгезионной связи определяется из выражения

$$\tau = \tau_0 + \beta p_r, \quad (3.32)$$

где  $\tau_0$ ,  $\beta$  – параметры, характеризующие свойства материала поверхностных слоев [96].

Фактическое давление на площадку износа абразивной режущей кромки:

$$p_r = N/F_1, \quad (3.33)$$

где  $F_1$  – площадь поверхности износа:

$$F_1 = \pi R^2 = \pi b_p^2 h_{\text{изм}}^{2\nu}. \quad (3.34)$$

Радиусом сечения  $R$  является значение функции  $z = b_p y^{\nu}$ , где  $y = h_{\text{изм}}$ .

На основе этой зависимости

$$\mu = \mu_a = \frac{\tau}{p_r} = \frac{\tau_0 \pi b_p^2 h_{\text{изм}}^{2\nu}}{N} + \beta. \quad (3.35)$$

Определим величину высоты изношенной части абразивного зерна через значение удельного износа ферроабразивного инструмента  $\rho$ :

$$\rho = \frac{V_{\text{изн.абр.инстр.}}}{V_{\text{мет.}}}, \quad (3.36)$$

где  $V_{\text{изн.абр.инстр.}}$  – объем изношенного абразивного инструмента;  
 $V_{\text{мет.}}$  – объем металла, срезанного в процессе МАО.

В процессе исследования разработана математическая зависимость расчета силы резания с учетом площадки износа. В результате вычислений по разработанным зависимостям сделаны выводы об адекватности математической модели, так как полученные значение силы резания сопоставимы с данными, приведенными С. Н. Корчаком [43], А. П. Осиповым и В. В. Федотовым [98].

## **4. КАЧЕСТВО СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСЛЕ МАГНИТНО-АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКИ**

### **4.1. Технология магнитно-абразивной обработки рукоятки микрофона**

Изменение параметров образуемых производящих линий поверхности «щетки» относительно исполнительного движения при обработке сложного профиля изделия позволяет максимально трансформировать уже ее характеристический образ, что приводит к достигаемой точности данного изделия. Поэтому, например, отпадает способ строчечной обработки пространственно развитых сложных поверхностей деталей машин и связанного с ним определения углов наклона осей инструмента и детали, которые в обратном случае требуют сообщения им дополнительных перемещений или образования его производящих элементов для коррекции траектории этого движения. Создание рациональной формы ферроабразивной «щетки» и получение ее характеристического образа в виде функциональной или регрессионной зависимости определяет конгруэнтность обработанной и номинальной поверхностей.

Однако одной из задач, стоящих перед процессом MAO сложнопрофильных поверхностей является определение управлением величиной взаимодействия «щетки» и управлением интенсивностью этого взаимодействия.

Примером служит реализация MAO рукояток микрофонов (рисунок 4.1), которые используются как электроакустические приборы для преобразования звуковых колебаний в динамическом режиме и передачи их в виде электрического «отображения» звуковой волны и представляет собой первое звено любого тракта звукозаписи, звукоусиления или речевой связи. Главная особенность подобных динамических микрофонов состоит в том, что они работают в сложных акустических и погодных условиях (дождь, снег, стадион, концертный зал) и должны отличаться противоударностью, прочностью и надежностью. Поскольку на качество микрофона

большое влияние оказывают искажение звуковых сигналов вызываемых различными помехами (ветровые, вибрационные, акустические), то вопросу его защиты от данных искажений придается большое значение. Корпус микрофона, и в частности его рукоятка должны иметь определенную форму учитывая эргономические показатели и степень коррозионной стойкости, при наличии различных акустико-механических элементов типа пазов, отверстий, лабиринтных щелей для согласования в заданном диапазоне частот и угла падения звуковой волны с величиной колебательной скорости подвижных сегментов электромеханического преобразователя микрофона. Поскольку изготовление подобных акустико-механических элементов связано с обработкой материалов давлением (ОМД), типа пробивки при помощи пуансонов, то итоговый результат характеризуется наличием различного рода заусенцев и острых кромок, которые не только способны нарушить целостность эпидермиса кожных тканей пользователя, но и по причине увеличения времени ревербации возникает многократное отражение звуковой волны перед ее попаданием на сегменты электромеханического преобразователя. Это, в конечном счете, изменяет линейчатый спектр периодических колебаний, смещает его к показателю сплошности и возникновению различного рода шумов, искажая тембровую окраску звука.

Удаление заусенцев, острых кромок и других дефектов, образуемых ОМД, за счет применения твердосвязанного абразивного инструмента сопряжено с тем, что обработанная поверхность рукояток имеет форму, негативно отображенную от формы инструмента.

Это приводит к тому, что не осуществляется скругление острых кромок в пазах и отверстиях ввиду отсутствия технологических возможностей данного твердосвязанного абразивного инструмента. Для магнитного поля именно эти кромки представляют собой концентраторы, которые огибаются ферроабразивной «щеткой» и в процессе сочетания исполнительных движений они принимают форму фасочного профиля, что позволяет звуковой волне не иметь такого уровня сплошного

отражения как от острой кромки и выполнить условия отсутствия искажения угла падения.

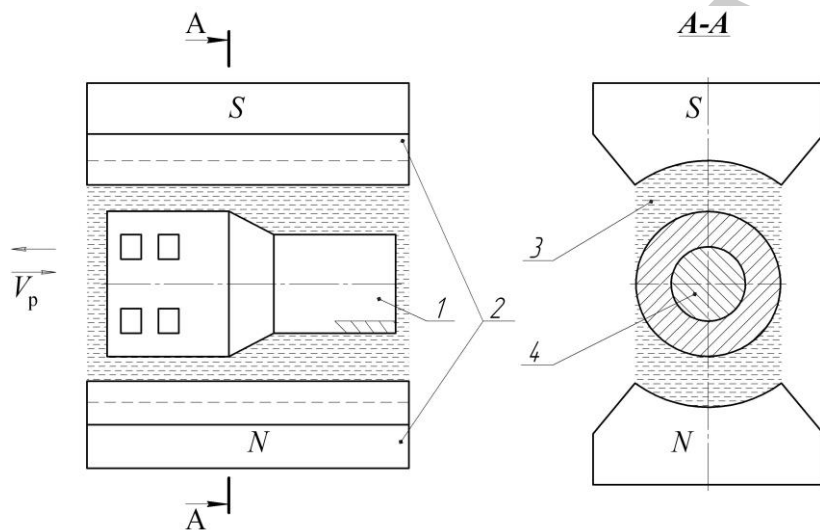


**Рисунок 4.1. – Общий вид микрофона**

Обработка методом МАО данных рукояток первоначально производилась на роторном станке СМ 1180 в кольцевом зазоре. Однако в результате проведенных опытно-промышленных испытаний установлено: по высоте поверхности с наличием поперечных пазов и ступенчатых передач, присутствует неоднородность параметров съема материала кромок, наблюдаемая визуально. Согласно схем обработки (рисунок 4.2), в круговом рабочем зазоре, образуемым параллельно расположенными полюсными наконечниками  $N$  и  $S$

в разных диаметральных сечениях рукоятки на элементарные участки поверхности этих рукояток воздействуют отличные друг от друга величины давления ферроабразивной «щеткой». Наружные точки каждого диаметрального сечения находятся на различном расстоянии от оси вращения и вследствие этого длина щеток ферроабразивных частиц данной «щеткой» имеет большую длину в области пазов детали, резко изменяя градиент магнитной индукции по высоте рукоятки. Сгущение магнитных силовых линий в различных частях рабочей зоны также вызывается образованием воздушного зазора во внутренней области детали из-за невозможности попадания конгломерата ФАП в эту область и создание метрологической неоднородности показателей полного магнитной проницаемости в особенности пазов, поскольку скругление кромок не осуществлено. Поэтому протекание электромагнитных процессов происходит в исключительно сложных и многообразных условиях в трехмерном пространстве. Установление геометрии границ сред при осуществлении нелинейности магнитных свойств материалов и наличии движения решается выполнением математического моделирования для определения картины распределения давления «щеткой». Основное допущение заключается в отсутствии учета токами смещения и поскольку значение  $B$  прямо пропорционально величине давления, то принципиально математическое моделирование заключается в расчете величины давления ФАП на обрабатываемую деталь в рабочем зазоре, который представляет собой пространство, где сосредоточена энергия магнитного поля. Рассмотрим схему МАО с полюсными наконечниками, отличающимися по форме от прямоугольных и имеющих конфигурацию в соответствии с предлагаемым расчетом по величине силы, приходящей на единицу площади обрабатываемой поверхности рукояток микрофона. Поскольку в верхней части данных рукояток присутствуют пазы, то они обеспечивают беспрепятственное наличие цепочек частиц ФАП по всей длине рабочей зоны в отличие от средней и нижней, где корпус рукояток выполняет роль экрана, препятствующего этому образованию, что приводит к разнице давления частиц ФАП на обрабатываемую поверхность. Сле-

довательно, возникает необходимость в большей степени концентрации частиц ФАП именно в их верхней части и таким образом решение заключается в выравнивании величины давления на обрабатываемую поверхность рукояток по всей их площади. Технологически это выглядит как создание разности величин рабочего зазора по высоте полюсных наконечников, имеющего серповидную форму, рисунок 4.2.



1 – рукоятка микрофона; 2 – полюсные наконечники; 3 – рабочая технологическая среда; 4 – ферромагнитная оправка  
**Рисунок 4.2. – Схема МАО рукояток микрофонов в рабочем зазоре СФТ 2.150.00.00000**

Рукоятка помещается в рабочую зону, пространство которой между полюсными наконечниками и ее поверхностью заполняется ФАП с динамической вязкостью  $\eta$  и на рукоятку воздействует сила давления ферроабразивного инструмента  $F$ , приходящаяся на единицу ее площади (рисунок 4.3). Линия центров  $OO_1$  рукоятки и рабочей зоны составляет с горизонталью угол  $\theta$ , величина которого меняется с величиной  $F$ . Этот угол является углом положения рукоятки, а расстояние  $OO_1$  между центрами – эксцентритетом  $e$ , при этом с другой стороны  $e = 2(R - r)$ .



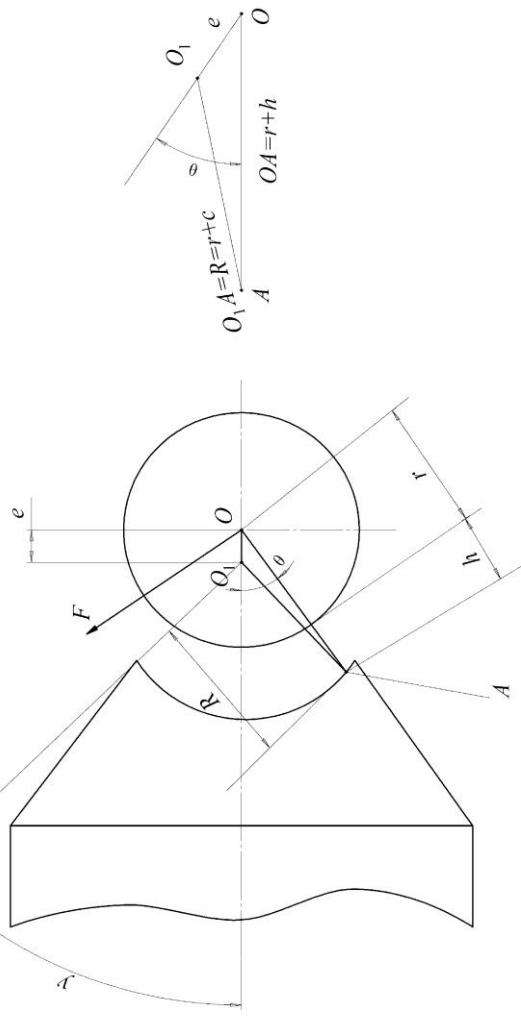
С уменьшением серповидности рабочего зазора возникает разница давления, достаточного для выравнивания показателей  $F$ . Обозначим через  $c = R - r$  средний зазор между рукояткой и полюсным наконечником при учете ввода угловой координаты  $O$  некоторой точки внутри рабочего зазора.

Давление, развиваемое в рабочей зоне при MAO, определяет качество деталей машин. Если при использовании концентрического профиля полюсного наконечника по всей площади поверхности контакта давление РТС на обрабатываемую поверхность  $F$  с определенным допущением считать постоянным, то применение расходящегося и серповидного профилей полюсного наконечника связано с резким изменением этого давления [99]. Подобное изменение давления существенно влияет на формирование качественных характеристик сложнопрофильных поверхностей. Однако применение роторных станков для MAO, отличающихся высокой производительностью, обусловлено применением расходящегося профиля полюсного наконечника. Высокие показатели качества при MAO крупногабаритных и фасонных деталей из ферромагнитных и немагнитных материалов обеспечиваются применением серповидного профиля полюсного наконечника. Вследствии этого, вопрос исследования давления, создаваемого РТС на обрабатываемую поверхность при формах полюсных наконечников, отличных от концентрической, является крайне актуальным и требует создания научной базы для выявления зависимости создаваемого на обрабатываемую поверхность давления РТС от формы полюсного наконечника, которая позволяет прогнозировать достигаемую шероховатость обработанной поверхности. Основными геометрическими показателями полюсных наконечников влияющих на давление, создаваемое РТС, являются форма создаваемого рабочего зазора и эксцентриситет.

Решение поставленной задачи состоит в определении коэффициента изменения давления РТС на обрабатываемую поверхность в любой точке контакта ферроабразивного инструмента с деталью через угол  $\theta$  и относительный эксцентриситет  $\varepsilon$ , используя положение о том, что для расходящегося профиля полюсного наконечника  $\varepsilon < 1$ ; для концентрического –  $\varepsilon = 1$ ; для серповидного –  $\varepsilon > 1$ .

Ренс

АТУ



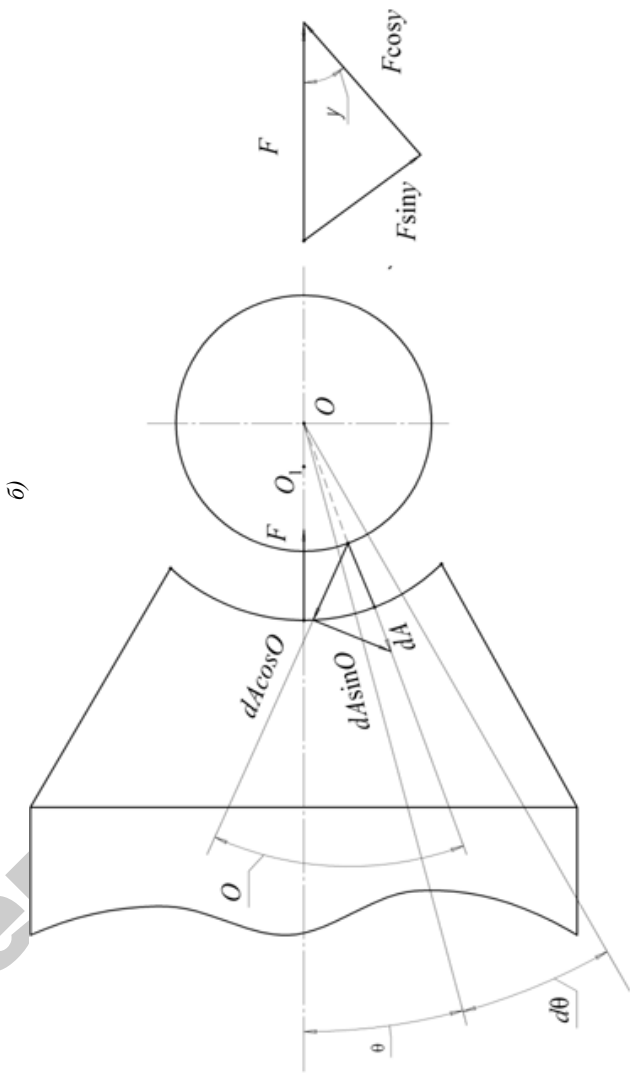


Рисунок 4.3. – Схема расчета геометрических (а) и динамических (б) параметров рабочей зоны при МАО рукояток микрофонов

Тогда для треугольника  $ОАО_1$

$$\begin{aligned} OA = r + h = OB + BA &= e \cos \theta + \sqrt{(r + c)^2 - e^2 \sin^2 \theta} = \\ &= e \cos \theta + (r + c) \sqrt{1 - \left(\frac{e}{r + c}\right)^2 \sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $e \approx c$ , а поскольку  $R = r + c \gg e$ , то  $\left(\frac{e}{r + c}\right)^2$  пренебрежимо мало и может быть исключено из дальнейшего рассмотрения.

В результате из равенства  $r + h = e \cos \theta + (r + c)$  имеем:

$$\frac{h}{c} = 1 + \left(\frac{e}{c}\right) \cos \theta. \quad (4.2)$$

Отношение  $e/c$  или  $\varepsilon$  является относительным эксцентриситетом. Считаем, что высота рукоятки велика по сравнению с радиусом  $R$  и поэтому не учитываем краевые эффекты. Считая, что  $x = r\theta$  в уравнении Рейнольдса  $\frac{dp}{dx} = 6\eta V \frac{h - h_0}{h^3}$  [100], получаем

$$\frac{dp}{d\theta} = 6\eta Vr \frac{h - h_0}{h^3}, \quad (4.3)$$

где  $V$  – скорость вращения рукоятки, м/с;  $h_0$  – значение величины рабочего зазора при котором давление  $p = \text{max}$ .

Подставляя  $h = c(1 + \varepsilon \cos \theta)$  из уравнения (4.2) в (4.3) и интегрируя, получаем

$$p = \frac{6\eta Vr}{c^2} \left[ \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{h_0}{c} \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right]. \quad (4.4)$$

Поскольку ферроабразивная «щетка» может выдерживать только определенные отрицательные давления, то следует принимать граничные условия, заключающиеся в установлении области  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$p = 0 \text{ при } \theta = 0 \text{ и } \theta = \theta_2,$$

$$\frac{dp}{d\theta} = 0 \text{ при } \theta = \theta_1 \text{ и } \theta = \theta_2.$$

Используя метод замены переменных, определяются интегралы в выражении (4.4), что позволяет найти рост давления  $p$  [100],

$$p = \frac{6\eta Vr}{c^2} \left[ \frac{\varepsilon(2 + \varepsilon \cos \theta) \sin \theta}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right]. \quad (4.5)$$

Для этого необходимо установить какая сила действует на конкретный локальный участок обрабатываемой поверхности и чтобы найти это значение рассмотрим элементарную площадь  $dA$ , соответствующую  $dA \cos \theta$  и  $dA \sin \theta$  – вдоль линии центров  $OO_1$  и перпендикулярностей. Силу  $F$ , приходящуюся на единицу площади  $dA$  раскладываем на  $F \sin \theta$  и  $F \cos \theta$  и поскольку  $F \sin \theta$  представляет тангенциальную составляющую, производящую удержание частиц ФАП в рабочем зазоре то рассмотрению она не подлежит. Основной интерес представляет нормальная составляющая  $F \cos \theta$  ввиду того, что ее воздействие на обрабатываемую поверхность определяет эффективность съема материала.

Чтобы найти угол положения  $\varphi$ , выпишем соотношение

$$F \cos \theta = Br \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos \theta d\theta = Br \left( p \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dP}{d\theta} \sin \theta d\theta \right) =$$

$$= Br \left( p - 6\eta Vr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h-h_0}{h^2} \sin \theta d\theta \right) = Brp - 6\eta VBr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h-h_0}{h^2} \sin \theta d\theta.$$

Согласно выражению (4.4)

$$F \sin \phi = \frac{6\eta VBr^2}{c^2} \left( \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{h_0}{c} \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3} \right). \quad (4.6)$$

Интеграл вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3}$  может быть сведен к интегралам

вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}$  и  $\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3} &= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \times \\ &\times \left( \frac{\sin \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} + \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} - 2\varepsilon \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) + C, \end{aligned} \quad (4.7)$$

которые, в свою очередь, сводятся к выражениям, содержащим

интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta}$ :

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) + C, \quad (4.8)$$

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) + C. \quad (4.9)$$

Интеграл  $\int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta}$  при  $\varepsilon < 1$  есть

$$\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + C. \quad (4.10)$$

Таким образом, подставляя (4.10) в (4.8) и переходя к определенному интегралу, для произвольного интервала интегрирования  $(\alpha_1, \alpha_2)$  получаем:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \left( \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right) \Bigg|_{\alpha_1}^{\alpha_2}, \quad (4.11)$$

а подставляя (4.10) в (4.8) и (4.9), а затем подставляя полученные выражения в (4.7) и переходя к определенному интегралу, для произвольного отрезка интегрирования  $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} &= \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \times \right. \\ &\times \left[ \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right] + \\ &\left. + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left[ \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right] \right) \Bigg|_{\alpha_1}^{\alpha_2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом, выражение (4.6) на произвольном отрезке интегрирования  $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$  приобретает вид

$$\begin{aligned}
 F \sin \phi &= \frac{6\eta V B r^2}{c^2} \left( \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{h_0}{c} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right) = \\
 &= \frac{6\eta V B r^2}{c^2} \left( \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \left( \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right) \right) \Bigg|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \\
 &- \frac{h_0}{c} \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right) + \\
 &+ \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \Bigg|_{\alpha_1}^{\alpha_2}.
 \end{aligned}$$

В силу указанных граничных условий, устанавливающих область интегрирования на отрезке  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , выражения (4.11) и (4.12) принимают вид

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \left( \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right), \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

и, соответственно



$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \times \\
& \times \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
& = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( 1 + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \varepsilon - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right),
\end{aligned}$$

соответственно.

Выражение (4.6) на этом отрезке принимает вид

$$\begin{aligned}
F \cos \varphi &= \frac{6\eta VBr^2}{c^2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{h_0}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right) = \\
&= \frac{6\eta VBr^2}{c^2} \left( \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) - \frac{h_0}{c} \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \times \right. \\
& \left. \times \left( 1 + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \varepsilon - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом,  $F \cos \varphi$  непосредственно определяет силу, с которой ферроабразивная «щетка» воздействует на каждый локальный участок обрабатываемой поверхности и производство ее расчета через геометрические параметры профиля полюсного наконечника и материализации его образа позволяет обеспечить качество обработки различных деталей сложного профиля.

Обработка методом MAO рукояток микрофонов производилась на СФТ 2.150.00.00.000. Параметры и режимы обработки: величина магнитной индукции  $B = 1$  Т; скорость резания  $V_p = 2$  м/с; скорость осцилляции,  $V_o = 0,2$  м/с; амплитуда осцилляции  $A = 2$  мм; величина рабочего зазора  $\delta = 1$  мм; время обработки,  $t = 90$  с; ФАП – Ж15КТ ТУ6-09-03-483-81; СОТС – СинМА-1 ТУ 38.5901176-91, 3%-водный раствор. Величину массового съема материала ( $\Delta G$ , мг) производили на весах лабораторных ВЛТ-1; шероховатость поверхности до ( $Ra_1$ , мкм) и после MAO ( $Ra_2$ , мкм) измеряли на профилографе-профилометре мод. 252-Калибр. Величина магнитной индукции в рабочем зазоре ( $B$ , Т) измерялась тесламетром Т-3. Исходная шероховатость составляла  $Ra_1 = 0,8-1,0$  мкм. Результаты исследований на соответствие нормам электроакустических параметров изделий в виде собранных микрофонов 3-й группы сложности (для звукозаписи и звукоусиления речи) осуществляет по ГОСТ 16123-88 на номинальном диапазоне частот 80–10000 Гц, по показателю чувствительности на частоте 1000 Гц при полном электрическом сопротивлении 600 Ом, который составил  $1,9$  мВ·Па<sup>-1</sup>, отклонению чувствительности на частоте 1000 Гц, которое равнялось 2,5 дБ и уровню предельного звукового давления в диапазоне частот 250–8000 Гц (122 дБ), который был определен в звукомерной камере после проверки на механические и климатические факторы, в качестве которых применяем испытания на прочность при воздействии синусоидальной вибрации; воздействие пониженной и повышенной температуры среды и повышенную влажность в климатической камере.

Внешний вид изделия после MAO отвечает требованиям образца-эталоны, утвержденного в соответствии с ГОСТ 15.009-91.

Наличие изменения материального образа профиля полюсных наконечников позволяет произвести целенаправленную

обработку отличающихся по форме ступеней рукояток микрофонов в зависимости от уровня взаимодействия данных рукояток и ферроабразивной «щетки» при учете ее топологического декремента связанного с факторами ослабления и увеличения давления на локальные участки обрабатываемого объекта производства.

В результате произведенных теоретических и экспериментальных исследований получены аналитические зависимости измерения величины давления ферроабразивной «щетки» как режущего инструмента от геометрического профилирования полюсных наконечников с целью прогнозирования и высокоэффективной обработки методом MAO сложнопрофильных типов рукояток микрофонов.

На основании имеющегося математического аппарата [101–116] предлагается расчет левой части равенства (4.13) при концентрическом, серповидном и расходящемся профилях полюсного наконечника для MAO сложнопрофильных поверхностей.

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon < 1$ .

Лемма 1.1. При  $\varepsilon < 1$

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \left( \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right) + C.$$

Доказательство Леммы 1.1 основано на доказательстве следующих утверждений.

**Утверждение 1.1.** Интеграл вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) + C. \quad (4.14)$$

**Доказательство Утверждения 1.1.** Утверждение 1.1 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.14). Вычислим производную:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) \right)' = \\ & = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' = \\ & = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) = \\ & = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \sin \theta \cdot \varepsilon (-\sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{\varepsilon (1 + \varepsilon \cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ & = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ & = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + (\varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta) - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ & = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ & = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ & = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \frac{\cos \theta (1 - \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \\ & = \frac{\cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

**Утверждение 1.2.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  при  $\varepsilon < 1$  равен

$$\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + C. \quad (4.15)$$

**Доказательство Утверждения 1.2.** Утверждение 1.2 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.15). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)' = \\ & = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)' = \\ & = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \frac{1}{1 + \frac{(1 - \varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \varepsilon^2}} \frac{(1 - \varepsilon) \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)'}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \\ & = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \frac{(1 - \varepsilon) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(1-\varepsilon) \frac{1}{1+\cos\theta} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{2}{1-\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \\
&= \frac{2(1-\varepsilon) \frac{1}{1+\cos\theta}}{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \\
&= \frac{2}{1+\varepsilon + (1-\varepsilon) \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \\
&= \frac{2}{(1+\varepsilon)(1+\cos\theta) + (1-\varepsilon)(1-\cos\theta)} = \\
&= \frac{2}{1+\varepsilon + \cos\theta + \varepsilon \cos\theta + 1-\varepsilon - \cos\theta + \varepsilon \cos\theta} = \\
&= \frac{2}{2+2\varepsilon \cos\theta} = \frac{1}{1+\varepsilon \cos\theta}, \text{ и.т.д}
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 1.1 завершает подстановка формулы (4.15) в формулу (4.14).

Лемма 1.2. При  $\varepsilon < 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos\theta)^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right).$$

Доказательство Леммы 1.2. На основании Леммы 1.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos\theta)^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \left( \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right).
 \end{aligned}$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3}$  при  $\varepsilon < 1$ .

Лемма 2.1. При  $\varepsilon < 1$

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3} = \\
 &= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{\sin \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) \right) + C.
 \end{aligned}$$

Доказательство Леммы 2.1 основано на доказательстве следующих утверждений.

**Утверждение 2.1.** Интеграл вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралам вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}$  и

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} :$$

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \times \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2\varepsilon \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) + C. \quad (4.16)$$

**Доказательство Утверждения 2.1.** Утверждение 2.1 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.16). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2\varepsilon \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) \right)' = \\ & = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2\varepsilon \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' = \\ & = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' + \frac{\cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{2\varepsilon}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ & = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta)^2 - \sin \theta \cdot 2(1 + \varepsilon \cos \theta) \cdot (-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{2\varepsilon}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ & = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \sin \theta \cdot 2 \cdot (-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} - \frac{2\varepsilon (1 + \varepsilon \cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right) = \\ & = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \times \\ & \times \left( \frac{\cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \sin \theta \cdot 2 \cdot (-\varepsilon \sin \theta) + \cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - 2\varepsilon (1 + \varepsilon \cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{\cos\theta + \varepsilon \cos^2\theta + 2\varepsilon \sin^2\theta + \cos\theta + \varepsilon \cos^2\theta - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 \cos\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{\cos\theta + (2\varepsilon \cos^2\theta + 2\varepsilon \sin^2\theta) + \cos\theta - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 \cos\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{\cos\theta + 2\varepsilon + \cos\theta - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 \cos\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{\cos\theta + \cos\theta - 2\varepsilon^2 \cos\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{2\cos\theta - 2\varepsilon^2 \cos\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{2(1-\varepsilon^2)\cos\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{\cos\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

**Утверждение 2.2.** Интеграл вида  $\int \frac{\cos\theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может

быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{\cos\theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right) + C. \quad (4.17)$$

**Доказательство Утверждения 2.2.** Утверждение 2.2 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.17). Вычисляем производную:

$$\left( \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right) \right)' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right)' = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right)' - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta (1+\varepsilon \cos \theta) - \sin \theta \cdot \varepsilon (-\sin \theta)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{\varepsilon (1+\varepsilon \cos \theta)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + (\varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta) - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \frac{\cos \theta (1-\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = \\
&= \frac{\cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

**Утверждение 2.3.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) + C. \quad (4.18)$$

**Доказательство Утверждения 2.3.** Утверждение 2.3 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.18). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) \right)' = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' - \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \varepsilon \sin \theta \cdot \varepsilon (-\sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^2 \theta - 1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + (\varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^2 \theta) - 1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 - 1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon^2 - 1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' = \\
 &= \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
 \end{aligned}$$

**Утверждение 2.4.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  при  $\varepsilon < 1$  равен

$$\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + C. \quad (4.19)$$

**Доказательство Утверждения 2.4.** Утверждение 2.4 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.19). Вычислим производную:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)' = \\
 & = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)' = \\
 & = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{1}{1 + \frac{(1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1-\varepsilon^2}} \left( (1-\varepsilon) \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)' \right) = \\
 & = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \frac{(1-\varepsilon) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \\
 & = \frac{2(1-\varepsilon) \frac{1}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{1}{2}}{1-\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \\
 & = \frac{2(1-\varepsilon) \frac{1}{1 + \cos \theta}}{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\frac{1 + \cos \theta}{1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon) \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}} = \\
&= \frac{2}{(1 + \varepsilon)(1 + \cos \theta) + (1 - \varepsilon)(1 - \cos \theta)} = \\
&= \frac{2}{1 + \varepsilon + \cos \theta + \varepsilon \cos \theta + 1 - \varepsilon - \cos \theta + \varepsilon \cos \theta} = \\
&= \frac{2}{2 + 2\varepsilon \cos \theta} = \\
&= \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \text{ и.т.д}
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 2.1 завершает подстановка формул (4.17) и (4.18) в формулу (4.16) с последующей подстановкой в получившееся выражение формулы (4.19).

Лемма 2.2. При  $\varepsilon < 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right).$$

Доказательство Леммы 2.2. На основании Леммы 2.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \\
&= \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right) + \\
&+ \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( 1 + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left( \varepsilon - \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) \right).$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon > 1$ .

Лемма 3.1. При  $\varepsilon > 1$

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) \right).$$

Доказательство Леммы 3.1 основано на доказательстве следующих утверждений.

**Утверждение 3.1.** Интеграл вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$

может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) + C. \quad (4.20)$$

**Доказательство Утверждения 3.1.** Утверждение 3.1 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.20). Вычисляем производную:

$$\left( \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) \right)' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right)' = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right)' - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta (1+\varepsilon \cos \theta) - \sin \theta \cdot \varepsilon (-\sin \theta)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{\varepsilon (1+\varepsilon \cos \theta)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + (\varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta) - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \frac{\cos \theta (1-\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = \\
&= \frac{\cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

**Утверждение 3.2.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta}$  при  $\varepsilon > 1$  равен

$$\int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| + C. \quad (4.21)$$

**Доказательство Утверждения 3.2.** Утверждение 3.2 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.21).

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right)' = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left( \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right)' = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left( \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right)' = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times \\
& \times \left[ \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)' \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)'}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} \right] = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \left[ \frac{(\varepsilon - 1) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) (\varepsilon - 1) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} \right] = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times \\
& (\varepsilon - 1) \frac{1/2}{1 + \cos \theta} \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \\
& \times \frac{1}{2} \frac{1}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{1}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \frac{1}{1 + \cos \theta} (-2\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \\
& = \frac{1}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{-2(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon - 1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - (\varepsilon^2 - 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - (\varepsilon + 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
&= \frac{-2}{(\varepsilon - 1) \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} - (\varepsilon + 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
&= \frac{-2}{(\varepsilon - 1)(1 - \cos \theta) - (\varepsilon + 1)(1 + \cos \theta)} = \\
&= \frac{-2}{\varepsilon - 1 - \varepsilon \cos \theta + \cos \theta - \varepsilon - 1 - \varepsilon \cos \theta - \cos \theta} = \\
&= \frac{-2}{-2 - 2\varepsilon \cos \theta} = \\
&= \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 3.1 завершает подстановка формулы (4.21) в формулу (4.20).

Лемма 3.2. При  $\varepsilon > 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right).$$

Доказательство Леммы 3.2. На основании Леммы 3.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \\
&= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right) \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right).$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3}$  при  $\varepsilon > 1$ .

Лемма 4.1. При  $\varepsilon > 1$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \times \\ & \times \left( \frac{\sin \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ & = \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( 1 + \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left( \varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) \right). \end{aligned}$$

Доказательство Леммы 4.1 основано на доказательстве следующих утверждений.

**Утверждение 4.1.** Интеграл вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралам вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  и  $\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$ :

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \times \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2\varepsilon \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) + C \quad (4.22)$$

**Доказательство Утверждения 4.1.** Утверждение 4.1 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.22). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2\varepsilon \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) \right)' = \\ & = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2\varepsilon \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' = \\ & = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' + \frac{\cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{2\varepsilon}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ & = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta)^2 - \sin \theta \cdot 2(1 + \varepsilon \cos \theta) \cdot (-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{2\varepsilon}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ & = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( \frac{\cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \sin \theta \cdot 2 \cdot (-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} - \frac{2\varepsilon (1 + \varepsilon \cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{\cos\theta(1+\varepsilon\cos\theta) - \sin\theta \cdot 2 \cdot (-\varepsilon\sin\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos\theta(1+\varepsilon\cos\theta) - 2\varepsilon(1+\varepsilon\cos\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{\cos\theta + \varepsilon\cos^2\theta + 2\varepsilon\sin^2\theta + \cos\theta + \varepsilon\cos^2\theta - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{\cos\theta + (2\varepsilon\cos^2\theta + 2\varepsilon\sin^2\theta) + \cos\theta - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{\cos\theta + 2\varepsilon + \cos\theta - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{\cos\theta + \cos\theta - 2\varepsilon^2\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{2\cos\theta - 2\varepsilon^2\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \left( \frac{2(1-\varepsilon^2)\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

**Утверждение 4.2.** Интеграл вида  $\int \frac{\cos\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{\cos\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \right) + C. \quad (4.23)$$

**Доказательство Утверждения 4.2.** Утверждение 4.2 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.23). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) \right)' = \\
 & = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right)' = \\
 & = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right)' - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) = \\
 & = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta (1+\varepsilon \cos \theta) - \sin \theta \cdot \varepsilon (-\sin \theta)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{\varepsilon (1+\varepsilon \cos \theta)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + (\varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta) - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \frac{\cos \theta (1-\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = \\
 & = \frac{\cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
 \end{aligned}$$

**Утверждение 4.3.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \frac{\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \right) + C. \quad (4.24)$$

**Доказательство Утверждения 4.3.** Утверждение 4.3 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.24). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \frac{\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \right) \right)' = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \frac{\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \right)' = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \left( \frac{\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \right)' - \frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta} \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \frac{\varepsilon\cos\theta(1+\varepsilon\cos\theta) - \varepsilon\sin\theta \cdot \varepsilon(-\sin\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} - \frac{1+\varepsilon\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \frac{\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2\cos^2\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta - 1 - \varepsilon\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \frac{\varepsilon\cos\theta + (\varepsilon^2\cos^2\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta) - 1 - \varepsilon\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \frac{\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2 - 1 - \varepsilon\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon^2 - 1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
 \end{aligned}$$

**Утверждение 4.4.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  при  $\varepsilon > 1$  равен

$$\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| + C. \quad (4.25)$$

**Доказательство Утверждения 4.4.** Утверждение 4.4 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.25). Вычислим производную:

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right)' = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left( \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right)' = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left( \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right)' =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times \\
&\times \left( \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)' \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} - \right. \\
&\left. \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)'}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times \\
&\times \left( \frac{(\varepsilon - 1) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} - \right. \\
&\left. \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) (\varepsilon - 1) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon - 1) \frac{1/2}{1 + \cos \theta} \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \\
& \times \frac{1}{2 \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{1}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \frac{1}{1 + \cos \theta} (-2\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \\
& = \frac{1}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{-2(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon - 1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - (\varepsilon^2 - 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - (\varepsilon + 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2}{(\varepsilon - 1) \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} - (\varepsilon + 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2}{(\varepsilon - 1)(1 - \cos \theta) - (\varepsilon + 1)(1 + \cos \theta)} = \\
& = \frac{-2}{\varepsilon - 1 - \varepsilon \cos \theta + \cos \theta - \varepsilon - 1 - \varepsilon \cos \theta - \cos \theta} = \\
& = \frac{-2}{-2 - 2\varepsilon \cos \theta} = \\
& = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 4.1 завершает подстановка формул (4.23) и (4.24) в формулу (4.22) с последующей подстановкой в получившееся выражение формулы (4.25).

Лемма 4.2. При  $\varepsilon > 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right) \right) +$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right).$$

Доказательство Леммы 4.2. На основании Леммы 4.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \times$$

$$\times \left( \frac{\sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right) \right) +$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \left( 1 + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right) \right) +$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right).$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon = 1$ .

Лемма 5.1. При  $\varepsilon = 1$

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} + C. \quad (4.26)$$

Доказательство Леммы 5.1. Лемма 5.1 может быть доказана путем дифференцирования равенства (4.26). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} - \frac{1}{6} 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \cos \theta} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \cos \theta} - \frac{1}{2} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} - \frac{1 - \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{\cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Лемма 5.2. При  $\varepsilon = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{1}{3}.$$

Доказательство Леммы 5.2. На основании Леммы 5.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} &= \\ &= \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}$  при  $\varepsilon = 1$ .

Лемма 6.1. При  $\varepsilon = 1$

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos \theta)^3} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{20} \operatorname{tg}^5 \frac{\theta}{2} + C. \quad (4.27)$$

Доказательство Леммы 6.1. Лемма 6.1 может быть доказана путем дифференцирования равенства (4.27). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{20} \operatorname{tg}^5 \frac{\theta}{2} \right)' = \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} - \frac{1}{20} 5 \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \frac{1}{\frac{1+\cos\theta}{2}} - \frac{1}{8} \left( \frac{\frac{1-\cos\theta}{2}}{\frac{1+\cos\theta}{2}} \right)^2 \frac{1}{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{1+\cos\theta} - \frac{1}{4} \left( \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \right)^2 \frac{1}{1+\cos\theta} = \\
&= \frac{1}{4} \left( \frac{(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)^3} - \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{4} \frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta-1+2\cos\theta-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^3} = \\
&= \frac{\cos\theta}{(1+\cos\theta)^3}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Лемма 6.2. При  $\varepsilon = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta d\theta}{(1+\cos\theta)^3} = \frac{1}{5}.$$

Доказательство Леммы 6.2. На основании Леммы 6.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta d\theta}{(1+\cos\theta)^3} = \\
&= \left( \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{20} \operatorname{tg}^5 \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon < 1$ .

Лемма 7.1. При  $\varepsilon < 1$

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right).$$

Доказательство Леммы 7.1 основано на доказательстве следующих утверждений.

**Утверждение 7.1.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) + C. \quad (4.28)$$

**Доказательство Утверждения 7.1.** Утверждение 7.1 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.28). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) \right)' = \\ & = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' - \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \frac{\varepsilon \cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \varepsilon \sin \theta (-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 - 1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \\
&= \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

**Утверждение 7.2.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  при  $\varepsilon < 1$  равен

$$\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + C. \quad (4.29)$$

**Доказательство Утверждения 7.2.** Утверждение 7.2 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.29). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)' = \\
&= \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)' =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{1}{1 + \frac{(1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1-\varepsilon^2}} \frac{(1-\varepsilon) \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)'}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \frac{(1-\varepsilon) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \\
&= \frac{2(1-\varepsilon) \frac{1}{1+\cos\theta} \cdot \frac{1}{2}}{1-\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \\
&= \frac{2(1-\varepsilon) \frac{1}{1+\cos\theta}}{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \\
&= \frac{2}{1+\varepsilon + (1-\varepsilon) \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \\
&= \frac{2}{(1+\varepsilon)(1+\cos\theta) + (1-\varepsilon)(1-\cos\theta)} = \\
&= \frac{2}{1+\varepsilon + \cos\theta + \varepsilon \cos\theta + 1-\varepsilon - \cos\theta + \varepsilon \cos\theta} = \\
&= \frac{2}{2+2\varepsilon \cos\theta} = \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon \cos\theta}, \text{ и.т.д.}
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 7.1 завершает подстановка формулы (4.29) в формулу (4.28).

Лемма 7.2. При  $\varepsilon < 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \varepsilon - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right).$$

Доказательство Леммы 7.2. На основании Леммы 7.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \\ & = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ & = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \varepsilon - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \end{aligned}$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}$  при  $\varepsilon < 1$ .

Лемма 8.1. При  $\varepsilon < 1$

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \times \\ & \times \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Доказательство Леммы 8.1 основано на доказательстве следующих утверждений.

**Утверждение 8.1.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралам вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$

и  $\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$ :

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \times \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \varepsilon \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2 \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right). \quad (4.30)$$

**Доказательство Утверждения 8.1.** Утверждение 8.1 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.30). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \varepsilon \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2 \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) \right)' = \\ & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \varepsilon \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2 \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' = \\ & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' + \frac{\varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta)^2 - \varepsilon \sin \theta \cdot 2(1 + \varepsilon \cos \theta) \cdot (-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\varepsilon \cos \theta - 2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \varepsilon \sin \theta \cdot 2 \cdot (-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} + \frac{\varepsilon \cos \theta - 2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta + 2\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} + \frac{(\varepsilon \cos \theta - 2)(1 + \varepsilon \cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right) = \\
&= \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta + 2\varepsilon^2 \sin^2 \theta + \varepsilon \cos \theta - 2 + \varepsilon^2 \cos^2 \theta - 2\varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \\
&= \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \frac{2\varepsilon^2 \cos^2 \theta + 2\varepsilon^2 \sin^2 \theta - 2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \\
&= \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \frac{2\varepsilon^2 - 2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \\
&= \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

**Утверждение 8.2.** Интеграл вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$

может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) + C. \quad (4.31)$$

**Доказательство Утверждения 8.2.** Утверждение 8.2 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.31). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) \right)' = \\
&= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \left( \frac{\sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right)' - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta (1+\varepsilon \cos \theta) - \sin \theta \cdot \varepsilon (-\sin \theta)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{\varepsilon (1+\varepsilon \cos \theta)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + (\varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta) - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \frac{\cos \theta (1-\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = \\
&= \frac{\cos \theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

**Утверждение 8.3.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} \right) + C. \quad (4.32)$$

**Доказательство Утверждения 8.3.** Утверждение 8.3 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.32). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) \right)' = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' - \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \varepsilon \sin \theta \cdot \varepsilon (-\sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^2 \theta - 1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + (\varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^2 \theta) - 1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 - 1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon^2 - 1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
& = \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

**Утверждение 8.4.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  при  $\varepsilon < 1$  равен

$$\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + C. \quad (4.33)$$

**Доказательство Утверждения 8.4.** Утверждение 8.4 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.33). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)' = \\
& = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{(1-\varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)' = \\
& = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{1}{1 + \frac{(1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}{1-\varepsilon^2}} \frac{(1-\varepsilon) \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)'}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \\
& = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \frac{(1-\varepsilon) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \\
& = \frac{2(1-\varepsilon) \frac{1}{1+\cos \theta} \cdot \frac{1}{2}}{1-\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \\
& = \frac{2(1-\varepsilon) \frac{1}{1+\cos \theta}}{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \\
& = \frac{2}{1+\cos \theta} \frac{1-\cos \theta}{1+\varepsilon + (1-\varepsilon) \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} = \\
& = \frac{2}{(1+\varepsilon)(1+\cos \theta) + (1-\varepsilon)(1-\cos \theta)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{1 + \varepsilon + \cos \theta + \varepsilon \cos \theta + 1 - \varepsilon - \cos \theta + \varepsilon \cos \theta} = \\
&= \frac{2}{2 + 2\varepsilon \cos \theta} = \\
&= \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \text{ и.т.д.}
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 8.1 завершает подстановка формул (4.31) и (4.32) в формулу (4.30) с последующей подстановкой в получившееся выражение формулы (4.33).

Лемма 8.2. При  $\varepsilon < 1$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \times \\
&\times \left( \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) - \frac{2}{\varepsilon^2 - 1} \left( \varepsilon - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 8.2. На основании Леммы 8.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \times \\
&\times \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) - \right. \\
&\left. - \frac{2}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =
\end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\varepsilon^2 - 1} \left( \varepsilon - \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right).$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon > 1$ .

Лемма 9.1. При  $\varepsilon > 1$

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right).$$

Доказательство Леммы 9.1 основано на доказательстве следующих утверждений.

**Утверждение 9.1.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$

может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) + C. \quad (4.34)$$

**Доказательство Утверждения 9.1.** Утверждение 9.1 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.34). Вычисляем производную:

$$\left( \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) \right)' = \\ = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' - \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \frac{\varepsilon \cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \varepsilon \sin \theta (-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 - 1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \\
&= \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

**Утверждение 9.2.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  при  $\varepsilon > 1$  равен

$$\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| + C. \quad (4.35)$$

**Доказательство Утверждения 9.2.** Утверждение 9.2 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.35). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right)' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left( \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right)' =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left( \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right)' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times \\
&\times \left( \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)' \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} - \right. \\
&\left. - \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)'}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times \\
&\times \left( (\varepsilon - 1) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \right) - \\
&\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) (\varepsilon - 1) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} \right) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times \\
& (\varepsilon - 1) \frac{1/2}{1 + \cos \theta} \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \\
& \times \frac{1}{2} \frac{1}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{1}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \frac{1}{1 + \cos \theta} (-2\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \\
& = \frac{1}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{-2(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon - 1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - (\varepsilon^2 - 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - (\varepsilon + 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2}{(\varepsilon - 1) \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} - (\varepsilon + 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2}{(\varepsilon-1)(1-\cos\theta) - (\varepsilon+1)(1+\cos\theta)} = \\
&= \frac{-2}{\varepsilon-1-\varepsilon\cos\theta+\cos\theta-\varepsilon-1-\varepsilon\cos\theta-\cos\theta} = \\
&= \frac{-2}{-2-2\varepsilon\cos\theta} = \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 9.1 завершает подстановка формулы (4.35) в формулу (4.34).

Лемма 9.2. При  $\varepsilon > 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right).$$

Доказательство Леммы 9.2. На основании Леммы 9.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \frac{\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2-1} \left( \varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right).
\end{aligned}$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}$  при  $\varepsilon > 1$ .

Лемма 10.1. При  $\varepsilon > 1$

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \times$$

$$\times \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right) \right) -$$

$$- \frac{2}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right)$$

Доказательство Леммы 10.1 основано на доказательстве следующих утверждений.

**Утверждение 10.1.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}$  при  $\varepsilon \neq 1$

может быть сведен к интегралам вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$

и  $\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$ :

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \times$$

$$\times \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \varepsilon \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2 \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right). \quad (4.36)$$

**Доказательство Утверждения 10.1.** Утверждение 10.1 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.36). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \varepsilon \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2 \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) \right)' = \\
 & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \varepsilon \int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - 2 \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' = \\
 & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right)' + \frac{\varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta)^2 - \varepsilon \sin \theta \cdot 2(1 + \varepsilon \cos \theta) \cdot (-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^4} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\varepsilon \cos \theta - 2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \varepsilon \sin \theta \cdot 2 \cdot (-\varepsilon \sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} + \frac{\varepsilon \cos \theta - 2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
 & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta + 2\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} + \frac{(\varepsilon \cos \theta - 2)(1 + \varepsilon \cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right) = \\
 & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta + 2\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\varepsilon \cos \theta - 2 + \varepsilon^2 \cos^2 \theta - 2\varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \right) = \\
 & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \frac{2\varepsilon^2 \cos^2 \theta + 2\varepsilon^2 \sin^2 \theta - 2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} = \\
 & = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \frac{2\varepsilon^2 - 2}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}, \text{ и т. д.}$$

**Утверждение 10.2.** Интеграл вида  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) + C. \quad (4.37)$$

**Доказательство Утверждения 10.2.** Утверждение 10.2 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.37). Вычислим производную:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) \right)' = \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \varepsilon \int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' = \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \left( \frac{\sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)' - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta (1 + \varepsilon \cos \theta) - \sin \theta \cdot \varepsilon (-\sin \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{\varepsilon (1 + \varepsilon \cos \theta)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + (\varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta) - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left( \frac{\cos \theta + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\cos\theta - \varepsilon^2 \cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{1-\varepsilon^2} \frac{\cos\theta(1-\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}, \text{ и т. д.}
 \end{aligned}$$

**Утверждение 10.3.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}$  при  $\varepsilon \neq 1$  может быть сведен к интегралу вида  $\int \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$  следующим образом:

$$\int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \right) + C. \quad (4.38)$$

**Доказательство Утверждения 10.3.** Утверждение 10.3 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.38). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
 &\left( \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \right) \right)' = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \int \frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \right)' = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \left( \frac{\varepsilon \sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \right)' - \frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta} \right) = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos\theta(1+\varepsilon\cos\theta) - \varepsilon \sin\theta \cdot \varepsilon(-\sin\theta)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} - \frac{1+\varepsilon\cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos\theta + \varepsilon^2 \cos^2\theta + \varepsilon^2 \sin^2\theta - 1 - \varepsilon \cos\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + (\varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^2 \theta) - 1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 - 1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left( \frac{\varepsilon^2 - 1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

**Утверждение 10.4.** Интеграл вида  $\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  при  $\varepsilon > 1$  равен

$$\int \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| + C. \quad (4.39)$$

**Доказательство Утверждения 10.4.** Утверждение 10.4 может быть доказано путем дифференцирования равенства (4.39). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right)' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left( \ln \left| \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right| \right)' =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left( \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right)' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times \\
&\times \left( \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)' \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} - \right. \\
&\left. - \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)'}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times \\
&\times \left( (\varepsilon - 1) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \right) - \\
&\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) (\varepsilon - 1) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} \right) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \times \\
& (\varepsilon - 1) \frac{1/2}{1 + \cos \theta} \left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} - (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right) \\
& \times \frac{2}{\left( (\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right)^2} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{1}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{(\varepsilon - 1) \frac{1}{1 + \cos \theta} (-2\sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \\
& = \frac{1}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{-2(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon - 1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - (\varepsilon^2 - 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2}{(\varepsilon - 1) \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - (\varepsilon + 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
& = \frac{-2}{(\varepsilon - 1) \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} - (\varepsilon + 1)} \frac{1}{1 + \cos \theta} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2}{(\varepsilon-1)(1-\cos\theta) - (\varepsilon+1)(1+\cos\theta)} = \\
&= \frac{-2}{\varepsilon-1-\varepsilon\cos\theta+\cos\theta-\varepsilon-1-\varepsilon\cos\theta-\cos\theta} = \\
&= \frac{-2}{-2-2\varepsilon\cos\theta} = \frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 10.1 завершает подстановка формул (4.37) и (4.38) в формулу (4.36) с последующей подстановкой в получившееся выражение формулы (4.39).

Лемма 10.2. При  $\varepsilon > 1$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} = \frac{1}{2(\varepsilon^2-1)} \times \\
&\times \left( \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1)+\sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1)-\sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) - \right. \\
&\left. - \frac{2}{\varepsilon^2-1} \left( \varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1)+\sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1)-\sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) \right).
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 10.2. На основании Леммы 10.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} = \frac{1}{2(\varepsilon^2-1)} \times \\
&\times \left( \frac{\varepsilon \sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left( \frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\varepsilon^2-1} \left( \frac{\varepsilon \sin \theta}{1+\varepsilon \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
& = \frac{1}{2(\varepsilon^2-1)} \left( \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{\varepsilon^2-1} \left( \varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \left| \frac{(\varepsilon-1) + \sqrt{\varepsilon^2-1}}{(\varepsilon-1) - \sqrt{\varepsilon^2-1}} \right| \right) \right).
\end{aligned}$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon=1$ .

Лемма 11.1. При  $\varepsilon=1$

$$\int \frac{d\theta}{(1+\cos \theta)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} + C. \quad (4.40)$$

Доказательство Леммы 11.1. Лемма 11.1 может быть доказана путем дифференцирования равенства (4.40). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right)' = \\
& = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} = \\
& = \frac{1}{4} \frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{4} \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} \frac{1}{1+\cos \theta} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{2} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} + \frac{1 - \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{2}{(1 + \cos \theta)^2} = \\
&= \frac{1}{(1 + \cos \theta)^2}, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Лемма 11.2. При  $\varepsilon = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{2}{3}.$$

Доказательство Леммы 11.2. На основании Леммы 11.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \\
&= \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Вычисление интеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$  при  $\varepsilon = 1$ .

Лемма 12.1. При  $\varepsilon = 1$

$$\int \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^3} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{20} \operatorname{tg}^5 \frac{\theta}{2} + C. \quad (4.41)$$

Доказательство Леммы 12.1. Лемма 12.1 может быть доказана путем дифференцирования равенства (4.41). Вычисляем производную:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{20} \operatorname{tg}^5 \frac{\theta}{2} \right)' = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{20} 5 \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{1}{8} \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{4} \frac{1 - \cos \theta}{2} \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{8} \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{2} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{4} \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos \theta} = \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)^3} + 2 \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)^3} + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)^3} \right) = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + 2 - 2 \cos^2 \theta + 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^3} = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{4}{(1 + \cos \theta)^3} = \\
 &= \frac{\cos \theta}{(1 + \cos \theta)^3}, \text{ и т. д.}
 \end{aligned}$$

Лемма 12.2. При  $\varepsilon = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos \theta)^3} = \frac{7}{15}.$$

Доказательство Леммы 12.2. На основании Леммы 12.1 и в результате применения формулы Ньютона-Лейбница получаем



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta d\theta}{(1 + \cos \theta)^3} =$$

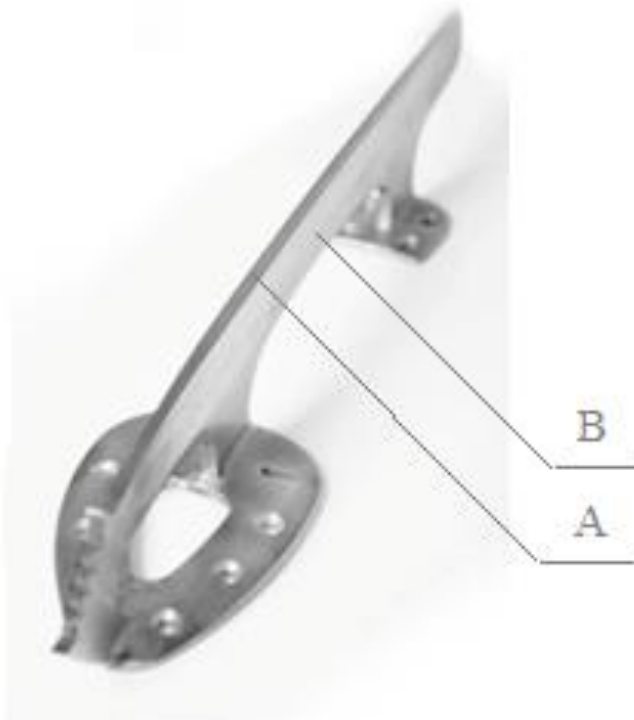
$$= \left( \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{20} \operatorname{tg}^5 \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20} = \frac{7}{15}.$$

#### 4.2. Технология магнитно-абразивной обработки полоза фигурного конька

Одним из распространенных зимних видов спорта является фигурное катание. Полоз – рабочая часть фигурного конька – изготавливается из высокоуглеродистой и легированной стали типа У10А, 65Х13 и др. Согласно ГОСТ 22357–87, качество полоза должно соответствовать целому ряду требований. Например, для массовых фигурных коньков твердость полоза составляет 30 HRC, но на расстоянии от кромки по всей длине полоза на высоту 5 мм она уже составляет 54 HRC. Полоз коньков должен быть прямолинейным, а аточка – без выступов, заусенцев и завалов. Предельное одностороннее отклонение от прямолинейности по всей длине полоза не более 0,2 мм. Для других типов коньков полоз должен иметь соответствующую (отличную от прямолинейной) форму, кривизну и ирину. Наличие специфического элемента в виде выпуклой части лезвия (рисунок 4.4), обеспечивающего выполнение сложных движений при проведении спортивных состязаний и тренировок, повышает себестоимость изготовления полоза конька.

Шероховатость по параметру  $Ra$  не должна превышать для боковых поверхностей полоза коньков 0,16 мкм при отсутствии зарубин, царапин и трещин. Достижение этих требований по качеству и наличие сложнопрофильной конфигурации полоза конька создает проблемы их финишной обработки и сопряжено с повышенной трудоемкостью.



Поверхность А – лезвие (кромка) полоза, поверхность В – опора лезвия  
Рисунок 4.4.– Полоз фигурного конька

В настоящее время существуют множество способов финишной обработки полоза конька, однако каждый из них имеет ряд недостатков. Так, например, обработка шлифованием абразивными кругами требует частого профилирования (правки кругов), что приводит к большому расходу режущего абразивного материала. Основным недостатком эластичных кругов из войлока, фетра, текстильных материалов является невозможность использования СОТС. В результате это приводит к повышенному нагреву деталей. Кроме того, материалы эластичных кругов имеют слишком низкую стойкость. Абразивные ленты характеризуются наличием швов, которые нарушают их однородность и понижают прочность инструмента. Электрополирование создает

проблемы экологического характера, ему присущ большой расход электроэнергии, а также необходимо подбирать оптимальный по составу электролит. Вибрационная обработка не обеспечивает однородность показателя качества поверхности, особенно в труднодоступных местах. Проведенный анализ показывает, что в настоящее время актуальным является определение способа финишной обработки сложнопрофильных поверхностей, позволяющего обеспечить требуемые показатели качества поверхности.

Одним из вариантов финишной абразивной обработки полоза конька является MAO, в роли инструмента которых выступает РТС, состоящая из ФАП, СОТС и ЭМП [53, 117].

В качестве режущего инструмента, как правило, используется порошкообразная ферроабразивная щетка, создаваемая ЭМП. Однако выявленные в [56] закономерности формирования физико-механических свойств поверхности обрабатываемых деталей из ферро-, пара-, диамагнитных материалов и их геометрических характеристик при воздействии различных РТС позволили создавать новые классы инструментов. В работе [118] представлена схема взаимодействия обрабатываемого изделия с механической щеткой в магнитном поле. Волокна этой щетки контактируют только в точке или дуге небольшой протяженности. Это существенно повышает давление в рабочей зоне и приводит к интенсификации съема материала. Кроме того, реализуется возможность обработки сложнопрофильных деталей путем применения одной технологической операции.

Известен также полюсный наконечник для электромагнитной системы (ЭМС), выполненный в виде собранных в пакеты ферромагнитных проволок [119], фиксируемых относительно друг друга для формирования рабочей зоны в соответствии с профилем обрабатываемой поверхности детали. Однако концентрация ФАП осуществляется только на торце этого наконечника, что не позволяет производить обработку боковых стенок деталей и переходных радиусов за один цикл. Другой попыткой решения данной проблемы обработки сложнопрофильных изделий является образование на рабочей поверхности полюсного наконечника различного рода рифлений [119]. Однако по мере удаления

рифлений от торца наконечника величина магнитной индукции снижается. По этой причине в ходе протекания процесса MAO через некоторое время (10–15 с) концентрация ФАП на боковой поверхности резко уменьшается, а размерный и массовый съем материала – прекращается.

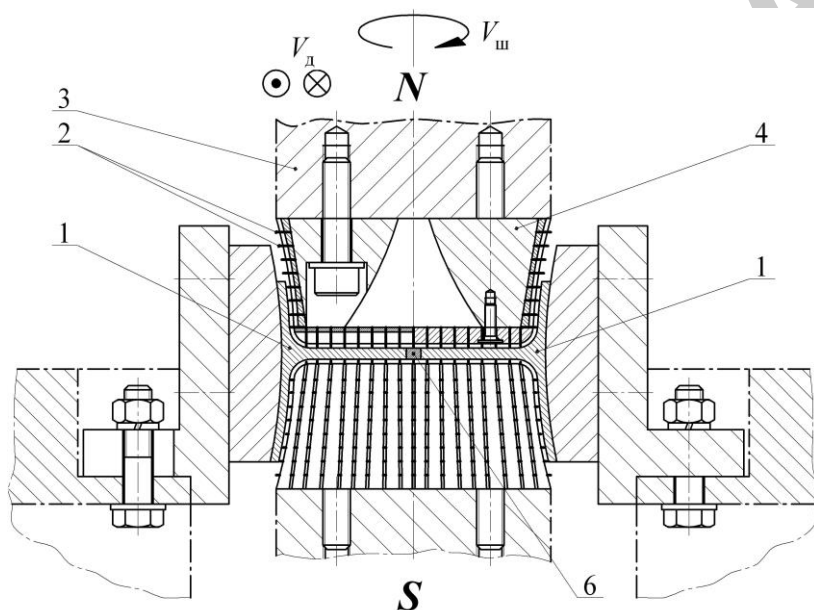
Исследования были проведены на установке ЭУ-5. На рисунке 4.5 представлена схема обработки и общий вид полюсного наконечника, изготовленного для осуществления процесса MAO полоза конька. Полюсный наконечник ЭМС состоит из шпинделя установки 3, соединенного с сердечником 4, на котором находится механическая щетка с волокнами 2, в рабочий зазор между обрабатываемым изделием 1 и волокнами подается смесь в виде ФАП и СОТС. Волокна механической щетки были выполнены из проволоки диаметром 0,16; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 мм по ГОСТ 3282-74 (временное сопротивление разрыву –  $\sigma_b = 300\text{--}350$  МПа).

В качестве образцов использовались полоз конька для фигурного катания (сталь У10А ГОСТ 1435–88), исходная шероховатость поверхности  $Ra_1 = 1,2\text{--}1,4$  мкм. Режимы и параметры обработки: угловая скорость шпинделя  $V_{ш} = 50$  с<sup>-1</sup>; магнитная индукция  $B = 1$  Т; скорость движения детали  $V_d = 0,6$  м/мин; величина рабочего зазора  $\delta = 1$  мм; время обработки  $t = 60$  с. В качестве ФАП использовался Ж15КТ, зернистостью порошка  $\Delta = 100/200$  мкм, СОТС – СинМА-1, 3 % водный раствор.

В рабочий зазор подается порция РТС, которая под воздействием магнитного поля концентрируется на вершинах волокон механической щетки 2 и между ними, образуя при этом эластичный режущий инструмент. Шпиндель 3 установки ЭУ-5 вместе с полюсным наконечником приводится во вращение, механической щетке и рабочей среде сообщается возвратно-продольное и возвратно-поперечное осциллирующее движение, а движение детали 1 осуществляется возвратно-поступательно. Суперпозиция движений обеспечивает одновременную обработку фасонной поверхности полоза конька соответствующими элементами полюсного наконечника.

Данный комплекс движений создает микрорельеф поверхности в виде сетки, представляющей собой след от резания ферроабразивными зёрнами. В вертикальной плоскости контакт

инструмента и детали происходит за счет продольного движения и поступательного – механической щетки. В этом случае формирование поверхности осуществляется по принципу работы попутного или встречного шлифования. Таким образом, время обработки каждой точки поверхности А полоза конька (рисунок 4.4) является более продолжительным, чем при обработке поверхности В (рисунок 4.6), что обеспечивает более интенсивный сьем материала.

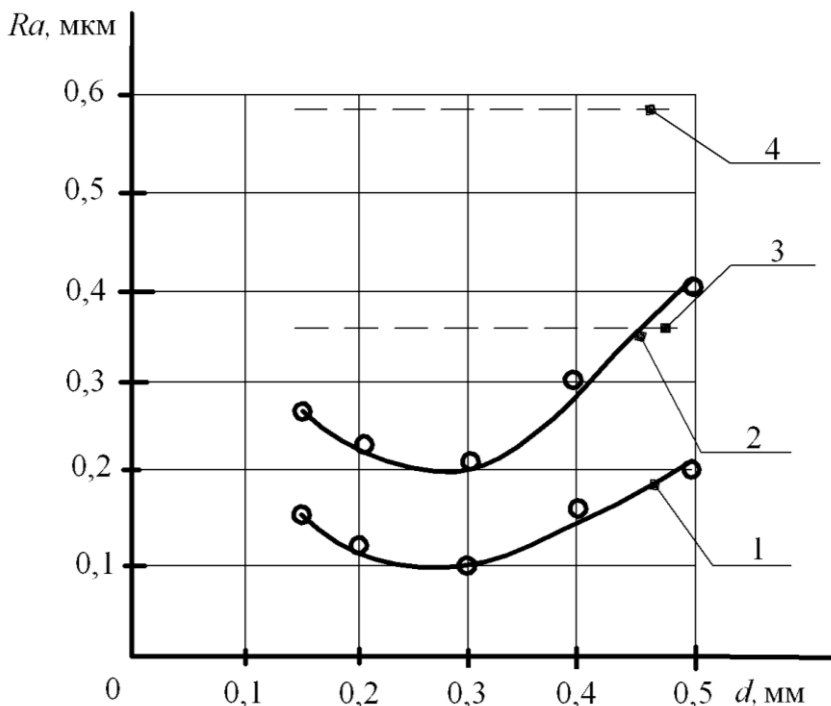


1 – обрабатываемая деталь; 2 – волокна механической щетки;  
 3 – шпиндель установки; 4 – сердечник ЭМС; 5 – немагнитный фиксатор  
**Рисунок 4.5.– Схема МАО полозов коньков с применением механической щетки**

Анализ полученных результатов, представленных в таблице 4.1, показывает, что существует разница в значениях достигаемых показателей шероховатости при обработке поверхностей А и В поверхности, обусловленная продольным движением детали и вращением механической щетки.

Таблица 4.1 – Шероховатость поверхностей в зависимости от параметров полюсного наконечника

Вид устройства	Диаметр волокна, мм	Расстояние между волокнами, мм	Показатель шероховатости на поверхности А детали, $Ra_1$ , мкм	Показатель шероховатости на поверхности В детали, $Ra_2$ , мкм
1	2	3	4	5
Предлагаемый полюсный наконечник	0,16	0,3	0,16	0,29
		0,5	0,18	0,21
		1,5	0,12	0,28
		2,0	0,13	0,24
		2,5	0,16	0,33
	0,2	0,3	0,14	0,26
		0,5	0,16	0,2
		1,5	0,11	0,21
		2,0	0,11	0,24
		2,5	0,15	0,32
	0,3	0,3	0,12	0,25
		0,5	0,1	0,22
		1,5	0,1	0,2
		2,0	0,1	0,2
		2,5	0,1	0,3
	0,4	0,3	0,17	0,37
		0,5	0,15	0,27
		1,5	0,14	0,27
		2,0	0,16	0,27
		2,5	0,12	0,34
0,5	0,3	0,17	0,4	
	0,5	0,19	0,41	
	1,5	0,2	0,37	
	2,0	0,2	0,42	
	2,5	0,22	0,4	
Полюсный наконечник по схеме, представленной в работе[119]		Не приведены	0,37	0,59



1 – на поверхности А; 2 – на поверхности В; 3 – шероховатость поверхности А из источника [119]; 4 – шероховатость поверхности В из источника [119]

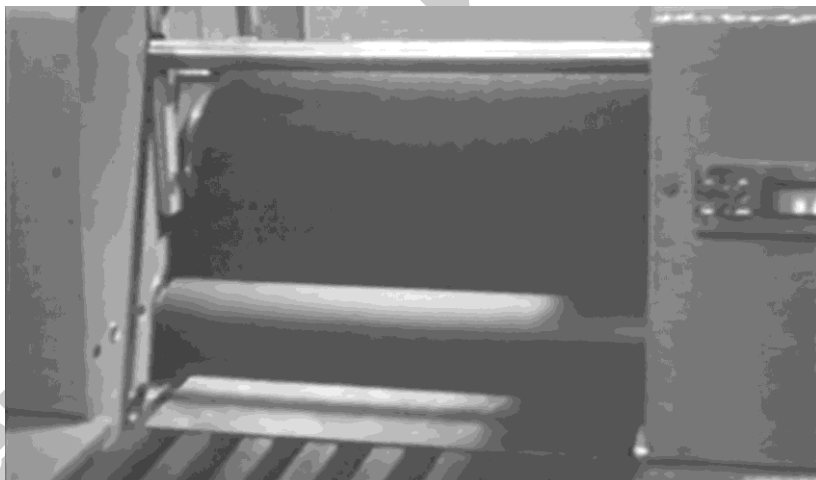
**Рисунок 4.6. – Зависимость шероховатости поверхности от диаметра волокон механической щетки при расстоянии между волокнами 1,5 мм**

В результате проведения экспериментальных исследований установлено, что наилучшая шероховатость поверхности полоза фигурного конька достигается при условии, что диаметр волокон механической щетки равняется 0,3 мм. Увеличение диаметра волокон (0,4 и 0,5 мм) приводит соответственно к увеличению жесткости щетки. Уменьшение диаметра волокон (0,16 и 0,2 мм) увеличивает их податливость и понижает рабочее давление, что, в свою очередь, уменьшает съем материала (рисунок 4.6). Расстояние между волокнами, обеспечивающее лучшие показатели, составляет 0,5–2 мм.

Таким образом, в результате проведенных исследований предложен способ магнитно-абразивной обработки полоза фигурных коньков с использованием в качестве режущего инструмента волокон механической щетки диаметром 0,3 мм. Данный инструмент позволяет расширить технологические возможности способа МАО при обработке деталей, имеющих сложнопрофильную поверхность.

#### **4.3. Технология магнитно-абразивной обработки изделий из тонколистового материала**

МАО изделий из тонколистового материала (толщина 0,1–5 мм), изображенная на рисунке 4.7 позволит устранить ручной труд на операции полирования и уменьшить количество операций. При этом применяют дополнительную ферромагнитную массу – оправки для изделий типа тел вращения и подложки для плоских изделий [53] (рисунок 4.7).



**Рисунок 4.7. - Магнитно-абразивная обработка тонколистового материала**

Процесс обработки осуществляется под воздействием сил, которые могут быть рассчитаны по зависимостям, приведенным



в работе [117]. Однако при расчетах следует учитывать, что поле, возникающее вследствие внешнего намагничивания, является суммарным полем дополнительной ферромагнитной массы и обрабатываемого изделия. Если обрабатываемое изделие изготовлено из немагнитного материала, расчетный рабочий зазор будет:

$$\delta_1 = (\delta + \theta),$$

где  $\delta$  – рабочий зазор;  $\theta$  – толщина обрабатываемого изделия.

Нормальная магнитная сила  $F_3'$ , создающая усилия на выступах частиц порошка:

$$F_3' = -\frac{He^2}{m} b^4 \frac{(M_{3д} - 1)^2}{4\pi \cdot 7,8^2} \left\{ 1 + \frac{(M_{3д} - 1) b^4}{7,8} \frac{1}{3} \left[ \frac{n_1}{(b^2 + x^2)} + \frac{n_2}{(b^2 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right\} \times \\ \times \left[ \frac{n_1 x}{(b^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{4n_2 x}{(b^2 + 4x^2)^{\frac{5}{2}}} \right] (M_d - 1)^2 \left( 1 - \frac{N_d}{4\pi} \right)^2, \quad (4.42)$$

где  $He$  – внешнее поле, Т;  $b$  – радиус частиц порошка, условно принятого в виде описанной сферы, см;  $x$  – расстояние между соседними частицами порошка, мм;  $N_d$  – баллистический коэффициент размагничивания для дополнительной ферромагнитной массы;  $m$  – число выступов частиц порошка, одновременно находящихся в контакте с обрабатываемой поверхностью;  $n_1$  и  $n_2$  – количество зерен в первом и втором слоях, окружающих рассматриваемое зерно;  $M_{3д}$  – магнитная проницаемость частиц порошка в поле, создаваемом дополнительной ферромагнитной массой  $\mu\Gamma/\text{м}$ ;  $M_d$  – магнитная проницаемость дополнительной ферромагнитной массы,  $\mu\Gamma/\text{м}$ .

Если величина внешнего поля в процессе обработки не меняется, то процесс диспергирования металла ферромагнитно-

абразивными частицами порошка осуществляется под воздействием постоянной магнитной силы. Схема сил при микрорезании, приведенная в работе [117], позволяет с учетом механической составляющей силы трения рассчитать тангенциальное усилие  $F'_z$ :

$$F'_z = \frac{\bar{F}_3}{m} \sin \delta \left( \operatorname{ctg} \delta - \frac{f_m}{b} \right) \quad (4.43)$$

и нормальное усилие  $F_y$ :

$$F_y = \frac{\bar{F}_3}{m} \sin \delta (1 + f_m), \quad (4.44)$$

где  $f_m$  – механическая составляющая коэффициента трения;  $\delta$  – угол резания.

В условиях упругого контакта:

$$f_{m,y} = 0,418\alpha \sqrt{\frac{h}{\tau}}. \quad (4.45)$$

В условиях пластического контакта

$$f_{m,\pi} = 0,55 \sqrt{\frac{h}{\tau}}, \quad (4.46)$$

где  $h$  – глубина внедрения единичной неровности в обрабатываемую поверхность;  $\tau$  – радиус единичной неровности на поверхности абразивной частицы порошка;  $\alpha$  – коэффициент гистерезисных потерь при скольжении по материалу сферы, определенный по одноосному растяжению-сжатию.

Результаты электронно-микроскопических исследований позволяют приближенно оценить радиус округления  $\tau$  выступов микрорельефа, колеблющейся в довольно широких пределах от 0,3 до 2 мкм [53]. Глубину внедрения единичного выступа мож-

но оценить по размерам снимаемой стружки. При магнитно-абразивной обработке 55 – 75 % всех стружек имеет длину до 4 мкм, а отношение длины к ширине – 5:20 (рисунок 4.8., *a*).



*a*



*б*

**Рисунок 4.8.– Форма стружек (*a*)  
и следы микрорезания (*б*) после MAO**

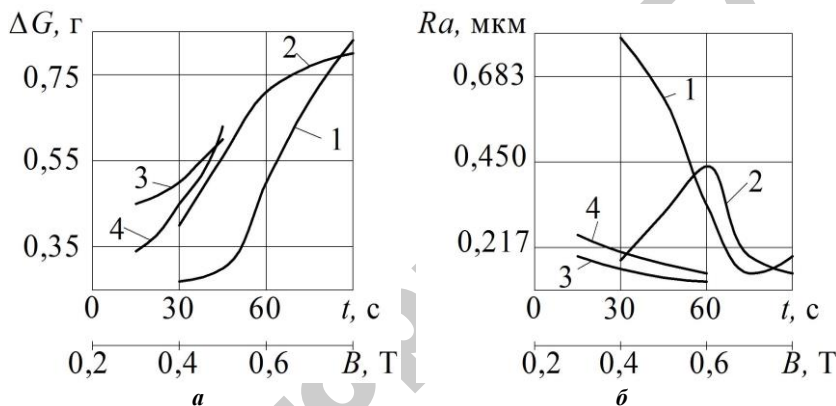
Экспериментальные исследования MAO деталей, изготовленных штамповкой из листового материала толщиной 1 мм с последующим шлифованием проводили на станке для MAO СФТ 2.150.00.00.000.

Форма обрабатываемого изделия включала элементы цилиндра, конуса и сферы. Поверхность после штамповки и одной операции шлифования кругом с крупными порошками – структура № 8, плита микронеровности высотой  $Ra = 2,5$  мкм, следы штамповочных рисок. Изделие устанавливали на оправке из ферромагнитного материала без зазоров.

Установку оснащали специальными полюсными наконечниками, рабочая поверхность которых эквидистантна обрабатываемой поверхности, а угол охвата спрофилирован в соответствии с диаметральными размерами детали. Например, чтобы предотвратить замыкание магнитного потока мимо изделия, меньшему диаметру на обрабатываемой поверхности должен соответствовать меньший угол охвата. Полюсным наконечникам сообщали качательное движение, амплитуду которого рассчитывали так, чтобы рабочий зазор изменялся от 0,2 до 3,0 мм, при постоянном токе на обмотке электромагнитов магнитная индукция соответственно 0,7–1,7 Т. Изделию придавали частоту вращения 250–630 мин<sup>-1</sup>, в рабочий зазор подавали ферромагнитный по-

рошок Ж15КТ зернистостью от 100 до 160 мкм. В качестве СОТС использовали водные растворы поверхностно-активных веществ типа «Аквол–10».

Зависимость массового съема металла  $\Delta G$  с поверхности изделий из латуни Л63 ГОСТ 2208–75 (кривые 1, 2) и стали Ст. 3 ГОСТ 19903–74 (кривые 3, 4) от магнитной индукции  $B$  в рабочем зазоре и от продолжительности обработки  $t$  показаны на рисунке 4.9 а, а зависимости для высоты микронеровностей  $Ra$  показаны на рисунке 4.9 б.



**Рисунок 4.9. – Зависимость массового съема металла  $\Delta G$  (а) и высоты микронеровностей  $Ra$  (б) от магнитной индукции  $B$  в рабочем зазоре и от продолжительности обработки  $t$**

Линии 3 на графиках характеризуют зависимости  $\Delta G$  и  $Ra$  от продолжительности полирования при  $B = 0,9$  Т. Предварительно была проведена обработка в течение 20 с при  $B = 1,6$  Т, а затем 20 с при  $B = 1,1$  Т. Линии 4 соответствуют зависимостям  $\Delta G$  и  $Ra$  на поверхности стальных изделий от продолжительности обработки при  $B = 1,1$  Т, предварительно была проведена обработка при  $B = 1,4$  Т в течении 15 с, а окончательно полирование при  $B = 0,9$  Т – в течении 15 с.

Увеличение продолжительности обработки стальных изделий с 15 с до 60 с сопровождается увеличением съема металла и снижением высоты микронеровностей, шероховатость, соответствующая 10-му параметру, может быть сформирована за 45–60 с.

При обработке изделий из латуни увеличение продолжительности обработки с 15 с до 60 с сопровождается увеличением съема и высоты микронеровностей, что объясняется вскрытием штамповочных рисок, затянутых металлом на операции шлифования. При полировании более 60 с происходит снижение высоты микронеровностей. За этот промежуток времени устраняются дефекты исходной поверхности и формируется шероховатость магнитно-абразивной обработкой.

Магнитная индукция выше 0,9 Т вызывает увеличение высоты микронеровностей с одновременным возрастанием съема металла, поэтому для мягких материалов с грубой исходной поверхностью вначале цикла можно рекомендовать жесткий режим с  $B = 1,1-1,2$  Т с последующим полированием в течение 45–60 с при  $B = 0,7-0,8$  Т.

Таким образом, применение магнитно-абразивной обработки в технологическом процессе изготовления изделий из тонколистовых магнитных и немагнитных материалов может оказаться эффективным и позволит устранить ручной труд и добавочные операции шлифования.

#### **4.4. Технология магнитно-абразивной обработки прерывистых поверхностей**

Одними из самых ответственных деталей в машиностроении являются зубчатые колеса, финишная обработка которых связана с рядом технологических и организационных трудностей. Профиль межзубной впадины имеет сложный характер конфигурации, в связи с чем всякий раз возникает необходимость, в проведении мероприятий по созданию аналогичного профиля формообразующего инструмента. Известно, что поскольку форма детали – след инструмента, то достижение требуемой ориентации границ режущего контура, например, шлифовального круга, представляет сложную задачу. Что касается самого метода шлифования, то для него характерно образование прижогов поверхностного слоя и низкий коэффициент использования абразивных зерен, и это ухудшает качественные показатели обработанной поверхности детали [120].

Достаточной полноценной заменой в таком случае служит зубохонингование, использование которого связано с более «мягкими» режимами обработки, снижением удельных давлений в зоне контакта – инструмент – деталь и образованием упорядоченного микрорельефа ее поверхности, способствующего удержанию смазочного материала. Вместе с тем хонингованию ввиду того, что для его реализации требуется инструмент с твердой связкой абразивных зерен, присуща необходимость в его профилировании и обязательность периода приработки. Кроме того, эффективность использования режущей способности этих зерен аналогична шлифованию. Применение шевингования и вообще части технологического маршрута – фрезерование – шевингование – термообработка, по данной схеме работали и продолжают работать предприятия СНГ, связано с отсутствием равноценного комплекта оборудования и инструмента. По данным фирм Liebherr в 2015 году суммарно планируется выпуск 75 млн автомобилей, в том числе 65 млн легковых автомобилей. Для этих автомобилей 5–6 ступенчатые коробки с ручным переключением будет составлять около 45 %, автоматические 5–7 ступенчатые – 40 % и коробки 5–6 ступенчатые с двумя сцеплениями – 20 %. Прогноз заключается в том, что на рынке по-прежнему будут доминировать традиционные коробки скоростей с зубчатыми передачами. Растущие требования к комфортности современных автомобилей и других транспортных средств предъявляют к изготовлениям зубчатых колес необходимость снижения уровня шума их работы. Следовательно, возникает потребность в увеличении количества типоразмеров зубчатых колес и соответственно к наличию гибких быстро быстроснаживаемых средств их изготовления. Это касается не только самого оборудования и технологической оснастки, но и схем механической обработки и, например, такой является следующая – фрезерование с использованием станков ЧПУ, термообработка, хонингование. Однако, как указывалось ранее, хонингование связано с рядом «узких мест», которые требуют роста трудоемкости процесса изготовления деталей с прерывистыми поверхностями, в частности зубчатыми колесами.

Согласно представленному анализу другим вариантом служит возможность создания инструмента на упругой связке поз-

воляющей осуществлять заполнение пространства впадины между двумя зубьями шестерни. Однако упругая связка, или, иначе говоря, свободное закрепление абразивного зерна, что характерно для метода полирования, обладает низким показателем его давления на обрабатываемую поверхность, высокой текучестью суспензии или пасты, и не имеет требуемого диапазона размерного и массового съема материала [121]. В таком случае следующим вариантом выступает абразивная обработка [53, 122] с подвижно координированным закреплением зерна в связке инструмента, образованном магнитным полем. Данное закрепление зерна позволяет произвести заполнение указанной выше межзубной впадины и путем регулирования подачи тока на катушки соленоидов ЭМС изменять давление ФАП на обрабатываемую поверхность зуба. Известно, что уровень этого давления составляет 0,4–2,0 МПа и данный показатель ниже чем при шлифовании, равный 10–15 МПа. Диапазон достигаемой на данный момент времени величины магнитной индукции находится в пределах 0,8–1,0 Т, и этому диапазону соответствует уровень давлений инструмента. Повышение силы тока с целью образования больших по значению показателей магнитной индукции, которая является силовой характеристикой процесса МАО, связано с пределом магнитного насыщения сердечника и увеличением неоправданного расхода электроэнергии. В таком случае существует возможность интенсификации процесса МАО сложно-профильных поверхностей и зубчатых колес в частности за счет увеличения давления инструмента путем воздействия двух факторов: магнитного и механического. Указанное выше решение приводит к росту давления и обеспечивается созданием конструкции схемы МАО и заключающимся в дополнительном ограничении и уплотнении съема порции ФАП. Это связано с тем, что для данной порции ФАП, находящейся в межзубном пространстве, не существует возможности ограничить свою размерность кроме как использованием магнитного поля. Поэтому если осуществлять дополнительное уплотнение этой порции ФАП, находящейся в пространстве межзубной впадины, то можно увеличить размерный и массовый съем материала детали. Вращение зубчатого колеса как заготовки осуществляет доставку порции ФАП





инструмента, или иначе говоря, порцией ФАП. Предлагаемый ниже расчет предполагает, что физическая модель имеет определенные допущения, заключающиеся в замене эвольвентного профиля впадины на прямоугольный, а также в представлении, как указано на рисунке 4.10, суперпозиций давления образованных окружностями в каждом конкретном поперечном сечении заготовки зубчатого колеса. Для процесса МАО характерно сложное реологическое поведение порции ферроабразивного порошка, что накладывает определенные трудности на создание и построение адекватных моделей [53]. При их построении стало традиционным не учитывать сжимаемость материала, поэтому полагают, что  $\xi_c = 0$  и  $\varepsilon_c = 0$ , в варианте же МАО возникает ситуация, что принимаемые допущения приводят к существенным отклонениям от реального процесса. В общем случае физическая модель будет носить нелинейный характер, что усложняет ее использование, но одновременно дает более полную картину объемного сжатия порции ФАП в рабочем зазоре между зубьями шестерни. Поэтому из-за сравнительно небольших модулей упругости этого материала в данном зазоре возникают заметные изменения как в расширении напряжений и их концентрации, так и деформации вышеуказанного сжатия. Принимаем разработанный в работе [122] метод построения физической модели. В соответствии с ним математическое описание представляет собой сжимаемую нелинейную среду. Выглядит следующим образом:

$$S_{ij} = 2 \left[ \left( \varphi(H) \dot{\mathcal{E}}_{ij} + \int_0^t R(t-\tau) \varphi(H) \dot{\mathcal{E}}_{ij} d\tau \right) \right], \quad (4.47)$$

$$\delta_c = \int_0^t K(t-\tau) \dot{\xi}_c^a d\tau + \eta \dot{\xi}_c^a, \quad (4.48)$$

где  $S_{ij}$  – девиатор напряжений;  $\mathcal{E}_{ij}$  – девиатор скоростей деформаций;  $R(t-\tau)$  – ядро релаксации;  $\varphi(H)$  – функция сдвиговой вязкости;  $\delta_c$  – сопротивление объемному сжатию;  $\dot{\xi}_c$  – скорость деформации объемного сжатия;  $K(t-\tau)$  – ядро релаксации;  $\eta$  – коэффициент объемной вязкости.

Для получения аналитических выражений упростим формулы (4.47) и (4.48), представив их в линейной форме:

$$D_{\delta} = 2 \frac{T}{H} D_{\xi}, \quad \delta_c = K \varepsilon_c + \eta \xi_c, \quad T = \eta H.$$

Данная модель сжимаемой среды как первое приближение дает определенные результаты. Поскольку процесс МАО представляет собой краевую задачу, то принимаем следующие условия: сила  $F$  в данный момент времени и в данный момент времени и в данной точке траектории является величиной постоянной;  $\delta_r = \delta_0$  – в силу симметрии;  $\xi_r = \xi_0 = 0$  и  $\tau_{r0} = 0$  – в силу характера постоянства нагрузки. Трение на рабочих поверхностях зубьев шестерни подчиняются закону

$$\bar{\tau} = \alpha \tau_{\text{пр}}, \quad (4.49)$$

где  $\bar{\tau}$  – напряжение трения на рабочих поверхностях зубьев шестерни;  $\tau_{\text{пр}}$  – предельное сдвиговое напряжение.

Учитывая приведенные зависимости (4.47)–(4.49), сведем их воедино:

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{K}{3} \int_0^{\tau} \xi_x d\tau + \frac{\eta}{3} \xi_x + \frac{4}{3} \mu \xi_x, \\ \delta_r &= \frac{K}{3} \int_0^{\tau} \xi_x d\tau + \frac{\eta}{3} \xi_x - \frac{2}{3} \mu \xi_x, \\ \tau_{xr} &= \mu \eta_{xr}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Для решения задачи применяем принцип Шурдена:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \xi_{ij} dV - \int_s P_k \delta V_k dS = 0. \quad (4.51)$$

В нашем случае уравнение (4.51) выглядит следующим образом:

$$\int_V (\sigma_x \delta \xi_x + \tau_{xr} \delta \eta_{xr}) dV + \int_s \alpha \tau_{np} \delta V_x dS - F \delta V_x = 0. \quad (4.52)$$

Скорость вертикального смещения  $V_x$  аппроксимируется выражением

$$V_x = -C_1(t) \frac{x}{e} - C_2 \frac{x}{e} \left(1 - \frac{x}{e}\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (4.53)$$

где  $C_1(t)$  – неопределенный параметр, зависящий от времени;  $C_2$  – постоянная величина, определяемая из условия на границе.

Граничные условия должны в таком случае выглядеть таким образом  $\tau_{xr} h = R = \mu_{xr} = \bar{\tau}$ . Однако оно выполняется

в интегральном смысле,  $\alpha \tau_{np} l = \int_0^e \tau_{xr} dx$ , отсюда  $C_2 = 3R \frac{d\tau_{np}}{\mu}$ .

Из (4.53) вытекает, что

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= \frac{-C_1(t)}{e} - \frac{C_2}{e} \left(1 - \frac{2x}{e}\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right); \\ \eta_{xr} &= C_2 \frac{x}{e} \left(1 - \frac{x}{e}\right) \frac{2r}{R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Подставляя (4.54) в уравнение (4.52) и варьируя по параметру  $C_1$ , получаем следующее уравнение относительно  $C_1(t)$ :

$$A_1 \int_0^t C_1(\tau) d\tau + A_2 C_1(t) = A_3, \quad (4.55)$$

где  $A_1 = \pi k R^2 / 3l$ ,  $A_2 = \pi R^2 (\eta + 4\mu) / 3l$ ,  $A_3 = P - \pi R l \alpha \tau_{np}$ .

Данное интегральное уравнение решаем, превратив его в дифференциальное и, получив  $C_1(0) = \frac{A_3}{A_1}$  из (4.55), имеем

$$C_1(t) + \frac{A_2}{A_1} \dot{C}_1(t) = 0. \quad (4.56)$$

Из уравнения (4.56) следует  $C_1(t) = A_3 \frac{e^{-A_2 t / A_1}}{A_1}$ .

Теперь, подставляя значения  $C_1(t)$  и  $C_2$  в выражение (4.53), получаем

$$V_x = -\frac{A_3}{A_1} e^{-A_2 t / A_1} \frac{x}{e} - \frac{3R\alpha\tau_{\text{пр}}}{\mu} \frac{x}{e} \left(1 - \frac{x}{e}\right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Таким образом, в результате создания адекватной физической модели, процесса при учете того, что ферроабразивный порошок как инструмент представляет собой сжимаемую нелинейную среду, выявлены кинематические и динамические параметры воздействия механического фактора.

#### 4.5. Магнитно-абразивная обработка эвольвентных поверхностей

В современном сельскохозяйственном машиностроении широкое распространение получили эвольвентные зубчатые передачи. От их работоспособности, качества и нагрузочной способности зависит долговечность, надежность машин и механизмов. Поэтому актуальными остаются вопросы совершенствования технологического процесса их изготовления на базе применения финишных методов обработки. Особое значение имеет шероховатость рабочей поверхности зубьев, так как для большинства зубчатых колес микронеровности, образовавшиеся на стадии механической обработки, сохраняются после химико-термической обработки и влияют на напряженно-деформированное состояние зубчатых колес при их эксплуатации [123].

В качестве финишных методов обработки зубьев для незакаленных зубчатых колес используются зубошвингование и калибрование, известен также способ, занимающий промежуточное

место между калиброванием и шевингованием – «финишер» [124]. Для обработки закаленных зубчатых колес – зубохонингование, обкатка и притирка [125]. Одним из широко применяемых методов является зубошлифование, которое позволяет обеспечить высокую точность зубчатого венца, устранить погрешности предварительной механической и химико-термической обработки. Однако выделяемое при шлифовании тепло вызывает структурные изменения в поверхностном слое в виде прижогов и внутренние растягивающие напряжения. При превышении этими величинами напряжений предела прочности появляются шлифовочные трещины [126].

Отличительной особенностью МАО от вышеперечисленных финишных способов чистовой обработки является возможность управления движением абразивных частиц в зоне обработки за счет изменения осциллирующего движения, и главным образом, за счет изменения величины магнитного потока, и как следствие, силы давления на обрабатываемую поверхность, что позволяет производить обработку без микротрещин, надрывов, шаржирования, равномерно удалять металл с обрабатываемой поверхности, упрочнять поверхностный слой, снижать остаточные растягивающие напряжения с переходом их в сжимающие. Однако одной из проблем МАО зубчатых колес среднего и крупного модуля ( $m > 1,5$  мм) является то, что РТС самостоятельно не заполняет впадину между зубьями. Это связано со стремлением магнитного потока осуществить свое прохождение по энергетически выгодному участку магнитной цепи, концентрируясь на продольных кромках зубьев. Главной задачей в этом случае является реализация заполнения частицами ФАП впадин зубчатого колеса.

При проведении МАО зубчатых колес ( $m = 2,5$  мм), сталь 18ХГТ, 62–64 HRC выявлено, что на разных сторонах зуба значения шероховатости не равномерны, от вершины к ножке зуба шероховатость увеличивается [127]. Обусловлено это тем, что в процессе обработки осуществлялось движение зубчатого колеса только против часовой стрелки, что способствовало более сильному прижатию ФАП к обрабатываемой левой стороне зуба.

Цель настоящей работы – исследование процесса МАО эвольвентных поверхностей, учитывая режим кинематического состояния РТС, поскольку знание распределения РТС в рабочей зоне при МАО позволит осуществить прогнозирование процесса финишной обработки зубчатых колес.

РТС можно представить как пористую среду, состоящую из частиц порошка и пор, в которых протекает СОТС. С технологической точки зрения подача СОТС и течение ее в зоне обработки представляет собой организованный поток веществ. Основными характеристиками технологии подачи и движения СОТС в рабочем зазоре являются: тип потоков, способ обеспечения требуемого уровня турбулентности (ламинарности), числовые характеристики потоков [128]. При МАО тип потока СОТС различен в начале его формирования и в зоне обработки (при выходе СОТС из сопла – движение жидкости ламинарно, а при контакте с вращающейся деталью и инструментом поток жидкости турбулентен). Тип потока СОТС в зоне обработки оказывает существенное влияние на эффективность его функционального действия. С повышением турбулентности потока усиливается охлаждающее, моющее действия, а при ламинаризации – смазочное и проникающее действия.

Величиной, определяющей изменение типа потока, является число Рейнольдса ( $Re$ ), а устойчивость течений – число Стюарта ( $N$ ):

$$Re = \frac{w_0 R}{\nu}; N = \frac{\sigma B^2 R}{\rho w_0}, \quad (4.57)$$

где  $w_0$  – скорость потока жидкости, м/с;  $R$  – радиус канала, мм;  $\nu$  – кинематическая вязкость, сСт;  $\sigma$  – электрическая проводимость, См;  $B$  – магнитная индукция, Т;  $\rho$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>.

Обтекание паза зубчатого колеса при наложении магнитного поля в зоне обработки рассматривается на основе уравнения (4.57) [129], которое численно рассчитывалось при помощи метода матричной прогонки для уравнения четвертого порядка

$$A(\psi) \equiv \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi + \frac{D(\psi, \nabla^2 \psi)}{D(x, y)} - N \left( \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi = 0. \quad (4.58)$$

где  $A$  – оператор перехода от функции внешнего воздействия к функции отклика;  $\psi$  – функция возмущения потока;  $D$  – оператор дифференцирования потока;  $\alpha$  – угол между направлением магнитного поля, град;  $x, y$  – координаты, м.

Уравнение (4.58) заменяется нестационарным уравнением

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = L(\psi), \quad (4.59)$$

где  $L$  – оператор перехода от функции изменения возмущения потока по времени  $t$ , и решение стационарной задачи рассматривается как предел при  $t \rightarrow \infty$  решения нестационарной задачи.

Уравнение (4.59) заменяется неявным разностным уравнением с порядком аппроксимации  $O(h^2)$ \*,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2 \psi^{n+1} - \nabla^2 \psi^n}{\tau} = & \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi^{n+1} + \gamma \frac{(\psi^n, \nabla^2 \psi^{n+1})}{D(x, y)} + \\ & + (1 - \gamma) \frac{D(\psi^{n+1}, \nabla^2 \psi^n)}{D(x, y)} - N \left( \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi^n = L \psi^n; \\ & (0 < \gamma \leq 1), \end{aligned}$$

где  $\gamma$  – граничное условие;  $n$  – целые положительные числа.

Модель обтекания паза зубчатого колеса имеет следующий вид (рисунок 4.11). Из условия симметрии на  $S_0$

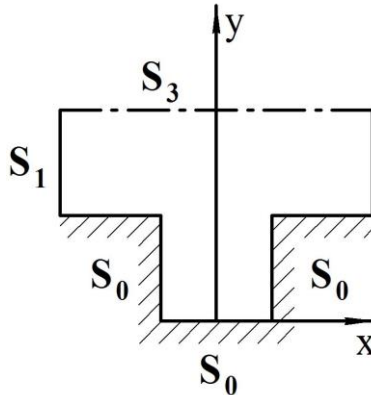
$$\psi = 1; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0;$$

на  $S_1$  и  $S_2$  – условия периодичности:

$$\psi_1 = \psi_2; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x};$$

на  $S_0$  – условие совмещения:

$$\psi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$



**Рисунок 4.11. – Модель обтекания паза зубчатого колеса**

При задании начального условия использовался профиль Гартмана, отнесенный к наименьшей ширине канала. Для зазора зуба зубчатого колеса в начальный момент принималось  $\psi = 0$ .

Расчет производился при различных значениях  $Re$  и  $N$ , при различных отношениях размеров выступа к ширине канала и при различной ориентации магнитного поля [129].

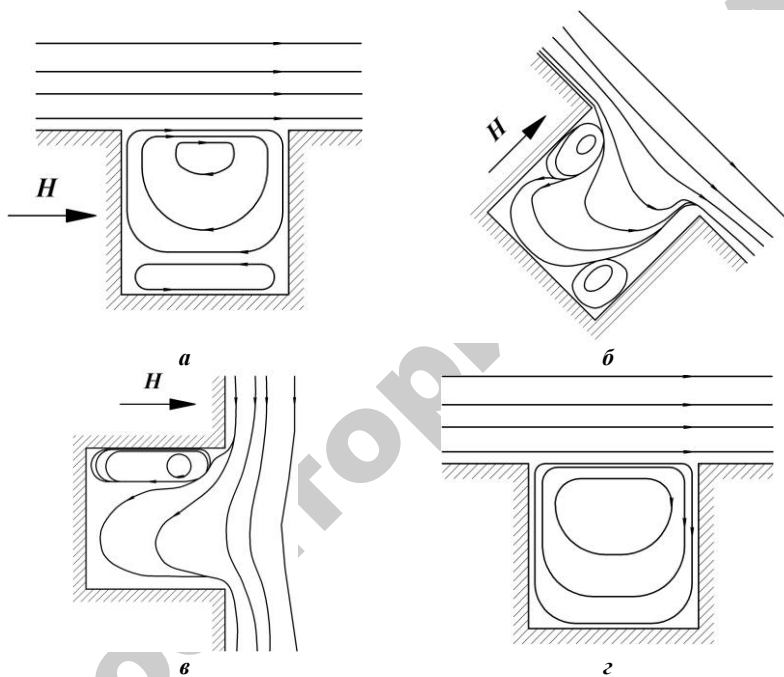
На рисунке 4.12 приведены линии потока СОТС для различных случаев положения пазов при обработке зубчатого колеса (рисунок 4.13) при наложении магнитного поля. При наложении поперечного магнитного поля (область I, рисунок 4.12) зона вихря резко сокращается (рисунок 4.12, а) и течение стремится к безотрывному. При  $Re = 50$  и  $N = 12$  отрыв потока, т. е. вихрь, при течении в поперечном поле не обнаруживается [130].

Совершенно иная картина наблюдается в продольном магнитном поле (область III, рисунок 4.12). В этом случае вблизи дна образуется еще один вихрь с противоположным направлением



(рисунок 4.12, в). По мере возрастания поля размер этого вихря возрастает, и при  $Re = 50$  и  $N = 50$  этот вихрь занимает около половины паза.

Своеобразная картина течения получается, когда магнитное поле наклонено к оси паза под некоторым углом (область II, рисунок 4.12). Течение в пазу как бы ориентируется вдоль поля (рисунок 4.12 б). Наблюдается также тенденция к безотрывности течения, хотя в правом углу образуется второй небольшой вихрь.



*a* – область I (рисунок 4.13); *б* – область II (рисунок 4.13);  
*в* – область III (рисунок 4.13); *з* – без магнитного поля

**Рисунок 4.12. – Линии тока СОТС при обтекании паза зубчатого колеса**

На основании вышеизложенного можно отметить, что для улучшения качества поверхности зубчатых колес при МАО целесообразно применять реверсивное движение детали, по несколько раз меняя направление движения. Полученные расчеты показывают, что градиент давления, образуемый магнитной индукцией

в зоне паза зубчатого колеса и определяемый давлением и типом потоков СОТС, направлен по ходу вращения обрабатываемой детали.

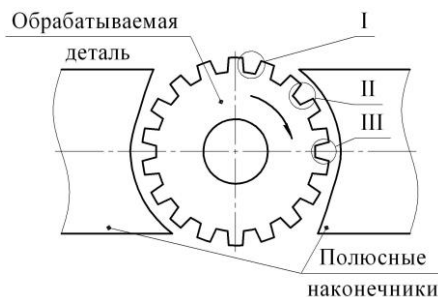
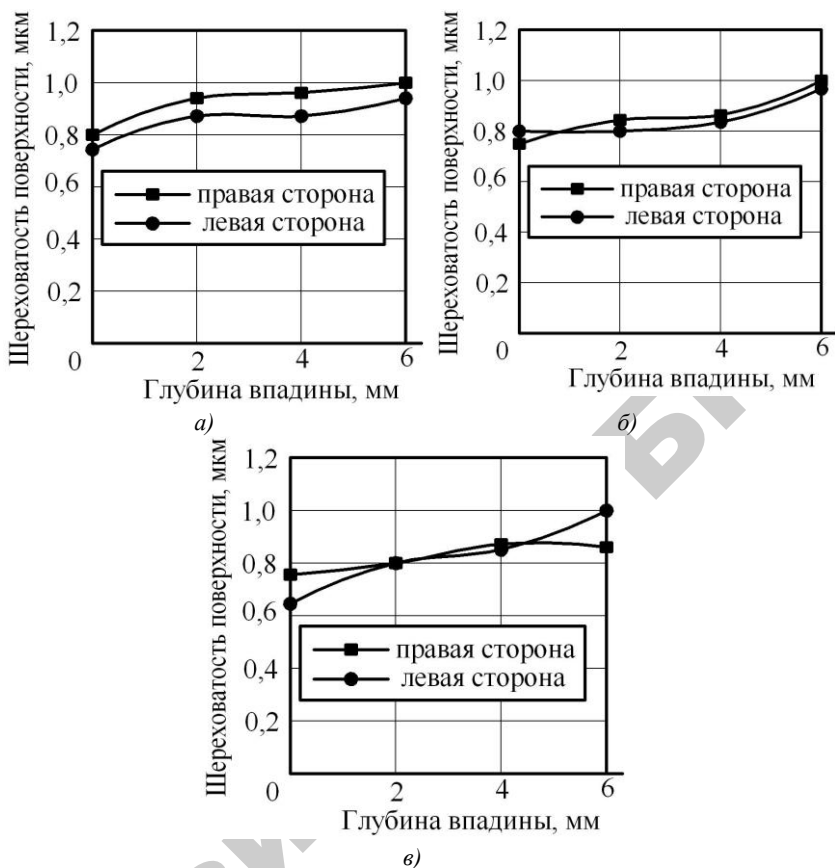


Рисунок 4.13. – Схема МАО зубчатого колеса

С целью проверки теоретических расчетов были проведены экспериментальные исследования по МАО зубчатого колеса ( $m = 2,5$  мм), сталь 18ХГТ, 62–64 HRC в количестве 9 шт. Режимы обработки: частота вращения детали –  $n = 12,5$  мин<sup>-1</sup>; амплитуда осцилляции –  $A = 2$  мм; скорость осцилляции –  $V_0 = 0,1$  м/с; зазор в рабочей зоне обработки –  $\delta = 1$  мм; объем подаваемого порошка –  $V_{\text{пор}} = 3,32 \cdot 10^{-3}$  дм<sup>3</sup>/с; магнитная индукция –  $B = 1$  Т; время обработки  $t = 2$  мин. Вращение – по часовой стрелке и против нее. ФАП – FeTiC ТУ 6-09-03-483-81; размер частиц –  $\Delta = 100/160$  мкм; СОТС – СинМА-1 5 % водный раствор. Измерение шероховатости производилось на профилографе-профилометре мод. 252 «Калибр».

Обработанные зубчатые колеса были разделены на 3 партии, каждая из которых обрабатывалась по часовой стрелке на 10 с дольше предыдущей. Шероховатость эвольвентной поверхности после МАО измеряли вдоль рабочих поверхностей в четырех точках. Результаты исследований представлены на рисунке 4.14.

Таким образом, для получения при МАО одинакового значения шероховатости с двух сторон эвольвентной поверхности зуба целесообразно использовать реверсивное вращение детали, обеспечивающее равномерное распределение РТС на рабочие поверхности зуба. Цикл обработки детали необходимо выполнять 2 мин в одну сторону и 30 с – в обратную.



*a* – время обработки 120 с против часовой стрелки, 10 с по часовой;

*б* – время обработки 120 с против часовой стрелки, 20 с по часовой;

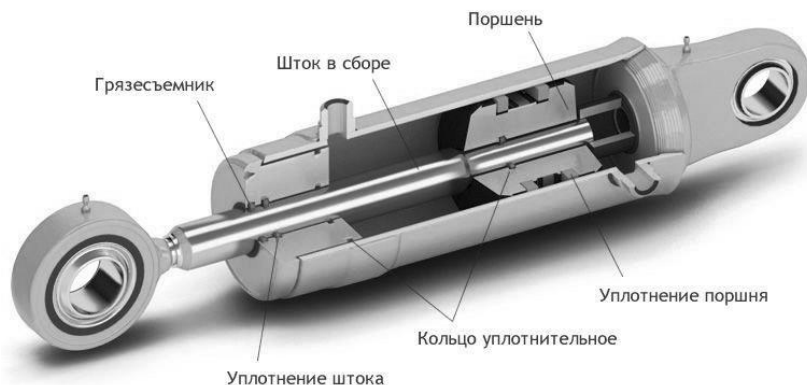
*в* – время обработки 120 с против часовой стрелки, 30 с по часовой.

**Рисунок 4.14. - Зависимости изменения шероховатости по эвольвенте с разных сторон зуба после MAO**

#### **4.6. Технология магнитно-абразивной обработки штока гидроцилиндра**

Гидроцилиндры широко применяют в гидросистемах как источники привода рабочих органов мобильных машин и исполнительных механизмов промышленного оборудования. В гидросистеме с одним, реже – с двумя насосами может быть

установлено до 6–10 гидроцилиндров, а в некоторых случаях – в два или даже в три раза больше. По функциональным признакам гидроцилиндры – это объемные гидродвигатели, предназначенные для преобразования энергии потока рабочей жидкости в механическую энергию выходного звена с возвратно-поступательным движением. Причем подвижным звеном может выступать как шток, так и корпус (гильза) гидроцилиндра (рисунок 4.15) [131].



**Рисунок 4.15. – Устройство гидроцилиндра с подвижным штоком**

Без специального технологического оборудования для чистовой расточки и раскатки внутренней поверхности гильз, шлифования и полирования штоков, обеспечивающего параметры шероховатости по ГОСТ 2789–73 рабочих уплотняемых поверхностей штоков и гильз гидроцилиндров, а также хромирования наружной поверхности штоков путем электролитического нанесения пленки толщиной 20–30 мкм невозможно изготовить коррозионно- и износостойкие штоки. Высота неровностей наружной рабочей поверхности штока после хромирования и полирования должна быть не более  $Ra = 0,16$  мкм, рабочей поверхности гильзы гидроцилиндра –  $Ra = 0,32$  мкм по ГОСТ 2789–73 [132].

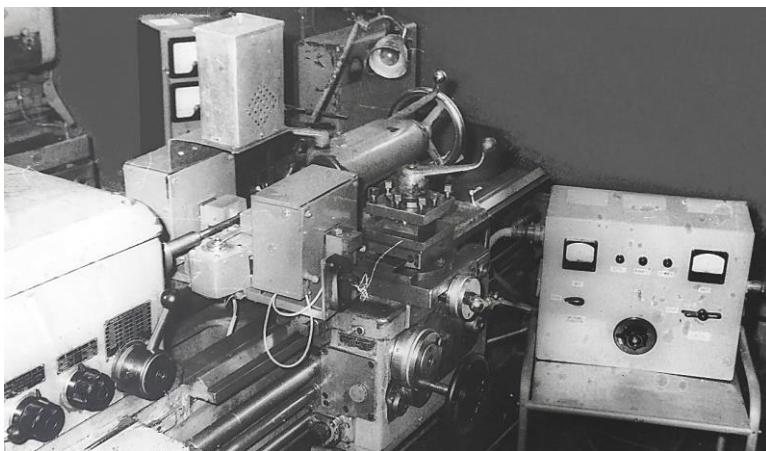
Адекватность устанавливаемых закономерностей изменения параметров трибологического состояния исследуемых сопряжений, закономерностям, реально отображающим протекающие в них процессы, но уже в составе механизмов и систем при эксплуатационных режимах работы, определяется полнотой физического моделирования [133].

Получение высокого параметра шероховатости хромированных поверхностей при достаточно большой производительности и точности геометрических параметров представляют серьезную проблему, которая решается разными путями. В условиях крупносерийного и массового производства получение наружных цилиндрических поверхностей с шероховатостью  $Ra = 0,4-0,1$  мкм обеспечивается на станках для суперфиниширования. Однако относительно низкая производительность и высокая стоимость абразивного инструмента, в том числе и алмазного, являются недостатками процесса суперфиниширования и ограничивает его применение. Это приводит к необходимости поиска новых методов финишной обработки штоков гидроцилиндров и их использования для обработки как хромированных поверхностей, так и поверхностей под хромирование.

Одним из новых методов финишной обработки деталей машин является магнитно-абразивная обработка (МАО) [69, 89]. Метод позволяет получать на закаленных цилиндрических наружных поверхностях шероховатость  $Ra = 0,05-0,63$  мкм с высокой производительностью. С целью установления возможности финишной обработки штоков гидроцилиндров методом МАО была проведена серия опытно-экспериментальных работ.

Период установившегося изнашивания и время наступления аварийного в высокой степени зависит от свойств поверхностного слоя, образовавшегося в период приработки. Поэтому процесс формирования микрорельефа и структуры этого слоя, а также его зависимость от вида финишной обработки определяет уровень контактной прочности и несущей способности узлов трения. В связи с вышеизложенным, одним из основных путей достижения такого условия является технологическое обеспечение оптимальных параметров качества поверхностного слоя.

В качестве оборудования применялся станок СФТ 2.150.00.00.000 для магнитно-абразивной обработки (рисунок 4.16).



**Рисунок 4.16. – Общий вид станка СФТ 2.150.00.00.000**

Шероховатость образцов измерялась до и после обработки в трех разных сечениях на профилографе-профилометре модели 252 Калибр. В каждом сечении делалось по 4 замера. По результатам всех замеров каждого образца находилось среднеарифметическое значение шероховатости его поверхности.

Образцами служили штоки гидроцилиндров, изготовленные из стали 20Х ГОСТ 4543–71. Образцы подвергались термообработке до 61–64 HRC, шлифованию до получения шероховатости поверхности  $Ra = 0,8$  мкм, подготовкой под хромирование методом МАО и последующим хромированием (толщина слоя хрома 0,02–0,03 мм). Шероховатость поверхности образцов после хромирования составила  $Ra = 0,32–0,63$  мкм.

Испытания проводились на машине трения 2070 СМТ-1 в условиях трения качения [134]. Параметры и режимы при шлифовании: скорость вращения детали,  $V_d = 50$  м/мин; скорость вращения круга,  $V_k = 20$  м/с; продольная подача,  $S_{пр} = 0,5$  м/мин; круг алмазный АСВ 125/100 МП 1; при МАО: величина магнитной индукции,  $B = 0,9$  Т; скорость резания,  $V_p = 1$  м/с; скорость осцилляции,  $V_o = 0,2$  м/с; амплитуда осцилляции,

$A = 1$  мм; величина рабочего зазора,  $\delta = 1$  мм; ферроабразивный порошок – Ж15КТ ТУ 6-09-483–81; смазочно-охлаждающие технологические средства: при шлифовании – 3 % водный раствор «Укринол-1», при МАО – 2 % водный раствор СинМА – 1 ТУ 38.5901176-91.

Материал контртела – бронза. Обрабатываемый материал – сталь 20Х ГОСТ 4543–71, 56–62 НРС. Измерения микротвердости осуществляли методом восстановленного отпечатка. Глубина изменения микротвердости  $H_u$  оценивалась по методу косого среза. Микротвердость поверхности используемых образцов определяли на приборе ПМТ-3 согласно ГОСТ 9450–76 при нагрузке 0,49 Н. Сами наклонные срезы изготавливались на плоскошлифовальном станке ЗГ71 с магнитной плитой при интенсивном охлаждении эмульсией «Укринол-1» (3 % водный раствор).

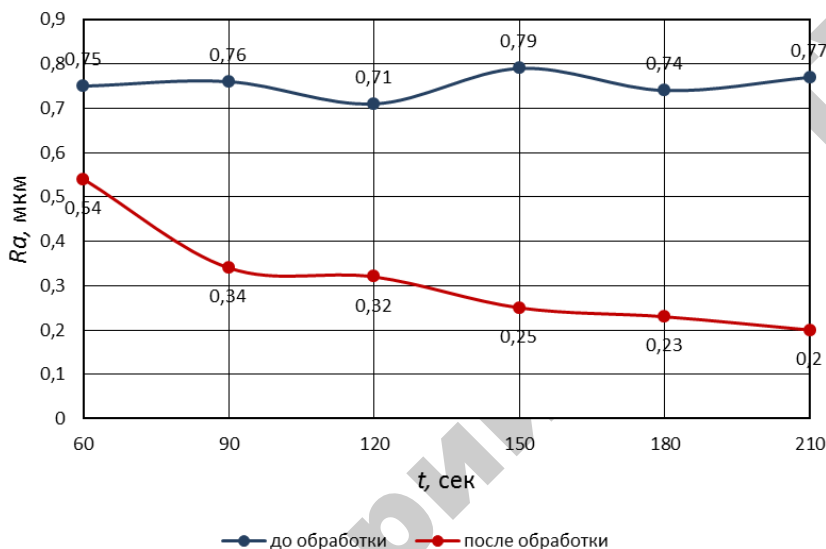
Измерение шероховатости  $Ra$  образцов до и после обработки осуществлялось на профилометре мод. 252 Калибр. Исследование остаточных напряжений 1-го рода  $\sigma$  осуществлялось методом Н. Н. Давиденкова. Удаление слоев металла производилось электрохимическим методом со скоростью 0,05 мкм/с. Вычисление величин напряжений осуществлялось путем уточнений, внесенных М. А. Бабичевым и Л. А. Гликманом. Остаточные напряжения исследовались на глубине 5 мкм [135].

Продукты износа после испытаний с образцов удаляли 10 % раствором лимоннокислого аммония, нейтрализованного аммиаком. Испытания проводились при отсутствии доступа воздуха.

Практическое использование метода МАО штоков гидроцилиндров заключалось в исследовании влияния времени обработки на шероховатость их поверхности до и после хромирования. Остальные параметры оставались неизменными в течение обработки всей партии образцов. Результаты исследований представлены на рисунке 4.17.

Проведенные исследования МАО хромированных штоков гидроцилиндров показали, что шероховатость поверхности уменьшается на 54 % при изменении времени обработки от 60 до 150 с. Дальнейшее увеличение времени обработки приводит к падению интенсивности съема материала, в результате чего изменение шероховатости при времени обработки от 60 до 210 с

равно 61 %. Применение метода MAO для штоков гидроцилиндров до их хромирования обеспечило за 90 с обработки снижение шероховатости с  $Ra = 0,8$  до  $Ra = 0,2$  мкм.



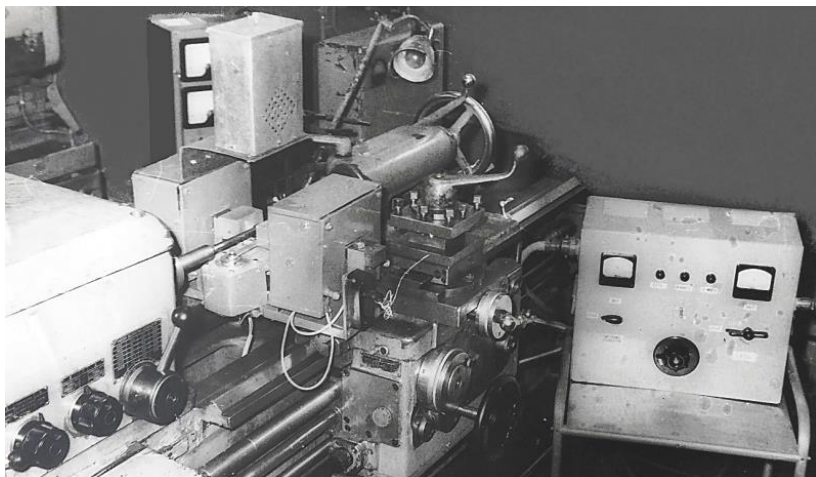
**Рисунок 4.17. – Зависимость шероховатости поверхностей  $Ra$  хромированных штоков гидроцилиндров от времени обработки**

Профилограммы шероховатости поверхности штоков гидроцилиндров после шлифования и MAO представлены на рисунке 4.18.

По результатам испытаний на износостойкость построены графики изменения момента трения и температуры в зоне контакта на пути трения 15000 м, что соответствует 1,5 ч работы машины трения при угловой скорости  $1500 \text{ мин}^{-1}$  (рисунок 4.19).

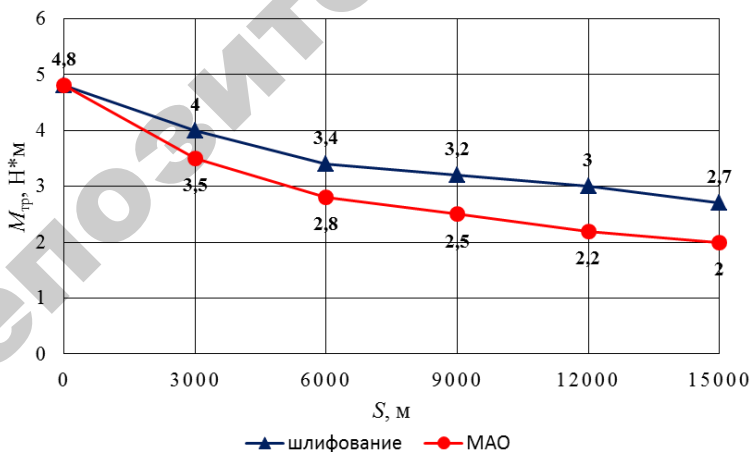
По рисунку 4.19 можно установить период приработки и период, соответствующий установившемуся износу. На пути трения от 0 до 6000 м кривые отличаются на 15 %. Это свидетельствует о том, что пары трения после шлифования и MAO имеют различный период приработки. На пути трения от 6000 до 15000 м, соответствующему установившемуся износу, момент трения образцов после MAO, меньше, чем момент трения образцов после шлифования в среднем на  $0,7 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .





- 1 – шлифование,  $Ra=0,8$  мкм,  $VY = 20 \times 10^3$ ,  $ГУ = 800$ ;  
 2 – магнитно-абразивная обработка,  $Ra=0,4$  мкм,  $VY = 100 \times 10^3$ ,  $ГУ = 800$ ;  
 3 – магнитно-абразивная обработка,  $Ra=0,2$  мкм,  $VY = 100 \times 10^3$ ,  $ГУ = 800$ ;  
 4 – магнитно-абразивная обработка,  $Ra=0,1$  мкм,  $VY = 100 \times 10^3$ ,  $ГУ = 800$

**Рисунок 4.18. Профилограммы исходной и обработанной поверхности штоков гидроцилиндров различными методами финишной обработки**



**Рисунок 4.19. – График изменения момента трения ( $M_{тр}$ ) на пути трения (S) 15000 м**

В результате проведенных экспериментальных исследований установлено, что использование метода MAO для штоков гидроцилиндров до и после хромирования обеспечивает высокое качество обработки для хромированных с  $Ra$  0,32–0,63 мкм до  $Ra$  0,2 мкм и до хромирования с  $Ra$  0,8 до  $Ra$  0,2 мкм.

В результате проведенных испытаний на износостойкость штоков гидроцилиндров методами MAO и шлифования установлено, что применение MAO обеспечивает уменьшение момента трения в среднем на 0,7 Н\*м, температуры – на 8 °С и коэффициента трения – на 15–20 %. Получение данных результатов объясняется более благоприятным микрорельефом и меньшей структурной неоднородностью поверхности штоков гидроцилиндров после MAO по сравнению с шлифованием.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Традиционные подходы к определению и прогнозированию качества машиностроительной продукции предусматривают использование принципа суперпозиции, согласно которому каждый из технологических факторов действует независимо от других, а результат их совместного действия определяется суммой. Однако, при обработке сложнопрофильных поверхностей применение принципа суперпозиции, по своей сути, сводит многосвязные взаимодействия, осуществляемые в технологических системах, к односвязным, игнорируя взаимное влияние факторов. Рост требований к качеству изготовления деталей машин делает методы формирования качества, основанные на принципе суперпозиции, малоприменимыми, так как эффект взаимного влияния факторов соизмерим с результатами их прямого воздействия. Процесс формирования свойств изделий должен рассматриваться как совокупность взаимодействующих процессов изменения и сохранения свойств.

В монографии приведены результаты исследований магнитно-абразивной обработки сложнопрофильных поверхностей по выявлению новых эффектов при кооперативном взаимодействии различных потоков вещества и энергии. Структуры получаемых после МАО поверхностей являются диссипативными самоорганизующимися. Комплексное рассмотрение компонентов рабочей технологической среды на предмет рационального подбора материалов ферроабразивных порошков, смазочно-охлаждающих технологических средств и топографии магнитного поля позволило разработать методологию технологического обеспечения обработки сложнопрофильных поверхностей, что позволяет управлять процессами формирования геометрических и физико-механических показателей качества обрабатываемых поверхностей.

В направлении повышения физико-механических и точностных показателей качества сложнопрофильных поверхностей получены новые научные результаты исследований активации процесса магнитно-абразивной обработки.

Исследован механизм комплексного воздействия компонентов рабочей технологической среды, устанавливающий влияние

абразивного, физико-химического и магнитного факторов, что позволило обеспечить повышение микротвердости поверхностного слоя.

Предложен и теоретически обоснован метод создания в рабочем зазоре топографии магнитного поля, обеспечивающей необходимое давление ферроабразивной «щетки» в труднодоступных и «теневых» областях сложнопрофильных поверхностей, что позволяет уменьшить шероховатость с  $Ra = 0,32-0,16$  мкм до  $Ra = 0,01-0,02$  мкм.

Полученные результаты исследований позволяют на этапе проектирования технологических процессов прогнозировать показатели качества сложнопрофильных поверхностей и назначать соответствующие величины технологических параметров процесса магнитно-абразивной обработки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хомич, Н. С. Магнитно-абразивная обработка изделий / Н. С. Хомич. – Минск : БНТУ, 2006. – 265 с.
2. Ящерицын, П. И. Шлифование металлов / П. И. Ящерицын, Е. А. Жолнерович. – Минск : Беларусь, 1970. – 483 с.
3. Эфрос, М. Г. Современные абразивные инструменты / М. Г. Эфрос, В. С. Миронюк / под ред. З. И. Кременя. – 3-е изд. – Л. : Машиностроение ; Ленингр. отд-ние, 1987. – 158 с.
4. Кремень, З. И. Технология шлифования / З. И. Кремень, В. Г. Юрьев, А. Ф. Бабошкин ; под общ. ред. З. И. Кременя. – СПб. : Политехника, 2015. – 424 с.
5. Кремень, З. И. Хонингование и суперфиниширование деталей / З. И. Кремень, И. Х. Стратиевский ; под ред. д-ра техн. наук Л. Н. Филимонова. – 3-е изд. – Л. : Машиностроение, 1988. – 137 с.
6. Рьжов, Э. В. Алмазное суперфиниширование с подводом СОЖ через брусок под давлением и управление параметрами шероховатости / Э. В. Рьжов, В. Т. Ершов // Механика и физика контактного взаимодействия : межвуз. сб. – Калинин : КГУ, 1979. – С. 126.
7. Макієнко, М. І. Загальний курс слюсарної справи : підручник для проф.-техн. училищ / М. І. Макієнко ; пер. з рос. В. К. Сидоренко. – Київ : Вища шк., 1994. – 312 с.
8. Бабичев, А. П. Наладка и эксплуатация станков для вибрационной обработки / А. П. Бабичев [и др.]. – М. : Машиностроение, 1988. – 65 с.
9. Трилисский, В. О. Повышение эффективности отделочно-зачистных операций путем создания теории оборудования и технологии объемной центробежно-ротационной обработки деталей : автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.02.08 / В. О. Трилисский ; ЭНИМС. – М., 1992. – 37 с.
10. Толстов, Б. М. Состояние и развитие струйно-абразивной обработки / Б. М. Толстов, Л. А. Пикулина. – М. : ЦИНТИХИМНЕФТЕМАШ, 1990. – 38 с.
11. Кремень, З. И. Турбоабразивная обработка деталей – новый способ финишной обработки / З. И. Кремень, М. Л. Масарский // Вестник машиностроения. – 1977. – № 28. – С. 68–70.

12. Бабичев, А. П. Основы вибрационной технологии / А. П. Бабичев, И. А. Бабичев. – Ростов-на/Д. : Издательский центр ДГТУ, 1998. – 624 с.

13. Ющенко, А. В. Исследование процесса съема при абразивной галтовке / А. В. Ющенко, М. Б. Флек // Вестник ДГТУ. – 2013. – № 3–4 (72–73). – С. 125–132.

14. Лурье, Г. Б. Шлифование деталей в барабанах с планетарным вращением / Г. Б. Лурье, А. Н. Синотин // Вестник машиностроения. – 1974. – № 8. – С. 38–40.

15. Абразивная и алмазная обработка материалов : справочник / под ред. А. Н. Резникова. – М. : Машиностроение, 1977. – 391 с.

16. Подвигин, Б. С. Механизированная зачистка деталей в центробежно-планетарной установке / Б. С. Подвигин, В. В. Розенблаг // Вестник машиностроения. – 1980. – № 4. – С. 65–66.

17. Усанкин, И. Г. Шероховатость поверхностей деталей при полировании шарами в планетарных центробежных установках / И. Г. Усанкин // Вестник машиностроения. – 1980. – № 9. – С. 57–58.

18. Фролов, А. И. Установка УОР-2 с планетарным вращением барабанов / А. И. Фролов // Информ. листок № 267–76 / Ярослав. ЦНТИ. – Ярославль, 1976. – 3 с.

19. Иванова, В. Ф. Установка для центробежно-абразивной обработки деталей / В. Ф. Иванова // Информ. листок № 532–75 / Свердлов. ЦНТИ. – Свердловск, 1975. – 4 с.

20. Трилисский, В. О. Шпиндельная центробежно-ротационная установка для отделочно-зачистной обработки деталей / В. О. Трилисский [и др.] // Алмазная и абразивная обработка деталей машин и инструмента : межвуз. сб. науч. тр. / Пенз. политехн. ин-т. – Пенза, 1981. – Вып. 10. – С. 63–67.

21. Бабичев, А. П. Вибрационная обработка деталей / А. П. Бабичев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1974. – 136 с.

22. Ящерицын, П. И. Финишная обработка деталей уплотненным потоком свободного абразива / П. И. Ящерицын, А. Н. Мартынов, А. Д. Гридин. – М. : Наука и техника, 1978. – 244 с.

23. Мартынов, А. Н. Основы метода обработки деталей свободным абразивом, уплотненным инерционными силами / А. Н. Мартынов – Саратов : Изд-во СГУ, 1981. – 212 с.

24. Лурье, Г. Б. Шлифование абразивными лентами / Г. Б. Лурье – М. : Высшая школа, 1980 – 47 с.

25. Иванов, Ю. И. Определение составляющих тангенциальной суммарной силы при шлифовании алмазными лентами / Ю. И. Иванов, Н. В. Носов // Известия вузов. Машиностроение. – 1980. – № 10. – С. 127–131.

26. Барон, Ю. М. Технология абразивной обработки в магнитном поле / Ю. М. Барон. – Л. : Машиностроение, 1975. – 127 с.

27. Ящерицын, П. И. Технологические основы обработки изделий в магнитном поле / П. И. Ящерицын [и др.]. – Минск : Физико-технический институт, 1997. – 416 с.

28. Акулович, Л. М. Технология и оборудование магнитно-абразивной обработки металлических поверхностей различного профиля / Л. М. Акулович, Л. Е. Сергеев. – Минск : БГАТУ, 2013. – 369 с.

29. Акулович, Л. М. Ферроабразивные порошки для магнитно-абразивной обработки металлических поверхностей / Л. М. Акулович [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2015. – 284 с.

30. Григорович, В. К. Электронное строение и термодинамика сплавов железа / В. К. Григорович. – М. : Наука, 1970. – 290 с.

31. Наливка, Г. Д. Композиционные порошки на основе карбидов для магнитно-абразивной обработки / Г. Д. Наливка, П. С. Кислый // Магнитно-абразивные материалы и методы их испытаний : сб. науч. тр. / ИПМ АН УССР. – Киев : Ин-т проблем материаловедения АН УССР, 1980. – С. 34–42.

32. Билык, И. И. Получение магнитно-абразивных порошков с неравномерным распределением абразивной составляющей / И. И. Билык, А. Н. Степанчук // Магнитно-абразивные материалы и методы их испытаний. — Киев : Ин-т проблем материаловедения АН УССР, 1980. – С. 43–46.

33. Чернавский, П. А. Новое в магнитных методах исследования металланесенных катализаторов / П. А. Чернавский // Российский химический журнал. – 2002. – Т. XLVI. – № 3. – С. 19–30.

34. Хомич, Н. С. Работоспособность композиционных материалов при МАП / Н. С. Хомич, Г. Д. Наливка // Новые материалы испытаний и обработки материалов : сб. науч. тр. / ФТИ АН БССР. – Минск : Наука и техника, 1975. – С. 189–195.

35. Ваксер, Д. Б. Пути повышения производительности абразивного инструмента при шлифовании. – М. : Машиностроение, 1924. – 124 с.

36. Нетребко, В. П. Прочность шлифовальных кругов / В. П. Нетребко, А. Н. Коротков. – М. : Агентство Российской печати, 1923 – 104 с.

37. Opitz, H. Untersuchung der Eigenschaften von Schleifkörpern und ihr Verhalten im Schleifvorgang / H. Opitz, J. Peklenik, K. Brückner. – Köln und Opladen : West. Verlag, 1964. – 63 s.

38. Коротков, А. Н. Анализ формы абразивных зерен / А. Н. Коротков, В. Г. Баштанов // Вестник КузГТУ. – 2000. – № 5. – С. 54–60.

39. Коротков, А. Н. Эксплуатационные свойства абразивных материалов / А. Н. Коротков. – Красноярск : Изд. Красноярского ун-та, 1992 – 122 с.

40. Thormahlen, K. H. Einfluß der Kornform auf das Schleifverhalten von Kunststoffschleifscheiben / K. H. Thormahlen // Ind. Anz. – 1973. – № 108. – P. 267–271.

41. Гельперин, Н. И. Основы техники псевдооживления / Н. И. Гельперин, В. Г. Айнштейн, В. Б. Кваша. – М. : Химия, 1967. – 664 с.

42. Корчагина, О. А. Материаловедение: оценка качества строительных материалов : лаб. практ. / О. А. Корчагина, В. Г. Однолько. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 96 с.

43. Корчак, С. Н. Производительность процесса шлифования стальных деталей / С. Н. Корчак. – М. : Машиностроение, 1974. – 280 с.

44. Эльянов, В. Д. Прижоги при шлифовании / В. Д. Эльянов, В. Н. Куликов. – М. : НИИМАШ, 1974. – 63 с.

45. Энтелис, С. Г. Смазочно-охлаждающие технологические средства для обработки металлов резанием : справочник / С. Г. Энтелис [и др.] ; под ред. С. Г. Энтелиса, Э. М. Берлинера. – М. : Машиностроение, 1986. – 352 с.



46. Силин, С. С. Оптимизации технологии глубинного шлифования / С. С. Силин [и др.] ; ред. кол.: П. М. Орлов (пред.). – М. : Машиностроение, 1989. – 120 с.

47. Маслов, Е. Н. Теория шлифования материалов / Е. Н. Маслов. – М. : Машиностроение, 1974. – 320 с.

48. Александрова, М. Ю. Моделирование температурного поля на поверхности детали при наружном бесцентровом шлифовании / М. Ю. Александрова, С. А. Добрынин, Г. И. Фирсов // Вестник научно-технического развития. – 2008. – № 10 (14). – С. 46–53.

49. Киселев, С. Е. Научные основы и технология применения смазочно-охлаждающих технологических средств при механической обработке : сб. учеб.-исследов. лаборат. работ / С. Е. Киселев, В. Н. Ковальногов. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 57 с.

50. Способ магнитно-абразивной обработки : а. с. 878523 СССР МПК В 24 В 31 / 10 / Ф. Ю. Сакулевич [и др.] ; Физико-технический институт АН БССР. – № 2160620/08 ; заявл. 04.08.75 ; опубл. 07.11.81 // Открытия. Изобретения. – 1981. – № 41.

51. Костецкий, Б. И. Механохимические процессы при граничном трении / Б. И. Костецкий [и др.]. – М. : Наука, 1972. – 170 с.

52. Ящерицын, П. И. Теория резания / П. И. Ящерицын, Е. Э. Фельдштейн, М. А. Корниевич. – Минск : Новое знание, 2005. – 512 с.

53. Сакулевич, Ф. Ю. Основы магнитно-абразивной обработки / Ф. Ю. Сакулевич. – Минск : Наука и техника, 1981. – 326 с.

54. Гуляев, А. П. Металловедение : учебник для втузов / А. П. Гуляев. – 6-е изд., перераб. и доп. – М. : Металлургия, 1986. – 544 с.

55. Концентрат технологической жидкости для шлифования материалов: а. с. 1162866 СССР : МПК С 10 М 173 / 00 / М. П. Волков [и др.]. – №3738517/23-04 ; заявл. 09.01.84 ; опубл. 23.06.85 // Открытия. Изобретения. – 1985. – № 23.

56. Акулович, Л. М. Основы магнитно-абразивной обработки металлических поверхностей / Л. М. Акулович, Л. Е. Сергеев, В. Я. Лебедев. – Минск : БГАТУ, 2012. – 313 с.

57. Fox, M. Magnetic Abrasive Finishing of Rollers / M. Fox, K. Agrawal, T. Shinmura, R. Komanduri // CIRP Annals - Manufacturing Technology. – 1994. – Vol. 43, Is. 1. – P. 181–184.

58. Орлов, Ю. Г. Магнитно-абразивные материалы: Принципы создания и технологические процессы изготовления / Ю. Г. Орлов, Л. Р. Дудецкая, Л. Е. Сергеев // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 1997. – № 2. – С. 21–26.

59. Швидлер, М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред / М. И. Швидлер. – М. : Недра, 1985. – 288 с.

60. Исследование общих вопросов теории и технологии процесса магнитно-абразивной обработки : отчет о НИР / Акад. наук БССР, Физико-техн. ин-т ; рук. Ф. Ю. Сакулевич. – Минск, 1975. – 566 с.

61. Куршин, А. П. Гидравлическое сопротивление насыпных слоев при фильтрации жидкости / А. П. Куршин, Л. В. Гусева // Теплоэнергетика. – 1989. – № 9. – С. 51.

62. Крымский М. Д. Распределение уплотнения магнитно-абразивного порошка в рабочем зазоре станка // Магнитно-абразивные материалы и методы их испытаний : сб. науч. тр. / ИПМ АН УССР. – Киев : Ин-т проблем материаловедения АН УССР. – 1980. – С. 92–97.

63. Крымский, Д. М. Методика оценки абразивной способности порошковых магнитно-абразивных материалов / Д. М. Крымский // Магнитно-абразивные материалы и методы их испытаний : сб. науч. тр. / ИПМ АН УССР. – Киев : Ин-т проблем материаловедения АН УССР. – 1980. – С. 84–92.

64. Акулович, Л. М. Магнитно-абразивная обработка сложнопрофильных поверхностей тонкостенных деталей / Л. М. Акулович [и др.] // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2014. – № 3. – С. 57–62.

65. Шнайдер, А. В. Течение двухфазных смесей в пористой среде при волновом воздействии : автореф. ... дис. канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / А. В. Шнайдер ; Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения Рос. акад. наук. – Тюмень, 2006. – 16 с.

66. Тронов, В. П. Механизация образования смоло-парафиновых отложений и борьба с ними / В. П. Тронов. – М. : Недра, 1970. – 192 с.

67. Хайдаров, Ф. Р. Повышение долговечности промышленных трубопроводных систем путем регулирования свойств перекачиваемых жидкостей методами магнитной обработки : дис. ... канд. техн. наук : 25.00.19 ; 25.00.17 / Ф. Р. Хайдаров. – Казань, 2002. – 140 с.

68. Ламмеранер, И. Вихревые токи / И. Ламмеранер, Ш. Штафль. – М. ; Л. : Энергия, 1967. – 208 с.

69. Коновалов, Е. Г. Чистовая обработка деталей в магнитном поле ферромагнитными порошками / Е. Г. Коновалов, Г. С. Шулев. – Минск : Наука и техника, 1967. – 125 с.

70. Барон, Ю. М. Магнитно-абразивная и магнитная обработка изделий и режущих инструментов / Ю. М. Барон. – Л. : Машиностроение, 1986. – 172 с.

71. Барон, Ю. М. Физические основы работы магнитно-абразивных материалов / Ю. М. Барон // Магнитно-абразивные материалы и методы их испытания. – Киев : ИПМ АН УССР, 1980. – С. 10–17.

72. Жданович, В. И. Исследование процесса магнитно-абразивной обработки наружных цилиндрических поверхностей : автореф. ... дис. канд. техн. наук / В. И. Жданович ; Физико-техн. ин-т АН БССР. – Минск, 1974. – 23 с.

73. Рыжов, Э. В. Влияние методов обработки на эксплуатационную технологичность изделий / Э. В. Рыжов // Проблемы технологичности конструкций изделий машиностроения : тезисы докладов Всесоюз. науч.-техн. конф. – Брянск : Изд-во БИТМ, 1974. – Вып. 1. – С. 48.

74. Богомолов, Н. И. Основные процессы при взаимодействии абразива и металла : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.03.01 / Н. И. Богомолов ; Киевский ин-т инженеров гражд. авиации. – Киев, 1977. – 46 с.

75. Богомолов, Н. И. О работе трения в абразивных процессах / Н. И. Богомолов // Труды ВНИИМАШ. – Л. : Машиностроение, 1965. – № 1. – С. 112–117.

76. Матюха, П. Г. О погрешности метода профилографирования при исследовании рельефа алмазных кругов / П. Г. Матюха // Сверхтвердые материалы. – 1986. – № 2. – С. 42–44.

77. Курдюков, В. И. Отыскание закона плотности распределения зерен поверхностного слоя абразивного круга / В. И. Курдюков, Н. В. Агапова // Процессы абразивной обработки, абразивные инструменты и материалы. Шлифабразив–2001, г. Волжский, 10–16 сент. 2001 г. : сб. статей Междунар. науч.-техн. конф. / Волжский инж.-строит. ин-т филиал ВолгГАСА. – Волжский, 2001. – С. 26–29.

78. Козлов, А. М. Формирование микрорельефа при обработке абразивным инструментом / А. М. Козлов, В. В. Ефремов // Известия вузов. Машиностроение. – 2004. – № 1. – С. 59–64.

79. Козлов, А. М. Определение параметров рабочей поверхности абразивного инструмента на основе моделирования / А. М. Козлов // Известия вузов. Машиностроение. – 2005. – № 1. – С. 51–56.

80. Крагельский, И. В. Трение и износ / И. В. Крагельский. – М. : Машиностроение, 1968. – 480 с.

81. Кашеев, В. Н. Абразивное разрушение твердых тел / В. Н. Кашеев. – М. : Наука, 1970. – 248 с.

82. Друянов, Б. А. О движении цилиндрического индентора по поверхности полупространства / Б. А. Друянов / Теория трения и износа : сб. науч. тр. – М. : Наука, 1965. – С. 62–67.

83. Друянов, Б. А. Теория технологической пластичности / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. – М. : Машиностроение, 1990. – 272 с.

84. Худобин, Л. В. О механизме формирования и разрушения узлов схватывания металла с абразивными зёрнами при шлифовании / Л. В. Худобин, Ю. В. Полянсков // Физико-химическая механика материалов. – 1973. – Т. 9. – № 3. – С. 70–75.

85. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров [и др.]. – 2-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2000. – 560 с.

86. Шаврин, О. И. Многокритериальный подход в технологии шлифования титановых сплавов / О. И. Шаврин, А. В. Репко. – Екатеринбург : Изд-во Ин-та экономики УРО РАН, 2007. – 199 с.

87. Вернигорова, В. Н. Коррозия строительных материалов : монография / В. Н. Вернигорова [и др.] – М. : Палеотип, 2007. – 176 с.

88. Терентьев, В. Ф. Теория и практика повышения надежности и работоспособности конструкционных металлических материалов : учеб. пособие / В. Ф. Терентьев, А. Г. Колмаков, Ю. А. Курганова. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 268 с.

89. Карпенко, Г. В. Прочность стали в коррозионной среде / Г. В. Карпенко. – М. ; Киев : Машгиз, 1963. – 188 с.

90. Акулович, Л. М. Основы профилирования режущего инструмента при магнитно-абразивной обработке / Л. М. Акулович, Л. Е. Сергеев. – Минск : БГАТУ, 2014. – 280 с.

91. Кузнецов, С. А. Разработка смазочных материалов на основе оксигилированных биоразлагаемых олигомеров и многофункциональных гетероциклических присадок : дис. ... канд. техн. наук : 02.00.13 / С. А. Кузнецов. – Чебоксары, 2012. – 124 с.

92. Ротермель, Г. В. Производство смазочных материалов / Г. В. Ротермель, Д. А. Десятков, М. В. Механошина. – М. : Изд. дом «Городец», 2005. – 57 с.

93. Абдуллин, И. Г. Техника эксперимента в химическом сопротивлении металлов : уч. пособие / И. Г. Абдуллин, В. И. Агапчев, С. Н. Давыдов. – Уфа : Изд-во УНИ, 1985 – 100 с.

94. Деведжийска, Е. Влияние на магнитного поля в ърху отделяюща се газ в процеса на електрохимическо разтваряне на металите/ Е. Деведжийска // Технология на машиностроенето : науч.-техн. сб. – София : Централен машиностроителен ин-т, 1979. – Свитък № 5. – С. 57–60.

95. Саакян, Л. С. Повышение коррозионной стойкости нефтегазопромыслового оборудования / Л. С. Саакян, А. П. Ефремов, И. А. Соболева. – М. : Недра, 1988. – 211 с.

96. Рыжов, Э. В. Качество поверхности при алмазно-абразивной обработке / Э. В. Рыжов [и др.]. – Киев : Наук. думка, 1979. – 244 с.

97. Бабичев, А. П. Физические величины : справочник / А. П. Бабичев [и др.] ; под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Михайлова. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

98. Осипов, А. П. Исследование влияния касательных напряжений сдвига на процесс износа абразивного инструмента / А. П. Осипов, В. В. Федотов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. – 2005. – № 32. – С. 110-118.

99. Ящерицын, П. И. Алмазно-абразивная обработка и упрочнение изделий в магнитном поле / П. И. Ящерицын [и др.] ; АН БССР, Физ.-техн. ин-т. – Минск : Наука и техника, 1988. – 270 с.

100. Мур, Д. Основы применения трибоники / Д. Мур ; пер. С англ. канд. физ.-мат. наук С. А. Харламова ; под ред. д-ра техн. наук, проф. И. В. Крагельского и канд. техн. наук Г. И. Трояновской. – М. : Мир, 1978. – 483 с.

101. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2003. – Т. 2. – 864 с.

102. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – 13-е изд., испр. – М. : Изд-во Моск. ун-та ЧеРо, 1997. – 624 с.

103. Ильин, В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – изд. 2-е, перераб. – М. : Изд-во МГУ, 1985. – Ч. 1. – 662 с.

104. Архипов Г. И. Лекции по математическому анализу : учеб. для вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков ; под ред. В. А. Садовничего. – 5-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2004. – 640 с.

105. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу : пособие для ун-тов, пед. вузов : в 2 ч. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий ; ред. В. А. Садовничий. – 3-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2001. – Ч. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. – 725 с.

106. Зорич, В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Зорич. – Изд. 4-е, испр. – М. : МЦНМО, 2002. – Ч. 1. – 664 с.

107. Камынин, Л. И. Курс математического анализа : в 2 т. / Л. И. Камынин. – 2-е изд. – М. : Изд-во МГУ, 2001. – Т. 1. – 423 с.

108. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. : учеб. для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – Ч. 1. – 648 с.

109. Никольский, С. М. Курс математического анализа / С. М. Никольский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.

110. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1981. – Т. 1. – 687 с.

111. Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Кудрявцев Л. Д. [и др.]. – 2-е изд., перераб. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т. 2. – 505 с.

112. Бермант, А. Ф. Курс математического анализа : в 2 ч. / А. Ф. Бермант. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1959. – Ч. 1. – 467 с.

113. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – 13-е изд. – М. : Наука : ФИЗМАТЛИТ, 1985. – Т. 1. – 432 с.

114. Курант, Р. Курс дифференциального исчисления : в 2 т. / Р. Курант. – М. : Наука, 1967. – Т. 1. – 704 с.

115. Рудин, У. Основы математического анализа / У. Рудин. – М. : Мир, 1976. – 321 с.

116. Егоров, В. И. Определенный и кратные интегралы. Элементы теории поля / В. И. Егоров, А. Ф. Салимова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 256 с.

117. Скворчевский, Н. Я. Эффективность магнитно-абразивной обработки / Н. Я. Скворчевский, Э. Н. Федорович, П. И. Ящерицын. – Минск : Навука і тэхніка, 1991. – 216 с.

118. Скворчевский, Н. Я. Научные основы повышения эффективности магнитно-абразивной обработки созданием сверхсильных магнитных полей и технологических сред : автореф. дисс. ... д-ра техн. наук : 05.02.08 ; 05.03.01 / Н. Я. Скворчевский ; Белорус. гос. политех. акад. – Минск, 1994. – 40 с.

119. Полюсный наконечник для электромагнита : а. с. 356705 СССР : МПК 6 Н 01 F 41 / 02 / Б. А. Иоффе, А. А. Шевченко ; Ин-т физики АН Латвийской ССР. – № 1289062/25-8 ; заявл. 25.12.1968 ; опубл. 30.11.1972 // Открытия. Изобретения. – 1972. – № 32.

120. Ящерицын, П. И. Тонкие доводочные процессы обработки деталей машин и приборов / П. И. Ящерицын, А. Г. Зайцев, А. И. Барботько. – Минск : Навука і тэхніка, 1976. – 396 с.

121. Baron, Yu. M. Experimental Verification of Deburring by Magnetic Abrasive Finishing Method / Yu. M. Baron, Sung-Lim Ko, E. A. Repnikova // Proc. of the 2nd Asia-Pacific Forum on Precision

Surface Finishing and Deburring Technology, Seoul, Korea 22–24 July, 2002. – Seoul, 2002. – P. 166–178.

122. Hou Zhen-Bing. Magnetic Field Assisted Finishing of Ceramics – Part 1: Thermal Model / Z. B. Hou, R. Komanduri // Journal of Tribology. – Vol. 120. – 2009. – P. 645–651.

123. Ящерицын, П. И. Работоспособность узлов трения машин / П. И. Ящерицын, Ю. В. Скорынин. – Минск : Наука и техника, 1984. – 288 с.

124. Калашников, А. С. Современные методы чистовой обработки зубчатых цилиндрических колес / А. С. Калашников // Оборудование и инструмент для профессионалов. Серия: Металлообработка. – 2009. – № 6. – С. 38–42.

125. Мрочек, Ж. А. Обработка износостойких покрытий / Ж. А. Мрочек [и др.] ; под общ. ред. Ж. А. Мрочека. – Минск : Дизайн ПРО, 1997. – 208 с.

126. Антонюк, В. Е. Технология производства и методы обеспечения качества зубчатых колес и передач: учеб. пособие / В. Е. Антонюк [и др.] ; под общ. ред. В. Е. Антонюка. – Минск : Технопринт, 2003. – 766 с.

127. Миронов, А. М. Повышение эффективности магнитно-абразивной обработки зубчатых колес механическим уплотнением ферроабразивного порошка в рабочей зоне : дис. ... канд. техн. наук : 05.03.01 / А. М. Миронов. – Минск, 2007. – 153 с.

128. Сергеев, Л. Е. Формирование характеристик поверхностного слоя деталей при магнитно-абразивной обработке отверстий / Л. Е. Сергеев, Н. Я. Скворчевский ; Физико-технический ин-т АН Беларуси. – Минск, 1993. – 10 с. – Деп. в ВНИИТИ 14.07.93, № 1993 // РЖ : В93ДЕП. – С. 10.

129. Брановер, Г. Г. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред / Г. Г. Брановер, А. Б. Цинобер. – М. : Наука, 1970. – 380 с.

130. Домбровский, В. В. Справочное пособие по расчету электромагнитного поля в электрических машинах / В. В. Домбровский. – Л. : Энергоатомиздат : Ленингр. отд-ние, 1983. – 256 с.

131. Санкович, Е. С. Гидравлика, гидравлические машины, гидроприводы : учеб.-метод. пособие / Е. С. Санкович, А. Б. Сухоцкий. – Минск : БГТУ, 2005. – 137 с.



132. Гаврилов, К. Л. Основы гидропривода дорожно-строительных и сельскохозяйственных машин : учеб. пособие / К. Л. Гаврилов. – СПб. : Деан, 2011. – 232 с.

133. Пини, Б. Е. Повышение производительности обработки штоков пневмо- и гидроцилиндров за счет усовершенствования устройства для комбинированной обработки резанием и поверхностным пластическим деформированием / Б. Е. Пини [и др.] // Известия МГТУ «МАМИ». – 2012. – № 2 (14). – Т. 2. – С. 164–166.

134. Крагельский, И. В. Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М. : Машиностроение, 1977. – 526 с.

135. Справочник по триботехнике : в 3 т. / под общ. ред. М. Хебды, А. В. Чичинадзе. – М. : Машиностроение, 1989. – Т. 1: Теоретические основы – 400 с.

Научное издание

**Акулович** Леонид Михайлович,  
**Сергеев** Леонид Ефимович,  
**Тиунчик** Александр Александрович,  
**Сенчуров** Евгений Витальевич

**ФОРМИРОВАНИЕ КАЧЕСТВА СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ  
ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ МАГНИТНО-АБРАЗИВНОЙ  
ОБРАБОТКЕ**

Ответственный за выпуск *М. А. Прищепов*  
Редактор *В. А. Лукьянчук*  
Корректор *В. А. Лукьянчук*  
Компьютерная верстка *В. А. Лукьянчука*  
Дизайн и оформление обложки *Д. О. Бабаковой*

Подписано в печать 21.12.2016 г. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 17,20. Уч.-изд. л. 13,45. Тираж 100 экз. Заказ 443.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный аграрный технический университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий  
№ 1/359 от 09.06.2014.  
№ 2/151 от 11.06.2014.  
Пр-т Независимости, 99–2, 220023, Минск.