

## РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС ДВУХ ЗВЕЗД В ФОТОГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

А.П. Рябушко<sup>1</sup>, О.Л. Зубко<sup>1</sup>, Т.А. Жур<sup>2</sup>, И.П. Боярина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет, Беларусь, Минск, tatyana-zhur@mail.ru

<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск, tatyana-zhur@mail.ru

*Аннотация.* Представлены результаты исследований белорусской школы по проблеме релятивистского движения тел в фотогравитационных полях. Рассмотрен вопрос о центре масс тел сравнимых масс в фотогравитационном поле. Проинтегрированы уравнения движения двух тел в фотогравитационном поле. Получено, что влияние светового давления в проблеме движения тел приводит к исчезновению инвариантного понятия центра масс в ньютоновском смысле

*Ключевые слова:* общая теория относительности, пробное тело, уравнения движения, центр масс, фотогравитационное поле.

## RELATIVISTIC MOVEMENT OF THE CENTER OF MASS OF TWO STARS IN A PHOTOGRAVITATION FIELD

A. P. Ryabushko<sup>1</sup>, O. L. Zubko<sup>1</sup>, T.A. Zhur<sup>2</sup>, I. P. Boyarina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Belarusian National Technical University, Belarus, Minsk, tatyana-zhur@mail.ru

<sup>2</sup>Belarusian State Agrarian Technical University, Belarus, Minsk, tatyana-zhur@mail.ru

*Abstract.* The results of the Belarusian school research on the problem of the relativistic motion of bodies in photogravitational fields are presented. The question of the center of mass of bodies of comparable masses in a photogravitational field is considered. The equations of motion of two bodies in a photogravitational field are integrated. It is obtained that the influence of light pressure in the problem of the movement of bodies leads to the disappearance of the invariant concept of the center of mass in the Newtonian sense.

*Keywords:* General theory of relativity, test body, equations of motion, center of mass, photogravity field.

**1. Введение.** В связи с интенсивным освоением космоса возникает необходимость более точного прогнозирования положений малых тел и их движений в Солнечной системе (астероидов, метеоритов, космических телескопов, аппаратов, станций, парусных яхт, «дворников») с целью очистки засоренного околосолнечного пространства, экранов для затемнения и осветителей Земли и т.п.). На тела в космосе, кроме сил тяготения, действуют многие другие факторы и силы: прямое световое давление, электромагнитные поля, эффекты специальной теории относительности, к которым относятся абберация света (эффект Пойтинга-Робертсона), продольный и поперечный эффекты Доплера для плотности электромагнитного излучения звезды, увеличение массы движущегося тела, сокращение площади миделевого сечения тела, а также эффекты общей теории относительности такие, как смещение перигелия орбиты тела, кривизна пространства-времени, влияние гравитационного поля газопылевой составляющей планетарной системы, влияние собственных угловых моментов импульса вращающихся тел на их поступательное движение, возникновение прецессии осей вращения тел, превращение плоских орбит движения в пространственные и т.д.

Белорусской научной школой по проблеме релятивистского движения тел в космосе в последние годы начата разработка проблемы релятивистского движения тел в так называемых фотогравитационных полях, т.е. в полях, когда кроме сил гравитации учитываются силы давления на тела электромагнитного излучения звезд (коротко, светового давления).

Уже рассмотрен ряд типовых для небесной механики проблем: задачи двух и трех тел, в процессе решения которых найдены траектории тел, важные для космической навигации законы движения, точки сепарации и фотолибрации [1-5].

Однако остался не рассмотренным в фотогравитационном поле важный вопрос о центре масс тел сравнимых масс, который и будет обсуждаться в данной работе.

## 2. Уравнения движения двух тел в фотогравитационном поле (первый уровень)

Они следующие [2]:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{r^3} (x_1 - x_2) = \frac{\gamma A_{21}}{r^3} (x_1 - x_2) + \frac{\gamma A_{21} v_1}{r^3 c} [-2(x_1 - x_2) \cos \alpha_1 + (y_1 - y_2) \sin \alpha_1], \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{r^3} (y_1 - y_2) = \frac{\gamma A_{21}}{r^3} (y_1 - y_2) + \frac{\gamma A_{21} v_1}{r^3 c} [-2(y_1 - y_2) \cos \alpha_1 - (x_1 - x_2) \sin \alpha_1], \quad (2)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{\gamma m_1}{r^3} (x_2 - x_1) = \frac{\gamma A_{12}}{r^3} (x_2 - x_1) + \frac{\gamma A_{12} v_2}{r^3 c} [-2(x_2 - x_1) \cos \alpha_2 + (y_2 - y_1) \sin \alpha_2], \quad (3)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + \frac{\gamma m_1}{r^3} (y_2 - y_1) = \frac{\gamma A_{12}}{r^3} (y_2 - y_1) + \frac{\gamma A_{12} v_2}{r^3 c} [-2(y_2 - y_1) \cos \alpha_2 - (x_2 - x_1) \sin \alpha_2]. \quad (4)$$

Укажем смысл величин, входящих в уравнения (1)-(4).

Положения звезд  $A_1$  и  $A_2$ , массы покоя которых  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 \geq m_2$ ), соответственно, определяются координатами  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$ . Звезды считаются сферически симметрическими телами и поэтому их траектории движения являются плоскими линиями, лежащими в координатной плоскости  $xOy$  ( $z=0$ ) введенной декартовой системы координат  $Oxyz$ , которая является барицентрической, т.е. центр масс  $C(c_1, c_2)$  звезд  $A_1, A_2$  покоится в начале координат, что означает выполнение в ньютоновской теории тяготения равенств

$$c_1 \equiv \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad c_2 \equiv \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad (5)$$

Далее имеем:  $r$  – ньютоновское расстояние между звездами  $A_1$  и  $A_2$ , т.е.  $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ;  $t$  – время,  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ z}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ c}^{-2}$  – ньютоновская постоянная тяготения;  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{c}^{-1}$  – скорость света в вакууме;  $v_1 = |\vec{v}_1|$  и  $v_2 = |\vec{v}_2|$  – поступательные скорости звезд  $A_1$  и  $A_2$ ;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы с вершинами  $A_1$  и  $A_2$  между векторами  $\vec{A_1 A_2}$ ,  $\vec{v}_1$  и  $\vec{A_2 A_1}$ ,  $\vec{v}_2$  соответственно;  $A_{21}$  и  $A_{12}$  – редуцирующие массы звезды  $A_2$  относительно звезды  $A_1$  и звезды  $A_1$  относительно звезды  $A_2$ , т.е. из-за светового давления звезды  $A_2$  на звезду  $A_1$  эффективная масса звезды  $A_2$  уменьшается на величину  $A_{21}$  и звезда  $A_1$  находится в гравитационном поле, создаваемом уменьшенной массой  $m_2^* = m_2 - A_{21}$  (reduce – уменьшать, редуцирующая масса – уменьшающая масса  $A_{21}$ , редуцированная масса – уменьшенная масса  $m_2^*$ ). Аналогично разъясняется смысл величины  $A_{12}$ : из-за светового давления звезды  $A_1$  на звезду  $A_2$  возникает редуцированная масса  $m_1^* = m_1 - A_{12}$ , в гравитационном поле которой движется звезда  $A_2$ .

Структура редуцирующих масс  $A_{12}, A_{21}$  следующая [3, 4]:

$$A_{12} = \frac{k_2 \sigma_2 W_{12}}{\gamma m_2 c} r^2, \quad A_{21} = \frac{k_1 \sigma_1 W_{21}}{\gamma m_1 c} r^2. \quad (6)$$

Здесь  $k_1, k_2$  – коэффициенты отражения звезд  $A_1, A_2$ ,  $1 \leq k_1 \leq 2, 1 \leq k_2 \leq 2$ ;  $\sigma_1, \sigma_2$  – площади миделевых сечений звезд  $A_1, A_2$ , которые в случае сферической симметрии звезд определяются формулами  $\sigma_1 = \pi R_1^2, \sigma_2 = \pi R_2^2$ , где  $R_1, R_2$  – радиусы звезд  $A_1, A_2$ ;  $W_{12}, W_{21}$  – звездные постоянные, являющиеся плотностями энергий электромагнитных

(световых) излучений звезд  $A_1, A_2$  соответственно, приходящих за 1 с на 1 см<sup>2</sup> площадки, перпендикулярной направлению на звезду и находящейся на расстоянии  $r$  от звезд  $A_1$  или  $A_2$ .

**3. Интегрирование уравнений движения (1) – (4).** Рассмотрим три степени точности при интегрировании уравнений (1) – (4).

**I. Ньютоновская степень точности.** Полагая правые части в уравнениях (1) – (4) нулями, получаем ньютоновские уравнения движения двух тел:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{r^3}(x_1 - x_2) = 0, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{\gamma m_1}{r^3}(x_2 - x_1) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{r^3}(y_1 - y_2) = 0, \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} + \frac{\gamma m_1}{r^3}(y_2 - y_1) = 0. \quad (8)$$

Введя в рассмотрение векторы  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA_1} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OA_2} = (x_2, y_2)$ ,  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , преобразуем систему (7), (8), вычитая из вторых уравнений первые. Получаем следующее векторное уравнение

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3}\vec{r} = 0, \quad m = m_1 + m_2, \quad (9)$$

решения, которого давно получены, хорошо изучены и в зависимости от начальных условий являются окружностью, эллипсом, гиперболой, параболой, прямой.

Если  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  – решение уравнения (9), то, перейдя в барицентрическую систему координат, в которой выполняются равенства (5), получим уравнения орбит тел (звезд)  $A_1, A_2$  в векторно-параметрическом виде:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m}\vec{r}(t), \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m}\vec{r}(t). \quad (10)$$

Согласно (5) и (10) орбиты обоих тел  $A_1, A_2$  являются для финитных движений или концентрическими окружностями с центром в центре масс тел  $A_1, A_2$ , или подобными эллипсами относительно центра масс, который находится в начале барицентрической системы координат  $O$ , причем центр подобия находится также в центре масс, как и один из фокусов эллипсов, а коэффициент подобия равен отношению масс  $m_1/m_2$ . Опираясь на равенства (5), (10), можно изобразить траектории тел  $A_1, A_2$ . Для случая эллипсов см. рис. 1.

В случае окружностей уравнения (10) принимают в координатной записи вид:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{m_2}{m}r \cos(w_0 t), \\ y_1 = -\frac{m_2}{m}r \sin(w_0 t); \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{m_1}{m}r \cos(w_0 t), \\ y_2 = \frac{m_1}{m}r \sin(w_0 t), \end{cases} \quad (11)$$

где расстояние  $|\overline{A_1 A_2}| = r = const$ ,  $w_0 = const$  – угловая скорость движения тел  $A_1, A_2$  по своим окружностям. Рис. 2 иллюстрирует этот простой случай (11).

**II. Фотоньютоновская степень точности.** Эту степень точности получаем, если в уравнениях (1) – (4) учитываем только первые члены справа, а члены с квадратными скобками заменяем нулями, т.е. не учитываем влияние эффектов Доплера и Пойтинга–Робертсона. Тогда уравнения движения можно записать в виде:

$$\frac{d^2 x_1^*}{dt^2} + \frac{\gamma m_2^*}{(r^*)^3} (x_1^* - x_2^*) = 0, \quad \frac{d^2 x_2^*}{dt^2} + \frac{\gamma m_1^*}{(r^*)^3} (x_2^* - x_1^*) = 0, \quad m_1^* = m_1 - A_{12}, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 y_1^*}{dt^2} + \frac{\gamma m_2^*}{(r^*)^3} (y_1^* - y_2^*) = 0, \quad \frac{d^2 y_2^*}{dt^2} + \frac{\gamma m_1^*}{(r^*)^3} (y_2^* - y_1^*) = 0, \quad m_2^* = m_2 - A_{21}. \quad (13)$$

Получили уравнения задачи двух тел с редуцированными массами  $m_1^*, m_2^*$ , аналогичными уравнениям (7), (8), решения которых будут отличаться от решений уравнений (7), (8). Поэтому координаты тел, расстояние между ними, их поступательные скорости, снабжаются значком «\*». Метод решения уравнений (12), (13) полностью аналогичен методу решения уравнений (7), (8). Поэтому качественно сохраняются все рассуждения и выводы, сопутствующие выводу формул (10), (11), в которых в нужных местах следует ввести значок «\*».

Таким образом, имеем векторно-параметрические уравнения орбит тел  $A_1, A_2$ :

$$\vec{r}_1^* = -\frac{m_2^*}{m^*} \vec{r}^*(t), \quad \vec{r}_2^* = \frac{m_1^*}{m^*} \vec{r}^*(t), \quad m^* = m_1^* + m_2^*, \quad (14)$$

которые в случае движения по окружностям в координатной форме имеют вид

$$\begin{cases} x_1^* = -\frac{m_2^*}{m^*} r^* \cos(w_0^* t), \\ y_1^* = -\frac{m_2^*}{m^*} r^* \sin(w_0^* t); \end{cases} \quad \begin{cases} x_2^* = \frac{m_1^*}{m^*} r^* \cos(w_0^* t), \\ y_2^* = \frac{m_1^*}{m^*} r^* \sin(w_0^* t), \end{cases} \quad (15)$$

где расстояние между телами-звездами  $r^*$  и их угловая скорость  $w_0^*$  – постоянные величины.

**III. Первая послефотоньютоновская степень точности.** На этой степени точности учитываются все члены уравнений (1) – (4), т.е. добавляются влияния на движение звезд продольного эффекта Доплера и абберации света, которые являются релятивистскими эффектами первого порядка по малому параметру  $v/c$ . Решения системы (1) — (4) отличаются от решений уровней I и II, что отметим введением значка тильда « $\tilde{\square}$ » и следующей корректной записью уравнений движения (1) – (4):

$$\frac{d^2 x_1^*}{dt^2} + \frac{\gamma m_2^*}{(\tilde{r}^*)^3} (x_1^* - x_2^*) = \frac{\gamma A_{21} v_1^*}{(\tilde{r}^*)^3 c} [-2(x_1^* - x_2^*) \cos \alpha_1^* + (y_1^* - y_2^*) \sin \alpha_1^*] \quad (16)$$

$$\frac{d^2 y_1^*}{dt^2} + \frac{\gamma m_2^*}{(\tilde{r}^*)^3} (y_1^* - y_2^*) = \frac{\gamma A_{21} v_1^*}{(\tilde{r}^*)^3 c} [-2(y_1^* - y_2^*) \cos \alpha_1^* - (x_1^* - x_2^*) \sin \alpha_1^*] \quad (17)$$

$$\frac{d^2 x_2^*}{dt^2} + \frac{\gamma m_1^*}{(\tilde{r}^*)^3} (x_2^* - x_1^*) = \frac{\gamma A_{12} v_2^*}{(\tilde{r}^*)^3 c} [-2(x_2^* - x_1^*) \cos \alpha_2^* + (y_2^* - y_1^*) \sin \alpha_2^*] \quad (18)$$

$$\frac{d^2 y_2^*}{dt^2} + \frac{\gamma m_1^*}{(\tilde{r}^*)^3} (y_2^* - y_1^*) = \frac{\gamma A_{12} v_2^*}{(\tilde{r}^*)^3 c} [-2(y_2^* - y_1^*) \cos \alpha_2^* - (x_2^* - x_1^*) \sin \alpha_2^*]. \quad (19)$$

Над  $m_1^*$  и  $m_2^*$  значок тильда « $\tilde{\phantom{x}}$ » не ставится, так как релятивистское изменение массы второго порядка  $(v^*/c)^2$ , которое не учитывается в (16) – (19).

Если тела  $A_1, A_2$  движутся по концентрическим окружностям, то имеем:

$$\alpha_1^* = \alpha_2^* = \pi/2, \quad \cos \alpha_1^* = \cos \alpha_2^* = 0, \quad \sin \alpha_1^* = \sin \alpha_2^* = 1, \quad (20)$$

что ведет к существенному упрощению системы уравнений (16) – (19), которую пока мы не будем интегрировать, т.е. находить  $x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*$ . Равенство (20) можно иллюстрировать рис. 2, в котором нужно вместо  $\alpha_1, \alpha_2, w_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2$  написать  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, w_0^*, \vec{v}_1^*, \vec{v}_2^*$ .

**4. Релятивистский центр масс в случае III.** Его определяем формулами (по аналогии с формулами (5)):

$$C^*(\tilde{c}_1^*, \tilde{c}_2^*), \quad \tilde{c}_1^* \equiv \frac{m_1^* x_1^* + m_2^* x_2^*}{m^*}, \quad \tilde{c}_2^* \equiv \frac{m_1^* y_1^* + m_2^* y_2^*}{m^*} \quad (21)$$

Решения (10) записаны в барицентрической системе координат и дают  $c_1 = c_2 = 0$ , т.е. ньютоновский центр масс покоится.

На фотоньютоновском уровне (13), (14) имеем следующее определение центра масс  $C^*(c_1^*, c_2^*)$ :

$$c_1^* \equiv \frac{m_1^* x_1^* + m_2^* x_2^*}{m^*}, \quad c_2^* \equiv \frac{m_1^* y_1^* + m_2^* y_2^*}{m^*} \quad (22)$$

Воспользовавшись решением (14) уравнений (12), (13), легко убеждаемся в том, что  $c_1^* = c_2^* = 0$ , т.е. барицентрическая система координат на ньютоновском уровне I остается таковой и на фотоньютоновском уровне II.

Выясним, будет эта система координат барицентрической и для решений системы (16) – (19) и при условии (20). Так как мы не проинтегрировали систему (16) – (19) и не знаем входящие в формулы (21)  $x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*$ , то применим следующий метод нахождения  $\tilde{c}_1^*, \tilde{c}_2^*$ : продифференцируем дважды по времени  $\tilde{c}_1^*$  и  $\tilde{c}_2^*$  из (21), появившиеся вторые производные от  $x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*$  заменим выражениями, полученными из (16) – (19) при условии (20), проинтегрируем возникшие дифференциальные уравнения второго порядка для нахождения  $\tilde{c}_1^*, \tilde{c}_2^*$ . Имеем ( $m_1^*, m_2^*$  – постоянные):

$$\frac{d^2 \tilde{c}_1^*}{dt^2} = \frac{1}{m^*} \left( m_1^* \frac{d^2 x_1^*}{dt^2} + m_2^* \frac{d^2 x_2^*}{dt^2} \right) = \frac{\gamma m_1^* m_2^* w_0^*}{r^* c (m^*)^2} (A_{12} - A_{21}) \sin(w_0^* t) = B \sin(w_0^* t), \quad (23)$$

$$\frac{d^2 \tilde{c}_2^*}{dt^2} = \frac{1}{m^*} \left( m_1^* \frac{d^2 y_1^*}{dt^2} + m_2^* \frac{d^2 y_2^*}{dt^2} \right) = -\frac{\gamma m_1^* m_2^* w_0^*}{r^* c (m^*)^2} (A_{12} - A_{21}) \cos(w_0^* t) = -B \cos(w_0^* t), \quad (24)$$

где постоянная величина

$$B = \frac{\gamma m_1^* m_2^* w_0^*}{r^* c (m^*)^2} (A_{12} - A_{21}). \quad (25)$$

Дифференциальные уравнения (23) – (25) при начальных условиях  $\tilde{c}_k^*(0) = 0$ ,  $\left. \frac{d\tilde{c}_k^*}{dt} \right|_{t=0} = 0$ ,  $k = 1$  и  $2$ , дают решения ( $\varphi = w_0^* t$ )

$$\tilde{c}_1^* = \frac{B}{(w_0^*)^2} (\varphi - \sin \varphi), \quad \tilde{c}_2^* = -\frac{B}{(w_0^*)^2} (1 - \cos \varphi), \quad (26)$$

которые определяют циклоиду, расположенную при  $B > 0$  в четвертой четверти относительно системы координат и во второй четверти при  $B < 0$  (рис. 2). Если  $A_{12} = A_{21}$ , то  $B = 0$  и  $\tilde{c}_1^* = \tilde{c}_2^* = 0$ , т.е. релятивистский центр масс на первом уровне III покоится в начале координат, как и на ньютоновском I и фотоньютоновском II уровнях. Смещение центра масс согласно (26) влечет деформацию и смещение окружностей вправо при  $B > 0$  или влево при  $B < 0$  (рис. 2).

Есть основания предполагать, что в более общем не круговом, а в эллиптическом случае, также релятивистский центр масс на первом уровне III не может покоиться при определении (21). Должно происходить его движение по деформированной циклоиде, что будет показано в одной из следующих работ авторов. Также будет дана оценка величины  $B$  для разных систем: двойные звезды, пульсары, галактики. Учет влияния светового давления в проблеме движения тел приводит к исчезновению инвариантного понятия центра масс в ньютоновском смысле.

В заключении заметим, что отложенное интегрирование системы (16) – (20), которая учитывает влияние на движение звезд эффект абберации и продольный эффект Доплера, должно указать на сближение звезд по спиралеподобным траекториям. Это утверждение следует рассматривать как гипотезу, которую следует обосновать.

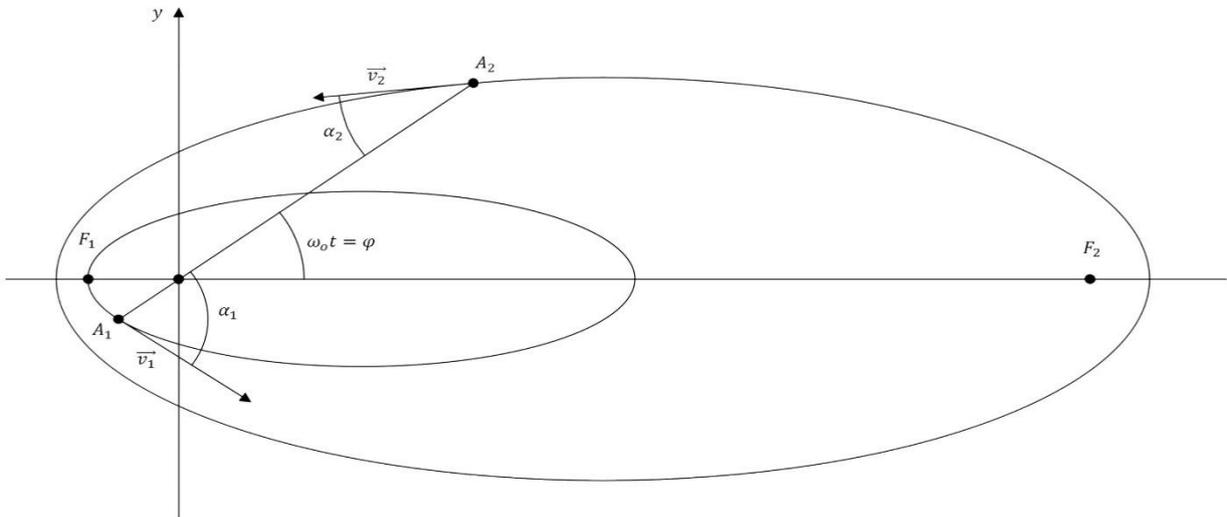


Рис. 1. Изображение подобных эллипсов с центром подобия в ньютоновском центре масс, совпадающим с началом координат и левым фокусом эллипсов. Коэффициент подобия  $k = m_1/m_2 = 2$ . Смещение центра масс при учете светового давления не показано

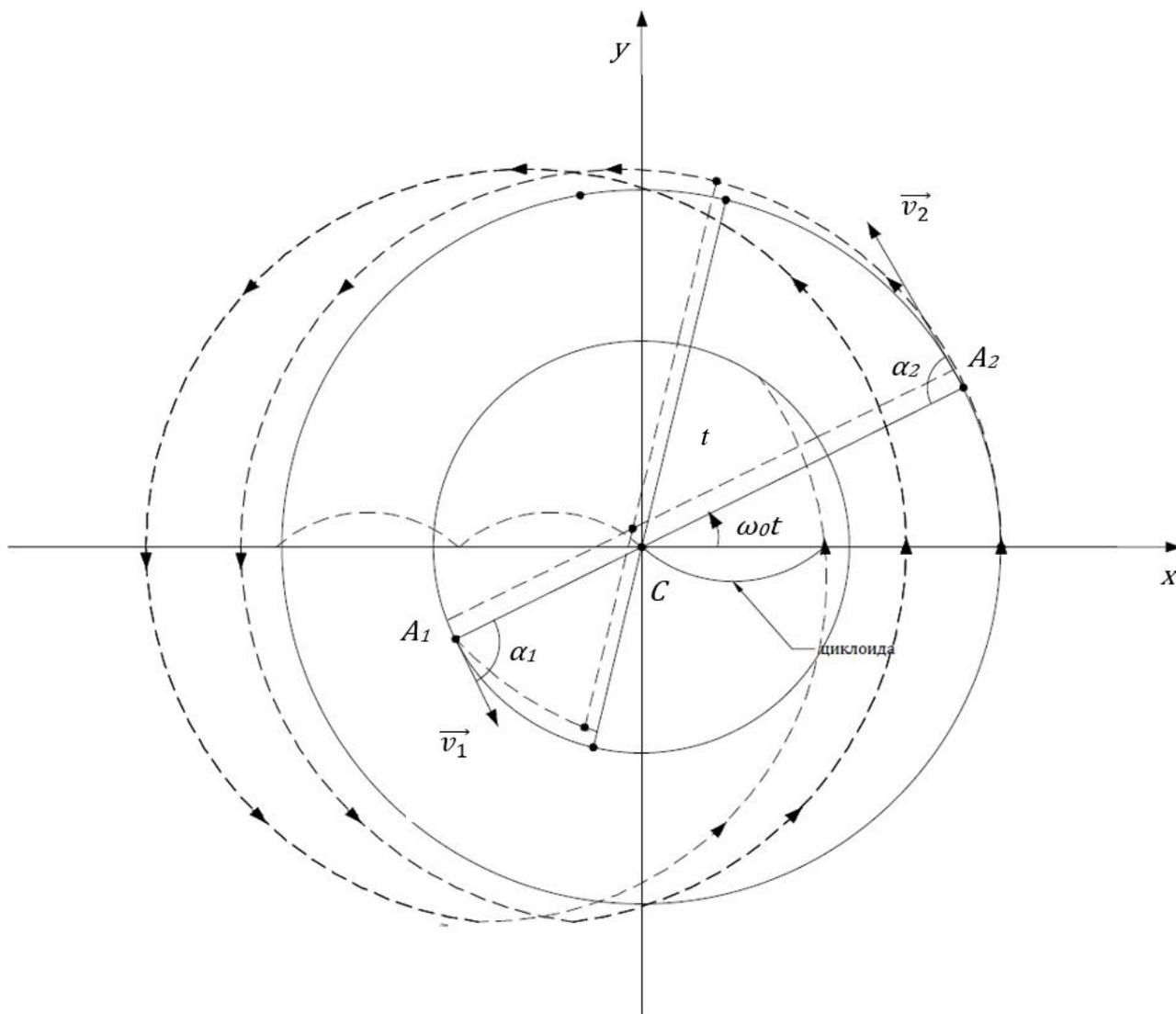


Рис .2. Изображение концентрических окружностей с коэффициентом подобия  $k = m_1/m_2 = 2$ , являющихся траекториями звезд  $A_1, A_2$ . Размеры циклоид приблизительны (преувеличены), как и траектория звезды  $A_2$  (пунктир) при  $B < 0$

### Библиографический список

1. Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. // Вести НАН Беларуси. Сер. Фіз.- мат. навук, 2011, № 4, С. 93-97.
2. Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. // Вести НАН Беларуси. Сер. Фіз.- мат. Навук, 2012, № 3, С. 77-83.
3. Рябушко А.П., Зубко О.Л., Жур Т.А., Боярина И.П., Юринок В.И. // Вести НАН Беларуси. Сер. Фіз.- мат. Навук, 2014, № 2, С. 111-118.
4. Рябушко А.П., Зубко О.Л., Жур Т.А., Боярина И.П., Юринок В.И. // Вести НАН Беларуси. Сер. Фіз.- мат. Навук, 2014, № 3, С. 60-67.
5. Рябушко А.П., Зубко О.Л., Жур Т.А., Неманова И.Т., Боярина И.П., Юринок В.И. // Доклады НАН Республики Казахстан. Физика, 2015, Т.1, № 1, С. 5-14.