интервале можно говорить об отстройке от зазора (рис. 4). На практике это можно осуществить, если известен зазор, определенный каким-либо способом, и по его величине выбирать соответствующий ток в намагничивающей системе.

Таким образом, исследование распределения тангенциальной составляющей остаточного поля вдоль осей, на которых располагаются полюса намагничивающей системы в зависимости от зазора между ферромагнитным изделием и измерительным преобразователем, показало, что при изменении зазора от 0 до 3 мм в области, расположенной вблизи центра симметрии намагничивающей системы $0 \leqslant x \leqslant 6$; $0 \leqslant z \leqslant 6$ мм, влияние зазора незначительное. Это позволяет сделать вывод о том, что размеры измерительного преобразователя не должны превышать 10 мм. При этом, как показали исследования, уменьшение размеров измерительного преобразователя не приводит к существенному улучшению отстройки от влияния зазора, т. е. вполне приемлемым оказывается величина преобразователя 10 мм, если намагничивающая система удовлетворяет соотношениям, полученным ранее в [1].

Показано, что при раздельном намагничивании изделия (установке полюсов намагничивающей системы непосредственно на изделие) и измерении остаточного поля возможна отстройка от влияния зазора между измерительным преобразователем и контролируемой поверхностью до 3 мм.

Проведенные экспериментальные исследования на образцах из стали У8 подтвердили качественно результаты расчетов, что позволяет считать предложенную модель расчета вполне допустимой, поскольку, несмотря на ее сравнительную простоту, удалось получить достаточно объективные сведения о распределении остаточного магнитного поля в пространстве над ферромагнитным изделием.

Summary

The analytical calculation has been done of the tangential component distribution of the remanent magnetic field which appears in the ferromagnetic articles after advance magnetization by two П-type magnets. The experimental investigation results are cited.

Литература

1. Асташенко П. П., Зацепин Н. Н., Горбаш В. Г. // Дефектоскопия. 1988. № 7. С. 14—19.
2. Асташенко П. П., Зацепин Н. Н. // Дефектоскопия. 1982. № 2. С. 93—96.
3. Зацепин Н. Н., Коржова Л. В. Магнитная дефектоскопия. Минск, 1981. С. 114—122.

Институт прикладной физики АН БССР

Поступила в редакцию 18.04.91

УДК 539.3

Ю. В. ЧИГАРЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

1. Устойчивость упругих сред относительно поведения возмущений рассматривалась в [1]. В [2] изложены вопросы о влиянии конечных и малых деформаций на скорости распространения малых возмущений в упругом, первоначально изотропном теле при однородных начальных состояниях. Там же изучены вопросы распространения волн в композит-

ных материалах и поверхностных волн в однородных средах с однородными начальными состояниями. Вопросы динамики возмущений в неоднородных упруговязкопластических средах рассмотрены в [3].

В настоящей работе, применяя операцию разрывов [4, 5], исследуем поведение нестационарных возмущений вдоль характеристик в неоднородной упруговязкопластической среде.

Получены уравнения изменения интенсивности возмущенного состояния. При выполнении критерия стохастичности [6] с помощью кинетических и моментных уравнений исследована устойчивость траектории и возмущений.

Рассмотрим упруговязкопластическое тело объема V, ограниченное поверхностью S, с заданными на ней краевыми условиями. Считаем тело изотропным, неоднородным.

Среда ведет себя упругим образом в точках, где выполняются соотношения

$$S_{ij}S_{ij} < k^2; \ S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}. \tag{1.1}$$

В этом случае тензор упругих деформаций e^e_{ij} связан с напряжениями σ_{ij} законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda e^e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e^e_{ij}. \tag{1.2}$$

Если $S_{ij}S_{ij} > k^2$, то тело деформируется пластическим образом. В этом случае компоненты тензора скорости пластических деформаций $\dot{e}^p_{ij}$ связаны с тензором напряжений условием пластичности [4]

$$(S_{ij} - \eta\dot{e}^p_{ij})(S_{ij} - \eta\dot{e}^p_{ij}) = 2k^2 \tag{1.3}$$

и ассоциированным законом течения

$$\dot{e}^p_{ij} = \psi(S_{ij} - \eta\dot{e}^p_{ij}), \ \psi > 0. \tag{1.4}$$

Полные деформации связаны с упругими e^e_{ij} и пластическими e^p_{ij} в виде

$$e_{ij} = e^e_{ij} + e^p_{ij} \tag{1.5}$$

и выражаются через перемещения с помощью формул Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{1.6}$$

Представленная модель является обобщением модели тела Бингама.

Для замыкания системы определяющих уравнений запишем уравнения движения и граничные условия в виде [1]

$$[\sigma_{k,j}(\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} - \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \tag{1.7}$$

$$[\sigma_{kj}(\delta_{ik} + u_{i,k})]n_j = P_i. \tag{1.8}$$

В соотношениях (1.1)—(1.4) коэффициенты упругости λ, μ, пластичности k, вязкости η являются функциями пространственных координат x_i $(i=1, 2, 3)$.

Обозначим решение системы (1.1)—(1.8) через $\sigma^0_{ij}(x_k, t)$, $e^0_{ij}(x_k, t)$, $u^0_i(x_k, t)$. Будем считать, что с течением времени эти величины стремятся к $\sigma^0_{ij}(x_k)$, $e^0_{ij}(x_k)$, $u^0_i(x_k)$.

Величины, связанные с возмущенной формой движения, представим в виде:

$$\sigma_{ij} = \sigma^0_{ij} + \sigma^+_{ij}; \quad e_{ij} = e^0_{ij} + e^+_{ij}; \quad u_i = u^0_i + u^+_i, \tag{1.9}$$

где 0 обозначены компоненты основного, а + — возмущенного состояния.

Считая возмущения малыми, из системы (1.2)—(1.8) с учетом (1.9) получаем в первом приближении уравнения возмущенного состояния:

$$\sigma^+_{ij} = \lambda e^e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e^e_{ij}, \tag{1.10}$$

$$\sigma^+_{ij} - \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \sigma^0_{jk}u^+_{i,k} + \sigma^0_{jk}u^+_{i,kj} = 0, \tag{1.11}$$

$$(S^0_{ij} - \eta\dot{e}^{po}_{ij})(S^+_{ij} - \eta\dot{e}^{p+}_{ij}) = 0, \tag{1.12}$$

$$\dot{e}^{p+}_{ij} = (S^0_{ij} - \eta\dot{e}^{po}_{ij})\psi^+ + (S^+_{ij} - \eta\dot{e}^{p+}_{ij})\psi^0, \tag{1.13}$$

$$(\sigma^+_{ij} + \sigma^0_{jk}u^+_{i,k})n_j = P_i. \tag{1.14}$$

Полагая $e^{p+}_{ik,j} = 0$, уравнения движения можно представить в виде

$$\Sigma^+_{ij,j} - \rho\frac{\partial^2 u^+_i}{\partial t^2} = 0, \tag{1.15}$$

а соотношения (1.10) преобразуются к виду

$$\Sigma^+_{ij} = \lambda\delta_{ij}e^e_{nn} + \mu(e^{e+}_{i,j} + e^{e+}_{j,i}) + \sigma^0_{jl}e^{e+}_{i,l}. \tag{1.16}$$

В (1.15), (1.16) принято

$$\Sigma^+_{ij} = \sigma^+_{ij} + \frac{\sigma^0_{jk}}{2\mu}(\sigma^+_{ik} - M\sigma^+ + \delta_{ik}), \tag{1.17}$$

$$M = 3\lambda(3\lambda + 2\mu)^{-1}.$$

Пусть возмущения в среде распространяются в виде поверхностей Π_t, на которых величины σ^+_{ij}, e^+_{ij} испытывают скачок, а величины σ^0_{ij}, e^0_{ij} и параметры среды — непрерывны. Знаком [ ] обозначим разность значений некоторой функции R на различных сторонах от поверхности разрыва, т. е. $[R] = R' - R''$, где R' — значение R на задней, а R'' — на передней стороне поверхности Π_t. Применяя тогда операцию разрывов [4] с учетом динамических, геометрических и кинематических условий совместности на поверхности Π_t [5]

$$\begin{gathered}
\left[\frac{\partial\Sigma^+_{ij}}{\partial t}\right] = -Q^+_{ij}c + \frac{\delta[\Sigma_{ij}]}{\delta t}, \\
\left[\frac{\partial\Sigma^+_{ij}}{\partial x_j}\right] = Q^+_{ij}\nu_j + q^{\alpha\beta}\frac{\partial[\Sigma^+_{ij}]}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}, \\
\left[\frac{\partial v^+_i}{\partial x_j}\right] = \hat{Q}_i + \nu_j + q^{\alpha\beta}\frac{\partial[v^+_i]}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}, \\
\left[\frac{\partial v^+_i}{\partial t}\right] = -\hat{Q}_i + c + \frac{\delta[v^+]}{\delta t},
\end{gathered} \tag{1.18}$$

получаем, что возмущения распространяются в виде волн:

поперечной со скоростью

$$c_t^2 = (\mu + \sigma_{jt}^0 \nu_t \nu_j)\,\rho^{-1}, \qquad (1.19)$$

продольной со скоростью

$$c_e^2 = (\lambda + 2\mu + \sigma_{jt}^0 \nu_t \nu_j)\,\rho^{-1}. \qquad (1.20)$$

В соотношениях (1.18)—(1.20) ввели обозначения [5] $g^{\alpha\beta}$ метрический тензор поверхности Π_t, y^α, y^β — криволинейные координаты на Π_t, Q_{ij}^{+}, $\hat{Q}_i$ — функции, определенные на Π_t, ν_j — компоненты вектора единичной нормали к поверхности Π_t.

В дальнейшем, учитывая пластическую несжимаемость материала $[\dot{e}_{kk}^{p+}] = 0$, а также используя геометрические и кинематические условия совместности второго порядка на поверхности Π_t [5], из соотношений (1.15), (1.16), (1.18) после ряда преобразований получаем уравнения для изменения интенсивности возмущений.

Уравнения для изменения интенсивности продольной волны вдоль луча имеют вид

$$\frac{dw^+}{dv} = w^+ (2\rho c_e^2)^{-1} (A + B). \qquad (1.21)$$

Вдоль поперечной волны находим

$$\frac{d\,[v_i^+]}{dr} = A_{ij}\,[v_j^+] + B_{ihg}\,([v_h^+]\,\nu_g + [v_g^+]\,\nu_h). \qquad (1.22)$$

Здесь $\nu_i w^+ = [v_i^+]$

$$A = 2\Omega(\lambda + 2\mu) + \frac{\nu_j \nu_t}{c}\frac{\partial \sigma_{jt}^0}{\partial t} + \sigma_{jt}^0 b^{\beta\gamma} x_\beta^j x_\gamma^t -$$

$$- \frac{\delta \rho c}{\delta t} - \sigma_{jt,\alpha}^0 b^{\beta\gamma} x_\beta^j x_\gamma^t,$$

$$B = 2\mu\nu_i\nu_j\,(2\mu\delta_{jt} + \sigma_{jt}^0)\left(\nu_h\nu_g - \frac{1}{3}\delta_{hg}\right)E_{hgit},$$

$$E_{hgit} = 2\eta k^2 (1 + \eta\psi)^{-1}\,[(S_{kg}^0 - \eta\dot{e}_{kg}^{po})(S_{kg}^0 - \eta\dot{e}_{kg}^{po}) +$$

$$+ 2\psi^0\eta k^2 \delta_{ih}\delta_{jg}],$$

$$A_{ij} = \left[\delta_{ij}\left(2\mu\Omega - \frac{\delta\rho c}{\delta t} - g^{\alpha\beta}\sigma_{gt,\alpha}^0 \nu_t x_\beta^g + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sigma_{gt}^0 b^{\beta\gamma} x_\beta^g x_\gamma^t + \sigma_{gt}^0 \nu_g \nu_t \frac{1}{c}\right) + \mu b^{\beta\gamma} x_\gamma^i x_\beta^j\right](2\rho c_t^2)^{-1},$$

$$B_{ihg} = \mu\nu_j\,(\delta_{in} - \nu_i\nu_n)\,(2\mu\delta_{jt} + \sigma_{jt}^0)E_{hgnt}\,(2\rho c_t^2)^{-1},$$

$\Omega = \dfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$ — средняя кривизна поверхности Π_t, $g_{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой, $b_{\alpha\beta}$ — второй квадратичной формы поверхности Π_t, $x_j^i = \partial x^i / \partial y^j$ — вектор, касательный к поверхности Π_t, r — параметр, характеризующий расстояние вдоль траектории.

Как следует из уравнений (1.21) и (1.22), изменения интенсивности возмущений вдоль траекторий зависят от параметров внутренней геометрии Ω, $b_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$, x_β^i, поверхности Π_t, модулей среды, основного напряженного состояния и координат (направления) выбранной траектории

$x^i(\nu^i)$. Вследствие этого для замыкания уравнений (1.21), (1.22) необходимо добавить уравнения геометрии

$$
\begin{gathered}
d\Omega/dr = 2\Omega^2 - K + (2c)^{-1} c_{,\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \\
dK/dr = 2K\Omega + c^{-1} 2\Omega c_{,\alpha\beta} g^{\alpha\beta} - c^{-1} c_{,\alpha\beta} b^{\alpha\beta}, \\
db^{\alpha\beta}/dr = 6\Omega b^{\alpha\beta} - 3Kg^{\alpha\beta} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} c_{,\gamma\delta}, \\
dx^i_\beta/dr = -\Omega x^i_\beta + (d \ln c/dr)\, \nu^i, \\
dg^{\alpha\beta}/dr = 2b^{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha\beta} g^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}
\end{gathered}
\tag{1.23}
$$

и уравнения траектории, вдоль которой рассматривается изменение возмущений:

$$
dx_i/dr = \nu_i; \quad d\nu_i/dr = -g^{\alpha\beta} (\ln c)_{,\alpha} x^i_\beta. \tag{1.24}
$$

Здесь K — гауссова кривизна поверхности Π_t. Система уравнений динамики возмущений (1.21), (1.22), геометрии (1.23) и траектории (1.24) замкнута и имеет единственное решение при начальных условиях

$$
\begin{gathered}
w^+ = w_0^+, \quad [v_i^+] = [v_{i0}^+], \quad \Omega = \Omega_0, \quad K = K_0, \\
g^{\alpha\beta} = g_0^{\alpha\beta}, \quad x^i = x^i_0, \quad \nu_i = \nu_i^0, \quad x^i_\beta = x^i_{\beta 0}.
\end{gathered}
\tag{1.25}
$$

2. Пусть неоднородная среда занимает область полупространства $x \geqslant 0$, а возмущение приложено к границе S ($x=0$) в точке $x=0$.

Рассмотрим распространение возмущений от точки $x=0$ в направлении оси $0x$ вдоль траектории, координаты которой удовлетворяют уравнениям (1.27). За счет неоднородности среды и напряжений траектория отклоняется от прямолинейной (оси $0x$).

Тривиальное решение уравнения траектории устойчиво, если любое достаточно близкое к нему в начальный момент времени решение лежит в сколь угодно узкой ε-трубке с осью $0x$.

Исследуем случай, когда $c = c(x, y)$, что соответствует среде, армированной длинными параллельными волокнами в направлении оси $0z$. Распространение возмущений исследуем в плоскости $x0y$. Уравнение траектории удобно записать в форме $y = y(x)$, тогда y характеризует отклонение траектории от оси $0x$. Аналогично работе [3, 10] уравнение (1.24) можно преобразовать к виду

$$
\begin{gathered}
\ddot y + (\dot y + \dot y^3) f_1(x, y) - y^2 (2 - \dot y^2) f_2(x, y) - f_2(x, y) = 0, \\
y(0) = 0; \quad \dot y(0) = \dot y_0; \quad \dot y = dy/dx; \quad f_1 = \partial \ln n/\partial x, \\
f_2 = \partial \ln n/\partial y, \quad n = c_0/c(x, y).
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Здесь $n = n(x, y)$ — коэффициент преломления среды; c_0 — скорость распространения возмущений в однородной среде.

Раскладывая в ряд Тейлора функции f_1, f_2 в окрестности оси $0x$ и используя замену $y = z/\sqrt{n}$, после ряда преобразований уравнение траектории записываем в виде [6]

$$
\ddot z + z\omega^2 (1 + \alpha z^2) - \varepsilon \Phi(x, z) = 0. \tag{2.2}
$$

В (2.2) положим

$$
\Phi(x, z) = z\Phi(x), \quad \Phi(x) = \omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kX), \tag{2.3}
$$

$$X = 2\Pi/\Omega, \quad \Omega \ll \omega, \quad \varepsilon \ll 1$$

(X — расстояние между включениями неоднородности).

В работе [6] на основе понятия перемешивающегося движения было показано, что при определенных значениях параметров среды и выполнении условия (2.3) для систем вида (2.2) выполняется критерий стохастичности. При выполнении критерия стохастичности фазы θ, входящие в уравнения (2.2) посредством функции $\Phi(x, z)$, являются статистическими величинами, значения которых неизвестны. В этом случае для описания движения уравнения (2.2) необходимо привлекать вероятностные методы [7—9].

Введем функцию плотности вероятности $D = D(x, y, \dot{z}, \theta)$. Проделывая выкладки, аналогичные [6], получим кинетическое уравнение типа Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК), которое позволяет определять D для различных состояний исходя из начального распределения $D_0(0, z, \dot{z}) = D_0(0, z, \dot{z})\delta_{n0}$.

Уравнение ФПК имеет вид

$$\frac{\partial D(y, x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{a}{4} - \frac{\dot{n}}{n}\, yD\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{a}{2}\, y^2 D\right] \quad \left(a = \frac{16\varepsilon^2\Pi^2}{X}\right). \tag{2.4}$$

Решение (2.4) при $\partial D/\partial x = 0$ имеет вид

$$D_s(y) = \frac{2b}{ay^2}\exp 2\left[2\,\frac{|y| - |y_*|}{|yy_*|} - \frac{\dot{n}}{na}\ln\left|\frac{y}{y_*}\right|\right], \tag{2.5}$$

$$b^{-1} = \frac{4}{a}\int_0^\infty \frac{1}{y^2}\exp 2\left[2\,\frac{|y| - |y_*|}{|yy_*|} - \ln\frac{|y|}{|y_*|}\,\frac{n}{na}\right] dy.$$

Здесь $y_* = y(x_*)$, где x_* — координата x, начиная с которой движение луча происходит нерегулярным образом.

Устойчивость тривиального решения $y(x) \equiv 0$ можно определить относительно характеристик (моментов, кумулянтов, квазимоментов), но так как между ними существует взаимнооднозначное соответствие, то ограничимся определением устойчивости среднего квадрата отклонения y^2, которое запишется в виде

$$E\{y^2\} = \frac{2}{\sqrt{a\Pi x}}\int_0^\infty y\exp\left\{-\frac{\ln^2(y\sqrt{n})}{ax}\right\} dy. \tag{2.6}$$

3. При выполнении критерия стохастичности [6, 10] уравнения (1.21) и (1.22) рассматриваем как стохастические дифференциальные уравнения, в правые части которых входят случайные возмущения гауссовского типа. Приведем исследования устойчивости интенсивности возмущений вдоль продольной волны относительно первых двух центральных моментов.

Предположим, что на некотором интервале Δx^* ($x^* < x^* + \Delta x^*$) скорость изменяется медленно. Очевидно, что чем меньше возмущение $\Phi(x, z)$ тем больше Δx^*. Уравнение (1.21) запишем в виде

$$\frac{dw^+}{dr} = \Gamma w^+; \quad \frac{d\varphi}{dr} = (\beta\varphi + \delta), \tag{3.1}$$

где

$$\Gamma = \alpha + \varphi; \quad \alpha = \frac{\nu_j \nu_t}{c}\frac{\partial\sigma^0_{jt}}{\partial t} - \sigma^0_{jt,\alpha} b^{\beta\gamma} x^j_\beta x^t_\gamma,$$

$$\varphi = 2\Omega(\lambda + \mu) + \sigma^0_{jt} b^{b\gamma} x^j_\beta x^t_\gamma + B,$$

$$\beta = \frac{d}{dr}(\sigma^0_{jt} b^{b\gamma} x^j_\beta x^t_\gamma).$$

Если предположим, что α и β — постоянные величины, а δ — возмущение в виде «белого шума» с нулевым средним и спектральной плотностью G^2, то для распространения $f(\varphi, w^+, r)$ уравнение ФПК запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial w^+}[f w^+(\alpha + \varphi)] - \frac{\partial}{\partial \varphi}(f\varphi\beta) + \frac{1}{2} G^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad (3.2)$$

Вводя кумулянтную функцию

$$\gamma(x, m, n) = \ln \int e^{i(nw^+ + m\varphi)} f(x, w^+, \varphi)\, dw d\varphi, \quad (3.3)$$

уравнение (3.2) переписываем

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x^*} = n\left[\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial n} - i\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial n \partial m} + \frac{\partial \gamma}{\partial n}\frac{\partial \gamma}{\partial m}\right)\right] + \beta m \frac{\partial \psi}{\partial m} - \frac{1}{2} m^2 G^2, \quad (3.4)$$

где m, n — вспомогательные переменные.

Учитывая, что процесс $\varphi(x)$ является гауссовским, аналогично [8] можно получить уравнения для среднего значения $\langle w^+ \rangle$

$$\frac{d\langle w^+ \rangle}{dr} = \alpha w^+ - i\left(\frac{\partial \langle w^+ \rangle}{\partial m} - L m w^+\right) + \beta m \frac{\partial \langle w^+ \rangle}{\partial m} \quad (3.5)$$

и дисперсии $D(w^+) = D^+$

$$\frac{dD(w^+)}{dr} = 2\alpha D(w^+) - 2i\left(\frac{\partial D(w^+)}{\partial m} - D(w^+) L m + \langle w^+ \rangle \frac{\partial \langle w^+ \rangle}{\partial m}\right) + \beta m \frac{\partial D(w^+)}{\partial m} + G^2. \quad (3.6)$$

Решение (3.5), (3.6) ищем в виде

$$\langle w \rangle = \langle w_0 \rangle \exp F_1(r, r_0, m), \quad (3.7)$$

$$D(w^+) = D(w_0^+) \exp F_2(r, r_0, m) + \int_{r_0}^{r} \exp(r, r^*, m)\left(G^2 - 2i\langle w^+ \rangle \frac{\partial \langle w^+ \rangle}{\partial m}\right) dr^*. \quad (3.8)$$

В формулах (3.5) — (3.8) принято

$$F_k(r, r_0, m) = K \int_{r_0}^{r} \left[\alpha + i4\left(e^{\beta(r - r^*)}\left(m - \frac{iK}{\beta}\right) + \frac{iK}{\beta}\right)\right] dr^* \quad (k = 1, 2), \quad (3.9)$$

$$L = \left(L_0 + \frac{G^2}{2\beta}\right) \exp 2\beta(r - r_0) - \frac{G^2}{2\beta}$$

(L является дисперсией $\varphi(t)$).

Положим в (3.7), (3.8) $m = 0$ и продифференцируем эти выражения по τ. Получим тогда уравнения, удобные для исследования устойчивости изменения интенсивности возмущений продольной волны:

$$\frac{d\langle w^+\rangle}{dr}=\left(\alpha+\int_{r_0}^{r}L(r^*)\exp\beta(r-r^*)\,dr^*\right)w^+, \tag{3.10}$$

$$\frac{dD(w^+)}{dr}=2\left|\alpha+2\int_{r_0}^{r}L\exp\beta(r-r^*)\,dr\right|D^++$$

$$+G^2-2i\langle w^+\rangle\frac{\partial\langle w^+\rangle}{\partial m}\bigg|_{m=0}+4\int_{r_0}^{r}\left|\int_{r_0}^{r}L\exp\beta(r-r^*)\,dr^*-\right. \tag{3.11}$$

$$-\int_{r_0}^{r}L\exp\beta(r-r_0)\,dr\left|G^2-2i\langle w^+\rangle\frac{\partial w^+}{\partial m}\bigg|_{m=0}\right|dr^*.$$

Интенсивность возмущений продольной волны будем считать устойчивой относительно первых и вторых моментов, если устойчиво тривиальное решение уравнений (3.10) и (3.11).

При $r\to\infty$ условия устойчивости уравнений (3.10) и (3.11) имеют вид [11]

$$\alpha<-\frac{1}{2}\left(\frac{G}{\beta}\right)^2 \quad \text{и} \quad \alpha+\left(\frac{G}{\beta}\right)^2>0. \tag{3.12}$$

Аналогичные оценки получаются при исследовании устойчивости (неустойчивости) интенсивности возмущений поперечной волны. Условия устойчивости для среднего и дисперсии процесса в этом случае имеют вид

$$2\hat{\alpha}<-\left(\frac{G}{\beta}\right)^2;\quad \hat{\alpha}<-\left(\frac{G}{\beta}\right)^2, \tag{3.13}$$

где

$$\hat{\alpha}=-\sigma^0_{gi,\alpha}\,g^{\alpha\beta}v_i x^g_\beta.$$

Как следует из соотношений (3.12), (3.13), (3.9), коэффициенты α и $\hat{\alpha}$ пропорциональны спектральной плотности G^2 шума δ и (при $r\to\infty$) дисперсии шума φ. Отметим, что необходимым условием устойчивости возмущений вдоль продольной (поперечной) волны при $\varphi\equiv0$ является условие $\alpha<0$ ($\hat{\alpha}<0$).

Summary

The stability of disturbance in non-homogenious environment has been examined.

It is showed that under definite non-homogenious conditions the disturbance motion stochasticeges. It that case the stability of disturbance motion is investigated with the help of probability methods.

Литература

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., 1961.

2. Гузь А. Н. // Нелинейные волны деформации. Таллин, 1978. Т. 1. С. 10—22.

3. Булдырев В. С. // Проблемы математической физики. Л., 1968. № 3. С. 5—30.

4. Ивлев Д. Д., Быковец Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., 1971.

5. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., 1964.

6. Заславский Г. М. Статическая необратимость в нелинейных системах. М., 1970.

7. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., 1971.

8. Болотин В. В. // Тр. Московского ордена Ленина энергетического института. М., 1975. Вып. 227. С. 7—14.

9. Ломакин В. А. Статические задачи механики твердых деформируемых тел. М., 1970.