

**XII МЕЖДУНАРОДНАЯ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ**

**МОДЕРНИЗАЦИЯ  
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА  
НА БАЗЕ ИННОВАЦИОННЫХ МАШИННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ И АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ  
СИСТЕМ**

**СБОРНИК ДОКЛАДОВ  
XII МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ  
(10-12 сентября 2012 г., г. Углич)**

**Часть 1**

Москва – 2012

3. Никитин, В. В. Влияние различных способов основной обработки почвы на эффективность удобрений, применяемых под сахарную свеклу / В. В. Никитин, С. И. Попов, Ю. И. Часовских // Земледелие. - 2008. - № 4. - С. 32-33.
4. Гуреев И.И., Ревякин Е.Л. Инновационный опыт производства сахарной свеклы в Центрально-Черноземном регионе.-М.: ФГНУ «Росинформагротех», 2009.-140 с.
5. Интенсивная технология выращивания и уборки фабричной сахарной свеклы// Рекомендации.- М.: ООО «Столичная типография», 2008.-56 с.

УДК 631.348.45

## МЕТОДИКА ИНЖЕНЕРНОГО РАСЧЕТА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КАПЕЛЬ РАБОЧЕГО РАСТВОРА ПЕСТИЦИДОВ С УЧЕТОМ СИЛ ЕЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ

*О.В. Гордеевко, к.т.н. (БГСХА), И.С. Крук, к.т.н. (УО «БГАТУ»,  
ИППК МЧС РБ), Ю.С. Биза, к.ф.-м.н. (УО «БГАТУ»),  
Э. Каминский, д.т.н. (ИТЕН в Фалентах, Республика Польша),  
А.А. Новиков (ИППК МЧС РБ)*

*Приведена методика расчета кинематических параметров движения капель рабочего раствора пестицидов с учетом сил сопротивления воздушной среды. Получены уравнения для расчета координат и скорости падения капли.*

*The design procedure of kinematic parameters of movement of drops of a solution of pesticides taking into account forces of resistance of the air environment is resulted. The equations for calculation of coordinates and speed of falling of a drop are received.*

Для изучения закономерностей движения капель в воздушной среде примем следующие допущения: расчетная форма капли в виде шара, силы сопротивления ее полету пропорциональны квадрату скорости и она не меняет своей массы и формы на протяжении всей траектории движения.

Капля жидкости  $M$  массой  $m_k$ , выброшенная из сопла распылителя в окружающую среду со скоростью  $\vartheta_{k0}$  под углом  $\gamma_0$  к вертикали совершает дальнейшее движение под действием

сил тяжести  $G_k$  и лобового сопротивления воздуха  $F_c$ . Сила лобового сопротивления направлена по касательной к траектории полета в сторону, противоположную направлению движения, и является заданной функцией скорости капли  $\vartheta_k$

$$F_c = -\lambda \cdot \vartheta_k^2,$$

где  $\lambda$  – приведенный коэффициент сопротивления, кг/м.

Сила тяжести, действующая на каплю определяется по формуле

$$G_k = m_k g,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

Для исследования закономерностей движения капли свяжем с ней естественную (подвижную) систему координат  $\tau Mn$ , а неподвижную (декартовую) –  $xOz$  поместим в точку вылета  $O$  (рисунок 1).

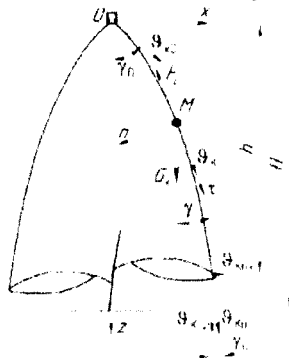


Рисунок 1 – Расчетная схема падения капли жидкости в воздушной среде

Уравнения движения точки  $M$  в естественной системе координат будут иметь вид [1,2]:

$$m_k \cdot \frac{d\vartheta_k}{dt} = m_k g \cdot \cos \gamma - \lambda \cdot \vartheta_k^2; \quad (1)$$

$$m_k \cdot \frac{\vartheta_k^2}{\rho} = m_k g \cdot \sin \gamma, \quad (2)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны траектории точки  $M$  в заданный момент времени, м;

$\gamma$  – угол, который образует вектор скорости точки  $M$  в данный момент времени с осью  $Oz$ .

Разделив левую и правую части уравнений на массу капли  $m_k$ , получим:

$$\frac{d\vartheta_k}{dt} = g \cdot \cos \gamma - \frac{\lambda}{m_k} \cdot \vartheta_k^2 = g \cdot \cos \gamma - C_T \cdot \vartheta_k^2; \quad (3)$$

$$\frac{\vartheta_k^2}{\rho} = g \cdot \sin \gamma, \quad (4)$$

где  $C_T$  – отношение приведенного коэффициента сопротивления движению капли к ее массе, 1/м [3]:

$$C_T = \frac{\lambda}{m_k} = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot S_k \cdot \rho_r,$$

где  $S_k$  – площадь миделева сечения капли, м<sup>2</sup>;

$\rho_r$  – плотность воздуха при нормальных условиях, кг/м<sup>3</sup>;

$\xi$  – коэффициент аэродинамического сопротивления движению капли в окружающей среде.

Замечая, что бесконечно малому перемещению  $ds$  точки  $M$  по траектории соответствует бесконечно малый угол  $d\gamma$ , который образуется между касательными в двух смежных точках (угол смежности [4]). Выразим кривизну кривой:

$$k = \frac{1}{\rho} = -\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{1}{\vartheta_k} \cdot \frac{d\gamma}{dt} \quad (5)$$

В зависимости (5) знак «минус» указывает, что угол  $\gamma$  убывает с возрастанием дуги  $ds$ . Подставив выражение (5) в уравнение (4) после соответствующих преобразований получим:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{g \cdot \sin \gamma}{\vartheta_k}. \quad (6)$$

Из уравнения (6) определим время перемещения точки  $M$  по дуге длиной  $ds$ :

$$dt = -\frac{\vartheta_{\kappa} \cdot d\gamma}{g \cdot \sin \gamma}. \quad (7)$$

Подставив (7) в уравнение (3) исключим из него параметр  $t$  и получим

$$\frac{d\vartheta_{\kappa}}{d\gamma} \cdot \sin \gamma + \vartheta_{\kappa} \cdot \cos \gamma = \frac{C_T \cdot \vartheta_{\kappa}^3}{g}. \quad (8)$$

Левая часть выражения (8) представляет собой производную сложной функции, представленной в виде:

$$\frac{d\vartheta_{\kappa}}{d\gamma} \cdot \sin \gamma + \vartheta_{\kappa} \cdot \cos \gamma = \frac{d(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)}{d\gamma}. \quad (9)$$

С учетом выражения (9) уравнение (8) примет вид:

$$\frac{d(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)}{d\gamma} = \frac{C_T \cdot \vartheta_{\kappa}^3}{g}. \quad (10)$$

Для разделения переменных, левую и правую часть уравнения (10) разделим на  $\vartheta_{\kappa}^3 \cdot \sin^3 \gamma$ :

$$\frac{d(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)}{(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)^3} = \frac{C_T}{g} \cdot \frac{d\gamma}{\sin^3 \gamma}. \quad (11)$$

Найдем решение уравнения (11), удовлетворяющее начальным условиям вылета капли из сопла распылителя (при  $\vartheta_{\kappa} = \vartheta_{\kappa 0}$ ;  $\gamma = \gamma_0$ ). Для этого, левую и правую часть уравнения проинтегрируем в заданных пределах:

$$\int_{\vartheta_{\kappa 0} \cdot \sin \gamma_0}^{\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma} \frac{d(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)}{(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)^3} = \frac{C_T}{g} \cdot \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sin^3 \gamma}. \quad (12)$$

После интегрирования выражения (12) в заданных пределах, получим:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2 \cdot \vartheta_{\kappa}^2 \cdot \sin^2 \gamma} + \frac{1}{2 \cdot \vartheta_{\kappa 0}^2 \cdot \sin^2 \gamma_0} = \frac{C_T}{g} \times \\ & \times \left[ \left( -\frac{\cos \gamma}{2 \cdot \sin^2 \gamma} + \frac{1}{2} \ln \left| g \frac{\gamma}{2} \right| \right) - \left( -\frac{\cos \gamma_0}{2 \cdot \sin^2 \gamma_0} + \frac{1}{2} \ln \left| g \frac{\gamma_0}{2} \right| \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Из зависимости (13) определим решение уравнения (3) относительно скорости полета капли в сопротивляющейся среде:

$$\vartheta_k = \frac{\vartheta_{k0} \cdot \sin \gamma_0}{\sin \gamma \sqrt{1 + \frac{C_T}{g} \vartheta_{k0}^2 \sin^2 \gamma \left[ \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \frac{\cos \gamma_0}{\sin^2 \gamma_0} - \ln \left| \frac{gg(0,5\gamma)}{tg(0,5\gamma_0)} \right| \right]}} \quad (14)$$

Следует отметить, что дальнейшее решение уравнения (14) не представляется возможным без существенных упрощений в обосновании модели полета капли. Сделаем упрощение не в модели полета капли, а в решении дифференциального уравнения (11). Пользуясь тем, что углы направления скоростей капли (а следовательно, и синусы углов) при вылете и падении изменяются незначительно, можем записать:

$$\sin^3 \gamma \approx \sin \gamma_0 \cdot \sin^2 \gamma. \quad (15)$$

С учетом принятого приближения уравнение (11) примет вид:

$$\frac{d(\vartheta_k \cdot \sin \gamma)}{(\vartheta_k \cdot \sin \gamma)^3} = \frac{C_T}{g \cdot \sin \gamma_0} \cdot \frac{d\gamma}{\sin^2 \gamma}. \quad (16)$$

В результате интегрирования уравнения, с учетом начальных условий ( $\vartheta_k = \vartheta_{k0}$ ;  $\gamma = \gamma_0$ ) и последующих преобразований, получим:

$$\vartheta_k = \frac{\vartheta_{k0} \cdot \sin \gamma_0}{\sin \gamma \sqrt{1 + \frac{2C_T}{g} \vartheta_{k0}^2 \sin^2 \gamma_0 \cdot (ctg \gamma - ctg \gamma_0)}}. \quad (17)$$

Сравнение результатов расчета скорости падения капли по формулам (14) и (17) показывают, что отличие составляет 2,6%, что позволяет использовать уравнение (16) для определения траектории движения капли в сопротивляющейся среде и ее координат в требуемый момент времени. Для определения перемещения точки вдоль оси  $Ox$  запишем

$$\frac{d\gamma}{\sin^2 \gamma} = \frac{g \cdot \sin \gamma_0}{C_T} \cdot \frac{d(\vartheta_k \cdot \sin \gamma)}{(\vartheta_k \cdot \sin \gamma)^3}. \quad (18)$$

Проекция скорости точки  $M$  на ось  $Ox$  связана с ее перемещением вдоль этой оси соотношением:

$$\vartheta_{kx} = \vartheta_k \cdot \sin \gamma = \frac{dx}{dt}. \quad (19)$$

где  $dx$  – проекция перемещения точки  $M$  на ось  $Ox$ .

Выражение (20) приведем к виду:

$$dx = \vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma \cdot dt. \quad (20)$$

В данную зависимость подставим значение параметра  $dt$ , определяемого выражением (7) и получим:

$$dx = \vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma \cdot \left( -\frac{\vartheta_{\kappa} \cdot d\gamma}{g \cdot \sin \gamma} \right) = -\frac{\vartheta_{\kappa}^2 \cdot d\gamma}{g}. \quad (21)$$

Правую часть выражения (21) умножим и разделим на  $\sin^2 \gamma$ , приводя уравнение к виду:

$$dx = -\frac{(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)^2}{g} \cdot \frac{d\gamma}{\sin^2 \gamma}. \quad (22)$$

Замечая, что множитель  $\frac{d\gamma}{\sin^2 \gamma}$  выражения (22) равен правой части уравнения (18), после преобразований получим:

$$dx = -\frac{(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)^2}{g} \cdot \frac{g \cdot \sin \gamma_0}{C_{\tau}} \cdot \frac{d(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)}{(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)^3} = -\frac{\sin \gamma_0}{C_{\tau}} \cdot \frac{d(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma)}{\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma}. \quad (23)$$

После сделанных преобразований, можно определить величину перемещения капли вдоль оси  $Ox$  при начальных условиях ( $\vartheta_{\kappa} = \vartheta_{\kappa 0}; \gamma = \gamma_0$ ):

$$x = -\frac{\sin \gamma_0}{C_{\tau}} \cdot [\ln(\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma) - \ln(\vartheta_{\kappa 0} \cdot \sin \gamma_0)]. \quad (24)$$

Зависимость (24) можно представить в следующем виде

$$\vartheta_{\kappa} \cdot \sin \gamma = \vartheta_{\kappa 0} \cdot \sin \gamma_0 \cdot e^{-\frac{x \cdot C_{\tau}}{\sin \gamma_0}} = \vartheta_{\kappa 0} \cdot \sin \gamma_0 \cdot e^{-\eta}, \quad (25)$$

где  $\eta = \frac{x \cdot C_{\tau}}{\sin \gamma_0}$ .

Для определения закона изменения угла  $\gamma$ , подставим равенство (25) в (16) и после преобразований получим:

$$\frac{d\gamma}{\sin^2 \gamma} = \frac{g}{C_{\tau} \cdot \vartheta_{\kappa 0}^2 \cdot \sin \gamma_0} \cdot \frac{d(e^{-\eta})}{(e^{-\eta})^3}. \quad (26)$$

После интегрирования выражения с учетом начальных условий

$\vartheta_{\kappa} = \vartheta_{\kappa 0}; \gamma = \gamma_0$ , получим:

$$ctg\gamma = ctg\gamma_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{C_T \cdot \vartheta_{k0}^2 \cdot \sin \gamma_0} \cdot (e^{2\eta} - 1). \quad (27)$$

Уравнение (27), наряду с (25), показывает, что капля жидкости, выброшенная из сопла распылителя со скоростью  $\vartheta_{k0}$  под углом  $\gamma_0$  к вертикали не падает вертикально вниз ( $\gamma \neq 0$  и координата  $x$  не имеет максимума), а движется по параболе ускоренно до тех пор, пока ее скорость не достигнет предельного значения. Его мы можем определить из уравнения (3), приравняв его правую часть к нулю:

$$\vartheta_k^* = \sqrt{\frac{g \cdot \cos \gamma}{C_T}}. \quad (28)$$

При достижении предельной скорости, дальнейшее движение капли по траектории будет равномерным, т.е.  $\vartheta_k = \vartheta_k^* = const$ . Введем в уравнение (27) следующие обозначения

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{C_T \cdot \vartheta_{k0}^2 \cdot \sin \gamma_0}; \quad a = \frac{-2 \cdot C_T}{\sin \gamma_0}; \quad -2\eta = \frac{-2 \cdot C_T \cdot x}{\sin \gamma_0} = a \cdot x,$$

получим

$$ctg\gamma = ctg\gamma_0 - A \cdot (e^{-2\eta} - 1) = ctg\gamma_0 - A \cdot (e^{ax} - 1). \quad (29)$$

Заменим в данном уравнении  $ctg\gamma$  на  $\frac{dz}{dx}$ , получим

$$\int_0^z dz = \int_0^x ctg\gamma_0 \cdot dx - A \cdot \int_0^x (e^{ax} - 1) \cdot dx. \quad (30)$$

После интегрирования данного выражения с учетом начальных условий  $z = 0, x = 0$ , получим уравнение траектории полета капли в сопротивляющейся среде вдоль оси  $Oz$ :

$$z = x \cdot ctg\gamma_0 - A \cdot \left[ \frac{1}{a} (e^{ax} - 1) - x \right]. \quad (31)$$

Представим член уравнения  $e^{ax}$  как  $e^{ax} \approx 1 + \frac{a \cdot x}{1} + \frac{(a \cdot x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(a \cdot x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ , тогда уравнение (31) примет вид

$$z = x \cdot ctg\gamma_0 - \frac{A}{2} \cdot a \cdot x^2 - \frac{A}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot x^3}{3}. \quad (32)$$



Подставив ранее принятые обозначения, получим уравнение кубической параболы с вершиной в точке вылета капли из сопла распылителя:

$$z = x \cdot \text{ctg} \gamma_0 + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot \vartheta_{k0}^2 \cdot \sin^2 \gamma_0} - \frac{1}{3} \cdot \frac{g \cdot x^3 \cdot C_r}{\vartheta_{k0}^2 \cdot \sin^3 \gamma_0}, \quad (33)$$

Преобразовав зависимости (14), (24), (27), (33) с учетом всех принятых обозначений, получим

$$\vartheta_k = \frac{\vartheta_{k0} \cdot \sin \gamma_0}{\sin \gamma \sqrt{1 + \frac{\xi \cdot S_k \cdot \rho_r}{2 \cdot g \cdot m_k} \vartheta_{k0}^2 \sin^2 \gamma \left[ \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} - \frac{\cos \gamma_0}{\sin^2 \gamma_0} - \ln \left| \frac{g(0,5\gamma)}{g(0,5\gamma_0)} \right| \right]}}; \quad (34)$$

$$x = -\frac{2 \cdot m_k \cdot \sin \gamma_0}{\xi \cdot S_k \cdot \rho_k} \cdot [\ln(\vartheta_k \cdot \sin \gamma) - \ln(\vartheta_{k0} \cdot \sin \gamma_0)]; \quad (35)$$

$$\gamma = \arccotg \left( \text{ctg} \gamma_0 - \frac{m_k \cdot g}{\xi \cdot S_k \cdot \rho_r \cdot \vartheta_{k0}^2 \cdot \sin \gamma_0} \cdot \left( e^{\frac{x \xi S_k \rho_r}{m_k \sin \gamma_0}} - 1 \right) \right); \quad (36)$$

$$z = x \cdot \text{ctg} \gamma_0 + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot \vartheta_{k0}^2 \cdot \sin^2 \gamma_0} - \frac{1}{6} \cdot \frac{g \cdot x^3 \cdot \xi \cdot S_k \cdot \rho_r}{m_k \cdot \vartheta_{k0}^2 \cdot \sin^3 \gamma_0}. \quad (37)$$

### Заключение

В результате проведенных теоретических исследований закономерностей движения капель рабочего раствора пестицида в факеле распыла установлено, что траекториями их движения является сложная кривая, учитывающая свойства параболы и экспоненты. Предложена методика инженерного расчета кинематических параметров движения капель рабочего раствора пестицидов с учетом сопротивления воздушной среды.

### Литература

1. Кильчевский, Н.А. Курс теоретической механики: В 2 т. / М.: Наука. – Т.1: Кинематика, статика, динамика точки. – 1972. – 456с.
2. Лойцянский, Л.Г., Лурье, А.И. Курс теоретической механики: В 2 т. / М.: Наука. – Т.2: Динамика. -. 1983. – 640с.
3. Левич, Б.Г. Физико-химическая гидродинамика. – 2-с изд., доп. и перераб. - М.: Физматгиз, 1959. – 699с.