

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ОЦЕНКЕ КОЛЕБАНИЙ ШТАНГИ ОПРЫСКИВАТЕЛЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Чигарев Ю.В., д.ф.-м.н., профессор; Крук И.С., к.т.н.,
доцент; Гайдуковский А.И.

*Белорусский государственный аграрный технический университет
Щетинская сельскохозяйственная академия (Польша)*

В статье предложен подход для приближенной оценки основных параметров свободных колебаний штанги опрыскивателя. Получены зависимости для анализа изгиба штанги и определения частот и амплитуды колебаний в зависимости от материала, массы и формы поперечного сечения несущей конструкции.

Движение агрегата по полю неизменно сопровождается возмущениями, возникающими в результате копирования ходовыми колесами неровностей и передающимися через остов всем рабочим органам опрыскивателя. В результате это приводит к колебаниям штанги, что сказывается не только на качестве выполняемого технологического процесса, но и на прочности и долговечности ее конструкции, а при большой амплитуде колебаний ее концов может привести к поломке. Поэтому изучение процесса колебаний штанги сельскохозяйственных опрыскивателей является важным звеном на стадиях проектирования и испытания машин.

Рассмотрим свободные колебания штанги опрыскивателя, выполняющего технологический процесс внесения рабочего раствора пестицидов или жидких минеральных удобрений на поверхность поля. Колебания штанги носят сложный, во многом случайный характер и могут одновременно происходить как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскостях. Сама штанга представляет составную конструкцию с жесткими и шарнирными связями, что также усложняет аналитическое описание ее колебаний. В данной работе предлагается математический подход для приближенного описания колебаний штанги в плоскости, параллельной обрабатываемой поверхности, источником которых могут быть силы инерции, вызванные изменениями ускорения агрегата и кратковременно действующие возмущающие силы, возникающие при движении колес машины по неровностям поля, а также неравномерной работой трансмиссии.

Для исследований примем упрощенную схему распределительной штанги. Рассмотрим ее конструкцию как упругий стержень с одной жесткой связью. Будем считать, что масса штанги сосредоточена в точках ее

колеблющихся частей. Выбор количества таких материальных точек зависит от конструкции штанги и целей исследований. Такое упрощение вполне допустимо для получения приближенных результатов. Проведем исследование для двух материальных точек с массами m_1 и m_2 . Массу m_1 сосредоточена в точке A , находящейся от места крепления штанги к

остову опрыскивателя на расстоянии $x_1 = \frac{l}{3}$, масса m_2 в точке C – на

расстоянии $x_2 = \frac{2l}{3}$. Для удобства исследований плоскость колебаний балки расположим в вертикальной плоскости (рис.1). Массы колеблющихся грузов будем определять двумя обобщенными координатами y_1 и y_2 . В общем случае можно считать все связи стационарными и голономными. Согласно [1], в общем случае кинетическая энергия определится формулой

$$E_k = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{y}_1^2 + 2a_{12}\dot{y}_1\dot{y}_2 + a_{22}\dot{y}_2^2), \quad (1)$$

где a_{ij} - коэффициенты инерции ($i, j = 1, 2$), точка над буквой означает производную по времени. Здесь сосредоточенные массы m_1 и m_2 есть коэффициенты инерции, т.е. $a_{11} = m_1$; $a_{22} = m_2$. Коэффициент инерции a_{12} в нашем случае равен нулю.

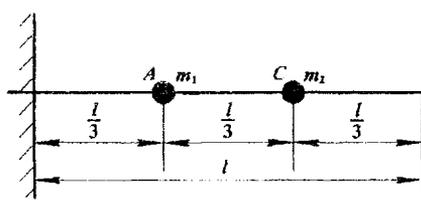


Рис. 1. Расчетная схема штанги с сосредоточенными массами

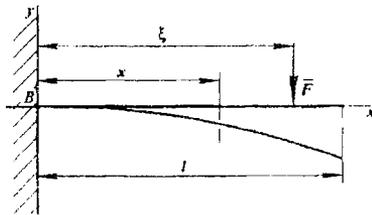


Рис. 2. Схема к определению уравнения изогнутой оси штанги

Потенциальная энергия

$$E_n = \frac{1}{2} (c_{11}y_1^2 + 2c_{12}y_1y_2 + c_{22}y_2^2), \quad (2)$$

где c_{ij} ($i, j = 1, 2$) – коэффициенты жесткости соответствующих частей штанги.

Используя обычную процедуру [2], составим уравнения Лагранжа

второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial y_1} = - \frac{\partial E_n}{\partial y_1}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial y_2} = - \frac{\partial E_n}{\partial y_2}. \quad (4)$$

Подставляя (1), (2) в (3), (4), с учетом того, что $a_{12} = 0$, получим дифференциальные уравнения свободных колебаний штанги с двумя степенями свободы

$$a_{11}\ddot{y}_1 + c_{11}y_1 + c_{12}y_2 = 0. \quad (5)$$

$$a_{22}\ddot{y}_2 + c_{21}y_1 + c_{22}y_2 = 0. \quad (6)$$

Колебания штанги носят сложный характер в силу конструктивных особенностей и рельефа поля. Потенциальную энергию для выбранной схемы определим, рассматривая колебания не строго в горизонтальной плоскости, а учитывая провисание частей штанги под действием их сил тяжести и упругих свойств. Обозначим высоту между поверхностью поля и штангой в точке приложения массы m_1 через h_1 , а в точке приложения массы m_2 - через h_2 (не обязательно $h_1 = h_2$). Пусть угол отклонения при провисании, т.е. смещении массы m_1 от h_1 в вертикальной плоскости, равен φ_1 , а массы m_2 - φ_2 . Вычислим потенциальную энергию штанги, учитывая силы тяжести $P_1 = m_1g$ и $P_2 = m_2g$, силы упругости и потенциальную энергию в положении равновесия, которая будет постоянной $E_0 = const$. Считаем углы φ_1, φ_2 малыми. В этом случае потенциальная энергия в поле сил тяжести равна

$$E_p = P_1 h_1 (1 - \cos \varphi_1) + P_2 h_2 (1 - \cos \varphi_2) = \frac{P_1 h_1}{2} \varphi_1^2 + \frac{P_2 h_2}{2} \varphi_2^2,$$

а потенциальная энергия упругих сил

$$E_y = -\frac{1}{2} [c_1 h_1^2 \varphi_1^2 + c_2 h_2^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2].$$

Тогда полная потенциальная энергия равна

$$E = E_p + E_y + E_0 = \frac{P_1 h_1}{2} \varphi_1^2 + \frac{P_2 h_2}{2} \varphi_2^2 - \frac{1}{2} [c_1 h_1^2 \varphi_1^2 + c_2 h_2^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2] + E_0.$$

Зная потенциальную энергию, определим коэффициенты жесткости

$$c_{11} = P_1 h_1 + c_1 h_1^2 - 2c_2 h_2^2, \quad c_{22} = -P_2 h_2 - 2c_2 h_2^2, \quad c_{12} = c_{21} = 2c_2 h_2^2.$$

Устойчивость равновесия штанги от выше приведенных сил тяжести и упругости можно оценить с помощью критерия Сильвестра [2], то есть

$$c_{11} > 0; \quad P_1 h_1 + c_1 h_1^2 - 2c_2 h_2^2 > 0.$$

$$c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0; \quad (P_1 h_1 + c_1 h_1^2 - 2c_2 h_2^2)(-P_2 h_2 - 2c_2 h_2^2) - 4c_2^2 h_2^4 > 0.$$

Параметры штанги, удовлетворяющие данным условиям, будут гарантировать ее устойчивость при малых колебаниях.

Определим частоту главных колебаний штанги. Частные решения уравнений (5) и (6) можно записать в виде

$$y_1 = A_1 \sin(kt + \beta), \quad y_2 = A_2 \sin(kt + \beta), \quad (7)$$

где k – собственная частота колебаний,

β – начальная фаза,

A – амплитуда колебаний.

Запишем отношение

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{A_2}{A_1} = \mu, \quad (8)$$

где μ коэффициент распределения.

Тогда частные решения можно переписать в виде

$$y_1 = A_1 \sin(kt + \beta), \quad y_2 = y_1 \mu = \mu A_1 \sin(kt + \beta). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (5), (6), после несложных преобразований получим

$$(c_{11} - a_{11} k^2) + \mu c_{12} = 0, \quad c_{12} + \mu(c_{22} - a_{22} k^2) = 0. \quad (10)$$

Исключив из этих уравнений μ , получим уравнение частот

$$(c_{11} - a_{11} k^2)(c_{22} - a_{22} k^2) - c_{12}^2 = 0. \quad (11)$$

Корни данного уравнения k_1 и k_2 определяют частоты колебаний. Соответствующие этим частотам колебания будут главными. Частоты определим из выражения

$$k_{1,2}^2 = \frac{a_{11} c_{22} + c_{11} a_{22}}{2a_{11} a_{22}} \pm \frac{\sqrt{(a_{11} c_{22} + c_{11} a_{22})^2 + 4a_{11} a_{22} c_{12}^2}}{2a_{11} a_{22}}.$$

Откуда можем получить значения k_1 и k_2 :

$$k_1 = \sqrt{\frac{a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22} - \sqrt{(a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22})^2 + 4a_{11}a_{22}c_{12}^2}}{2a_{11}a_{22}}}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22} + \sqrt{(a_{11}c_{22} + c_{11}a_{22})^2 + 4a_{11}a_{22}c_{12}^2}}{2a_{11}a_{22}}}$$

Подставив k_1 и k_2 в систему уравнений (10), получим два значения коэффициента распределения μ , соответствующие каждому из главных колебаний:

$$\mu_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2}, \quad \mu_2 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}. \quad (12)$$

В случае, когда потенциальная энергия является постоянной величиной и коэффициенты жесткости равны нулю, исследования колебаний штанги удобнее проводить с помощью параметров влияния. Для их определения необходимо получить уравнение изгиба штанги. Рассмотрим простейший вариант нагружения штанги силами, так как их количество влияет на количество поперечных сечений, необходимых для определения изгибающих моментов, что делает решение задачи громоздким. Пусть штанга находится под действием нагрузки \bar{F} , приложенной на расстоянии ξ от заземленного конца штанги (точка B) (рис.2). Дифференциальное уравнение изогнутой оси штанги в нашем случае имеет вид

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -F(\xi - x), \quad (13)$$

где E -- модуль упругости штанги;

J -- момент инерции поперечного сечения;

$F(\xi - x)$ -- изгибающий момент.

Решением уравнения (13) будет

$$EJy = -F\left(\frac{\xi x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + C_2. \quad (14)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из условий закрепления штанги, то есть зависят от вида связей штанги с остовом опрыскивателя. В случае жесткого заземления можно считать

$$x = 0; y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = y' = 0. \quad (15)$$

Тогда получим, что $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Из уравнения (14) при подстановке постоянных (15) получим уравнение изогнутой оси штанги:

$$y = -\frac{F}{EJ} \left(\frac{\xi x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (16)$$

Данное решение будем использовать в определении коэффициентов влияния, когда все обобщенные силы равны нулю, кроме силы, соответствующей данной обобщенной координате. Используя формулу (16), найдем абсолютные значения прогибов штанги от силы \bar{F} . Силу будем последовательно прикладывать в точках, где сосредоточены массы штанги. В случае $\xi_1 = x_1$ коэффициент влияния α_{11} согласно формуле (16) равен

$$\alpha_{11} = |y_1^1| = \frac{l^3 F}{81EJ}. \quad (17)$$

В случае $x_1 = \frac{1}{3}l$; $\xi_2 = \frac{2l}{3}$ коэффициент влияния $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ будет

$$\alpha_{12} = |y_1^2| = \frac{5Fl^3}{162EJ}. \quad (18)$$

В случае $x_2 = \xi_2 = \frac{2l}{3}$ получим коэффициент влияния α_{22}

$$\alpha_{22} = |y_2^2| = \frac{8Fl^3}{81EJ}. \quad (19)$$

Уравнения движения штанги с учетом коэффициентов влияния можно записать как

$$y_1 = -\alpha_{11}m_1\ddot{y}_1 - \alpha_{12}m_2\ddot{y}_2, \quad y_2 = -\alpha_{21}m_1\ddot{y}_1 - \alpha_{22}m_2\ddot{y}_2. \quad (20)$$

Решение полученных дифференциальных уравнений будем искать аналогично (7)

$$y_1 = A_1 \sin(kt + \beta), \quad y_2 = A_2 \sin(kt + \beta). \quad (21)$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{A_2}{A_1} = \mu, \quad (22)$$

откуда

$$A_2 = \mu A_1. \quad (23)$$

Продифференцировав два раза систему уравнений (21) с учетом (23), получим

$$\ddot{y}_1 = -k^2 A_1 (\sin(kt + \beta)), \quad \ddot{y}_2 = -k^2 \mu A_1 (\sin(kt + \beta)). \quad (24)$$

Из уравнений (24) с учетом (20) можно получить два линейных уравнения для определения частоты и коэффициента распределения

$$(\alpha_{11} m_1 + \mu \alpha_{12} m_2) k^2 = 1, \quad (\alpha_{12} m_1 + \mu \alpha_{22} m_2) k^2 = \mu. \quad (25)$$

Из данных уравнений получим уравнение частот

$$k^4 - Nk^2 + L = 0, \quad (26)$$

$$\text{где } N = \frac{(\alpha_{11} m_1 + \alpha_{22} m_2) F}{m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} = 41,15 \frac{EJ (m_1 + 8m_2)}{l^3 m_1 m_2};$$

$$L = \frac{F^2}{m_1 m_2 (\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} = 333,3 \frac{(JE)^2}{m_1 m_2 l^6}.$$

При равномерно распределенной массе вдоль длины штанги можно считать, что $m_1 = m_2 = m$. В этом случае корни уравнения (26) приобретают вид:

$$k_1 = \frac{3,02}{l} \sqrt{\frac{EJ}{m l}}; \quad k_2 = \frac{20,2}{l} \sqrt{\frac{EJ}{m l}}. \quad (27)$$

Как следует из полученных выражений в формулах (27), частоты главных колебаний штанги зависят от упругих свойств материала, момента инерции, массы и длины и не зависят от приложенной силы \bar{F} .

Формы главных колебаний определяют коэффициенты распределения, которые можно получить, подставив значения k_1 и k_2 в (25)

$$\mu_1 = \frac{1}{k_1^2 m \alpha_{12}} - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{k_2^2 m \alpha_{12}} - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}. \quad (28)$$

Подставив в зависимости (28) равенства (27), (17) и (18), получим значения коэффициентов распределения $\mu_1 = 3,14$; $\mu_2 = -0,32$.

Выводы

Предложен подход для приближенной оценки основных параметров свободных колебаний штанги опрыскивателя, в том числе и определения их устойчивого положения. Обоснованы два способа исследований колебаний: первый связан с определением потенциальной энергии в поле сил

тяжести и жесткости штанги, второй – с помощью определения коэффициентов влияния. В обоих случаях определяются главные частоты и коэффициенты распределения, которые можно использовать для построения форм главных колебаний в точках сосредоточения масс штанги. Получены формулы для анализа изгиба штанги и определения частот и амплитуд в зависимости от материала штанги, массы, формы поперечного сечения.

Список использованных источников

1. Тарг С.М. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
2. Пановко Я.Г. введение в теорию механических колебаний. Учебное пособие. – М.: Наука, 1980. – 272 с.

Анотація

АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД В ОЦІНЦІ КОЛИВАНЬ ШТАНГИ ОБПРИСКУВАЧА В ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

Чигарйов Ю.В., Крук І.С., Гайдуковський А.І.

У статті запропонований підхід для наближеної оцінки основних параметрів вільних коливань штанги обприскувача. Отримані залежності для аналізу вигину штанги і визначення частот і амплітуди коливань залежно від матеріалу, маси і форми поперечного перетину несучої конструкції.

Abstract

THE ANALYTICAL APPROACH IN THE ESTIMATION OF FLUCTUATIONS OF THE BAR OF THE SPRAYER IN THE HORIZONTAL PLANE

U. Chigarev, I. Kruk, A. Gaidukovski

In article is offered the approach for the approached estimation of key parameters of free fluctuations of a bar of a sprayer. Dependences for the analysis of a bend of a bar and definition of frequencies and amplitudes of fluctuations depending on a material, weights and forms of cross-section section of a bearing design are received.