УДК 530.12 DOI 10.52348/2712-8873_MMTT_2021_3_23

ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ В СРЕДЕ

А.П. Рябушко[1], Т.А. Жур[2]

[1] *Белорусский национальный технический университет, Беларусь, Минск,* tatyana-zhur@mail.ru

[2] *Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск,* tatyana-zhur@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена ограниченная круговая задача трех тел в однородной и неоднородной средах. Особое внимание уделено точкам либрации, выведены условия, при которых они существуют или не могут существовать в ньютоновском приближении общей теории относительности. Предсказывается ряд закономерностей и ньютоновских новых эффектов, например, движение центра масс двух тел A_1, A_2 по циклоиде, «кружевной» эффект движения этих тел и др., возникающих благодаря воздействию на тела гравитационных полей сред. Произведены численные оценки этих закономерностей и эффектов в Солнечной системе и других планетарных системах, в межзвездной и межгалактической средах. Смещения, связанные с предсказываемыми эффектами (например, смещение центра масс двух тел), могут достигать многих миллиардов километров за один оборот системы двух тел около своего центра масс. Обсуждаются возможности использования этих закономерностей и эффектов в теориях эволюции планетарных систем, структуры галактик и их ансамблей.

Ключевые слова: три тела, точки ρ-либрации, однородная и неоднородная плотность сред, центр масс, циклоида, ньютоновская небесная механика.

LIBRATION POINTS IN THE MEDIUM

A.P. Ryabushko[1], T.A. Zhur[2]

[1] *Belarusian National Technical University, Belarus, Minsk, tatyana-zhur@mail.ru*

[2] *Belarusian State Agrarian Technical University, Belarus, Minsk, tatyana-zhur@mail.ru*

Abstract. The restricted circular three-body problem in homogeneous and inhomogeneous mediums is considered. Particular attention is paid to libration points. The conditions under which they exist or cannot exist in the Newtonian approximation of the general theory of relativity are derived. A number of regularities and Newtonian new effects is predicted, for example, the movement of the center of mass of two bodies A_1, A_2 along a cycloid, the “lace” effect of the movement of these bodies, etc., arising due to the action of the gravitational fields of the mediums on the bodies. Numerical estimates of these regularities and effects in the solar system and other planetary systems in the interstellar and intergalactic medium have been provided. The displacements associated with the predicted effects (for example, the displacement of the center of mass of two bodies) can reach billions of kilometers per revolution of the system of two bodies near its center of mass. The possibilities of using these regularities and effects in the theories of the evolution of planetary systems are researched. The structures of galaxies and their ensembles are discussed.

Keywords: three bodies, ρ-libration points, homogeneous and inhomogeneous density of mediums, center of mass, cycloid, Newtonian celestial mechanics.

Введение. Задача о движении трех и большего числа тел в небесной механике поставлена после открытия в 1686 году Ньютоном закона всемирного тяготения (см. [1], [2]), но точное решение этой задачи натолкнулось на непреодолимые трудности. Только через 80 лет в 1767 году Эйлер впервые обнаружил три простые точные частные решения (коллинеарные эйлеровы точки либрации L_1, L_2, L_3 [3]), а в 1772 году Лагранж дополнительно указал на существование еще двух точных частных решений задачи трех тел (треугольные лагранжевы точки либрации L_4, L_5 [4]).

В настоящее время в связи с успехами и перспективами дальнейшего освоения околосолнечного пространства, организации наблюдений дальнего космоса эти решения приобретают важное значение при разработке определенных схем полетов космических аппаратов, при использовании в случае ограниченной задачи трех тел коллинеарных L_1, L_2, L_3 и треугольных L_4, L_5 точек либрации в качестве своеобразных космических портов для размещения в них внеземных исследовательских лабораторий, в частности, телескопов и прочих наблюдательных технических устройств, с помощью которых изучаются Солнечная система, Галактика и Вселенная.

Имеется ряд проектов и программ по осуществлению запуска наблюдательной техники в космос. Например, знаменитый телескоп «Хаббл» и аппарат «LISA» работали в окрестности эйлеровой точки L_2, телескоп «Уэбб» – преемник телескопа «Хаббл» – в 2020 г. послан в окрестность этой точки, обсерватория «WMAP» работала в окрестности точки L_1 между Солнцем и Землей на расстоянии 1,5 млн. км от Земли, космический аппарат SOHO еще ранее в 1995 году был выведен в эту окрестность с целью изучения Солнца и его окрестностей, в результате получена богатая информация о состоянии солнечной атмосферы, о глубинных слоях Солнца, о солнечном ветре, об активности солнечной короны, а также обнаружено большое количество околосолнечных комет. Осуществлен запуск в космос многих других космических аппаратов (см. [5], [6]).

Проведенный краткий обзор о роли либрационных точек в небесной механике показывает, что эйлеровы и лагранжевы решения представляют значительный теоретический и практический интерес. Исследование и использование этих решений в астрономии, астродинамике, астрофизике без учета релятивистских поправок, возникающих согласно эйнштейновской теории тяготения, т.е. общей теории относительности (ОТО), является недостаточным. Поэтому, начиная с 60-х годов прошлого века, белорусской научной школой по проблеме движения тел в космосе проводятся исследования по проблеме релятивистского движения тел и его устойчивости в «пустоте» (см. монографии [7], [8]).

Как известно [9], [6], [10] – [12], пространство не является «пустым», а заполнено межпланетной, межзвездной, межгалактической средами, включающими всевозможные излучения («видимая» материя). В настоящее время астрофизиками и физиками-теоретиками выдвинуты гипотезы (см., например, [6], [12], [13], [14]), в которых утверждается, что кроме видимой материи во Вселенной существуют так называемые «темная» материя и «темная энергия», которые обладают пока неизвестными человечеству свойствами, но ответственны, по-видимому, за антигравитацию. Учет влияния гипотетической материи на движение тел нами не проводится. Плотность ρ сред чрезвычайно мала:

межпланетная $\rho_{мп} \sim \left(10^{-18} \div 10^{-23}\right)\ г \cdot см^{-3}$, (1)

межзвездная $\rho_{мз} \sim \left(10^{-24} \div 10^{-26}\right)\ г \cdot см^{-3}$, (2)

межгалактическая $\rho_{мг} \sim \left(10^{-27} \div 10^{-29}\right)\ г \cdot см^{-3}$. (3)

Общая масса этой видимой (наблюдаемой) материи превосходит массу всех галактик (см., например, [12], гл.1, §1.2). Благодаря существованию сред возникает фоновое гравитационное поле, которое существенно влияет на происходящие в космосе процессы, в частности, вызывает дополнительное уменьшение скорости света, изменяет траектории движения планет, звезд, галактик и их собственные угловые моменты импульса, приводит к смещению или даже уничтожению точек либрации в некоторых системах тел и т. д. и т. п.

Отметим, что в проблеме движения тел существует ряд пробелов (белых пятен), которые во времена интенсивного изучения и освоения космоса необходимо ликвидировать. Одним из пробелов является следующий. Учет фонового гравитационного поля видоизменяет дифференциальные уравнения движения тел в космосе. Эти уравнения не являются грубыми (g-устойчивыми), то есть малые изменения уравнений могут приводить к существенным изменениям их решений (см., например, [7], [8]). Из проведенного выше обзора ясно, что для разных целей широко востребованы точки либрации, но их положение в пространстве и условия существования в среде не выяснены.

Логично, что целью настоящей работы является исследование, вносящее ясность в проблему точек либрации в среде.

Формулировка задачи, символика и вывод необходимых уравнений.

Решаем ограниченную *круговую* задачу трех тел A_1, A_2, A_3, имеющих массы m_1, m_2, m_3. Тела A_1, A_2 – основные, тело A_3 – пробное. Поэтому $m_1 >> m_3,\ m_2 >> m_3$. Тело A_3 не влияет на движение тел A_1, A_2. По определению полагаем $m_3 = 0$. Движение тел происходит в однородной среде, плотность которой $\rho = const$, в шаре радиусом R.

Задачу решаем в 2 этапа: I этап. Ньютоновское приближение (НП) ОТО; II этап. Постньютоновское приближение (ПНП) ОТО.

I этап. НП ОТО. В пространстве вводим прямоугольную декартову систему координат $Ox^1x^2x^3$ и без ограничения общности считаем, что тела двигаются в координатной плоскости x^1Ox^2, т.е. в плоскости $x^3 = 0$. Символику для координат точек M и тел $A_k, k = 1,2,3$ выбираем следующей: $M\left(x^1, x^2, x^3\right)$, $A_k\left(a_k{}^1, a_k{}^2, a_k{}^3\right)$. Так как тела A_k двигаются в плоскости $x^3 = 0$, то всегда $a_k{}^3 = 0$. Центр масс (ЦМ) C тел A_1 и A_2 в НП ОТО в пустоте определяется по правилу:

$$C\left(c^1, c^2, 0\right),\ c^i = \frac{m_1 a_1{}^i + m_2 a_2{}^i}{m_1 + m_2},\ i = 1 \text{ и } 2\,. \tag{4}$$

Систему координат выбираем барицентрической, т.е. в пустоте $c^i = 0$. Как показано в [15], уравнения движения (УД) двух тел в НП ОТО в однородной среде $(\rho = const)$ имеют вид:

$$\ddot{a}^i_{1\rho} = -\frac{\gamma m_2}{r^3_{12\rho}}\left(a^i_{1\rho} - a^i_{2\rho}\right) - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a^i_{1\rho}\,, \tag{5}$$

$$\ddot{a}^i_{2\rho} = -\frac{\gamma m_1}{r^3_{12\rho}}\left(a^i_{2\rho} - a^i_{1\rho}\right) - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a^i_{2\rho}\,, \tag{6}$$

где координаты тел A_1 и A_2 снабжены индексом ρ, так как при учете плотности ρ среды координаты этих тел отличаются от их координат в пустоте; $r_{12\rho} = \left[\left(a^1_{2\rho} - a^1_{1\rho}\right)^2 + \left(a^2_{2\rho} - a^2_{1\rho}\right)^2\right]^{1/2}$ – ньютоновское расстояние между телами A_1 и A_2 в среде (точнее – расстояние между их центрами масс).

ЦМ тел A_1 и A_2 в среде C_ρ следует определить следующим образом:

$$C_\rho\left(c^1_\rho, c^2_\rho, 0\right),\ c^i_\rho = \frac{m_1 a_{1\rho}{}^i + m_2 a_{2\rho}{}^i}{m_1 + m_2}\,. \tag{7}$$

Умножив (5) на m_1, а (6) на m_2 и сложив полученные равенства, находим в силу (7) и (5), (6):

$$m_1\ddot{a}^i_{1\rho} + m_2\ddot{a}^i_{2\rho} = \left(m_1 + m_2\right)\ddot{c}^i_\rho = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho\left(m_1 m^i_{1\rho} + m_2 a^i_{2\rho}\right) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho\left(m_1 + m_2\right)c^i_\rho. \tag{8}$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянным коэффициентом

$$\ddot{c}^i_\rho + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho c^i_\rho = 0\,, \tag{9}$$

общим решением которого является функция

$$c_\rho^i = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{4}{3}\pi\gamma\rho}\, t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{4}{3}\pi\gamma\rho}\, t\right), \tag{10}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные интегрирования. Решая задачу Коши для дифференциального уравнения (9) при начальных условиях $c_\rho^i(0)=0,\ \dot{c}_\rho^i(0)=0$, получаем $C_1=0$, $C_2=0$, т.е. при любом t имеем

$$c_\rho^i \equiv 0. \tag{11}$$

Следовательно, в НП ОТО при учете гравитационного поля однородной среды $(\rho = const)$ система координат является барицентрической, если она в пустоте такая.

Интегрирование системы (5), (6) проводим по стандартной известной схеме (см., например, [7], §23). В итоге получаем параметрические уравнения траекторий тел A_1 и A_2 $(m_1 \ge m_2)$:

$$A_1\left(a_{1\rho}^1, a_{1\rho}^2\right) \begin{cases} a_{1\rho}^1 = -\dfrac{m_2 r_{12\rho}}{m_1+m_2}\cos\varphi, \\ a_{1\rho}^2 = -\dfrac{m_2 r_{12\rho}}{m_1+m_2}\sin\varphi; \end{cases} \quad A_2\left(a_{2\rho}^1, a_{2\rho}^2\right) \begin{cases} a_{2\rho}^1 = \dfrac{m_1 r_{12\rho}}{m_1+m_2}\cos\varphi, \\ a_{2\rho}^2 = \dfrac{m_1 r_{12\rho}}{m_1+m_2}\sin\varphi, \end{cases} \tag{12}$$

где с точностью до вековых членов, первой степени ρ и второй степени e ньютоновское расстояние между телами A_1 и A_2 $r_{12\rho}$ определяется уравнением относительной орбиты тел

$$\frac{1}{r_{12\rho}} = \frac{1+e\cos\varphi}{p} - \frac{2\pi p^2\rho}{m_1+m_2} e\varphi\sin\varphi = \frac{1+e\cos\left[\left(1+\alpha_\rho^{\text{н}}\right)\varphi\right]}{p}, \quad \alpha_\rho^{\text{н}} = \frac{2\pi p^3\rho}{m_1+m_2}, \tag{13}$$

угол $\varphi = \omega t$, ω – угловая скорость тел A_1 и A_2 на их орбитах и является переменной величиной.

Отметим частный случай: система (5), (6) допускает решением движение тел A_1 и A_2 по концентрическим окружностям с центром в начале координат. Тогда параметрические уравнения их траекторий также имеют вид (12) с той лишь разницей, что $r_{12\rho} = r_{0\rho} = const$, но угловая скорость $\omega_{0\rho}$ тел на их круговых орбитах $\left(\varphi = \omega_{0\rho} t\right)$

$$\begin{cases} a_{1\rho}^1 = -\dfrac{m_2}{m} r_{0\rho}\cos\varphi, \\ a_{1\rho}^2 = -\dfrac{m_2}{m} r_{0\rho}\sin\varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} a_{2\rho}^1 = \dfrac{m_1}{m} r_{0\rho}\cos\varphi, \\ a_{2\rho}^2 = \dfrac{m_1}{m} r_{0\rho}\sin\varphi, \end{cases} \quad m = m_1 + m_2 \tag{14}$$

определяется равенством

$$\omega_{0\rho}^2 = \frac{\gamma m}{r_{0\rho}^3} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho, \tag{15}$$

т.е. она будет постоянной, одинаковой для обоих тел A_1, A_2 и больше угловой скорости в пустоте $\omega_0 = \sqrt{\gamma m / r_0^3}$. Имеем ньютоновский эффект увеличения угловой скорости в однородной среде. Заметим, что для круговых орбит их радиусы в НП ОТО одинаковые в пустоте и в среде: $r_0 = r_{0\rho}$. Поэтому в формулах (14), (15) вместо $r_{0\rho}$ можно писать r_0.

Ньютоновские УД пробного тела A_3 и точки ρ-либрации. Принимаем в НП ОТО движения тел A_1 и A_2 круговыми ($e=0,\ r_{12\rho} = r_{0\rho} = r_0 = p = const$), а тело A_3 в случае пустого пространства $(\rho = 0)$ находящимся в одной из пяти точек либрации $L_1 - L_5$, т.е. в одной из коллинеарных точек L_1, L_2, L_3 или в одной из треугольных точек либрации L_4, L_5 (см. рис. 1).

Зная метрику пространства-времени, порожденного телами A_1, A_2 и материальным шаром, которая найдена в [16], (14.5), из уравнений геодезической (см., например, [7], [17], [18]) при $\alpha = i$ после необходимых преобразований получаем ньютоновские УД тела $A_3\left(a^1_{3\rho}, a^2_{3\rho}, 0\right)$ в однородной среде $(\rho = const)$:

$$\ddot{a}^i_{3\rho} + \frac{\gamma m_1}{r^3_{31\rho}}\left(a^i_{3\rho} - a^i_{1\rho}\right) + \frac{\gamma m_2}{r^3_{32\rho}}\left(a^i_{3\rho} - a^i_{2\rho}\right) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho a^i_{3\rho}, \tag{16}$$

где $r_{31\rho} = \left|\vec{a}_{3\rho} - \vec{a}_{1\rho}\right|$, $r_{32\rho} = \left|\vec{a}_{3\rho} - \vec{a}_{2\rho}\right|$ – ньютоновские расстояния тела A_3 до тел A_1 и A_2 в среде внутри шара, $\vec{a}_{k\rho}$ имеет координаты $a^i_{k\rho}, k = 1,2,3$. Как видим, в уравнениях (16) справа появился по сравнению с классическим случаем в пустоте вместо нуля дополнительный член, что возможно вызовет изменения мест расположения тела A_3, т.е. положений точек либрации $L_1 - L_5$, или даже при некоторых условиях к отсутствию равновесных решений системы (16).

Естественным образом формулируется в НП ОТО

Задача 1. Выяснить, существуют ли смещения эйлеровых и лагранжевых точек либрации в зависимости от величины ρ и условия, при которых, может быть, система (16) не имеет либрационных решений в случае круговых движений тел в НП ОТО.

Решение. Решение системы (16) будем, как и в случае пустого пространства, искать в виде:

$$a^1_{3\rho} = a^1_{30\rho}\cos\omega_{0\rho}t - a^2_{30\rho}\sin\omega_{0\rho}t, \quad a^2_{3\rho} = a^1_{30\rho}\sin\omega_{0\rho}t + a^2_{30\rho}\cos\omega_{0\rho}t, \tag{17}$$

где $a^1_{30\rho} = const$, $a^2_{30\rho} = const$ – искомые координаты точек либрации при учете гравитационного поля однородной среды. Равенства (17) означают, что мы ищем точки либрации $L^\rho_n,\ n = 1,\ldots,5$ во вращающейся вокруг точки O с угловой скоростью $\omega_{0\rho}$ из (15) системе координат $Oa^1_\rho a^2_\rho$.

$$\ddot{a}^1_{3\rho} = -\omega^2_{0\rho}\left(a^1_{30\rho}\cos\omega_{0\rho}t - a^2_{30\rho}\sin\omega_{0\rho}t\right),\ \ddot{a}^2_{3\rho} = -\omega^2_{0\rho}\left(a^1_{30\rho}\sin\omega_{0\rho}t + a^2_{30\rho}\cos\omega_{0\rho}t\right) \tag{18}$$

Найденные в (18) $\ddot{a}^1_{3\rho}$, $\ddot{a}^2_{3\rho}$ и $a^1_{3\rho}$, $a^2_{3\rho}$ из (17) подставляем в систему (16). После необходимых преобразований приходим к системе двух алгебраических уравнений для нахождения неизвестных констант $a^1_{30\rho}$ и $a^2_{30\rho}$:

$$a\cos\omega_{0\rho}t + b\sin\omega_{0\rho}t = 0, \qquad a\sin\omega_{0\rho}t - b\cos\omega_{0\rho}t = 0, \tag{19}$$

где

$$a = -\omega^2_{0\rho}a^1_{30\rho} + \frac{\gamma m_1}{r^3_{31\rho}}\left(a^1_{30\rho} + \frac{m_2}{m}r_0\right) + \frac{\gamma m_2}{r^3_{32\rho}}\left(a^1_{30\rho} - \frac{m_1}{m}r_0\right) + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a^1_{30\rho}, \tag{20}$$

$$b = \omega^2_{0\rho}a^2_{30\rho} - \frac{\gamma m_1}{r^3_{31\rho}}a^2_{30\rho} - \frac{\gamma m_2}{r^3_{32\rho}}a^2_{30\rho} - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a^2_{30\rho}. \tag{21}$$

Решением системы (19) являются $a = 0$, $b = 0$, которые можно, заменив $\omega^2_{0\rho}$ его выражением (15), окончательно записать в виде:

$$-\frac{\gamma m}{r^3_0}a^1_{30\rho} + \frac{\gamma m_1}{r^3_{31\rho}}\left(a^1_{30\rho} + \frac{m_2}{m}r_0\right) + \frac{\gamma m_2}{r^3_{32\rho}}\left(a^1_{30\rho} - \frac{m_1}{m}r_0\right) = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\gamma m}{r^3_0}a^2_{30\rho} - \frac{\gamma m_1}{r^3_{31\rho}}a^2_{30\rho} - \frac{\gamma m_2}{r^3_{32\rho}}a^2_{30\rho} = 0. \tag{23}$$

Отмечаем очень важное обстоятельство: благодаря наличию в $\omega^2_{0\rho}$ члена $4\pi\gamma\rho/3$ в выражениях (20), (21) и уравнениях (22), (23) уничтожились члены $(4/3)\pi\gamma\rho a^1_{30\rho}$ и

$(4/3)\pi\gamma\rho a^2_{30\rho}$ (!). Это означает, что уравнения (22) и (23) эквивалентны уравнениям, которые решались Эйлером и Лагранжем. Следовательно, эйлеровы и лагранжевы точки либрации $L_1 - L_5$ существуют и гравитационным полем однородной среды в НП ОТО никуда не смещаются в случае круговых движений тел, но угловая скорость движения всех точек либрации $L_1 - L_5$ и тел A_1, A_2 по их окружностям согласно (15) больше, чем в пустоте ω_0.

Задача 1 решена, но представляет интерес задача того же типа в случае неоднородного распределения плотности, например, для центрально симметрического распределения плотности среды внутри шара:

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right),\ 0 \le r \le R;\ \rho = 0 \quad \text{при} \quad R \le r < +\infty\,. \tag{24}$$

Формулируем условие этой задачи.

Задача 2. Выяснить, существуют ли в НП ОТО круговые движения тел и Эйлеровы и Лагранжевы точки либрации в ограниченной задаче трех тел внутри шара с распределением плотности среды (24).

Решение. В работе [19] выведены УД двух тел в НП ОТО в среде (24), которые в принятых здесь обозначениях имеют вид $(i = 1 \text{ и } 2)$:

$$\ddot{a}^i_{1\rho_0} = -\frac{\gamma m_2}{r^3_{12\rho_0}}\left(a^i_{1\rho_0} - a^i_{2\rho_0}\right) - 2\pi\gamma\rho_0\left(\frac{2}{3} - \frac{a_1}{2R}\right)a^i_{1\rho_0},\quad a_1 \le R\,, \tag{25}$$

$$\ddot{a}^i_{2\rho_0} = -\frac{\gamma m_1}{r^3_{12\rho_0}}\left(a^i_{2\rho_0} - a^i_{1\rho_0}\right) - 2\pi\gamma\rho_0\left(\frac{2}{3} - \frac{a_2}{2R}\right)a^i_{2\rho_0},\quad a_2 \le R\,, \tag{26}$$

где $a^i_{1\rho_0}$, $a^i_{2\rho_0}$ – координаты тел A_1, A_2, учитывающие влияние на движения тел гравитационного поля среды; $r_{12\rho_0} = \left[\left(a^1_{2\rho_0} - a^1_{1\rho_0}\right)^2 + \left(a^2_{2\rho_0} - a^2_{1\rho_0}\right)^2\right]^{1/2}$ – ньютоновское расстояние между телами A_1 и A_2, находящимися в среде (24); a^i_1, a^i_2 – координаты тел A_1, A_2 в пустоте; $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $a_1 = \left|\vec{a}_1\right|$, $a_2 = \left|\vec{a}_2\right|$ – ньютоновские радиусы-векторы тел A_1, A_2 и их расстояния до начала координат соответственно. Последние члены справа в (25), (26) пропорциональны плотности ρ_0, которую из-за ее малости (см. (1) – (3)) учитываем только в первой степени.

Выясним, допускаются ли круговые движения тел A_1, A_2 системой (25), (26). Для этого запишем параметрические уравнения круговых орбит тел A_1 и A_2 $\left(r_0 = r_{12\rho_0} = const\right)$:

$$A_1\left(a^1_{1\rho_0}, a^2_{1\rho_0}\right)\ \begin{cases} a^1_{1\rho_0} = -\dfrac{m_2}{m} r_0 \cos\left(\omega_{\rho_0} t\right), \\ a^2_{1\rho_0} = -\dfrac{m_2}{m} r_0 \sin\left(\omega_{\rho_0} t\right); \end{cases} \quad A_2\left(a^1_{2\rho_0}, a^2_{2\rho_0}\right)\ \begin{cases} a^1_{2\rho_0} = \dfrac{m_1}{m} r_0 \cos\left(\omega_{\rho_0} t\right), \\ a^2_{2\rho_0} = \dfrac{m_1}{m} r_0 \sin\left(\omega_{\rho_0} t\right). \end{cases} \tag{27}$$

Находим вторые производные по времени координат $a^i_{1\rho_0}$, $a^i_{2\rho_0}$ из (27):

$$\ddot{a}^1_{1\rho_0} = \frac{m_2}{m} r_0 \omega^2_{\rho_0} \cos\varphi, \qquad \ddot{a}^1_{2\rho_0} = -\frac{m_1}{m} r_0 \omega^2_{\rho_0} \cos\varphi,$$
$$\ddot{a}^2_{1\rho_0} = \frac{m_2}{m} r_0 \omega^2_{\rho_0} \sin\varphi; \qquad \ddot{a}^2_{2\rho_0} = -\frac{m_1}{m} r_0 \omega^2_{\rho_0} \sin\varphi, \tag{28}$$

где $\varphi = \omega_{\rho_0} t$. Подставив $\ddot{a}^i_{1\rho_0}$, $\ddot{a}^i_{2\rho_0}$ из (28) и $a^i_{1\rho_0}$, $a^i_{2\rho_0}$ из (27) в (25), (26), получим соответственно с точностью до ρ_0 в первой степени два равенства

$$\omega^2_{\rho_0} = \frac{\gamma m}{r^3_0} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_0 - \pi\gamma\rho_0 \frac{a_1}{R}\,, \tag{29}$$

$$\omega_{\rho_0}^2 = \frac{\gamma m}{r_0^3} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_0 - \pi\gamma\rho_0 \frac{a_2}{R}, \qquad (30)$$

которые при $a_1 \neq a_2$ приводят к противоречию. Это означает, что система (25), (26) при разных a_1 и a_2 запрещает круговые движения тел A_1 и A_2 с одинаковыми угловыми скоростями, что в свою очередь, влечет отсутствие в рассматриваемых условиях точек либрации $L_1 - L_5$.

Решение задачи 2 закончено, но остается некоторая неудовлетворенность. Хотелось получить четкий ответ на вопрос: каковы физические причины исчезновения точек либрации $L_1 - L_5$ в неоднородной среде в НП ОТО?

Движение центра масс тел A_1 и A_2. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим поведение ЦМ тел A_1, A_2 в неоднородной среде (24) в НП ОТО, который определяется аналогично (4) или (7):

$$C_{\rho_0}\left(c_{\rho_0}^1, c_{\rho_0}^2\right), \; c_{\rho_0}^i = \frac{m_1 a_{1\rho_0}^i + m_2 a_{2\rho_0}^i}{m}, \quad i = 1 \text{ и } 2, \qquad (31)$$

где $a_{1\rho_0}^i$, $a_{2\rho_0}^i$ – ньютоновские координаты тел A_1, A_2 в среде (24). Эти координаты подчинены УД (25), (26).

Дважды продифференцируем по времени t равенство (31), затем вместо появившихся $\ddot{a}_{1\rho_0}^i$, $\ddot{a}_{2\rho_0}^i$ подставим их выражения из УД (25), (26) и учтем условие барицентричности (в (4) $c^i = 0$ или в (11) $c_\rho^i = 0$). Тогда получим:

$$\ddot{c}_{\rho_0}^i = \frac{m_1 \ddot{a}_{1\rho_0}^i + m_2 \ddot{a}_{2\rho_0}^i}{m} = \frac{\pi\gamma\rho_0}{Rm}\left(m_1 a_1 a_1^i + m_2 a_2 a_2^i\right), \qquad (32)$$

где величины в скобках относятся к пустому пространству $(\rho_0 = 0)$ и вычислены в неподвижной барицентрической системе координат Ox^1x^2 (инерциальной системе отсчета); a_1, a_2 – ньютоновские радиусы круговых орбит тел A_1, A_2 в пустоте; a_1^i, a_2^i выражаются формулами

$$A_1 \begin{cases} a_1^1 = -\dfrac{m_2}{m} r_0 \cos(\omega_0 t), \\ a_1^2 = -\dfrac{m_2}{m} r_0 \sin(\omega_0 t); \end{cases} \quad A_2 \begin{cases} a_2^1 = \dfrac{m_1}{m} r_0 \cos(\omega_0 t), \\ a_2^2 = \dfrac{m_1}{m} r_0 \sin(\omega_0 t), \end{cases} \qquad (33)$$

которые являются параметрическими уравнениями круговых траекторий тел A_1, A_2, $r_0 = r_{12} = A_1A_2$ –расстояние между телами A_1 и A_2, $\omega_0 = \sqrt{\gamma m / r_0^3}$.

Подставив a_1^i, a_2^i из (33) в (32) приходим к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка для нахождения координат $c_{\rho_0}^i$ ЦМ тел A_1 и A_2 в среде (24) в НП ОТО:

$$\ddot{c}_{\rho_0}^1 = K\cos(\omega_0 t), \quad \ddot{c}_{\rho_0}^2 = K\sin(\omega_0 t), \qquad (34)$$

где

$$K = \frac{\pi\gamma\rho_0 m_1 m_2 r_0}{Rm^2}\left(a_2 - a_1\right). \qquad (35)$$

Заменив a_1, a_2 в (35) их значениями $a_1 = m_2 r_0 / m$, $a_2 = m_1 r_0 / m$ и решив задачу Коши для уравнений (34) при начальных условиях $c_{\rho_0}^i(0) = 0,\; \dot{c}_{\rho_0}^i(0) = 0$, получим частное решение системы (34), в котором $\varphi = \omega_0 t$:

$$c_{\rho_0}^1 = K_0\left(1 - \cos\varphi\right), c_{\rho_0}^2 = K_0\left(\varphi - \sin\varphi\right), K_0 = K/\omega_0^2 = \frac{\pi\rho_0 r_0^5 m_1 m_2\left(m_1 - m_2\right)}{Rm^4}. \qquad (36)$$

Уравнения (36) определяют циклоиду, находящуюся при $m_1 > m_2$ в первой четверти с базой на положительной полуоси Ox^2 системы координат Ox^1x^2, которая, следовательно, не является барицентрической для тел A_1, A_2 в среде (24), хотя в пустоте она была таковой (см. рис. 2).

Таким образом, проясняется причина исчезновения точек либрации в неоднородной среде (24): для тел A_1, A_2 не существует в неоднородной среде в НП ОТО барицентрической системы координат, ЦМ тел в любой инерциальной системе координат не остается в покое; тела A_1, A_2 не могут передвигаться по окружностям, а каждое из тел описывает витки, которые с течением времени «уходят» при $K_0 > 0$ в бесконечность в положительном направлении оси Ox^2 (см. рис. 2, на котором изображено по два витка для каждого тела, соответствующих двум аркам циклоиды (36)).

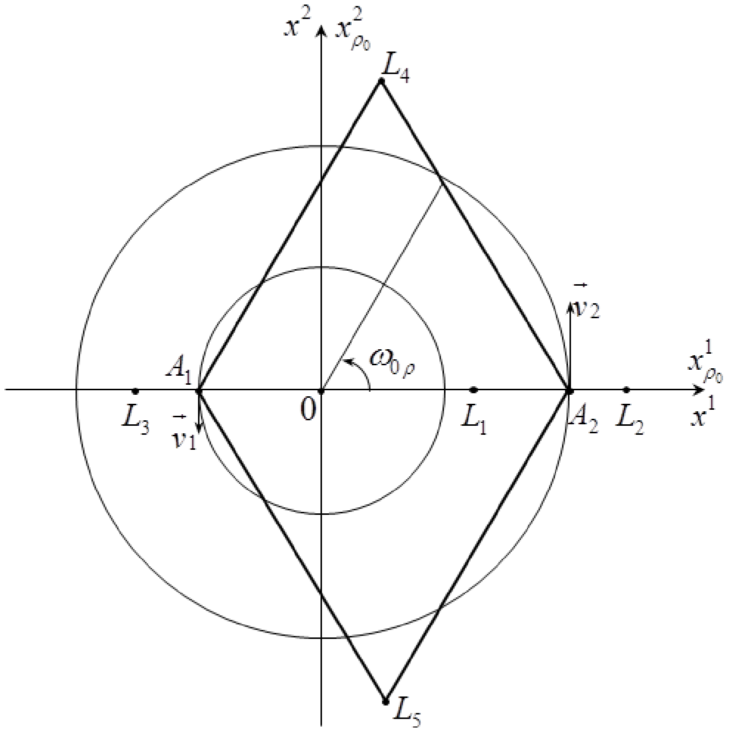

Рис. 1. Пробное тело A_3 находится в одной из точек либрации $L_1 - L_5$, в которых действующие на тело A_3 гравитационные и центробежные силы уравновешиваются. Траекториями всех трех тел A_1, A_2, A_3 могут быть, в частности, концентрические окружности с центром в начале координат O (система координат Ox^1x^2 – барицентрическая). Все точки $A_1, A_2, L_1 - L_5$ двигаются по своим окружностям с угловой скоростью ω_{ρ_0}. Положение точек изображено в начальный момент времени $t = 0$

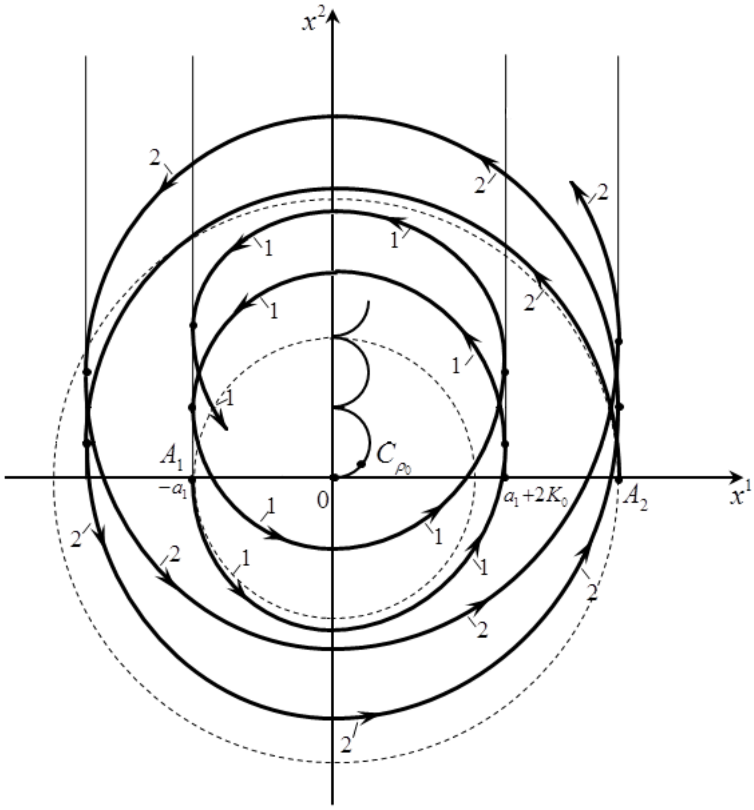

Рис. 2. Представлено поведение тел A_1, A_2 и их ЦМ в НП ОТО в неоднородной среде. Тело A_1 описывает витки, уходящие вверх и касающиеся вертикальных полупрямых $x^1 = -a_1$ и $x^1 = -a_1 + 2K_0$ в точках $\left(-a_1, 2n\pi K_0\right)$ и $\left(a_1 + 2K_0, (2n+1)\pi K_0\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$. Аналогично: тело A_2 описывает уходящие вверх витки, касающиеся полупрямых $x^1 = a_2$ и $x^1 = -a_2 + \pi K_0$ в точках $\left(a_2, 2n\pi K_0\right)$ и $\left(-a_2 + \pi K_0, (2n+1)\pi K_0\right)$ соответственно. Пунктиром изображены окружности, по которым двигаются тела A_1 и A_2 в пустоте

Обсуждение и численные оценки некоторых эффектов. Согласно уравнениям (36) ЦМ $C_{\rho_0}\left(c^1_{\rho_0}, c^2_{\rho_0}\right)$ тел $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_2}$ движется под действием гравитационного поля среды (24) в НП ОТО по циклоиде с базой на положительной части оси Ox^2, так как $m_1 > m_2$ (в случае $m_1 = m_2$ циклоида исчезает). Длина базы циклоиды $\Delta l = 2\pi K_0$. Это означает, что за один оборот тел $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ вокруг своего центра масс их центр масс переместится по оси Ox^2 на расстояние Δl.

Для системы тел Солнце-Юпитер и других пар Солнце-планета имеем оценки $\Delta l \sim (10^{-7} \div 10^{-5})\,\text{см}$, т.е. смещение ничтожно малое, как и для других возможных планетарных систем.

Для стандартных пар звезд перемещения их ЦМ могут быть очень значительными. Например, двойные звезды с характеристиками $m_1 = 2M_{\odot}$, $m_2 = M_{\odot} = 2\cdot 10^{33}\,\text{г}$, $r_0 = (10^{18} \div 10^{19})\text{см}$ при $R = 10^{20}\,\text{см}$, $\rho_0 = 10^{-23}\,\text{г}\cdot\text{см}^{-3}$ имеют перемещения

$$\Delta l \sim (1 \div 10^5)\,\text{млрд.км}. \qquad (37)$$

Итак, предсказываемый ньютоновский эффект движения ЦМ, описываемый формулами и оценками (36), (37), должен приводить к перемещению пар звезд (см. рис. 2) и других тел как целое образование при разных начальных условиях в разных направлениях и на значительные расстояния – на миллиарды километров за один оборот пары тел около их ЦМ. В звездных скоплениях благодаря межзвездной среде двойные и кратные звезды (и другие ансамбли гравитационно связанных тел), двигаясь в разных направлениях, должны сталкиваться, образуя, с одной стороны, дополнительную газопылевую среду, а, с другой стороны, приводить к «слипанию» масс и образованию массивных тел, часть из которых может превращаться в планетезимали, планеты, звезды и в процессе коллапса – в черные дыры. Эффект смещения ЦМ тел (звезд) особенно интенсивен и «хаотичен» вблизи центра звездного скопления. Поэтому наиболее вероятно, что черные дыры должны возникать около центра и в центре звездных скоплений, в частности, в центрах галактик. В последние годы с помощью современных средств наблюдений в Галактике обнаружены черные дыры в разных местах, а в центре Галактики – сверхмассивная черная дыра (см. [6], [11], [12]). Возможно (гипотеза!), что обсуждаемый эффект является одним из механизмов образования, формирования структур галактик, черных дыр и его следует учитывать в вопросах космологии галактик и других объектов Вселенной.

Рассмотрение II этапа о влиянии гравитационных полей сред на движение тел, их ЦМ и точки либрации на уровне ПНП ОТО авторы осуществят в следующей работе.

Библиографический список

1. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука. 1968. 800 с.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука. 1978. 456 с.
3. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1767. V.11. P. 144–151.
4. Lagrange J. Essais sur le problem des trois corps. Paris: 1772.
5. Клищенко А.П., Шупляк В.И. Астрономия. М.: Новое знание. 2004. 224 с.
6. Стражев В.И. К тайнам Вселенной. Минск: РИВШ. 2006. 160 с.
7. Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности. Минск: Выш. шк. 1979. 240 с.
8. Рябушко А.П. Проблема устойчивости движения тел в общей теории относительности. Минск: Выш. шк. 1987. 112 с.
9. Ипатов С.И. Миграция небесных тел в Солнечной системе методы. М.: Эдиториал УРСС. 2000. 320 с.
10. Мартынов Д.Я. Курс общей астрофизики. М.: Наука. 1988. 616 с.
11. Кононович Э.В., Мороз В.И. Общий курс астрономии. М.: Эдиториал УРСС. 2004. 544 с.
12. Засов А.В., Постнов К.А. Общая астрофизика. Фрязино: Век-2. 2011. 576 с.
13. Райзен И. Новый сюрприз Вселенной: темная энергия // М.: Наука и жизнь. 2004. №3. С. 38–42.
14. Лукаш В. Н., Рубаков В.А. Темная энергия: мифы и реальность // УФН. 2008. Т. 178. №3. С. 301–308.
15. Рябушко А.П., Неманова И.Т., Жур Т.А. Движение релятивистского центра масс системы двух тел в среде // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 1. С. 77–82.
16. Рябушко А.П., Неманова И.Т. Гравитационное поле газопылевого шара с двумя притягивающими центрами в общей теории относительности // Докл. Акад. наук БССР. 1987. Т. 31. № 8. С. 519–522.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука. 1988. 512 с.
18. Рябушко, А.П., Неманова И.Т., Жур Т.А. Релятивистские уравнения движения пробного тела в поле тяготения неоднородного газопылевого шара с гравитирующим центром // Весці. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 3. С. 64–71.
19. Рябушко А.П., Неманова И.Т., Жур Т.А. Движение системы двух тел и их центра масс в неоднородной среде // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 2. С. 194–205.