

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО¹, И. Т. НЕМАНОВА², Т. А. ЖУР²

**РЕШЕНИЕ ЛАГРАНЖЕВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ
ПРИ УЧЕТЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ГАЗОПЫЛЕВОЙ СРЕДЫ**

¹Белорусский национальный технический университет

²Белорусский государственный аграрный технический университет

(Поступила в редакцию 28.12.2012)

1. Постановка задачи. Хорошо известно частное треугольное решение Лагранжа ограниченной задачи трех тел [1, 2]. Для решения соответствующей задачи с учетом гравитационного поля газопылевой материи, заполняющей пространство, т. е. для нахождения траектории пробного тела, находящегося под действием гравитационного поля тяготеющих точечных масс m_a , m_b и газопылевой среды, необходимо воспользоваться решением соответствующей задачи двух тел. В работах [3, 4] найдена относительная траектория тел a и b , движущихся в газопылевом шаре радиуса R малой плотности ρ порядка 10^{-22} г/см³. Выражение для величины радиус-вектора $\vec{r}^{\text{OT}} = \vec{a} - \vec{b}$, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi' = 0$, $r^{\text{OT}} = r_0^{\text{OT}}$, где r_0^{OT} – расстояние между точечными массами m_a и m_b в задаче двух тел без учета гравитационного поля газопылевой среды, в ньютоновском приближении имеет вид

$$r^{\text{OT}} = \frac{1}{A} \left\{ 1 - e \cos \varphi' + e^2 \cos^2 \varphi' + \frac{\alpha}{A^4} \left[-1 - 3e^2 + \cos \varphi' (1 + 2e + 2e^2) + \frac{3}{2} e \varphi' \sin \varphi' - 3e^2 \varphi' \sin \varphi' \cos \varphi' + e^2 \cos 2\varphi' - 2e \cos^2 \varphi' \right] \right\}, \quad (1)$$

где φ' – угол поворота оси ab при $t = 0$, $\varphi' = 0$; $A = \frac{\gamma(m_a + m_b)}{L_{\text{OT}}^2}$, L_{OT} – постоянный момент импульса относительного движения (тела a относительно тела b)

$$L_{\text{OT}} = (r^{\text{OT}})^2 \frac{d\varphi'}{dt} = (r_0^{\text{OT}})^2 \left(\frac{d\varphi'}{dt} \right)_0 = \text{const};$$

e – эксцентриситет относительной орбиты в отсутствии газопылевой среды; $\alpha = \frac{4\pi\rho r}{3L_{\text{OT}}^2}$.

Если в плоскости движения тел выбрать ось Ox^1 декартовой системы координат по направлению вектора \vec{a} в начальный момент времени, то координаты вектора \vec{r}^{OT} будут равны $x_{\text{OT}}^1 = r^{\text{OT}} \cos \varphi'$, $x_{\text{OT}}^2 = r^{\text{OT}} \sin \varphi'$. Переход к барицентрическим координатам осуществляется по формулам

$$a^i = \frac{m_b}{m_a + m_b} x_{\text{OT}}^i, \quad b^i = -\frac{m_a}{m_a + m_b} x_{\text{OT}}^i. \quad (2)$$

Решение ограниченной треугольной задачи трех тел основывается на решении соответствующей задачи двух тел для круговых орбит. Последнее получается из выражения (1) при условии $e = 0$:

$$r^{\text{OT}} = \frac{1}{A} \left[1 + \frac{\alpha}{A^4} (\cos \varphi' - 1) \right] = r_0^{\text{OT}} + \frac{\alpha}{A^4} (\cos \varphi' - 1) r_0^{\text{OT}} = r_0^{\text{OT}} + r_1^{\text{OT}}, \quad (3)$$

где $r_0^{\text{OT}} = \frac{1}{A} = a_0 + b_0$ постоянное для кругового решения, совпадающее с начальным расстоянием между массами m_a и m_b ; r_1^{OT} – малая добавка, обязанная гравитационному полю газопылевой среды. С помощью выражений (2) и (3) легко получить координаты и модули радиус-векторов тел a и b :

$$\begin{aligned} |\vec{a}| = a &= \frac{m_b}{m_a + m_b} \cdot \frac{1}{A} \left[1 + \frac{\alpha}{A^4} (\cos \varphi' - 1) \right] = a_0 + a_1, a_0 = \frac{m_b}{m_a + m_b} \cdot \frac{1}{A}; \\ |\vec{b}| = b &= \frac{m_a}{m_a + m_b} \cdot \frac{1}{A} \left[1 + \frac{\alpha}{A^4} (\cos \varphi' - 1) \right] = b_0 + b_1, b_0 = \frac{m_a}{m_a + m_b} \cdot \frac{1}{A}, \end{aligned} \quad (4)$$

где a_0, b_0 – постоянные величины радиус-векторов тел a и b в круговом решении задачи двух тел без учета газопылевой материи. Малые добавки a_1 и b_1 учитывают изменение круговых траекторий тел под воздействием гравитационного поля газопылевой среды.

2. Уравнения движения пробного тела и его первые интегралы. Классические уравнения движения третьего (пробного) тела c относительно барицентрической системы отсчета, связанной с центром масс системы тел a, b , в плоской ограниченной задаче трех тел имеют вид

$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1}, \quad \frac{d^2 x^2}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^2}. \quad (5)$$

В системе уравнений (5) x^1, x^2 – декартовы координаты пробного тела c в плоскости движения $x^1 O x^2$, t – время,

$$h_{00} = 4\pi\gamma\rho \left(\frac{r^2}{3} - R^2 \right) - \frac{2\gamma m_a}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{2\gamma m_b}{|\vec{r} - \vec{b}|} \quad (6)$$

является компонентой метрического тензора рассматриваемой системы в ньютоновском приближении [3], где γ – ньютоновская постоянная тяготения, $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ – расстояние пробного тела c до начала координат.

Умножая первое из уравнений (5) на $-x^2$, второе – на x^1 и складывая полученные равенства, приходим к дифференциальному уравнению для величины момента импульса L_c тела c , которое, с учетом явного вида (6) гравитационного потенциала, можно записать в следующем виде:

$$\frac{dL_c}{dt} = \gamma m_a (a^2 x^1 - a^1 x^2) \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{b}|^3} \right), \quad L_c \equiv x^1 \frac{dx^2}{dt} - x^2 \frac{dx^1}{dt}. \quad (7)$$

В отсутствие газопылевой среды справедливо частное треугольное решение Лагранжа, при котором $|\vec{r} - \vec{a}| = |\vec{r} - \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = \text{const}$, так как в этом случае тела a, b, c в каждый момент времени находятся в вершинах равностороннего треугольника. Тогда из равенства (7) следует постоянство момента импульса пробного тела: $L_c = L_c = \text{const}$ (интеграл площадей). Учет гравитационного поля газопылевой материи приводит к изменению величины момента импульса пробного тела. Для того чтобы найти изменение этой величины, перейдем к полярным координатам r, φ тела c , выбирая полярную ось вдоль оси Ox^1 , и представим величину r в виде суммы $r = r_0 + r_1$, где r_0 – радиус круговой орбиты тела c в отсутствие газопылевой среды, r_1 – подлежащее определению изменение величины r_0 , пропорциональное плотности газопылевой среды и, следовательно, параметру α . На основании указанного разложения величины r и соответствующих выражений (4) для тел a и b , воспользовавшись теоремой косинусов, можно получить с точностью до первой степени плотности среды (или величины α) следующие равенства:

$$|\vec{r} - \vec{a}| = |r_0 - a_0| \left(1 + \frac{r_1 r_0 + a_1 a_0 - (r_0 a_1 + r_1 a_0) \cos \varphi_0}{|r_0 - a_0|^2} \right), \quad |\vec{r}_0 - \vec{a}_0| = \left(r_0^2 + a_0^2 - 2r_0 a_0 \cos \varphi_0 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (8)$$

$$|\vec{r} - \vec{b}| = |\vec{r}_0 - \vec{b}_0| \left(1 + \frac{r_1 r_0 + b_1 b_0 + (r_0 b_1 + r_1 b_0) \cos \varphi_0}{|\vec{r}_0 - \vec{b}_0|^2} \right), \quad |\vec{r}_0 - \vec{b}_0| = (r_0^2 + b_0^2 + 2r_0 b_0 \cos \varphi_0)^{\frac{1}{2}},$$

где φ_0 – угол между векторами \vec{r} и \vec{a} , $\varphi_0 = \varphi - \varphi'$. Обозначим постоянную при круговом движении угловую скорость тел a, b, c буквой ω , $\omega = \frac{d\varphi'}{dt}$. После подстановки выражений (8) в (7) и интегрирования по времени $\left(dt = \frac{d\varphi'}{\omega} \right)$ получим следующее выражение для величины момента импульса пробного тела, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi' = 0, r_1 = 0, L_c = L_0 c$:

$$L_c = -3\gamma m_a a_0 r_0 \sin \varphi_0 \left[\frac{\alpha}{\omega} (b_0 - a_0 + r_0 \cos \varphi_0) (\sin \varphi' - \varphi') + \frac{\cos \varphi_0}{\omega |\vec{r}_0 - \vec{a}_0|^4} \int r_1(\varphi') d\varphi' \right] + L_0 c. \quad (9)$$

Выражение для интеграла энергии получается, как обычно, путем умножения уравнений (5) соответственно на компоненты скорости $\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}$ и сложения полученных равенств. Приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 \right) = - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}. \quad (10)$$

Как следует из выражения (6), компонента метрического тензора h_{00} зависит также от координат тел a, b , создающих вместе с газопылевой материей рассматриваемое гравитационное поле. Полная производная по времени величины h_{00} складывается из трех частей:

$$\frac{d h_{00}}{dt} = \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial h_{00}}{\partial a^i} \frac{da^i}{dt} + \frac{\partial h_{00}}{\partial b^i} \frac{db^i}{dt} = \frac{d h_{00}}{dt_c} + \frac{d h_{00}}{dt_a} + \frac{d h_{00}}{dt_b}. \quad (11)$$

Из (6) следует, что производные по времени гравитационного потенциала в точке с координатами r, φ , вызванные движением тел a и b , равны:

$$\frac{d h_{00}}{dt_a} = - \frac{2\gamma m_a}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} (x^i - a^i) \frac{da^i}{dt}, \quad \frac{d h_{00}}{dt_b} = - \frac{2\gamma m_b}{|\vec{r} - \vec{b}|^3} (x^i - b^i) \frac{db^i}{dt}. \quad (12)$$

Уравнение (10) с учетом равенств (11), (12) выражает следующий закон изменения механической энергии пробного тела:

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + h_{00} \right) = - \frac{2\gamma m_a}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} (x^i - a^i) \frac{da^i}{dt} - \frac{2\gamma m_b}{|\vec{r} - \vec{b}|^3} (x^i - b^i) \frac{db^i}{dt}. \quad (13)$$

В случае отсутствия газопылевой материи правая часть уравнения (13) обращается в нуль, так как выполняются следующие равенства: $a^i da^i = b^i db^i = 0, m_a a^i + m_b b^i = 0$ (начало координат находится в центре масс системы) и, как было сказано выше, $|\vec{r} - \vec{a}| = |\vec{r} - \vec{b}|$. Следовательно, механическая энергия пробного тела c , движущегося в гравитационном поле двух взаимодействующих точечных масс a и b таким образом, что указанные тела образуют в каждый момент времени равносторонний треугольник в неизменной плоскости движения, остается постоянной (см. [1]):

$$\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + h_{00} = 2h_0 = \text{const.}$$

При учете гравитационного поля газопылевой среды для нахождения интеграла энергии пробного тела необходимо учесть изменения координат, величин радиус-векторов каждого из трех

тел и расстояний между ними. Использование равенств (4) и (8) приводит к следующему выражению для стоящих в правой части (13) слагаемых:

$$\frac{dh_{00}}{dt_a} = -\frac{2\gamma m_a}{|\bar{r}_0 - \bar{a}_0|^3} \left\{ r_0 a_0 \sin \varphi_0 + \frac{\alpha}{A^4} \left[r_0 a_0 \sin \varphi_0 (\cos \varphi' - 1) \left(1 - 3 \frac{a_0^2 - a_0 r_0 \cos \varphi_0}{|\bar{r}_0 - \bar{a}_0|^2} \right) + \frac{a_0}{2} (a_0 + b_0) \sin \varphi' \right] + r_1 a_0 \sin \varphi_0 \left[1 - 3 \frac{r_0^2 - r_0 a_0 \cos \varphi_0}{|\bar{r}_0 - \bar{a}_0|^2} \right] \right\} \frac{d\varphi'}{dt}, \quad (14)$$

$$\frac{dh_{00}}{dt_b} = -\frac{2\gamma m_b}{|\bar{r}_0 - \bar{b}_0|^3} \left\{ -r_0 b_0 \sin \varphi_0 + \frac{\alpha}{A^4} \left[r_0 b_0 \sin \varphi_0 (\cos \varphi' - 1) \left(-1 + 3 \frac{b_0^2 + b_0 r_0 \cos \varphi_0}{|\bar{r}_0 - \bar{b}_0|^2} \right) + \frac{b_0}{2} (a_0 + b_0) \sin \varphi' \right] + r_1 b_0 \sin \varphi_0 \left[-1 + 3 \frac{r_0^2 + r_0 b_0 \cos \varphi_0}{|\bar{r}_0 - \bar{b}_0|^2} \right] \right\} \frac{d\varphi'}{dt}. \quad (15)$$

Подстановка выражений (14) и (15) в уравнение (13) и последующее интегрирование по времени приводит к интегралу энергии рассматриваемой системы:

$$2h_c = \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + h_{200} = -\frac{2\gamma}{|\bar{r}_0 - \bar{a}_0|^3} \left\{ \frac{\alpha}{A^4} \left[3m_a a_0 r_0 \sin \varphi_0 \frac{b_0 - a_0 + r_0 \cos \varphi_0}{a_0 + b_0} (\sin \varphi' - \varphi') - m_a a_0 (a_0 + b_0) \cos \varphi' \right] + \frac{3m_a a_0 r_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{a_0 + b_0} \int r_1(\varphi') d\varphi' \right\} + \text{const.}$$

При выбранных начальных условиях ($\varphi' = 0, r_1 = 0$) энергия пробного тела в начальный момент времени отличается от соответствующей величины в задаче движения трех тел в пустоте только на потенциальную энергию пробного тела в гравитационном поле газопылевой среды. С учетом этого из предыдущего равенства легко находится постоянная интегрирования

$$\text{const} = 2h_c + 4\pi\gamma\rho \left(\frac{r_0^2}{3} - R^2 \right) - \frac{2\gamma\alpha m_a a_0}{|\bar{r}_0 - \bar{a}_0|^2 A^4},$$

подставляя которую в предыдущее уравнение, получаем уравнение движения пробного тела в следующем виде:

$$\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + h_{200} = 2h_c - \frac{2\gamma}{|\bar{r}_0 - \bar{a}_0|^3} \left[Z_1 (\sin \varphi' - \varphi') + Z_2 (\cos \varphi' - 1) + Z_3 \int r_1 d\varphi' \right] + 4\pi\gamma\rho \left(\frac{r_0^2}{3} - R^2 \right), \quad (16)$$

где гравитационный потенциал h_{00} выражается формулой (6) и введены следующие обозначения постоянных коэффициентов:

$$Z_1 = \frac{\alpha}{A^4} \cdot 3m_a a_0 r_0 \sin \varphi_0 \frac{b_0 - a_0 + r_0 \cos \varphi_0}{a_0 + b_0}, \quad Z_2 = -\frac{\alpha}{A^4} m_a a_0 (a_0 + b_0), \quad Z_3 = \frac{3m_a a_0 r_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{a_0 + b_0}.$$

3. Уравнение траектории пробного тела. Численные оценки. Переходя в уравнении (16) к полярным координатам r, φ пробного тела и преобразуя данное уравнение движения в уравнение траектории с помощью величины момента импульса $L_c = r^2 \frac{d\varphi}{dt}$, явный вид которого дается выражением (9), после преобразований получим следующее уравнение для искомой функции $u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} = u_0 + u_1 \left(u_0 = \frac{1}{r_0}, u_1 = -\frac{r_1}{r_0^2} \right)$ с точностью до «газопылевой» добавки u_1 в первой степени:

$$u_1 \left[2u_0 - \frac{2\gamma r_0^3 \alpha (m_a + m_b)}{(a_0 + b_0)^3 L_c^2} \right] + \left[\frac{12\gamma m_a a_0 r_0^3 \cos \varphi_0}{L_c^3 \omega (a_0 + b_0)^4} \left(\frac{\gamma (m_a + m_b) \sin \varphi_0}{a_0 + b_0} + h_c \right) - \frac{2\gamma r_0^2 Z_3}{(a_0 + b_0)^3 L_c^2} \right] \int u_1 d\varphi' = \left[\frac{12\alpha \gamma m_a a_0 r_0}{L_c^3 \omega} (b_0 - a_0 + r_0 \cos \varphi_0) \left(\frac{\gamma (m_a + m_b)}{a_0 + b_0} + h_c \right) - \frac{2\gamma Z_1}{(a_0 + b_0)^3 L_c^2} \right] (\sin \varphi' - \varphi'). \quad (17)$$

При выводе уравнения (17) было использовано соответствующее уравнение, которому удовлетворяет постоянная величина u_0 , обратная радиусу круговой орбиты пробного тела в треугольном частном решении Лагранжа ограниченной задачи трех тел, а именно:

$$u_0^2 - \frac{2\gamma m_a}{|\vec{r}_0 - \vec{a}_0| L_c^2} - \frac{2\gamma m_b}{|\vec{r}_0 - \vec{b}_0| L_c^2} = \frac{2h_c}{L_c^2}.$$

Обозначая в уравнении (17) постоянные величины в квадратных скобках в порядке следования символами B_1 , B_2 , B_3 , перепишем его в виде

$$B_1 u_1 + B_2 \int u_1 d\varphi' = B_3 (\sin \varphi' - \varphi'), \quad (18)$$

или после дифференцирования

$$\frac{du_1}{d\varphi'} + \frac{B_2}{B_1} u_1 = \frac{B_3}{B_1} \cos \varphi' - \frac{B_3}{B_1}. \quad (19)$$

Решением линейного дифференциального уравнения (19) является функция

$$u_1 = \frac{B_3}{B_1^2 + B_2^2} (B_2 \cos \varphi' + B_1 \sin \varphi') - \frac{B_3}{B_2}. \quad (20)$$

Таким образом, траектория пробного тела в частном треугольном решении ограниченной задачи трех тел в присутствии газопылевой среды описывается выражением

$$u(\varphi') = \frac{1}{r} = u_0 + u_1 = \frac{1}{r_0} + u_1,$$

где u_1 выражается формулой (20) и, следовательно, «газопылевая» добавка к полярной координате r третьего пробного тела в треугольной задаче равна $-r_0^2 u_1$. Вид функции u_1 указывает на периодические синусоидальные изменения расстояния от центра масс системы двух массивных тел a и b до третьего пробного тела при том, что в отсутствие газопылевой среды указанное расстояние остается неизменным. Угол φ , составляемый радиус-вектором пробного тела с неподвижной осью Ox^1 барицентрической системы отсчета равен $\varphi = \varphi' + \varphi_0$.

В частном случае равенства тяготеющих масс, т. е. при $m_a = m_b$, угол $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, постоянные коэффициенты $B_2 = B_3 = 0$, $B_1 \neq 0$, и из уравнения (18) следует, что $u_1 = 0$. Значит, в этом симметричном случае справедливо решение Лагранжа.

Для численной оценки полученного результата принимаем следующие порядки входящих в выражение (20) величин: плотность ρ порядка $10^{-22} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$; расстояния a_0 , b_0 , r_0 – порядка 10^{17} м (10 световых лет); массы тяжелых тел m_a , m_b – порядка 10^{31} кг; скорости тел a , b , c – порядка 10^4 м/с. В этом случае порядок величины u_1 , вычисляемой по формуле (20), определяется порядком отношения

$$\frac{B_3}{B_2} = \frac{\alpha (b_0 - a_0 + r_0 \cos \varphi_0)}{r_0^2 \cos \varphi_0} (a_0 + b_0)^4,$$

равным 10^{-21} м^{-1} , т. е. можно считать, что u_1 есть величина указанного порядка. Тогда r_1 будет иметь порядок 10^{13} м . При многократном увеличении масс m_a и m_b тяготеющих тел этот результат не изменяется. Если же для оценки результата выбрать расстояния от центра масс до тел a , b , c , и, следовательно, расстояния между ними в 10 раз большие, то получим добавку u_1 порядка 10^{-18} м^{-1} . В таком случае смещение пробного тела от точки Лагранжа, т. е. величина r_1 , возрастет до величины порядка 10^{18} м .

Литература

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968.
2. Рябушко А. П. Движение тел в общей теории относительности. Минск, 1979.
3. Рябушко А. П., Неманова И. Т. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31, № 6. С. 519–522.
4. Неманова И. Т. Релятивистское движение тел в среде: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1987.

A. P. RYABUSHKO, I. T. NEMANOVA, T. A. ZHUR

SOLUTION OF THE LAGRANGIAN LIMITED TRIANGULAR THREE-BODY PROBLEM WITH ALLOWANCE FOR THE GRAVITY FIELD OF THE GASEOUS DUST MEDIUM

Summary

It has been shown, that with allowance for the gravity field of the gaseous dust medium, the Lagrangian triangular solution in the limited three-body problem does not exist. It exists only in the symmetric case, when the masses of heavy bodies are equal.