

# КАЧЕСТВЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УДК 530.12

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В КОСМОСЕ

А.П. Рябушко<sup>1</sup>, Т.А. Жур<sup>2</sup>, И.Т. Неманова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь, tatyana-zhur@mail.ru

<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь, tatyana-zhur@mail.ru

<sup>3</sup>Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь, e-mail: tatyana-zhur@mail.ru

*Аннотация.* В постньютоновском приближении общей теории относительности впервые выведена формула для вычисления эффекта задержки электромагнитного излучения в гравитационном поле, создаваемом центральным телом и окружающей его средой. Этот эффект является обобщением эффекта Шапиро в вакууме. Дана оценка обобщенного эффекта задержки в гравитационном поле сверхмассивной черной дыры в центре Галактики и межзвездной среды Галактики, который в тысячу раз превосходит эффект Шапиро. Также даны оценки этих эффектов при радиолокации планет Меркурий и Плутон. Указывается на необходимость учета обобщенного эффекта при толковании астрофизических наблюдений, уточнении плотностей межпланетной, межзвездной и межгалактической сред, при экспериментальной проверке релятивистской теории тяготения.

*Ключевые слова:* электромагнитное излучение, гравитационное поле, эффект задержки электромагнитного излучения, постньютоновское приближение общей теории относительности, дифференциальное уравнение.

## ELECTROMAGNETIC RADIATION IN SPACE

A.P. Ryabushko<sup>1</sup>, T.A. Zhur<sup>2</sup>, I.T. Nemanova<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus, e-mail: tatyana-zhur@mail.ru

<sup>2</sup>Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus, e-mail: tatyana-zhur@mail.ru

<sup>3</sup>Belarusian State Technological University, Minsk, Belarus, e-mail: tatyana-zhur@mail.ru

*Abstract.* In the post-Newtonian approximation of the general theory of relativity, the formula for calculating the effect of the delay of electromagnetic radiation in the gravitational field created by the central body and its environment is first derived. This effect is a generalization of the Shapiro effect in a vacuum. Obtained the estimate of the generalized delay effect in the gravitational field of a supermassive black hole in the center of the Galaxy and the interstellar medium of the Galaxy, which is a thousand times greater than the Shapiro effect. Estimates of these effects were also obtained for the radar of the planets, Mercury and Pluto. Indicated the necessity of taking into account the generalized effect when interpreting astrophysical observations, clarifying the densities of interplanetary, interstellar, and intergalactic media during experimental testing of the relativistic theory of gravity.

*Keywords:* electromagnetic radiation, gravitational field, delay effect of electromagnetic radiation, post-Newtonian approximation of the general theory of relativity, differential equation

**Введение.** Астрофизическими наблюдениями установлено, что в космическом пространстве промежутки между планетами, звездами, галактиками заполнены материей в разреженном состоянии (газовая и пылевая среда, метеориты, астероиды, кометы, электромагнитные излучения, возможно, так называемая темная материя и т.п.), плотность которой в среднем имеет порядки: для межпланетной среды  $\rho_{пл} \sim 10^{-18} \div 10^{-22} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , для межзвездной среды  $\rho_{зв} \sim 10^{-23} \div 10^{-25} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , для межгалактической среды  $\rho_{гал} \sim 10^{-26} \div 10^{-29} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  (см. [1]–[5]).

Согласно общей теории относительности (ОТО) в гравитационном поле скорость электромагнитного сигнала (луча света) по часам далекого наблюдателя уменьшается, происходит временная задержка сигнала на некоторую величину  $\Delta t$ , причем  $\Delta t$  тем больше, чем сильнее гравитационное поле. На этом основании предложен четвертый тест для экспериментальной проверки ОТО – радиолокация планеты Меркурий [6]. Напомним, что известны три теста, экспериментально подтверждающие ОТО: знаменитое смещение перигелия Меркурия на  $43''$  за 100 лет,

искривление луча света вблизи края солнечного диска на  $1,75''$ , гравитационное красное смещение спектра звезд. В работах [7]–[10] можно найти исследования и обсуждения предложенного Шапиро в [6] теста, который получил название «эффект Шапиро». Отметим, что в указанных работах влияние гравитационного поля межпланетной среды на задержку светового сигнала не учитывалось.

В 80-х годах XX века белорусской научной школой по проблеме движения тел в ОТО начаты исследования по влиянию на движения тел астрономического типа гравитационных полей межпланетной и межзвездной сред (см. [11]–[13]). В публикациях [14], [15], в частности, рассмотрено влияние гравитационного поля среды на задержку луча света при локации Меркурия и Плутона. Это рассмотрение показало, что в случае Плутона задержка, благодаря гравитационному полю межпланетной среды, на два порядка больше эффекта Шапиро, а в случае Меркурия – на порядок меньше.

В итоге возникает гипотеза: на больших расстояниях в среде эффект Шапиро будет ничтожно малым по сравнению с задержкой в гравитационном поле среды.

В настоящей работе покажем, что в масштабе Галактики (и в других галактиках) гипотеза верна.

**Постановка задачи и вывод уравнения движения луча света.** В работе [11] в постньютоновском приближении (ПНП) ОТО найдена метрика риманова пространства-времени, определяющего гравитационное поле, создаваемое сферически симметричным телом массой  $M$  и окружающим его газопылевым шаром радиусом  $R$ , причем центр шара совпадает с центром тела и началом декартовой системы координат  $Ox^1x^2x^3$ , а плотность газовой среды шара постоянна и равна  $\rho$ .

В соответствии с аппроксимационной процедурой Эйнштейна-Инфельда (см. [16], [17]) найденная в [11] метрика внутри шара записывается в виде:

$$ds^2 = \left(1 + \lambda^2 h_{00}^{in} + \lambda^4 h_{00}^{in}\right) c^2 dt^2 - \delta_{ij} \left(1 - \lambda^2 h_{00}^{in}\right) dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где

$$h_{00}^{in} = -\frac{2\gamma}{r} M + 4\pi\gamma\rho \left(\frac{r^2}{3} - R^2\right), \quad r \leq R; \quad (2)$$

$$h_{00}^{in} = \frac{2\gamma^2}{r^2} M^2 + 4\pi\gamma^2\rho M \left(\frac{13}{3}r - 7R - \frac{r^2}{R}\right), \quad r \leq R; \quad (3)$$

$c$  – скорость света в вакууме;  $\lambda = 1/c$ ;  $t$  – временная координата;  $r$  – расстояние до центра шара;  $\gamma$  – ньютоновская постоянная тяготения;  $\delta_{ij}$  – кронекерова дельта ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ). Члены с  $\rho^2$  в (2), (3) отброшены, как чрезвычайно малые величины (см. Введение).

Будем рассматривать движение луча света по изотропной радиальной траектории внутри шара. Тогда должно выполняться равенство  $ds^2 = 0$  (условие изотропности) и в силу сферической симметрии поля вместо  $\delta_{ij} dx^i dx^j$  можно в (1) написать  $dr^2$ . В итоге приходим к дифференциальному уравнению (ДУ), описывающему радиальное движение луча света в шаре:

$$\left(1 + \lambda^2 h_{00}^{in} + \lambda^4 h_{00}^{in}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \lambda^2 h_{00}^{in}\right) dr^2 = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно преобразовать к виду

$$\pm c \left(1 + \lambda^2 h_{00}^{in} + \lambda^4 h_{00}^{in}\right)^{1/2} dt = \left(1 - \lambda^2 h_{00}^{in}\right)^{1/2} dr. \quad (5)$$

Разделяя переменные и удерживая только члены с  $\lambda$  не выше 4-ой степени, получим дифференциальное уравнение

$$\pm c dt = \left[ 1 - \lambda^2 h_{200}^{in} + \frac{1}{2} \lambda^4 \left( h_{200}^{in} \right)^2 - \frac{1}{2} \lambda^4 h_{400}^{in} \right] dr, \quad (6)$$

определяющее координатную скорость  $v = dr/dt$  светового сигнала, движущего по радиальному направлению и измеренную по часам (по времени  $t$ ) далекого от центра неподвижного наблюдателя. Если  $v > 0$ , то слева в (6) берется знак плюс, если  $v < 0$ , то знак минус.

Подставив в (6) выражения  $h_{200}^{in}$  и  $h_{400}^{in}$  из (2) и (3), приходим к ДУ:

$$\begin{aligned} \pm c dt = & \left\{ 1 + \lambda^2 \left[ \frac{2\gamma M}{r} + 4\pi\gamma\rho \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \lambda^4 \left[ \frac{\gamma^2 M^2}{r^2} + 2\pi\gamma^2 \rho M \left( 7R - \frac{17}{3}r + \frac{r^2}{R} + 4\frac{R^2}{r} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

ограничиваясь членами, содержащими  $\rho$  не выше, чем в первой степени.

Интегрируем уравнение (7), заменив  $\lambda$  на  $1/c$ :

$$\begin{aligned} \pm ct + c_0 = & \int \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{2\gamma M}{r} + 4\pi\gamma\rho \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \right] \right\} dr + \\ & + \frac{1}{c^4} \int \left[ \frac{\gamma^2 M^2}{r^2} + 2\pi\gamma^2 \rho M \left( 7R - \frac{17}{3}r + \frac{r^2}{R} + 4\frac{R^2}{r} \right) \right] dr. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \pm ct + c_0 = & r + \frac{1}{c^2} \left[ 2\gamma M \ln r + 4\pi\gamma\rho \left( R^2 r - \frac{r^3}{9} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{c^4} \left[ -\frac{\gamma^2 M^2}{r} + 2\pi\gamma^2 \rho M \left( 7Rr - \frac{17}{6}r^2 + \frac{r^3}{3R} + 4R^2 \ln r \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $c_0 = const$  – постоянная интегрирования. Для нахождения  $c_0$  решаем задачу Коши, задав следующее начальное условие: точка  $r = r_0$  является источником света в момент времени  $t = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} c_0 = & r_0 + \frac{1}{c^2} \left[ 2\gamma M \ln r_0 + 4\pi\gamma\rho \left( R^2 r_0 - \frac{r_0^3}{9} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{c^4} \left[ -\frac{\gamma^2 M^2}{r_0} + 2\pi\gamma^2 \rho M \left( 7Rr_0 - \frac{17}{6}r_0^2 + \frac{r_0^3}{3R} + 4R^2 \ln r_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Перенеся  $c_0$  в правую сторону равенства (8), заменив  $c_0$  согласно равенству (9) и разделив полученное равенство на  $c$ , находим:

$$\begin{aligned} \pm t = & \frac{r - r_0}{c} + \frac{r_s}{c} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{4\pi\gamma\rho}{c^3} \left[ R^2 (r - r_0) - \frac{1}{9} (r^3 - r_0^3) \right] + \\ & + \frac{1}{c^5} \left\{ \frac{\gamma^2 M^2}{r r_0} (r - r_0) + 2\pi\gamma^2 \rho M \left[ 7R(r - r_0) - \frac{17}{6} (r^2 - r_0^2) + \frac{r^3 - r_0^3}{3R} + 4R^2 \ln \frac{r}{r_0} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $r_g = 2\gamma M/c^2$  – гравитационный радиус центрального тела.

Если в (10) слева берется знак плюс, то  $r > r_0, v > 0$ , т.е. луч света из точки  $r = r_0$  движется от центра. Если же берется знак минус, то  $r < r_0, v < 0$  и луч света движется к центру из источника  $r = r_0$ .

**Обсуждение решения (10) ДУ (7), численные оценки эффектов.** Структура впервые введенной формулы (10) ясно указывает на общую закономерность: при увеличении  $R$  и выполнении условия  $r_g < r \leq R$  задержка электромагнитного сигнала в гравитационном поле среды также увеличивается.

В этой связи рассмотрим ряд частных случаев.

Формула (10), определяющая закономерности радиального движения луча света (электромагнитного излучения) в среде, при  $\rho = 0$  (движение в вакууме) существенно упрощается и приводит к эффекту Шапиро, дающему в поле Шварцшильда задержку  $\Delta t_{uu}^M$  электромагнитного сигнала при радиолокации с Земли проходящей за Солнцем планеты Меркурий величину  $\Delta t_{uu}^M \approx 2 \cdot 10^{-4}$  сек, которая при нынешней точности измерений может быть обнаруженной (см. [9], [10]). Оценка задержки  $\Delta t_{uu}^M$  получена при  $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ .

В публикациях [14], [15] также впервые рассмотрены обобщение эффекта Шапиро с помощью учета гравитационного поля среды в ПНП ОТО на уровне  $\lambda^3 = 1/c^3$  в формуле (10). Добавка  $\Delta t_\rho^M$  к  $\Delta t_{uu}^M$  при той же радиолокации Меркурия имеет значение  $\Delta t_\rho^M \sim 10^{-5}$  сек, т.е. на порядок меньше  $\Delta t_{uu}^M$ . Но при аналогичной радиолокации Плутона задержка сигнала  $\Delta t_{uu}^{II} \sim 10^{-4}$  сек, а  $\Delta t_\rho^{II} \sim 10^{-2}$  сек, т.е. на два порядка превосходит  $\Delta t_{uu}^{II}$ . Оценки получены при  $\rho = 10^{-20}$  г·см<sup>-3</sup>,  $R = 10^{20}$  см.

Выше численные оценки эффекта задержки сигнала получены на уровне  $\lambda^3 = 1/c^3$ , но формула (10) содержит члены уровня  $\lambda^5 = 1/c^5$ , не зависящие и зависящие от плотности среды  $\rho$ . Численные оценки этих членов и для Меркурия, и для Плутона дают задержку сигнала при их радиолокации на ничтожно малую величину порядка  $10^{-11}$  сек (при тех же  $\rho$  и  $R$ ).

Расширяя область применимости формулы (10), обобщающей эффект Шапиро, отметим, что звезды «плавают», образно говоря, в межзвездной среде, плотность которой в среднем  $\rho_{зв} \sim (10^{-25} \div 10^{-23})$  г·см<sup>-3</sup>, а скопления звезд (галактики) «плавают» в межгалактической среде, которая еще более разряжена по сравнению с межзвездной и ее плотность  $\rho_{гал} \sim (10^{-26} \div 10^{-28})$  г·см<sup>-3</sup> (см., например, монографии [1]–[5], [18], в которых приводятся эти плотности, полученные с помощью астрофизических наблюдений). В этих же монографиях содержатся экспериментальные данные о массе сверхмассивной черной дыры (СМЧД) в центре Галактики (ЦГ)  $M_{СМЧД} = 4 \cdot 10^6 M_\odot \sim 8 \cdot 10^{39}$ , и о диаметрах Галактики и других галактик:  $D_{Гал} \approx 30000$  парсек = 30 кпк,  $D_{гал} \approx (5 \div 50)$  кпк. Напомним, что 1 парсек =  $3 \cdot 10^{18}$  см. Отметим также, что вся масса Галактики  $M_{Гал} = 2 \cdot 10^{11} M_\odot$ , а массы галактик  $M_{Гал} \approx (10^7 \div 10^{12}) M_\odot$ . Расстояние Солнца от ЦГ равно  $r_\odot = 7,5$  кпк =  $2,25 \cdot 10^{22}$  см.

Имея перечисленные экспериментальные данные, можно получить, пользуясь формулой (10), численные оценки временных задержек электромагнитных сигналов в Галактике и в скоплениях галактик.

Например, при локации с Земли звезды, находящейся со стороны Земли от ЦГ на расстоянии  $r_{зв} = 10^{13}$  см, время запаздывания сигнала в шварцшильдовском поле ЦГ согласно эффекту Шапиро имеет величину, вычисляемую по формуле (10), в которой отбрасываются члены уровня  $\lambda^5$  и полагается  $\rho = 0$ :

$$2\Delta t_{ш}^{зв} = 2 \frac{2\gamma}{c^3} M_{смпд} \ln \frac{r_{\odot}}{r_{зв}} \approx \frac{4\gamma}{c^3} \cdot 8 \cdot 10^{39} \ln(2,25 \cdot 10^{22} / 10^{13}) \approx 1721 \text{ сек} \approx 0,48 \text{ час.} \quad (11)$$

Обобщая эффект Шапиро (11) с помощью учета гравитационного поля межзвездной среды, оценим члены уровня  $\lambda^3 = 1/c^3$ , пропорциональные  $\rho$  в формуле (10). Для этого, принимая плотность среды в Галактике  $\rho_{Гал} = 10^{-24}$  г·см<sup>-3</sup> и радиус Галактики  $R_{Гал} = 15$  кпк, вычисляем (при той же локации, при которой вычислялось запаздывание (11)) запаздывание сигнала, обязанное гравитационному полю среды в Галактике:

$$2\Delta t_{\rho}^{Гал} = \frac{8\pi\gamma}{c^3} \rho_{зв} \left[ R_{Гал}^2 (r_{\odot} - r_{зв}) - \frac{1}{9} (r_{\odot}^3 - r_{зв}^3) \right] \approx 2,74 \cdot 10^6 \text{ сек} \approx 762 \text{ час.} \quad (12)$$

Как видим, величина запаздывания (12) более, чем на 3 порядка превосходит запаздывание Шапиро (11):  $762/0,48 \approx 1,6 \cdot 10^3$ .

К проведенному обсуждению закономерности (10) добавим, что в гравитационном поле межгалактической среды эффект задержки электромагнитного излучения может быть на много порядков больше по сравнению с задержкой в межзвездной среде, так как для межгалактической среды  $R$  можно брать на много порядков больше, чем для межзвездной.

Кроме этого, в межгалактической среде может отсутствовать явный центр притяжения (в масштабах Вселенной среда однородна), а тогда следует считать, что  $M = 0$  в формуле (10), т.е. эффект Шапиро отсутствует. Задержка электромагнитного излучения обязана только гравитационному полю среды и ее величина вычисляется с помощью чрезвычайно упрощившейся формулы (10) (см. (12)):

$$\pm t = \frac{r - r_0}{c} + \frac{4\pi\gamma\rho}{c^3} \left[ R^2 (r - r_0) - \frac{1}{9} (r^3 - r_0^3) \right]. \quad (13)$$

**Использование эффекта (10) в интерпретации астрофизических наблюдений.** Отметим важность учета влияния гравитационных полей межзвездных и межгалактических сред на происходящие в космосе процессы и на толкование экспериментальных данных.

Одним из основных методов исследования космоса экспериментальной астрофизикой является анализ гравитационного красного смещения в спектрах электромагнитных излучений звезд и галактик. Чем больше масса звезды или галактики, тем сильнее создаваемое ими гравитационное поле и больше гравитационное красное смещение в спектрах, принимаемое на Земле. По величине красного смещения определяют массу звезды или галактики. Если не учитывать гравитационного поля межзвездной или межгалактической среды, то масса звезды или галактики будет определена неверно и погрешность будет тем больше, чем больше плотность среды и больше расстояние от Земли до звезды или галактики.

Определяя в Галактике расстояния до звезд методом электромагнитной локации с Земли, следует иметь в виду, что если плотность среды в Галактике  $\rho_{Гал} \sim 10^{-26}$  г·см<sup>-3</sup>,

то должна происходить задержка сигнала, например, в случае звезд в окрестности ЦГ, примерно на 762 часа по оценке (12). Этому времени задержки соответствует расстояние (в одну сторону)  $\Delta r_\rho = 1,37 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см} = 4 \cdot 10^{16} \text{ см} \sim 3 \cdot 10^3 \text{ а.е.}$ , т.е. расстояния до звезд на самом деле меньше на  $\Delta r_\rho$  расстояний, вычисленных без учета гравитационных полей межзвездных сред.

Поэтому при реконструкции орбит компонент двойных звезд и их центра масс (см.[19]–[21]), находящихся в окрестностях ЦГ, для получения более точных результатов следует из экспериментально полученного времени, затраченного на локацию звезд, вычесть  $\Delta t_\rho^{\text{Гал}}$  (для рассмотренного выше случая вычесть  $762 / 2 = 381$  час).

Формула Рябушко (10), обобщающая эффект Шапиро, может быть использована для экспериментальной проверки ОТО и правильности закона распределения и величины плотности  $\rho$  межзвездной и, возможно, межпланетной и межгалактической сред.

Это достаточно сложная проблема должна решаться астрофизиками-экспериментаторами.

### Библиографический список

1. Мартынов Д.Я. Курс общей астрофизики. 4-е изд., М. «Наука». 1988. 640 с.
2. Ипатов С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе. М. Эдиториал УРСС. 2000. 320 с.
3. Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии. М. Эдиториал УРСС. 2004. 544 с.
4. Стражев В. И. К тайнам Вселенной. Минск. РИВШ. 2006. 160с.
5. Засов А. В., Постнов К. А. Общая астрофизика. 2-е изд. Фрязино. Век 2. 2011. 576 с.
6. Shapiro I. I. Fourth Test of General Relativity // Phys. Rev. Lett. 1964. v.13. pp. 789.
7. Дашевский В. М. Четвертая проверка общей теории относительности (ОТО) // Усп. физ. Наук. 1095. Т. 87. С. 373.
8. Shapiro I. I. Testing General Relativity with Radar // Phys. Rev. 1966 v.141. p. 1219.
9. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М.. Наука. 1967. 656 с.
10. Шапиро И. И. Радиолокационные наблюдения планет // Усп. физ. Наук. 1969. Т. 99. вып. 2. С. 319.
11. Рябушко А. П., Неманова И.Т. Гравитационное поле притягивающего центра, окруженного пылевидным облаком, в постньютоновском приближении общей теории относительности // Докл. АН БССР. 1983. №10. С. 889–892.
12. Рябушко А. П., Неманова И.Т. Релятивистские эффекты движения пробных тел в газопылевом шаре с притягивающим центром // Докл. АН БССР. 1984. №9. С. 806–809.
13. Рябушко А. П., Неманова И.Т. Гравитационное поле газопылевого шара с двумя притягивающими центрами в общей теории относительности // Докл. АН БССР. 1987. №6. С. 519–522.
14. Рябушко А. П., Неманова И.Т., Снитко А. А. // Тезисы докл. Всесоюзн. конф. «Соврем. теоретич. и exper. проблемы теор. относит. и гравитации». М. 1984. С. 270–271.
15. Неманова И.Т. Релятивистское движение тел в среде // Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Минск. БГУ. 1987.
16. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles In General Relativity Theory // Canad. Journ. Math. 1949. V. 1. pp. 209–241.
17. Рябушко А. П. Движение тел в ОТО. Мн. Выш. шк. 1979. 240 с.
18. Бочкарев Н. Г. Основы физики межзвездной среды. М., МГУ, 1992. 392 с.
19. Тарасенко А. Н., Комаров С. О., Горбацевич А. К. Реконструкция движения компактного объекта вблизи черной дыры // Труды IX Межд. конф. «Voluyai-Gauss-Lobachevsky – 9» (BGL – 9). Минск. 2016. С. 136–143.
20. Комаров С. О., Горбацевич А. К., Тарасенко А. Н. Исследование движения двойной звезды в сильном внешнем гравитационном поле с помощью регистрируемого электромагнитного излучения // Сб. научн. трудов VI Конгресса физиков Беларуси. Ин-т физики НАН Беларуси. Минск. 2017. С. 23–25.
21. Комаров С. О., Горбацевич А. К., Тарасенко А. Н. Красное смещение излучения точечного источника, движущегося в поле вращающейся черной дыры // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т.62. №6. С. 668–673.