УДК 539.3

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

© А.В. ЧИГАРЕВ, Ю.В. ЧИГАРЕВ

САМОСОГЛАСОВАННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С НЕПРЕРЫВНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

(Представлено академиком Е.И. Шемякиным 15 V 1989)

Рассматривается метод расчета эффективных коэффициентов неоднородных сред, обобщающий метод самосогласования для многокомпонентных материалов. В основе применения метода самосогласования, например, для вычисления упругих модулей, лежит решение задачи об эллипсоидальном включении. Для горных пород, грунтов, реальных композитов характерно непрерывное распределение физико-механических свойств или их разброс от основных значений компонентов. Получены уравнения, которым удовлетворяют эффективные коэффициенты неоднородных сред, в случае, когда разброс их параметров от основных значений определяется битреугольным распределением. Рассмотрен предельный переход к уравнениям самосогласованного поля двухкомпонентной среды.

1. Эффективные модули упругости λ^0_{ijkl} неоднородного материала вводятся соотношением

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \lambda_{ijkl} e_{kl} \rangle = \lambda^0_{ijkl} \langle e_{kl} \rangle,$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, e_{kl} – тензор деформаций, $\lambda_{ijkl}(x)$ – тензор упругих модулей композита, зависящий от x случайным образом. Тензор λ^0_{ijkl} определяется из условия

$$\langle \gamma_{ijkl}(x) \rangle = 0, \tag{1}$$

где γ_{ijkl} – тензор упругой поляризуемости среды, связанный с $\lambda_{ijkl}(x)$ соотношением

$$\gamma_{ijkl} = B^{-1}_{ijmn}\lambda'_{mnkl}, \quad \lambda'_{mnkl} = \lambda_{mnkl} - \lambda^0_{mnkl}; \tag{2}$$

$$\begin{gathered} B_{ijmn} = I_{ijmn} + G^{(s)}_{ik,jl}\lambda'_{klmn}, \\ G^{(s)}_{ik,jl} = \frac{1}{3\mu_0}\left[\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{3K_0 + \mu_0}{5(3K_0 + 4\mu_0)} S_{ikjl}\right], \end{gathered} \tag{3}$$

$$I_{ijmn} = ½(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}), \quad S_{ikjl} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{kj} + \delta_{ik}\delta_{jl},$$

где $G^{(s)}_{ik,jl}$ – сингулярная часть второй производной тензора Грина уравнения равновесия.

В случае изотропной неоднородной среды эффективная среда будет изотропной однородной, характеризуемой объемным K_0 и сдвиговым μ_0 модулями. Тензор упругой поляризуемости $\gamma_{ijkl}(x)$ в этом случае изотропный:

$$\gamma_{ijkl}(x) = \gamma(x)\delta_{ij}\delta_{kl} + \gamma_2(x)\left(\delta_{ij}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right), \tag{4}$$

$$\gamma(x) = \frac{K'(x)}{1 + L^k K'(x)}, \quad \gamma_2(x) = \frac{\mu'(x)}{1 + L^{(\mu)}\mu'(x)}, \quad L^k = \frac{1}{K_0 + (4/3)\mu_0},$$

$$L^{(\mu)} = \frac{2(K_0 + 2\mu_0)}{5(K_0 + (4/3)\mu_0)}, \quad K'(x) = K(x) - K_0, \quad \mu'(x) = \mu(x) - \mu_0.$$

Уравнение (1) в рассматриваемом случае сводится к системе двух уравнений $\langle \gamma \rangle = 0$, $\langle \gamma_2 \rangle = 0$ относительно эффективных модулей K_0, μ_0.

Положим, что плотность распределения K, μ имеет вид n-треугольных распределений

$$
(5)\qquad f(\lambda) = \begin{cases} S_i^{(\lambda)}\left(1 + \dfrac{\lambda - \lambda_i}{\epsilon_{i1}^{(\lambda)}}\right), & \lambda \in [\lambda_i - \epsilon_{i1}^{(\lambda)},\ \lambda_i], \\ S_i^{(\lambda)}\left(1 - \dfrac{\lambda - \lambda_i}{\epsilon_{i2}^{(\lambda)}}\right), & \lambda \in [\lambda_i, \lambda_i + \epsilon_{i2}^{(\lambda)}], \\ 0 \text{ для остальных } \lambda. \end{cases}
$$

$$
S_i^{(\lambda)} = \frac{2c_i}{\epsilon_{i1}^{(\lambda)} + \epsilon_{i2}^{(\lambda)}}, \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.
$$

Распределение (5) описывает n-компонентную среду, обладающую разбросом упругих свойств. Здесь $\lambda = K, \mu$, $\lambda_i = K_i, \mu_i$ – основные значения объемного и сдвигового модулей i-компонента, $\epsilon_{i1}^{(\lambda)}$, $\epsilon_{i2}^{(\lambda)}$ – разбросы значений упругих модулей K, μ от основных значений K_i, μ_i i-компонента.

Вычисляя математическое ожидание в (1), с учетом (5) получаем в явном виде систему уравнений, которой удовлетворяют K_0, μ_0:

$$
(6)\qquad L^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} S_i^{(\lambda)} \sum_{\beta=1}^{2} \frac{A_{0i}^{(\lambda)} + (-1)^{\beta}\epsilon_{i\beta}^{(\lambda)}}{\epsilon_{i\beta}^{(\lambda)}} \ln \frac{A_{0i}^{(\lambda)} + (-1)^{\beta}\epsilon_{i\beta}^{(\lambda)}}{A_{0i}^{(\lambda)}},
$$

$$
A_{0i}^{(\lambda)} = \lambda_i - \lambda_0 + \frac{1}{L^{(\lambda)}}, \qquad \lambda = K, \ \mu.
$$

При $\epsilon_{ij}^{(\lambda)} \to 0$ $f(\lambda)$ переходит в распределение

$$
f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta(\lambda - \lambda_i), \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i = 1,
$$

а уравнения (6) – в уравнения самосогласованного поля для K_0, μ_0 n-компонентной композиционной среды [4–6].

На рис. 1 изображены зависимости $x = K_0 K_1^{-1}$, $y = \mu_0 \mu_1^{-1}$ от $c = c_2$ двухкомпонентного материала с относительными разбросами упругих модулей $\delta_{i\beta}^{(\lambda)} = \epsilon_{i\beta}^{(\lambda)} \lambda_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$, $\beta = 1, 2$. Кривые *1, 4* при $\delta_{11}^{(\lambda)} = \delta_{22}^{(\lambda)} = 0{,}5$ $\delta_{12}^{(\lambda)} = \delta_{21}^{(\lambda)} = 0{,}001$; кривые *2, 5* при $\delta_{11}^{(\lambda)} = \delta_{12}^{(\lambda)} = \delta_{21}^{(\lambda)} = \delta_{22}^{(\lambda)} = 0$; кривые *3, 6* при $\delta_{11}^{(\lambda)} = \lambda_{22}^{(\lambda)} = 0{,}001$, $\delta_{12}^{(\lambda)} = \delta_{21}^{(\lambda)} = 0{,}5$ соответствуют значениям параметров $\kappa = K_2 K_1^{-1} = 1{,}7$, $m_1 = \mu_1 K_1^{-1} = 0{,}5$, $m_2 = \mu_1 \mu_2^{-1} = 10$. Из рис. 1 следует, что существует такое значение концентрации c, при котором разброс свойств не сказывается на значениях эффективных модулей, наибольшее влияние разброс свойств оказывает при больших и малых значениях концентрации.

2. Эффективные коэффициенты теплопроводности, электропроводности, диффузии, диэлектрической проницаемости удовлетворяют уравнению одного и того же вида, которое для битреугольного ($n = 2$) распределения (5) имеет вид (6), причем $L^{(\lambda)} = L = (3\lambda_0)^{-1}$, $A_{0i}^{(\lambda)} = A_{0i} = 2\lambda_0 + \lambda_i$, λ_0 – соответствующий эффективный коэффициент, λ_i – материальный коэффициент i-компоненты,

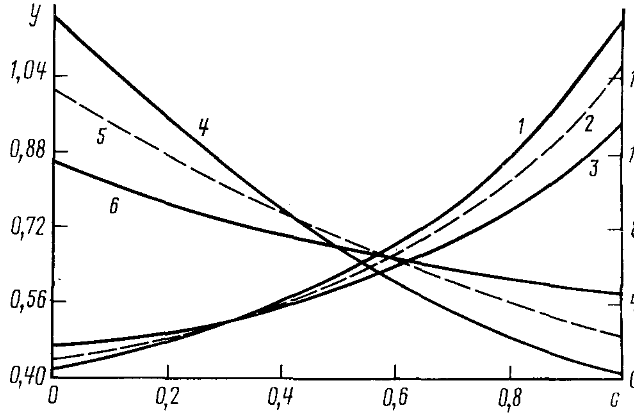

Рис. 1. Зависимости безразмерных упругих коэффициентов $x = K_0 K_1^{-1}$, $y = \mu_0 \mu_1^{-1}$ от концентрации наполнителя $c = c_2$

$i = 1, 2$. При $\epsilon_{ij} \to 0$ уравнение для эффективного коэффициента переходит в известное уравнение метода самосогласования.

Отметим следующее. Численное решение уравнений (6) обладает тем недостатком, что при $\epsilon_{ij} \to 0$ правая часть представляет собой неопределенность типа 0/0, поэтому при малых ϵ_{ij} решение неустойчиво. При относительном разбросе $\delta_{ij} \leqslant 10^{-3}$ расчет зависимости $x = \lambda_0 \lambda_1^{-1}$ от c удобно вести согласно уравнению, полученному из (6) разложением правой части в ряд Маклорена. Для двухкомпонентной среды в безразмерном виде с точностью до линейных членов по δ_{ij} имеем

$$(7) \qquad 1 = 3x\left[(1-c)\left(\frac{1}{B_{01}} + \frac{\delta_{11} - \delta_{12}}{3B_{01}^2}\right) + c\left(\frac{1}{B_{02}} + \frac{\alpha(\delta_{21} - \delta_{22})}{3B_{02}^2}\right)\right],$$

$$\alpha = \lambda_2 \lambda_1^{-1}, \quad B_{0i} = A_{0i}\lambda_1^{-1}, \quad \delta_{ij} = \epsilon_{ij}\lambda_i^{-1}.$$

Как следует из формулы (7), на зависимость x от c влияет несимметричность разброса, т.е. величина $\delta_{ij} - \delta_{ik}$. На рис. 2 изображены зависимости x от c при $\alpha = 10$; кривые: *1* при $\delta_{12} = 0{,}1$, $\delta_{21} = 0{,}05$; *2* при $\delta_{12} = 0{,}05$, $\delta_{21} = 0{,}1$; *3* при $\delta_{11} = 0{,}1$, $\delta_{22} = 0{,}05$; *4* при $\delta_{11} = 0{,}05$, $\delta_{21} = 0{,}1$; *5* при $\delta_{ij} = 0$.

Рассмотрим пористую среду, полагая в (7) $\lambda_2 = 0$, $\delta_{21} = 0$, $\alpha = 0$. На рис. 3, изображены зависимости x от c для пористой среды. Кривые: *1* при $\delta_{11} = 0{,}05$, $\delta_{22} = 0{,}1$; *2* при $\delta_{11} = 0{,}1$, $\delta_{22} = 0{,}05$; *3* при $\delta_{11} = 0{,}1$; *4* при $\delta_{12} = 0{,}1$; *5* при $\delta_{ij} = 0$.

Из рис. 3 (кривые *1, 2*) следует, что наличие разброса δ_{22} ("мягкой" компоненты) позволяет получить зависимость упругих модулей, коэффициентов теплопроводности λ_0 от концентрации c для всех значений $0 \leqslant c \leqslant 1$. Для пористой среды без учета δ_{22} самосогласованный метод дает обращение λ_0 в нуль при $c_* = 0{,}63$, причем разброс δ_{11}, δ_{12} компоненты λ_1 при этом практически не сказывается на значении c_* (кривые *3, 4, 5*).

Отметим, что формулы (6), (7), связывающие значения эффективных коэффициентов, значения компонентов, концентраций, разбросов могут быть использованы для решения задачи определения разброса ϵ_{ij} по измеренным и заданным значениям $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, c$.

Эту задачу по отношению к задаче вычисления эффективных коэффициентов по заданным $\lambda_1, \lambda_2, c, \epsilon_{ij}$ можно рассматривать как обратную.

Отметим, что на основе уравнений типа (1) можно получить системы уравнений для эффективных коэффициентов λ_0 неоднородных сред, распределение мате-

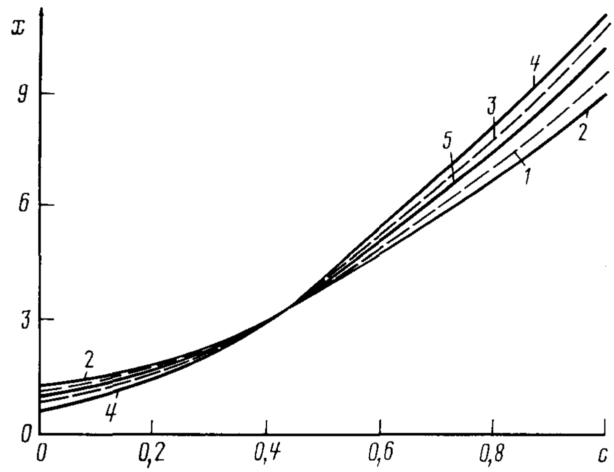

Рис. 2. Зависимость безразмерного коэффициента теплопроводности (электропроводности) $x = \lambda_0 \lambda_1^{-1}$ от концентрации наполнителя $c = c_2$

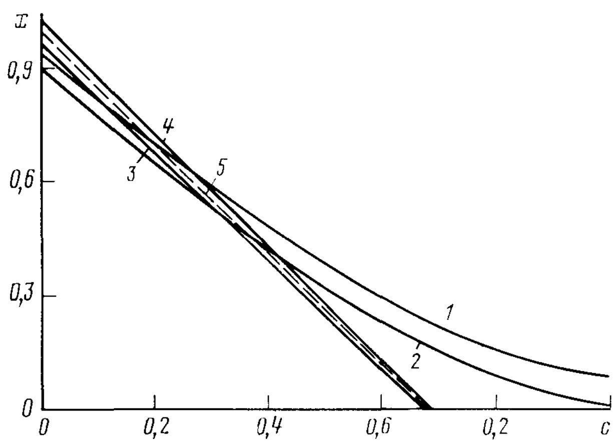

Рис. 3. Зависимость безразмерного коэффициента теплопроводности (электропроводности $x = \lambda_0 \lambda_1^{-1}$ пористой среды от концентрации пор $c = c_2$

риальных коэффициентов которых подчиняется любым другим законам распределения. Если в пределе взятое распределение переходит в комбинацию δ-функций $\left(f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta(\lambda - \lambda_i)\right)$, то соответственно уравнения (1), (6), (7) переходят в известные уравнения n-компонентной среды, получаемые методом самосогласования или эквивалентным ему.

Белорусский политехнический институт
Белорусский институт механизации сельского хозяйства
Минск

Поступило
8 VIII 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kröner E.* – Z. Phys., 1958, Bd. 151, № 4, S. 504–518. 2. *Hill R.* – J. Mech. Phys. Solids, 1965, vol. 4, № 4, p. 213–222. 3. *Чигарев А.В.* – Изв. АН СССР. МТТ. 1980, № 4, с. 128–135. 4. *Kröner E.* – Mechanics Today, 1981, vol. 6, p. 155–159. 5. *Болотин В.В., Москаленко В.Н.* – Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3, с. 106–111. 6. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.