

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика материалов и детали машин»

О. И. Мисуно, Д. Н. Колоско, С. А. Легенький

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по аграрному техническому образованию
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений высшего образования,
обучающихся по группе специальностей 74 06 Агроинженерия
и 1-36 12 01 Проектирование и производство
сельскохозяйственной техники*

Минск
БГАТУ
2014

УДК 539.3/6(07)
ББК 30.121я7
М55

Рецензенты:

заведующий кафедрой «Сопротивление материалов
машиностроительного профиля» УО «Белорусский национальный
технический университет», доктор физико-математических наук,
профессор *Ю. В. Василевич*;
заместитель генерального директора по внедрению и испытаниям
РУП «НПЦ НАН Беларуси по механизации сельского хозяйства»,
кандидат технических наук, доцент *Н. Г. Бакач*

Механика материалов : учебно-методическое пособие /
М55 О. И. Мисуно, Д. Н. Колоско, С. А. Легенький. – Минск : БГАТУ,
2014. – 212 с.
ISBN 978-985-519-678-6.

Обеспечивает комплексную реализацию управляемой самостоятельной работы студентов по модульной технологии обучения по дисциплине «Механика материалов». Содержит необходимые и достаточные теоретические положения, примеры их применения при выполнении заданий, условия индивидуальных домашних заданий, а также методические рекомендации для работы над ними и наиболее востребованные справочные материалы.

Для студентов дневной формы обучения учреждений высшего образования по специальностям направления «Агроинженерия».

УДК 539.3/6(07)
ББК 30.121я7

ISBN 978-985-519-678-6

© БГАТУ, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6	3.7. Метод начальных параметров	66
1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ		3.8. ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»	71
ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	8	3.9. Методические указания для выполнения ИДЗ	
1.1. Основные определения	8	«Прямой поперечный изгиб»	89
1.2. Центр тяжести сложных сечений	10	3.10. Примеры решения некоторых задач ИДЗ	
1.3. Параллельный перенос осей	12	«Прямой поперечный изгиб»	90
1.4. Поворот координатных осей	13	4. КОСОЙ ИЗГИБ	105
1.5. Главные оси и главные моменты инерции	15	4.1. Основные понятия. Нормальные напряжения	
1.6. ИДЗ «Определение геометрических характеристик		в поперечных сечениях бруса. Условие прочности	105
составного сечения»	16	4.2. ИДЗ «Косой изгиб»	111
1.7. Методические указания для выполнения ИДЗ		4.3. Методические указания для выполнения ИДЗ	
«Определение геометрических характеристик		«Косой изгиб»	120
составного сечения»	23	4.4. Пример выполнения ИДЗ «Косой изгиб»	120
1.8. Пример выполнения ИДЗ «Определение		5. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ	128
геометрических характеристик		5.1. Внутренние силовые факторы	128
составного сечения»	24	5.2. Напряжения в поперечных сечениях круглого вала.	
2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ	33	Условие прочности	131
2.1. Напряжения в поперечных сечениях стержня	33	5.3. ИДЗ «Определение диаметра вала	
2.2. Перемещения сечений стержня	36	при изгибе с кручением»	134
2.3. Статически неопределимые системы		5.4. Методические указания для выполнения ИДЗ	
при растяжении и сжатии	38	«Определение диаметра вала	
2.4. ИДЗ «Расчет ступенчатого стержня»	40	при изгибе с кручением»	143
2.5. Методические указания для выполнения ИДЗ		5.5. Пример выполнения ИДЗ «Определение	
«Расчет ступенчатого стержня»	47	диаметра вала при изгибе с кручением»	143
2.6. Пример выполнения ИДЗ		6. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ	
«Расчет ступенчатого стержня»	47	НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ	149
3. ИЗГИБ	52	6.1. Основные понятия	149
3.1. Виды изгибов	52	6.2. Степень статической неопределимости	150
3.2. Виды опор	53	6.3. Метод сил. Канонические уравнения	151
3.3. Внутренние силовые факторы: поперечная сила Q_y		6.4. Особенности расчета симметричных систем	154
и изгибающий момент	55	6.5. ИДЗ «Расчет плоской статически	
3.4. Напряжения в поперечных сечениях балки		неопределимой рамы методом сил»	156
при чистом изгибе	59	6.6. Методические указания для выполнения ИДЗ	
3.5. Касательные напряжения при поперечном изгибе	62	«Расчет плоской статически неопределимой	
3.6. Расчет балок на прочность при изгибе	63	рамы методом сил»	163
		6.7. Пример выполнения ИДЗ «Расчет плоской	
		статически неопределимой рамы методом сил»	163

7. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	175
7.1. Понятие об устойчивости равновесия упругих тел.....	175
7.2. Определение критической силы. Условие устойчивости	178
7.3. ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней».....	183
7.4. Методические указания для выполнения ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»	189
7.5. Пример выполнения ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней».....	189
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	194
ПРИЛОЖЕНИЯ	195

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости типовых, наиболее часто встречающихся элементов инженерных конструкций. Цель дисциплины – теоретическая и практическая подготовка для проведения расчетов на прочность, жесткость, устойчивость и изучения последующих дисциплин, развития инженерного мышления.

Основные понятия механики материалов опираются на законы и теоремы теоретической механики и в первую очередь – на законы статики и динамики, без знания которых изучение данного предмета становится практически невозможным. Механика материалов (в отличие от теоретической механики) рассматривает задачи, где наиболее существенными являются свойства деформируемых тел. Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в ряде случаев прибегать к упрощающим гипотезам – предположениям, которые оправдываются в дальнейшем путем сопоставления расчетных данных с экспериментом.

Механика материалов принадлежит к прикладным наукам, изучение которых невозможно без систематического решения задач, способствующих пониманию и закреплению теоретического материала. Неправильный расчет на прочность, жесткость и устойчивость самого незначительного, на первый взгляд, элемента конструкции может повлечь за собой очень тяжелые последствия – привести к разрушению конструкции в целом. При проведении подобных расчетов необходимо стремиться к сочетанию надежности работы конструкции с ее экономичностью, добиваться требуемой прочности, жесткости и устойчивости при наименьшем расходе материала (наименьшей стоимости).

В процессе изучения курса «Механика материалов» по модульной технологии обучения в рамках управляемой самостоятельной работы (УСРС) студенты выполняют индивидуальные домашние задания (ИДЗ). Количество выполняемых ИДЗ зависит от специальности и

количества часов, отведенных в учебном плане на изучение курса. Данное учебно-методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении ИДЗ. В нем приводятся краткие теоретические сведения и основные формулы, необходимые для решения задач, объясняются смысл и порядок решения задач, задания к ИДЗ.

Задание по ИДЗ выдается преподавателем каждому студенту и регистрируется в журнале.

При выполнении и оформлении ИДЗ необходимо руководствоваться общими указаниями:

1. Приступать к выполнению задания следует только после изучения теоретического материала и решения задач, рекомендованных на практических занятиях.

2. ИДЗ оформляется на стандартных листах писчей бумаги формата А4 (210×297) чернилами (не красными), четким почерком, с одной стороны листа.

3. Первый лист ИДЗ – это титульный лист, форма и содержание которого приведены в приложении 1. На втором листе представляется основная надпись для текстовых конструкторских документов по ГОСТ 2.104–68 (первый или заглавный лист), а на третьем листе и дальше – основная надпись для всех конструкторских документов (последующие листы).

4. Перед решением каждой задачи требуется выписать полностью ее условие с числовыми данными.

5. Исходная расчетная схема, а также все схемы, полученные в результате расчета, вычерчиваются карандашом (в удобном для восприятия масштабе) с указанием на них цифр с единицами измерения всех физических величин, необходимых для расчета или полученных в результате расчета.

6. Решение задачи должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращения слов, объяснениями. Результаты всех вычислений должны иметь единицы измерения. Рекомендуемые единицы измерения физических величин приведены в разделе «Используемые обозначения».

7. Листы ИДЗ должны быть скреплены (сшиты).

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Литература: [1, с. 166–197; 2, с. 131–158].

Статические моменты сечений, их изменение при параллельном переносе осей. Центр тяжести сечения. Осевой, центробежный, полярный моменты инерции сечения, их свойства, изменение при параллельном переносе и при повороте осей. Главные центральные оси инерции и главные моменты инерции. Определение моментов инерции сечений простой формы (прямоугольник, круг, кольцо). Моменты инерции сечений стандартных прокатных профилей. Свойства симметричных сечений. Определение главных центральных осей инерции и главных моментов инерции сложного сечения. Радиусы инерции.

1.1. Основные определения

Наиболее общеизвестные геометрические характеристики – длина, площадь, объем, которые имеют определенный физический смысл. В расчетах на прочность и жесткость используются геометрические характеристики поперечных сечений, зависящие от формы сечения. Эти характеристики не имеют физического смысла, их нельзя измерить. Умение вычислять данные характеристики, знание их изменения при преобразовании осей координат дают возможность рационально располагать элементы конструкции относительно внешних нагрузок, обеспечивая ее наибольшую грузоподъемность при наименьшем весе.

В системе координат y, z геометрические характеристики сечения определяются интегралами:

– площадь поперечного сечения

$$A = \int_A dA; \quad (1.1)$$

– статические моменты площади сечения относительно осей z и y :

$$S_z = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A z dA; \quad (1.2)$$

– осевые моменты инерции сечения относительно осей z и y :

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA; \quad (1.3)$$

– центробежный момент инерции сечения относительно осей z и y :

$$I_{zy} = \int_A yz dA; \quad (1.4)$$

– полярный момент инерции сечения относительно начала координат

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (1.5)$$

Выделим в сечении элементарную площадку dA с координатами y и z (рис. 1.1).

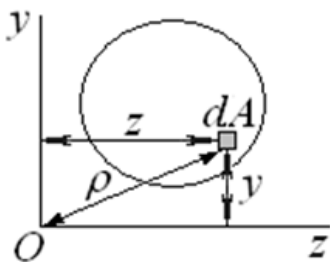


Рис. 1.1. Координаты элементарной площадки:

dA – элементарная площадка; y, z – координаты элементарной площадки относительно осей z, y ; ρ – полярная координата элементарной площадки относительно начала координат

Индекс «А» у знака интеграла означает, что интегрирование проводится по всей площади сечения.

Статические моменты площади и центробежный момент инерции сечения в зависимости от положения осей координат могут

быть положительными, отрицательными и равными нулю. Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции сечения.

Полярный и осевые моменты инерции всегда положительны. Размерность статических моментов – $\text{мм}^3, \text{см}^3$; размерность моментов инерции – $\text{мм}^4, \text{см}^4$.

Выразив в формуле (1.5) ρ по теореме Пифагора через координаты элементарной площадки, получим

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y. \quad (1.6)$$

Следовательно, полярный момент инерции относительно произвольной точки равен сумме осевых моментов инерции сечения относительно любых взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

1.2. Центр тяжести сложных сечений

Ось, относительно которой статический момент площади сечения равен нулю, называется центральной. Точка пересечения центральных осей называется центром тяжести сечения.

Из формул (1.2) следует, что координаты центра тяжести сечения (рис. 1.2) определяются следующим образом:

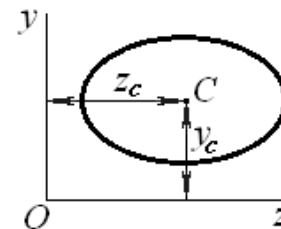


Рис. 1.2. Координаты центра тяжести

$$S_z = \int_A y dA = y_c \int_A dA = y_c A, \quad S_y = \int_A z dA = z_c \int_A dA = z_c A;$$

$$y_c = \frac{S_z}{A}; \quad z_c = \frac{S_y}{A}. \quad (1.7)$$

Если сечение имеет две оси симметрии, то точка их пересечения является центром тяжести. Если сечение имеет одну ось симметрии, то центр тяжести будет лежать на этой оси, необходимо только определить одну недостающую координату (рис. 1.3).

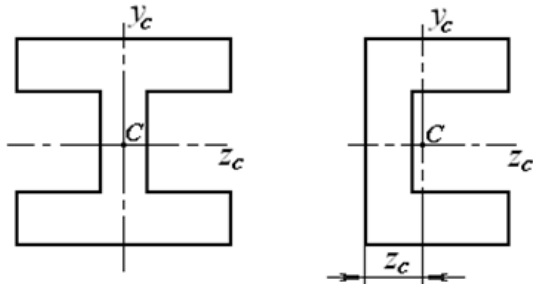


Рис. 1.3. Центры тяжести симметричных сечений

Статический момент составного сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения. Если неизвестны координаты центра тяжести сложного сечения, то оно разбивается на такие элементы, для которых эти координаты известны без расчетов, – прямоугольник, круг, треугольник (рис. 1.4).

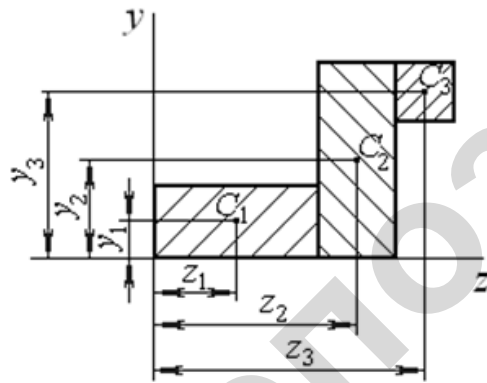


Рис. 1.4. Определение статических моментов сложного сечения

Координаты центра тяжести сложного сечения:

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (1.8)$$

где z_i, y_i, A_i – координаты центра тяжести и площадь элементов, на которые разбито сечение;

n – количество таких элементов.

1.3. Параллельный перенос осей

Если известны геометрические характеристики сечения относительно осей z и y , геометрические характеристики относительно осей z_1 и y_1 , параллельных первым (рис. 1.5), будут определяться согласно выражениям:

$$S = S + bA; \quad S_y = S_y + aA; \quad (1.9)$$

$$I = I + 2bS + b^2 A; \quad I_{y_1} = I_y + 2bS_y + a^2 A; \quad (1.10)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + aS_z + bS_y + abA. \quad (1.11)$$

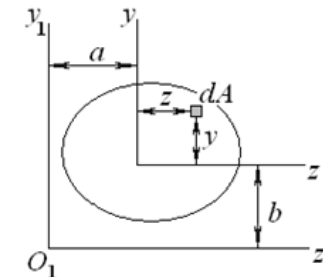


Рис. 1.5. Параллельный перенос относительно произвольных осей

Если оси z и y являются центральными и проходят через центр тяжести сечения (рис. 1.6), то статические моменты площади сечения S_z, S_y будут равны нулю.

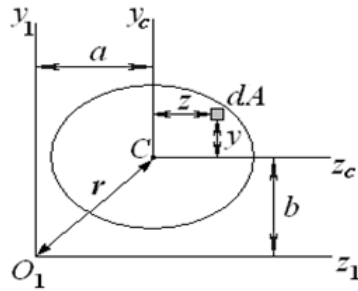


Рис. 1.6. Параллельный перенос относительно центральных осей

Формулы (1.9–1.11) примут вид:

$$S_{z_1} = bA; \quad S_{y_1} = aA; \quad (1.12)$$

$$I_{z_1} = I_{z_c} + b^2 A; \quad I = I + aA; \quad (1.13)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{z_c y_c} + abA. \quad (1.14)$$

Любое сечение имеет наименьшие осевые моменты инерции относительно центральных осей z_c и y_c . Полярный момент инерции сечения при параллельном переносе осей будет равен

$$I_p = I_{p_c} + r^2 A. \quad (1.15)$$

Формулы (1.12–1.15) позволяют значительно упростить определение геометрических характеристик плоских сечений.

1.4. Поворот координатных осей

При известных осевых и центробежном моментах инерции относительно произвольных осей z и y соответствующие моменты инерции относительно повернутых на угол α осей z_1 и y_1 (рис. 1.7) будут определяться по формулам:

$$I = I \cos \alpha + I \sin \alpha - I \sin 2\alpha; \quad (1.16)$$

$$I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha; \quad (1.17)$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha. \quad (1.18)$$

Просуммировав уравнения (1.16) и (1.17), получим

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y. \quad (1.19)$$

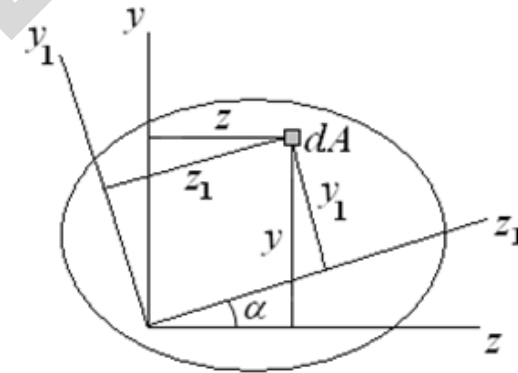


Рис. 1.7. Поворот относительно произвольных осей

Следовательно, при повороте осей сумма осевых моментов инерции остается постоянной и, согласно формуле (1.6), равна полярному моменту инерции сечения относительно начала координат.

При повороте осей на угол $\alpha = 90^\circ$ центробежный момент инерции меняет знак:

$$I_{zy} = -I_{z_1 y_1}. \quad (1.20)$$

Центробежный момент инерции изменяется непрерывно в зависимости от угла α , следовательно, должно существовать такое положение осей, для которых центробежный момент инерции будет равен нулю.

1.5. Главные оси и главные моменты инерции

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения (один – максимум, второй – минимум), называются главными осями инерции, а осевые моменты инерции – главными моментами инерции. Через любую точку сечения всегда можно провести две взаимно перпендикулярные главные оси.

Если начало координат совпадает с центром тяжести сечения, то главные оси называются главными центральными осями, а осевые моменты относительно этих осей – главными центральными моментами инерции.

Угол α_0 , на который нужно повернуть оси, чтобы они стали главными, определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}. \quad (1.21)$$

Положительный угол откладывается от оси z против часовой стрелки, отрицательный – по часовой стрелке.

Значения главных моментов инерции определяются следующим образом:

$$I_{\max/\min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}. \quad (1.22)$$

Главные центральные оси сложного сечения обозначаются: v – ось, относительно которой осевой момент инерции принимает максимальное значение; u – ось, относительно которой осевой момент инерции принимает минимальное значение.

Ось v проходит через более узкую часть сечения: через II и IV четверти поперечного сечения, если центробежный момент положительный, и через I и III четверти, если центробежный момент отрицательный.

Для имеющих оси симметрии сечений справедливы положения (рис. 1.8):

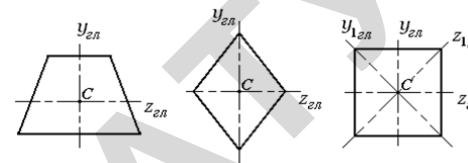


Рис. 1.8. Главные центральные оси симметричных сечений

1) если сечение имеет одну ось симметрии, то эта ось и ось, ей перпендикулярная, проходящая через центр тяжести сечения, являются главными центральными осями;

2) если сечение имеет две оси симметрии, то эти оси будут главными центральными осями;

3) если сечение имеет три и более оси симметрии, то любая центральная ось будет главной и все главные центральные моменты инерции будут равны.

1.6. ИДЗ «Определение геометрических характеристик составного сечения»

Для заданного составного поперечного сечения бруса, состоящего из полосы прямоугольного сечения (h – больший размер, b – меньший размер), стандартных прокатных профилей швеллера и неравнополочного уголка (рис. 1.9), определить положение главных центральных осей инерции и величину главных центральных моментов инерции. Исходные данные принять из табл. 1.1.

Таблица 1.1

Исходные данные к ИДЗ «Определение геометрических характеристик составного сечения»

№ п/п	Элементы заданного сечения			
	Полоса, мм		Швеллер ГОСТ 8240–72	Неравнополочный уголок, ГОСТ 8510–86
	h	b		
1	170	24	16	125×80×12
2	175	36	18	140×90×8
3	180	26	18а	80×50×6
4	185	32	20	90×56×8
5	190	36	20а	100×63×7

Окончание табл. 1.1

№ п/п	Элементы заданного сечения			
	Полоса, мм		Швеллер ГОСТ 8240–72	Неравнополочный уголок, ГОСТ 8510–86
	<i>h</i>	<i>b</i>		
6	195	26	22	100×63×10
7	200	30	22а	125×80×10
8	155	38	14	140×90×10
9	160	28	14а	110×70×8
10	165	34	16а	125×80×7
11	150	30	12	80×50×5
12	190	40	22	110×70×7
13	185	36	20а	80×50×6
14	195	32	22а	100×63×8
15	160	30	18а	90×56×8
16	155	26	14а	110×70×7
17	170	28	20	100×63×10
18	200	36	24а	125×80×12
19	150	24	12	75×50×8
20	195	36	24	110×70×8
21	180	32	20а	125×80×12
22	155	30	12	100×63×7
23	200	40	24	125×80×10
24	175	36	18а	140×90×10
25	190	38	22а	125×80×10
26	165	30	14а	110×70×8
27	160	26	14	100×63×8
28	155	28	12	100×63×10
29	180	34	20	125×80×8
30	140	28	12	75×50×8

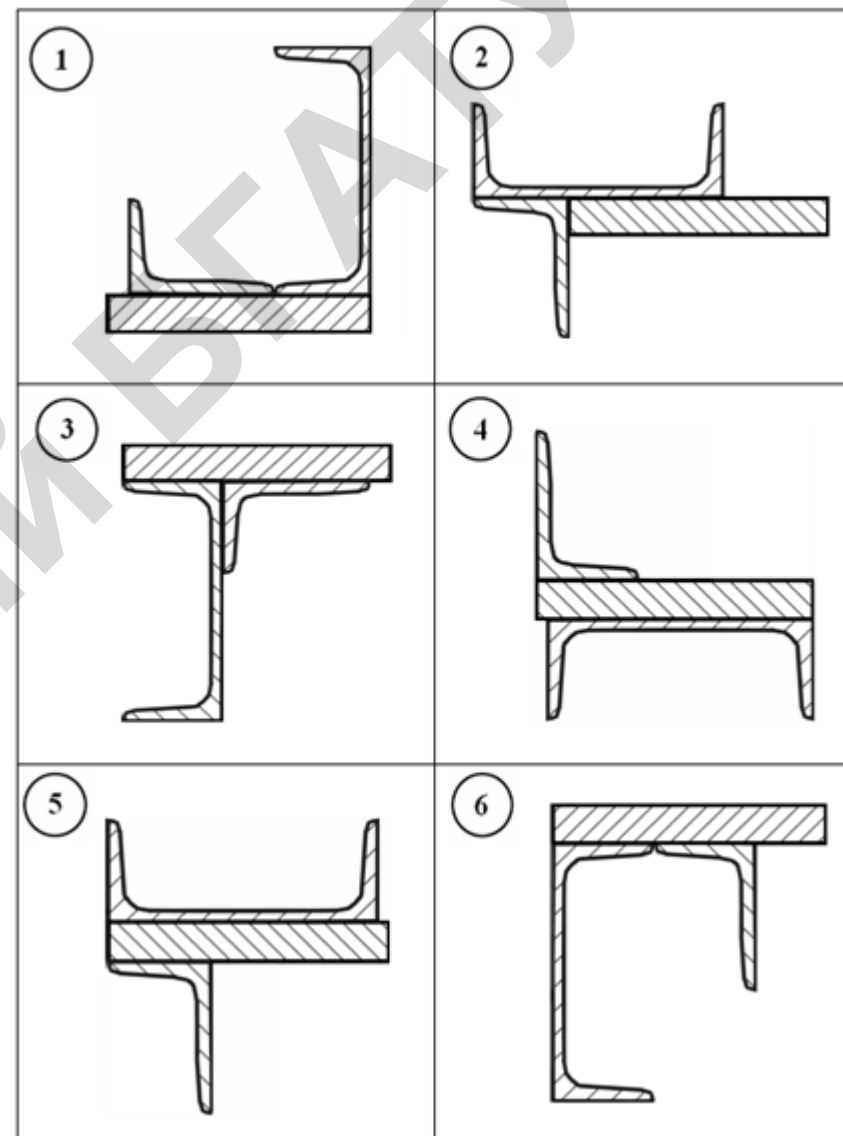


Рис. 1.9. Схемы (1–6) к ИДЗ «Определение геометрических характеристик составного сечения»

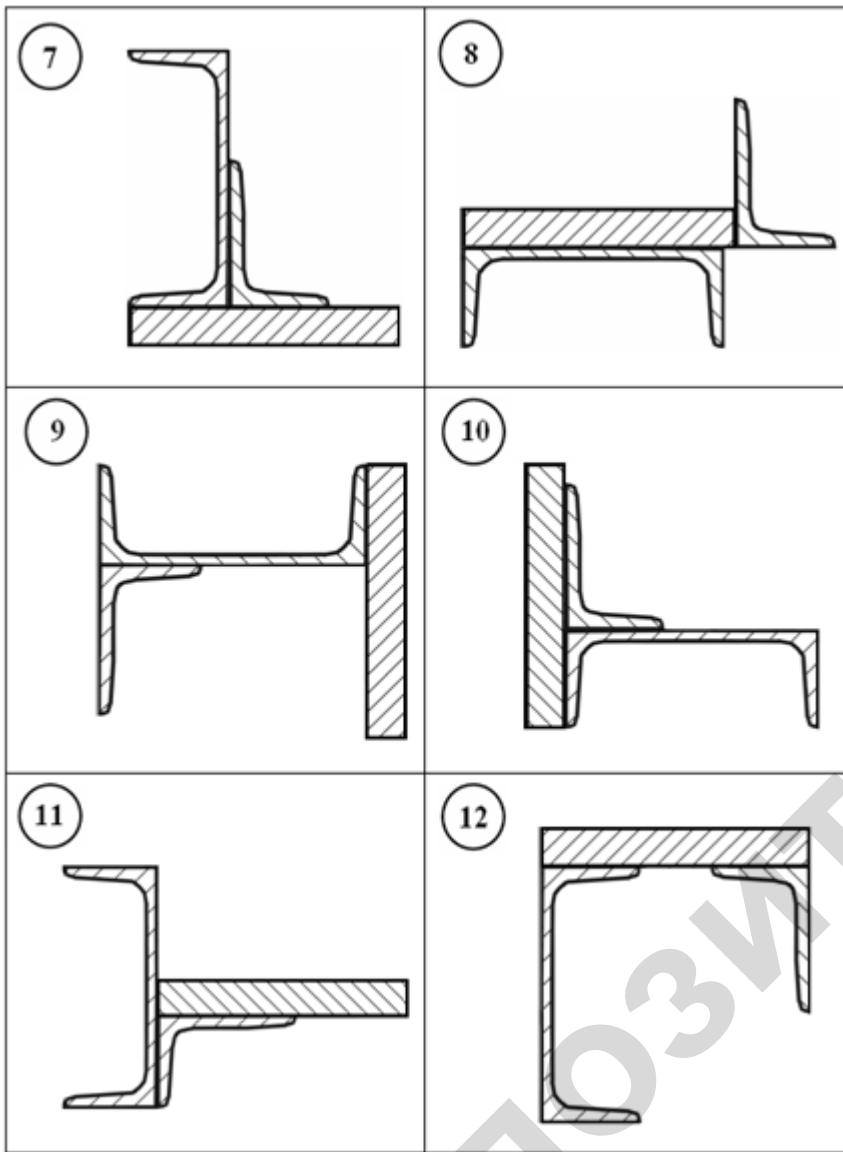


Рис. 1.9. Схемы (7–12) к ИДЗ «Определение геометрических характеристик составного сечения»

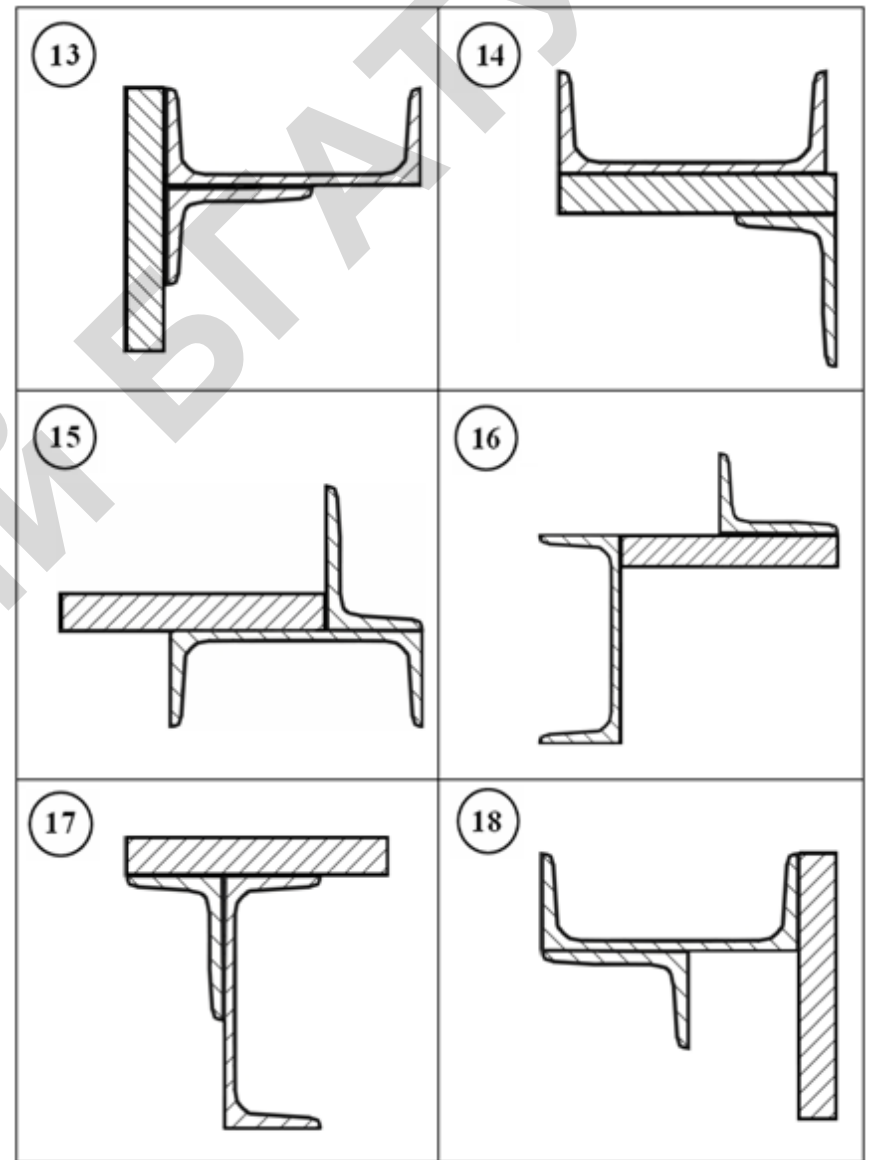


Рис. 1.9. Схемы (13–18) к ИДЗ «Определение геометрических характеристик составного сечения»

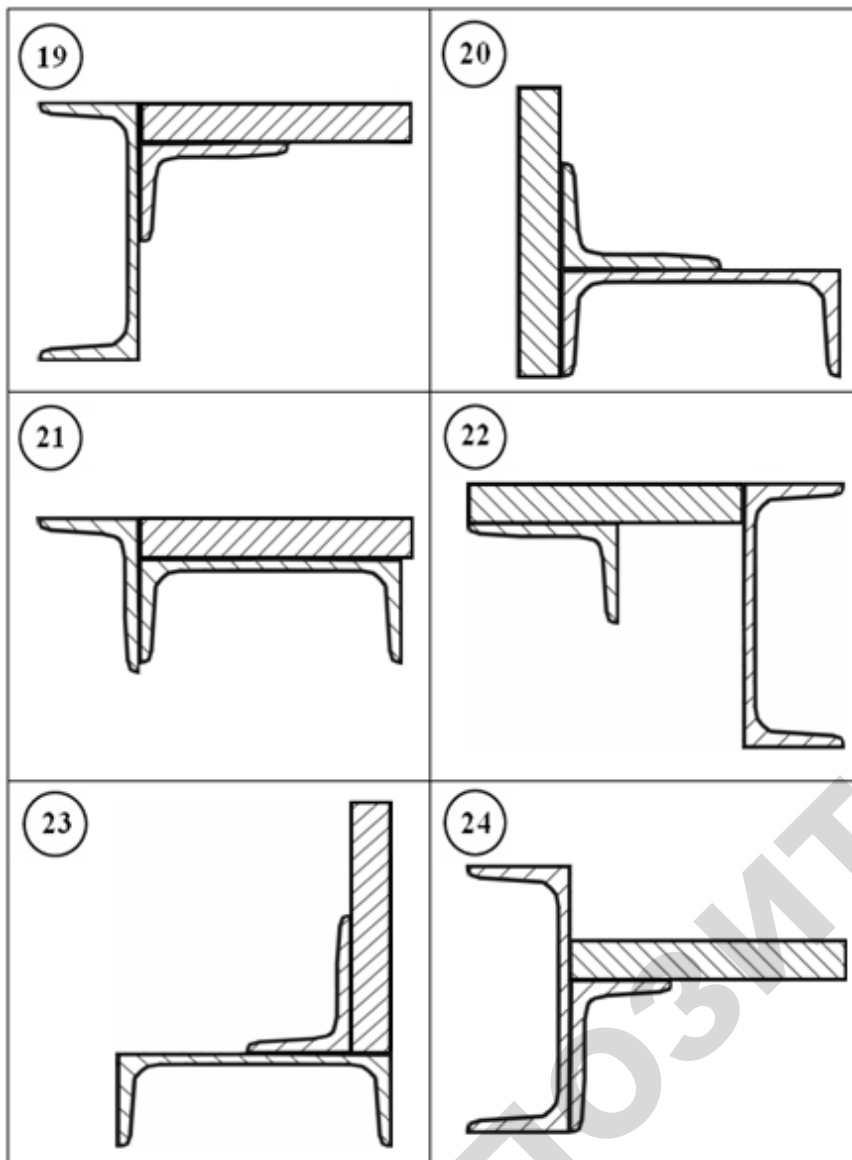


Рис. 1.9. Схемы (19–24) к ИДЗ «Определение геометрических характеристик составного сечения»

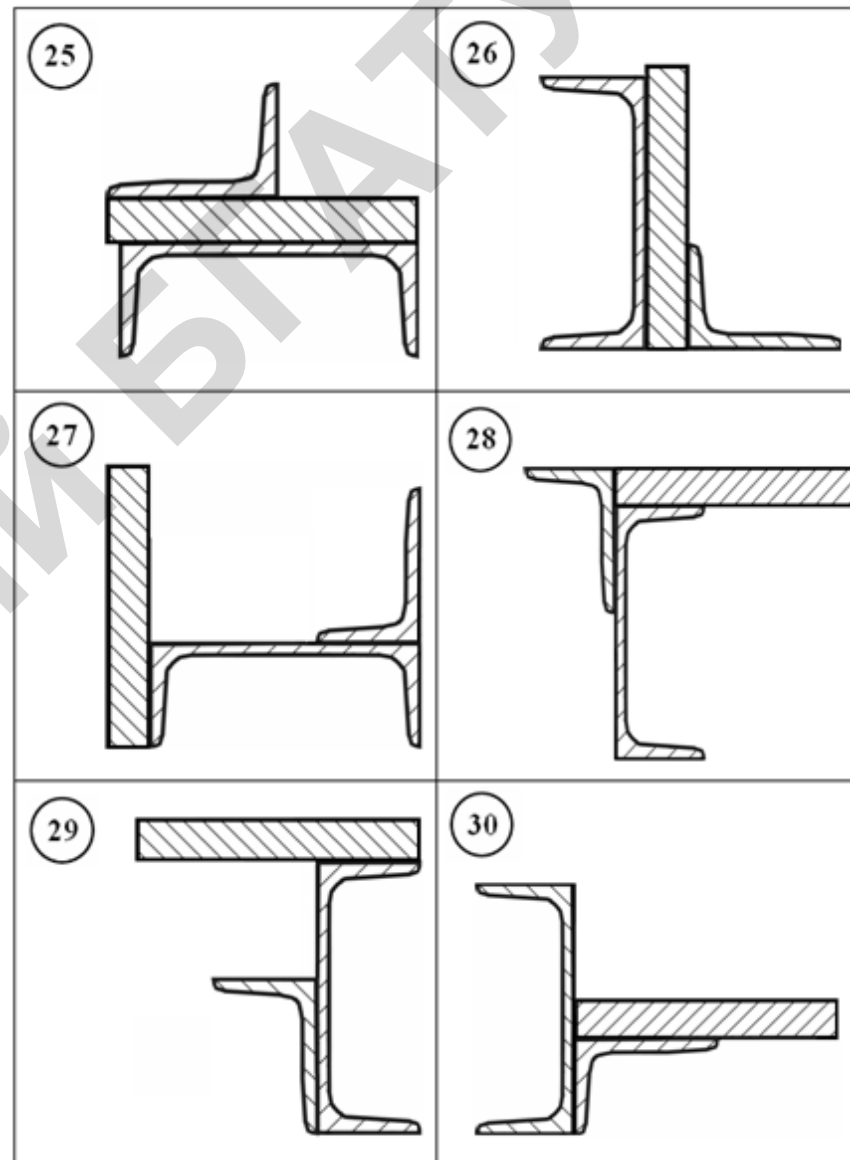


Рис. 1.9. Схемы (25–30) к ИДЗ «Определение геометрических характеристик составного сечения»

1.7. Методические указания для выполнения ИДЗ «Определение геометрических характеристик составного сечения»

1. Вычертить в масштабе 1:1 или 1:2 заданное поперечное сечение бруса.

2. Разбить заданное сложное сечение на простейшие сечения – элементы (швеллер, неравнополочный уголок, полоса) и присвоить им порядковый номер (1, 2, 3).

3. Последовательно для каждого элемента:

– вычертить его отдельно в заданном положении и указать все размеры;

– провести центральные оси инерции параллельно основным контурам, обозначить их z_{ci}, y_{ci} , где i – порядковый номер элемента в этом и других обозначениях;

– провести главные центральные оси инерции, обозначить их (v_i, u_i) ;

– установить геометрические характеристики: положение центра тяжести, площадь сечения A_i , осевые I_{z_i}, I_{y_i} и центробежный

$I_{z_i y_i}$ моменты инерции относительно собственных центральных осей инерции, главные центральные моменты инерции I_{v_i}, I_{u_i} .

4. На чертеже заданного поперечного сечения бруса:

– провести вспомогательные координатные оси z_0, y_0 так, чтобы они были параллельны центральным осям как можно большего количества элементов и совпадали с основным контуром, при этом желательно, чтобы заданное сечение оказалось в первом квадрате;

– провести центральные оси инерции z_{c_i}, y_{c_i} каждого элемента;

– определить координаты центров тяжести элементов, показать их на чертеже как расстояния z_i, y_i между центральными осями инерции z_{c_i}, y_{c_i} и вспомогательными координатными осями z_0, y_0 .

5. Относительно вспомогательных осей определить координаты центра тяжести заданного сечения z_c и y_c , показать их на чертеже и провести через центр тяжести центральные оси инерции z_c, y_c параллельно осям z_0, y_0 .

6. Определить и показать на чертеже расстояния между центральными осями каждого элемента и центральными осями заданного сечения (z_{c_i} и z_c, y_{c_i} и y_c), обозначив их, соответственно, a_i и b_i .

7. Для заданного сечения определить осевые I_{z_c}, I_{y_c} и центробежный $I_{z_c y_c}$ моменты инерции относительно центральных осей инерции.

8. Определить положение главных центральных осей инерции заданного сечения, провести и обозначить их на чертеже буквами v и u (v – ось, относительно которой момент инерции принимает максимальное значение, u – ось, относительно которой момент инерции принимает минимальное значение), указать угол $\alpha_{\text{главн}}$.

9. Вычислить величины главных центральных моментов инерции заданного сечения I_v и I_u .

10. Проверить правильность вычисления по свойству инвариантности суммы осевых моментов инерции при повороте осей, а также по условию равенства нулю центробежного момента инерции заданного сечения относительно главных центральных осей I_{vu} .

1.8. Пример выполнения ИДЗ «Определение геометрических характеристик составного сечения»

Для заданного составного поперечного сечения бруса, состоящего из полосы прямоугольного сечения ($h = 170$ мм – больший размер, $b = 20$ мм – меньший размер), стандартных прокатных профилей швеллера № 16а и неравнополочного уголка 110×70×8 провести главные центральные оси инерции и определить величину главных центральных моментов инерции.

1. Вычертить заданное поперечное сечение в выбранном масштабе (рис. 1.10).

2. Разбить сложное сечение на простейшие фигуры и присвоить им порядковые номера: полоса – 1, швеллер – 2, неравнополочный уголок – 3.

3. Каждый элемент вычертить отдельно в заданном положении с указанием размеров и положения центра тяжести (рис. 1.11–1.13). Рассчитать или выписать из таблиц сортамента геометрические характеристики: площадь сечения A , осевые I_z и I_y , центробежный I_{zy} моменты инерции относительно центральных осей инерции, главные центральные моменты инерции I_v и I_u . Так как в таблицах сортамента

единицы измерения геометрических характеристик приводятся в см^2 и см^4 , дальнейшие расчеты проведены в см.

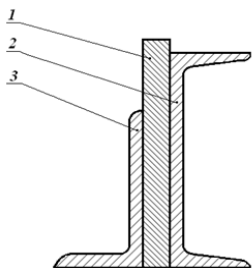


Рис. 1.10. Схема составного сечения (разбивка на простейшие фигуры)

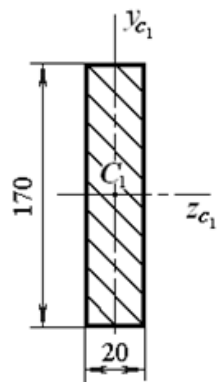


Рис. 1.11. Прямоугольная полоса

№ 1. Полоса 20×170 (2×17 см):

$$A_1 = bh = 2 \cdot 17 = 34 \text{ см}^2;$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \cdot 17^3}{12} = 818,833 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{17 \cdot 2^3}{12} = 11,333 \text{ см}^4.$$

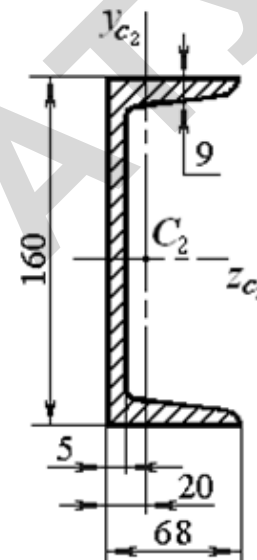


Рис. 1.12. Швеллер № 16а

№ 2. Швеллер № 16а:

$$A_2 = 19,5 \text{ см}^2; I_{z_2} = 823,0 \text{ см}^4; I_{y_2} = 78,8 \text{ см}^4.$$

У прямоугольника и швеллера центральные оси совпадают с главными центральными осями в силу симметричности этих фигур, поэтому оставлено обозначение осей z_{c_1} , y_{c_1} и z_{c_2} , y_{c_2} . Центробежные моменты инерции таких сечений относительно главных центральных осей $I_{z_c y_c}$ равны 0.

№ 3. Уголок неравнополочный $110 \times 70 \times 8$ ($11,0 \times 7,0 \times 0,8$ см):

$$A_3 = 13,9 \text{ см}^2; I_{z_3} = 172,0 \text{ см}^4; I_{y_3} = 54,6 \text{ см}^4;$$

$$I_{u_3} = 32,3 \text{ см}^4; \text{tg} \alpha = 0,4 \text{ tg} \Rightarrow \alpha = 21^\circ 48';$$

$$y_0 = 3,61 \text{ см}; z_0 = 1,64 \text{ см}.$$

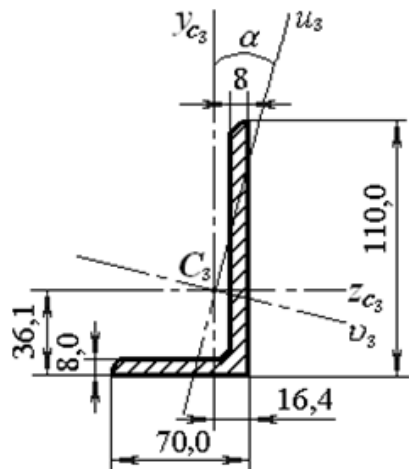


Рис. 1.13. Уголок неравнополочный

Максимальный осевой момент инерции уголка I_{v_3} определяем из свойства инвариантности суммы осевых моментов инерции при повороте осей:

$$I_z + I_y = I_v + I_u.$$

Откуда

$$I = I + I - I = 172,0 + 54,6 - 32,3 = 194,3 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции определяем по формуле

$$I_{yz} = \frac{I - I}{2} \sin 2\alpha = \frac{194,3 - 32,3}{2} \cdot 0,689 = 55,809 \text{ см}^4.$$

Угол α принимаем положительным, т. к. поворот осей v и u до совмещения с осями z_3 и y_3 производится против хода часовой стрелки.

4. Проводим вспомогательные координатные оси z_0 и y_0 таким образом, чтобы они совпадали с основным контуром и сечение располагалось в первом квадрате. Проводим центральные оси каждого элемента и обозначаем координаты центров тяжести элементов относительно этих вспомогательных осей (рис. 1.14):

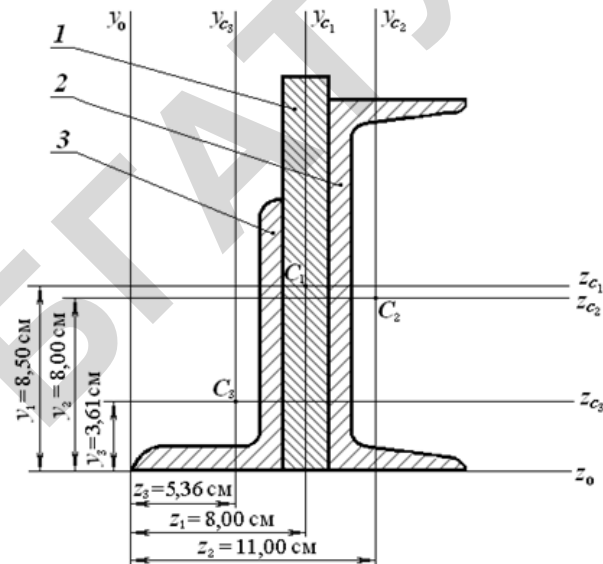


Рис. 1.14. Вспомогательные и центральные оси составного сечения;

$$z_1 = 7 + \frac{2}{2} = 8 \text{ см}; \quad z_2 = 7 + 2 + 2 = 11 \text{ см}; \quad z_3 = 7 - 1,64 = 5,36 \text{ см};$$

$$y_1 = \frac{17}{2} = 8,5 \text{ см}; \quad y_2 = \frac{16}{2} = 8 \text{ см}; \quad y_3 = 3,61 \text{ см}.$$

5. Определить координаты центра тяжести составного сечения:

$$z_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{8 \cdot 34 + 11 \cdot 19,5 + 5,36 \cdot 13,9}{34 + 19,5 + 13,9} = 8,32 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_z}{\sum A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{8,5 \cdot 34 + 8 \cdot 19,5 + 3,61 \cdot 13,9}{34 + 19,5 + 13,9} = 7,35 \text{ см}.$$

Отложить их на чертеже, обозначить центр тяжести C и провести через него центральные оси инерции z_c и y_c параллельно вспомогательным осям z_0 и y_0 (рис. 1.15).

6. Рассчитать расстояния между центральными осями каждого элемента и центральными осями всего сечения:

$$a_1 = y_1 - y_c = 8,5 - 7,35 = 1,15 \text{ см},$$

$$b_1 = z_1 - z_c = 8 - 8,32 = -0,32 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 8 - 7,35 = 0,65 \text{ см},$$

$$b_2 = z_2 - z_c = 11 - 8,32 = 2,68 \text{ см},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 3,61 - 7,35 = -3,74 \text{ см},$$

$$b_3 = z_3 - z_c = 5,36 - 8,32 = -2,96 \text{ см}.$$

Обозначить их на чертеже (рис. 1.15).

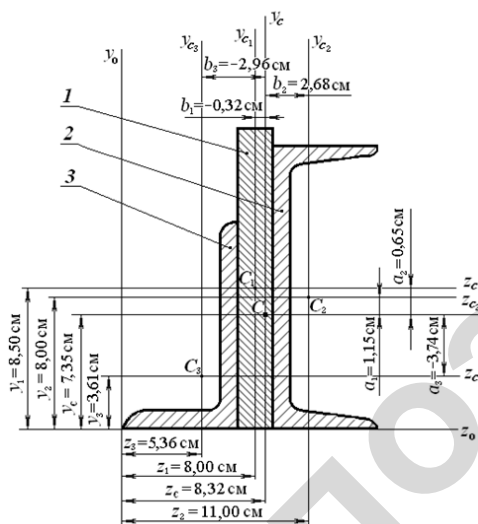


Рис. 1.15. Центр тяжести составного сечения; смещения между центральными осями

7. Определить осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей инерции, используя формулы изменения этих моментов при параллельном переносе осей:

$$I_{y_c} = I_{y_1} + b_1^2 A_1 + I_{y_2} + b_2^2 A_2 + I_{y_3} + b_3^2 A_3 =$$

$$= 11,33 + (-0,32)^2 34 + 78,8 + 2,68^2 \cdot 19,5 +$$

$$+ 54,6 + (-2,96)^2 13,9 = 410,05 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c y_c} = I_{z_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{z_2 y_2} + a_2 b_2 A_2 + I_{z_3 y_3} +$$

$$+ a_3 b_3 A_3 = 0 + 1,15(-0,32) 34 + 0 + 0,65 \cdot 2,68 \times$$

$$\times 19,5 + 55,809 + (-3,74)(-2,96)13,9 = 208,28 \text{ см}^4.$$

8. Определить положение главных центральных осей инерции составного сечения по формуле

$$\text{tg } 2\alpha_{\text{главн}} = -\frac{2 \cdot I_{z_c y_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot 208,28}{2061,5 - 410,05} =$$

$$= -0,252 \Rightarrow 2\alpha_{\text{главн}} = \text{arctg}(-0,252) =$$

$$= -14^\circ 9' \Rightarrow \alpha_{\text{главн}} = -7^\circ 4'.$$

Знак « \rightarrow » означает, что центральные оси z_c и y_c нужно повернуть по часовой стрелке, чтобы они совпали с главными центральными осями v и u . Обозначаем угол $\alpha_{\text{главн}} = 7^\circ 4'$ и оси v и u на чертеже (рис. 1.16).

9. Рассчитать величины главных центральных моментов инерции сечения, используя формулы изменения моментов инерции при повороте осей:

$$I_v = I_{z_c} \cos^2 \alpha + I_{y_c} \sin^2 \alpha - I_{z_c y_c} \sin 2\alpha,$$

$$\text{где } \alpha = \alpha_{\text{главн}} \Rightarrow \cos \alpha = 0,9923, \quad \cos^2 \alpha = 0,9848,$$

$$\cos 2\alpha = 0,9696, \quad \sin \alpha = -0,1232,$$

$$\sin \alpha = 0,0152, \quad \sin 2\alpha = -0,2445;$$

$$I_v = 2061,5 \cdot 0,9848 + 410,0 \cdot 0,0152 - 208,28(-0,2445) = 2087,25 \text{ см}^4;$$

$$I = I \sin \alpha + I \cos \alpha + I \sin 2\alpha = 2061,5 \cdot 0,015 + 410,05 \cdot 0,9848 + 208,28(-0,2445) = 384,23 \text{ см};$$

$$I = I \sin \alpha + I \cos \alpha + I \sin 2\alpha = 2061,5 \cdot 0,015 + 410,05 \cdot 0,9848 + 208,28(-0,2445) = 384,23 \text{ см}.$$

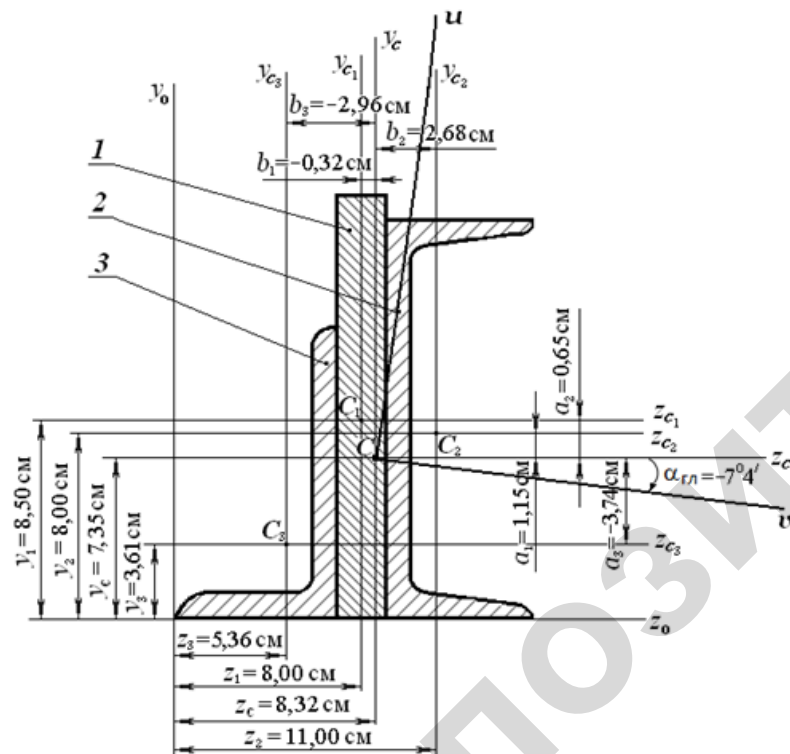


Рис. 1.16. Главные центральные оси v и u составного сечения

10. Проверить правильность вычисления главных моментов инерции сечения по свойству инвариантности суммы осевых моментов инерции при повороте осей:

$$I_{z_c} + I_{y_c} = I_v + I_u,$$

$$2061,43 + 410,05 = 2087,25 + 384,23,$$

$$2471,48 = 2471,48 \text{ см}^4,$$

и по условию равенства нулю центробежного момента инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$I_{vu} = \frac{I_{z_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha + I_{z_c y_c} \cos 2\alpha =$$

$$\frac{2061,5 - 410,05}{2} (-0,2445) + 208,28 \times$$

$$\times 0,9696 = -201,88 + 201,94 = 0,06 \text{ см}^4.$$

Погрешность: $\frac{0,06}{201,88} 100 \% = 0,029 \%$.

Допустимая погрешность [3 %], следовательно, задача решена верно.

2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Литература: [1, с. 198–204, с. 249–272; 2, с. 164–179, с. 201–218].

Напряжения в поперечных сечениях стержня. Осевые перемещения поперечных сечений стержня. Жесткость при растяжении и сжатии. Условие прочности и жесткости. Три вида инженерных расчетов (проверочный, проектировочный, определение допускаемой нагрузки).

Статически неопределимые системы при растяжении (сжатии). Составление уравнений перемещений. Порядок расчета статически неопределимых систем. Начальные (монтажные) и температурные напряжения. Свойства статически неопределимых систем.

2.1. Напряжения в поперечных сечениях стержня

Растяжение (сжатие) – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях элемента конструкции возникает только продольная (нормальная) сила.

Приложение внешней нагрузки к стержню может осуществляться различными способами (рис. 2.1, а, б, в). Однако во всех случаях равнодействующая внешних сил, приложенных к стержню, будет направлена вдоль его оси, и расчетная схема для всех способов будет одинаковой (рис. 2.1, г). Продольная сила N определяется при помощи метода сечений и в любом сечении стержня будет равна силе F .

Сжатие отличается от растяжения формально только знаком силы N . При растяжении продольная сила N направлена от сечения и считается положительной (рис. 2.2, а), при сжатии продольная сила N направлена к сечению и считается отрицательной (рис. 2.2, б).

При анализе внутренних сил сохраняется одинаковый подход при растяжении и сжатии. Вместе с тем между этими типами нагружения могут возникать и качественные различия, например:

- при изучении процессов разрушения материалов;
- при исследовании поведения длинных и тонких стержней, для которых сжатие сопровождается, как правило, изгибом.

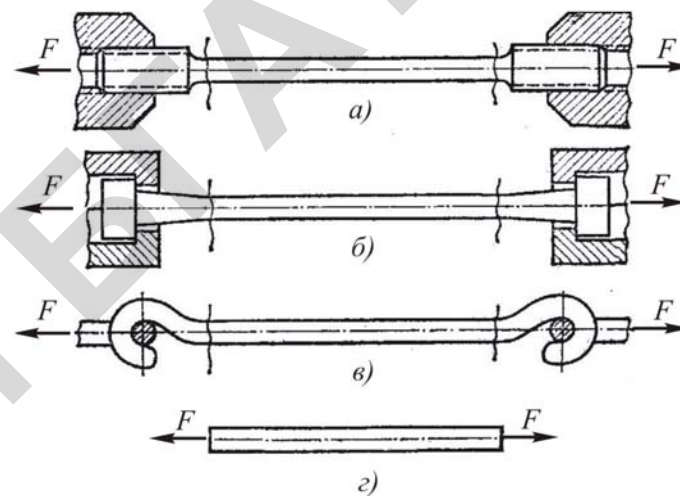


Рис. 2.1. Некоторые способы передачи усилия к стержню

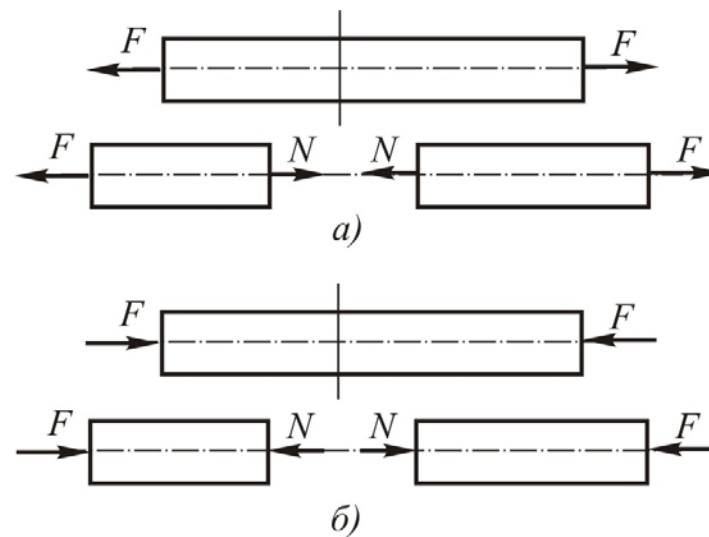


Рис. 2.2. Направление продольной силы при растяжении и сжатии

Продольная сила N является равнодействующей внутренних сил в сечении (рис. 2.3, а).

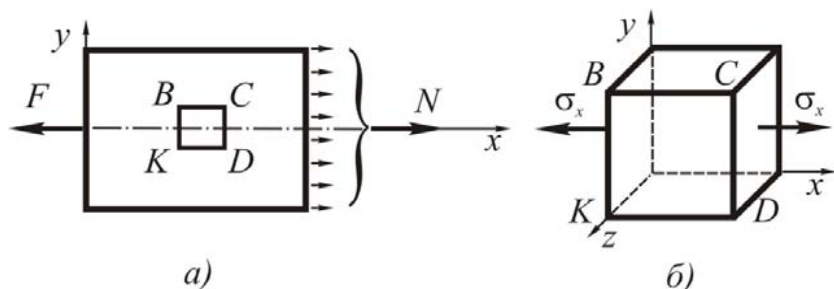


Рис. 2.3. Продольная сила и нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня при растяжении

Для однородного стержня естественно предположить, внутренние силы распределены по сечению равномерно. Тогда нормальное напряжение для всех точек сечения будет одинаковым и равным

$$\sigma_x = \sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

В частном случае, когда стержень растягивается одинаковыми силами F , приложенными к концам стержня, $N = F$, формулу (2.1) можно записать в виде

$$\sigma_x = \sigma = \frac{F}{A}. \quad (2.2)$$

При растяжении нормальные напряжения считаются положительными, при сжатии – отрицательными. В формулу (2.1) продольная сила должна подставляться со своим знаком.

Если из растянутого стержня выделить сечениями, параллельными и перпендикулярными оси, элемент $BCDE$ (рис. 2.3, б), так как на гранях, перпендикулярных к оси, действуют только нормальные напряжения, а на гранях, параллельных оси, напряжения отсутствуют, то грани элемента будут главными площадками, а напряжение σ_x – главным напряжением. Следовательно, материал при растяжении (сжатии) испытывает линейное напряженное состояние.

Нормальные и касательные напряжения на площадках, наклоненных к оси стержня, определяются по формулам (1.11), (1.12) для линейного напряженного состояния. Сечение, в котором действует максимальное напряжение, называется опасным. Для стержня постоянного поперечного сечения опасным будет сечение, в котором возникает наибольшая продольная сила.

2.2. Перемещения сечений стержня

Выделим из стержня переменного сечения, нагруженного силой F (рис. 2.4, а), бесконечно малый элемент длиной dx (рис. 2.4, б). На его торцевых сечениях будут действовать одинаковые нормальные силы N_x , от которых элемент удлинится на величину Δdx .

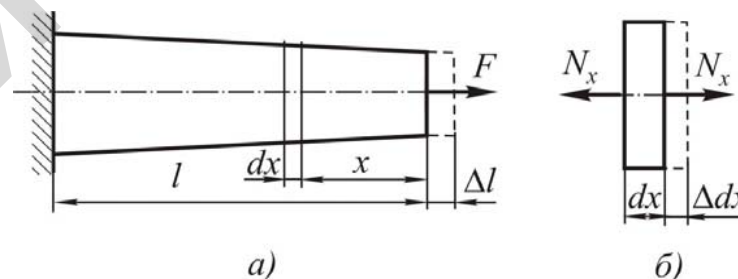


Рис. 2.4. Растяжение стержня переменного сечения

Относительная продольная деформация элемента равна

$$\varepsilon_x = \Delta dx / dx. \quad (2.3)$$

Абсолютное удлинение стержня (перемещение концевое сечения) на длине l будет равно

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_x}{EA_x} dx, \quad (2.4)$$

где N_x – нормальная сила в сечении x ;

E – модуль продольной упругости материала;

A_x – площадь поперечного сечения стержня в сечении x , являющаяся функцией координаты x .

При постоянных значениях N и A формула (2.4) принимает вид:

$$\Delta l = \frac{N l}{E A}. \quad (2.5)$$

Если стержень растягивается единственной силой F , приложенной к торцевому сечению стержня, то $N = F$, и формулу (2.5) можно представить в виде

$$\Delta l = \frac{F l}{E A}. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.6) следует, что при постоянных нагрузке F и длине l удлинение стержня обратно пропорционально произведению EA . Чем это произведение больше, тем удлинение будет меньше, и наоборот. Поэтому произведение EA называется жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии).

Удлинение ступенчатых стержней, когда внешние силы приложены в разных точках продольной оси стержня, определяется как сумма удлинений на каждом участке:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}, \quad (2.7)$$

где N_i , l_i , E_i , A_i – соответственно, продольная сила, длина, модуль упругости и площадь поперечного сечения i -го участка.

Условие прочности стержня заключается в том, что максимальное расчетное напряжение в стержне не должно превышать значения допустимого напряжения, и записывается в виде следующего неравенства:

$$\sigma_{x \max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (2.8)$$

где $[\sigma]$ – допустимое напряжение для заданного материала.

Условие жесткости стержня заключается в том, что расчетное удлинение стержня не должно превышать допустимого удлинения, и записывается в виде неравенства:

$$\Delta l_{\max} \leq [\Delta l] \quad (2.9)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \leq [\Delta l], \quad (2.10)$$

где $[\Delta l]$ – допустимое удлинение, задаваемое техническими условиями.

Условия прочности и жесткости позволяют выполнять три вида инженерных расчетов.

2.3. Статически неопределимые системы при растяжении и сжатии

Статически неопределимая система (СНС) – это система, у которой для определения неизвестных реакций и внутренних силовых факторов недостаточно уравнений равновесия.

У СНС количество наложенных связей больше числа независимых уравнений равновесия. Разность между числом наложенных на систему связей и числом независимых уравнений равновесия называется степенью статической неопределимости системы.

Практически степень статической неопределимости указывает количество недостающих уравнений. Система может быть сколько угодно раз статически неопределимой. Для решения таких систем или для раскрытия статической неопределимости необходимо составлять дополнительные уравнения, называемые уравнениями перемещений или уравнениями совместности деформаций.

При сборке СНС из-за неточности изготовления элементов в них возникают монтажные напряжения. Иногда эти напряжения создаются специально, чтобы повысить прочностные характеристики детали из материала, который по-разному сопротивляется растяжению и сжатию. Так, в строительстве широко применяют предварительно напряженный бетон. Стальная арматура растягивается с определенным усилием и в таком состоянии заливается бетоном. После затвердевания бетона арматура разгружается, и в бетоне возникают напряжения сжатия. Несущая способность конструкций, испытывающих растяжение, увеличивается до 30 %.

Начальные напряжения зависят от размеров поперечных сечений элементов, свойств материалов и величины неувязки в размерах. Начальные или монтажные напряжения возникают только в статически неопределимых системах.

При определении усилий и напряжений в элементах стержневых систем часто необходимо учитывать деформации, связанные с температурным воздействием. Из курса физики известно, что при изменении температуры длина стержней изменяется: при повышении температуры увеличивается, при понижении – уменьшается. Температурные удлинения стержней, если им препятствуют реакции, будут вызывать возникновение внутренних сил, а следовательно, и напряжений, связанных с температурным воздействием.

В общем случае температурные напряжения определяются не только свойствами материала и разностью температур, но существенно зависят от размеров и площади поперечного сечения стержней, при этом, в зависимости от геометрических размеров, напряжения в стержнях могут менять знак.

Температурные напряжения могут достигать больших значений, однако для оценки их опасности важна не величина предела прочности, а деформация материала при разрушении. Поэтому температурные напряжения наиболее опасны для хрупких материалов, разрушение которых происходит при малых деформациях. У стали деформации при разрушении очень велики, поэтому температурные напряжения для стальных конструкций не опасны. У такого хрупкого материала, как стекло, деформация при разрыве незначительна, поэтому стекло очень чувствительно к резкому изменению температуры, так как температурные удлинения могут легко достигнуть значения предельных деформаций при разрыве.

Порядок решения статически неопределимых задач при растяжении (сжатии):

1. Уточнить расчетную схему, т. е. показать все действующие силы, включая и реакции опор.

2. Составить для системы все возможные независимые уравнения равновесия.

3. Найти степень статической неопределимости системы как разность между числом неизвестных сил и числом составленных уравнений равновесия (п. 2).

4. Составить дополнительно к уравнениям равновесия уравнения перемещений, используя принцип совместности деформаций всех элементов системы или всех частей элемента конструкции.

5. Преобразовать, используя закон Гука, уравнения перемещений в уравнения между силовыми факторами.

6. Решить полученную систему уравнений (п. 2 и п. 5), определив неизвестные силы.

7. Выполнить требуемый условием задачи расчет как для статически определимой системы.

2.4. ИДЗ «Расчет ступенчатого стержня»

Ступенчатый стержень (рис. 2.5) нагружается силами F_1 , F_2 и нагревается (Δt – «+») или охлаждается (Δt – «-»). Принимая из табл. 2.1 значения сил (F_1 , F_2), перепада температур (Δt), площадь поперечного сечения (A), длины расчетных участков (l_1 , l_2 , l_3), материал стержня для каждого участка, построить для стержня эпюры продольных сил N , напряжений σ и перемещений Δl .

Таблица 2.1

Исходные данные к ИДЗ «Расчет ступенчатого стержня»

№ п/п	F_1 , кН	F_2 , кН	Δt , °С	l_1 , мм	l_2 , мм	l_3 , мм	A , мм ²	Материал участка		
								I	II	III
1	60	42	+35	200	300	150	350	Сталь	Медь	Сталь
2	56	45	+40	150	250	300	360	Медь	Медь	Сталь
3	65	48	+30	180	270	250	400	Сталь	Алюмин.	Сталь
4	62	45	-25	240	200	180	380	Чугун	Медь	Чугун
5	60	38	-30	250	210	160	370	Медь	Медь	Чугун
6	58	36	+30	260	180	210	360	Чугун	Чугун	Сталь
7	54	33	-35	270	150	200	370	Сталь	Чугун	Сталь
8	52	30	-40	280	160	190	380	Алюмин.	Сталь	Сталь

Окончание табл. 2.1.

№ п/п	F_1 , кН	F_2 , кН	Δt , °С	l_1 , мм	l_2 , мм	l_3 , мм	A , мм ²	Материал участка		
								I	II	III
9	50	32	-30	290	170	160	350	Сталь	Алюмин.	Сталь
10	48	30	+35	300	180	150	340	Медь	Медь	Сталь
11	45	28	-25	200	220	240	370	Сталь	Алюмин.	Сталь
12	42	25	-30	210	200	250	380	Чугун	Медь	Чугун
13	40	26	+25	220	190	260	390	Сталь	Сталь	Медь
14	38	29	+30	220	180	270	370	Чугун	Сталь	Чугун
15	56	42	+40	150	200	300	360	Медь	Чугун	Чугун
16	65	45	+30	300	150	250	400	Чугун	Чугун	Медь
17	62	48	-25	250	180	270	380	Сталь	Сталь	Чугун
18	60	45	-30	180	240	200	370	Алюмин.	Сталь	Сталь
19	58	38	-40	160	250	210	360	Чугун	Чугун	Сталь
20	54	32	-30	210	260	180	370	Сталь	Чугун	Сталь
21	52	30	+35	200	270	150	380	Алюмин.	Сталь	Сталь
22	50	28	-25	190	280	160	350	Сталь	Алюмин.	Сталь
23	48	25	-30	160	290	170	340	Медь	Медь	Сталь
24	45	26	+40	150	300	180	370	Сталь	Алюмин.	Сталь
25	42	29	+30	240	200	220	380	Чугун	Медь	Чугун
26	40	42	-25	250	210	200	390	Сталь	Сталь	Медь
27	38	30	-30	260	220	190	370	Сталь	Медь	Сталь
28	52	32	+30	270	220	180	360	Медь	Медь	Сталь
29	50	30	-35	170	250	210	400	Сталь	Алюмин.	Сталь
30	48	28	+25	210	250	180	380	Чугун	Медь	Чугун

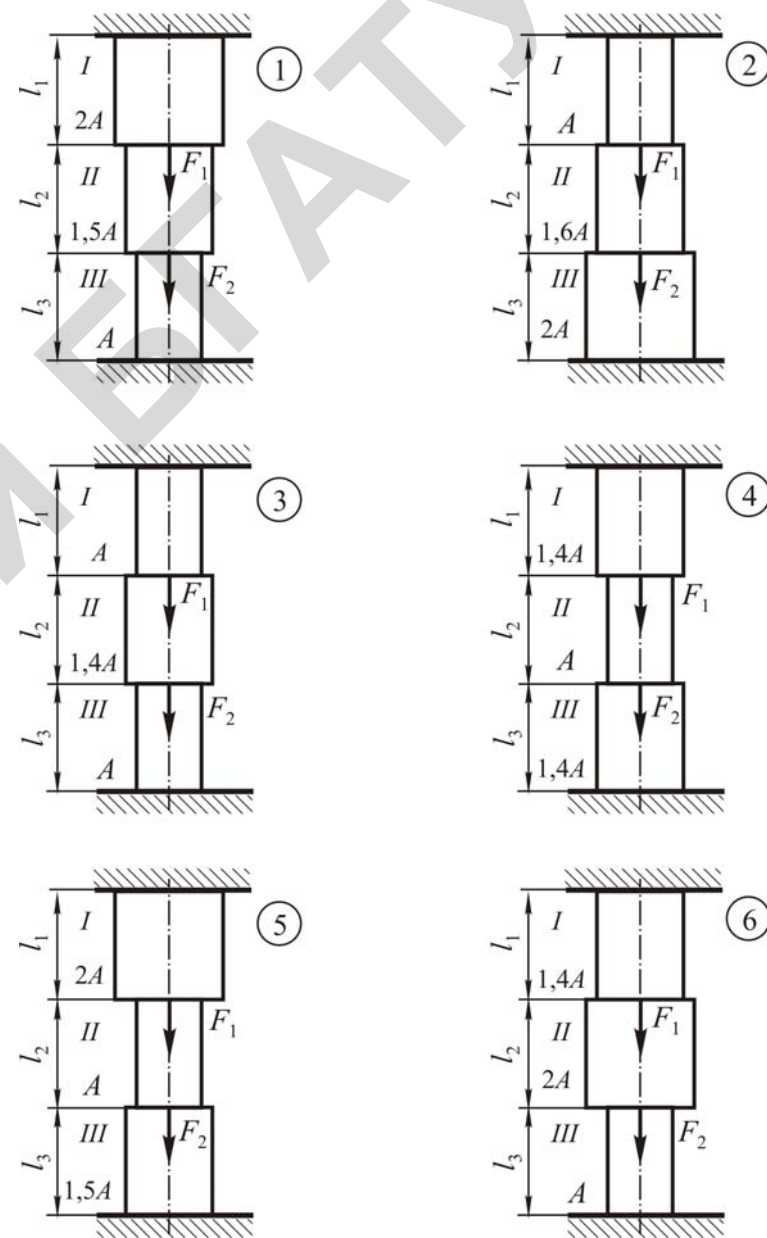


Рис. 2.5. Схемы (1–6) к ИДЗ «Расчет ступенчатого стержня»

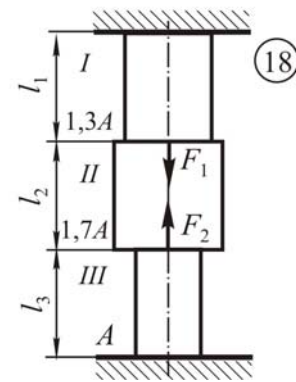
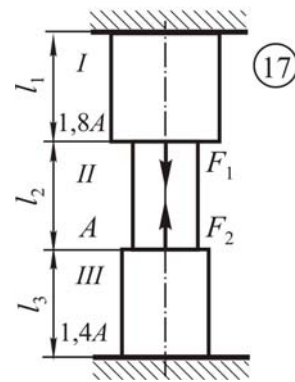
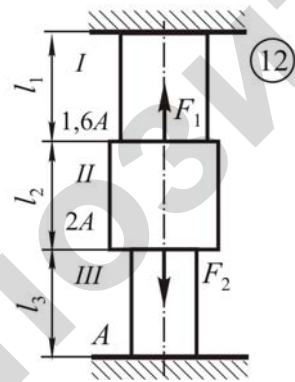
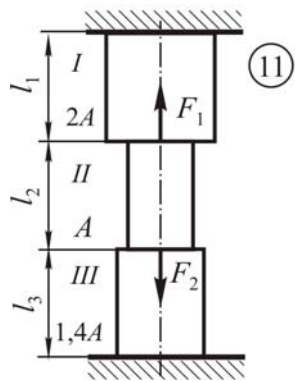
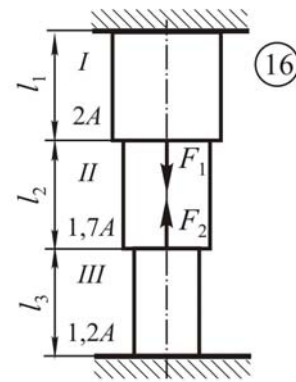
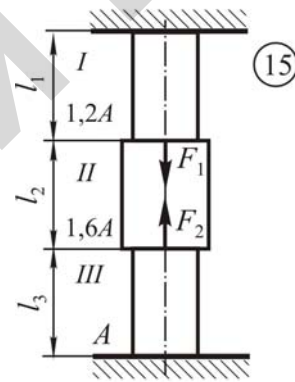
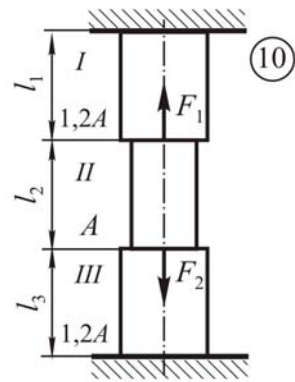
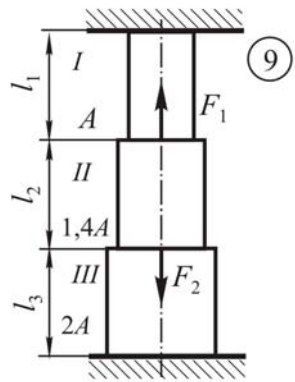
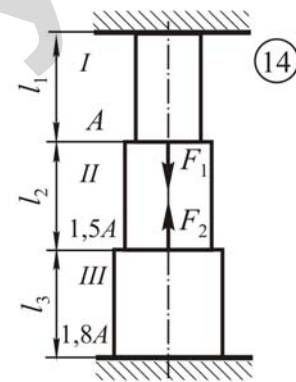
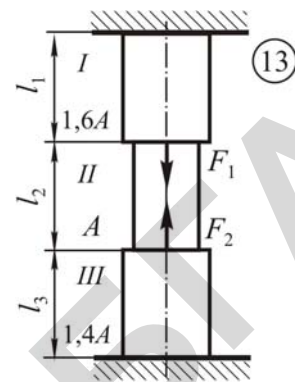
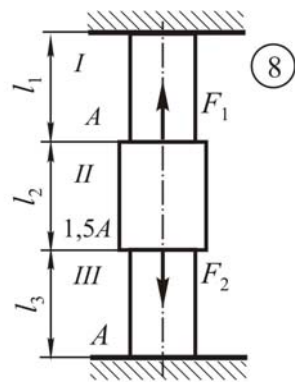
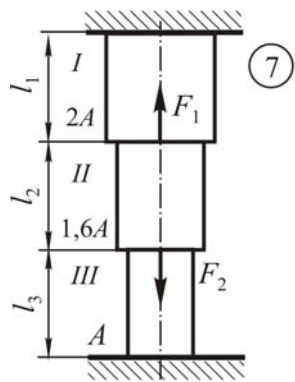


Рис. 2.5. Схемы (7–12) к ИДЗ «Расчет ступенчатого стержня»

Рис. 2.5. Схемы (13–18) к ИДЗ «Расчет ступенчатого стержня»

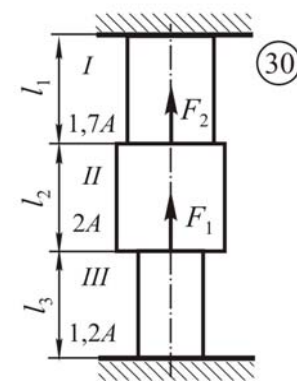
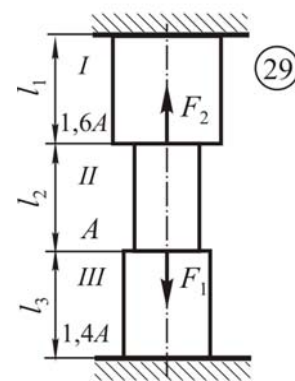
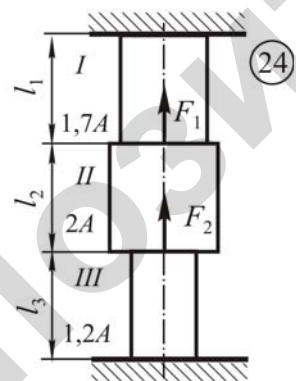
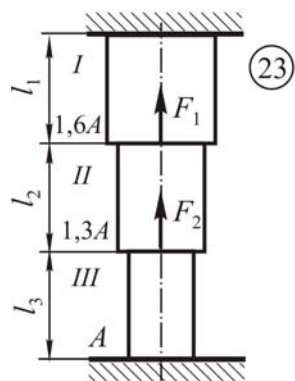
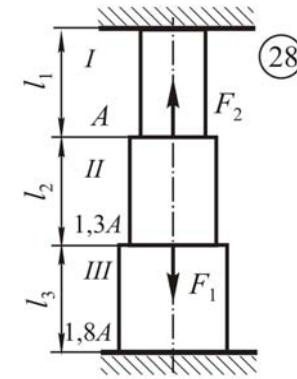
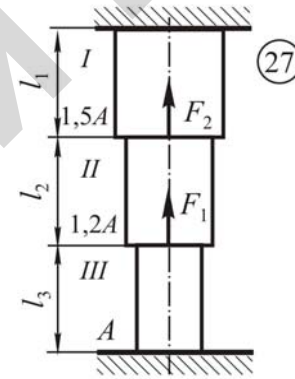
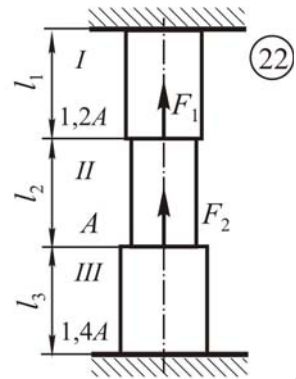
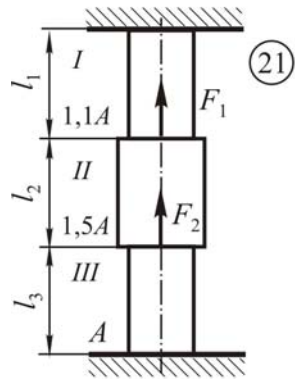
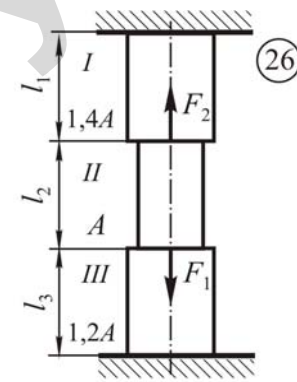
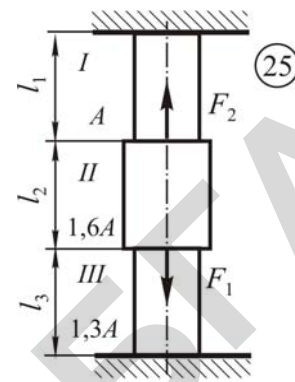
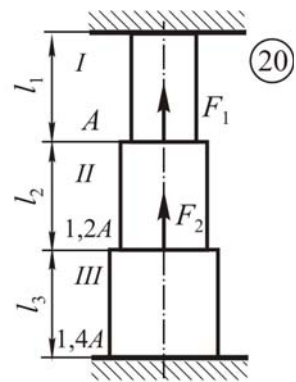
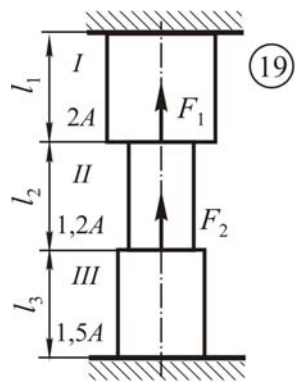


Рис. 2.5. Схемы (19–24) к ИДЗ «Расчет ступенчатого стержня»

Рис. 2.5. Схемы (25–30) к ИДЗ «Расчет ступенчатого стержня»

2.5. Методические указания для выполнения ИДЗ «Расчет ступенчатого стержня»

1. Вычертить расчетную схему ступенчатого стержня, показать реакции опор.
2. Составить для системы уравнение равновесия: сумма проекций сил на ось стержня (x) равна 0.
3. Вычертить стержень без одной опоры, приложить все силы, показать перемещения свободного конца стержня.
4. Составить дополнительно к уравнению равновесия уравнение перемещений, используя принцип совместности деформаций всех частей элемента конструкции.
5. Представить, используя закон Гука, составляющие уравнения перемещений.
6. Решить полученную систему уравнений (п. 2 и п. 5), определив неизвестные реакции опор.
7. Используя метод сечений, определить продольную силу во всех поперечных сечениях стержня и построить эпюру N .
8. Определить нормальные напряжения во всех поперечных сечениях стержня и построить эпюру σ .
9. Определить перемещения поперечных сечений стержня и построить эпюру Δl .

2.6. Пример выполнения ИДЗ «Расчет ступенчатого стержня»

Ступенчатый стержень (рис. 2.6, а) нагружается силами $F_1 = 50$ кН, $F_2 = 30$ кН и нагревается на $\Delta t = 50$ °С. Принимая $A = 300$ мм², $l_1 = 200$ мм, $l_2 = 250$ мм, $l_3 = 150$ мм, материал стержня на I участке – медь, на II и III участках – сталь, построить для стержня эпюры продольных сил N , напряжений σ и перемещений Δl .

Решение. Представим, что под действием сил F_1 , F_2 и увеличения температуры в опорах B и C возникают реакции B_x и C_x . Составим для стержня уравнение равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0. \quad C_x - F_1 + F_2 + B_x = 0.$$

Составить другие независимые уравнения равновесия для рассматриваемой схемы нагружения не представляется возможным. Задача является один раз статически неопределимой. Для нахождения неизвестных сил B_x и C_x потребуется составить дополнительно к уравнению равновесия уравнение перемещений. Для этого отбросим опору C . Предположим, что нижнее сечение стержня переместится вниз на $\Delta l_F + \Delta l_t$ (рис. 2.6, б). Затем прикладывается сила B_x , и под ее действием нижнее сечение стержня переместится вверх на Δl_{Bx} . Как показывает расчетная схема, перемещение нижнего сечения стержня Δl_B должно быть равно 0, т. е.

$$\Delta l_B = \Delta l_F + \Delta l_t + \Delta l_{Bx} = 0,$$

где Δl_F – перемещение под действием сил F_1 и F_2 ;

Δl_t – перемещение в результате повышения температуры.

Используя закон Гука, раскрываем в последнем уравнении составляющие перемещений и получим:

$$\frac{F_1 l_1}{E_M \cdot 2A} + \frac{F_1 l_2}{E_C A} - \frac{F_2 l_1}{E_M \cdot 2A} + \alpha_M l_1 \Delta t + \alpha_C \Delta t (l_1 + l_2) - \frac{B_x l_1}{E_M \cdot 2A} - \frac{B_x l_2}{E_C A} - \frac{B_x l_3}{E_C \cdot 1,5A} = 0,$$

где E_M – модуль упругости меди, $E_M = 10^5$ МПа;

E_C – модуль упругости стали, $E_C = 2 \cdot 10^5$ МПа ($E_C = 2E_M$);

α_M , α_C , – коэффициент линейного температурного расширения, соответственно: для меди и стали: $\alpha_M = 16,5 \cdot 10^{-6}$ 1/град, $\alpha_C = 12,5 \cdot 10^{-6}$ 1/град.

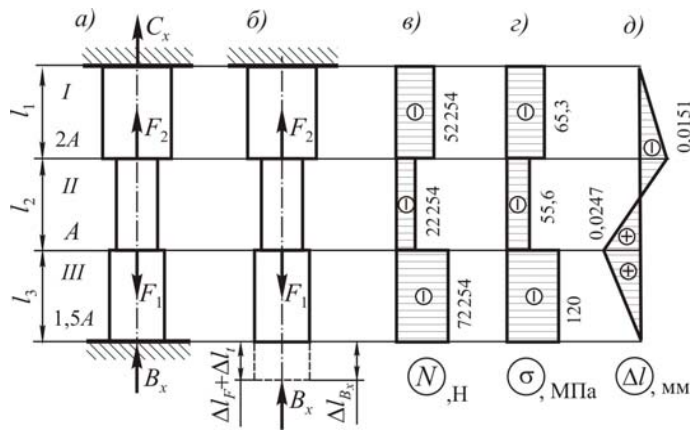


Рис. 2.6. Расчетная схема ступенчатого стержня и эпюры продольных сил, напряжений и перемещений

Выражаем отсюда неизвестную силу – реакцию \$B_x\$, упрощаем уравнение и находим ее значение:

$$B_x = \frac{F_1(l_1 + l_2) - F_2 l_1 + 2E_M A \Delta t (\alpha_M l_1 + \alpha_C (l_1 + l_2))}{l_1 + l_2 + \frac{2}{3} l_3}$$

$$B_x = \frac{50000(200 + 250) - 30000 \cdot 200 + 2 \cdot 10^5 \cdot 400 \cdot 35}{1} \times \frac{(16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 + 12,5 \cdot 10^{-6} (250 + 150))}{200 + 250 + \frac{2}{3} 150} = 72\,254 \text{ Н.}$$

Из уравнения равновесия находим реакцию \$C_x\$:

$$C_x = F_1 - F_2 - B_x = 50\,000 - 30\,000 - 72\,254 = -52\,254 \text{ Н.}$$

Строим для стержня эпюру продольных сил. Для этого в пределах каждого расчетного участка стержня проводим секущие плоскости, записываем уравнение продольной силы, находим ее и показываем на эпюре (рис. 2.6, в).

Участок I (\$0 \leq x_1 \leq l_1\$):

$$N_{x_1} = -C_x = \text{const} = -52\,254 \text{ Н.}$$

Участок II (\$l_1 \leq x_2 \leq l_1 + l_2\$):

$$N_{x_2} = -C_x + F_2 = \text{const} = -52\,254 + 30\,000 = -22\,254 \text{ Н.}$$

Участок III (\$l_1 + l_2 \leq x_3 \leq l_1 + l_2 + l_3\$):

$$N_{x_3} = -C_x + F_2 - F_1 = \text{const} = -52\,254 + 30\,000 - 50\,000 = -72\,254 \text{ Н.}$$

Находим в поперечных сечениях стержня на каждом участке нормальные напряжения и показываем их на эпюре (рис. 2.6, г).

$$\sigma_I = \frac{N_1}{2A} = \frac{-52\,254}{2 \cdot 400} = -65,3 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A} = \frac{-22\,254}{400} = -55,6 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_3}{1,5A} = \frac{-72\,254}{1,5 \cdot 400} = -120 \text{ МПа.}$$

Строим для стержня эпюру перемещений. Используя проведенные в пределах каждого расчетного участка стержня секущие плоскости, записываем уравнения перемещений, находим перемещения и показываем их на эпюре (рис. 2.6, д).

Участок I (\$0 \leq x_1 \leq l_1\$):

$$\Delta l_{x_1} = \frac{N_1 x_1}{E_M \cdot 2A} + \alpha_M \Delta t x_1,$$

$$x_1 = 0; \quad \Delta l_{x_1} = 0; \quad x_1 = 200 \text{ мм;}$$

$$\Delta l_{x_1} = \frac{-52\,254 \cdot 200}{10^5 \cdot 2 \cdot 400} + 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 35 \cdot 200 = -0,0151 \text{ мм} = \Delta l_1.$$

Участок II (\$l_1 \leq x_2 \leq l_1 + l_2\$):

$$\Delta l_{x_2} = \Delta l_1 + \frac{N_2 (x_2 - l_1)}{E_C A} + \alpha_C \Delta t (x_2 - l_1),$$

$$x_2 = 200 \text{ мм}; \quad \Delta l_{x_2} = -0,0151 \text{ мм};$$

$$x_2 = 450 \text{ мм}; \quad \Delta l_{x_2} = -0,0151 + \frac{-22\,254 \cdot 250}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 35 \cdot 250 = 0,0247 \text{ мм} = \Delta l_2.$$

Участок III ($l_1 + l_2 \leq x_3 \leq l_1 + l_2 + l_3$):

$$\Delta l_{x_3} = \Delta l_2 + \frac{N_3(x_3 - l_1 - l_2)}{E_c \cdot 1,5A} + \alpha_c \Delta t(x_3 - l_1 - l_2),$$

$$x_3 = 450 \text{ мм}; \quad \Delta l_{x_3} = 0,0247 \text{ мм};$$

$$x_3 = 600 \text{ мм}; \quad \Delta l_{x_1} = 0,0247 + \frac{-72\,254 \cdot 150}{2 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 400} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 35 \cdot 150 = 0.$$

Перемещение нижнего сечения стержня оказалось равным 0, что указывает на правильность выполненных расчетов.

3. ИЗГИБ

Литература: [1, с. 9–32, с. 133–169; 2, с. 27–63, с. 277–292].

Виды изгибов. Поперечная сила и изгибающий момент, их определение, правило знаков. Соотношения между внешними нагрузками, поперечной силой и изгибающим моментом. Выводы, вытекающие из соотношений между внешними нагрузками, поперечной силой Q и изгибающим моментом M , их использование при проверке эпюр Q и M . Напряжения в поперечных сечениях балки при чистом изгибе. Касательные напряжения при поперечном изгибе, формула Журавского, эпюра касательных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения. Расчет балок на прочность при изгибе, условие прочности. Осевые моменты сопротивления сечений простой формы (прямоугольник, круг, кольцо). Осевые моменты сопротивления сечений стандартных прокатных профилей. Рациональные формы поперечных сечений и материалы для балок. Перемещения при изгибе. Дифференциальное уравнение упругой линии балки и его интегрирование. Метод начальных параметров, универсальное уравнение упругой линии балки.

3.1. Виды изгибов

Изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении элемента конструкции действует изгибающий момент.

В поперечных сечениях элемента конструкции в общем случае нагружения могут действовать другие внутренние силовые факторы, и поэтому в зависимости от их наличия различают следующие виды изгибов:

- 1) чистый – действует только один изгибающий момент M ;
- 2) поперечный – одновременно с изгибающим моментом M действует и поперечная сила Q (крутящий момент T и нормальная сила N могут действовать и могут быть равными нулю);

3) продольный и продольно-поперечный – одновременно с нормальной N и поперечной Q силами действует изгибающий момент M .

Каждый вид изгиба может быть прямым и косым.

Элемент конструкции (брус), испытывающий в основном изгиб, называется балкой. Конструкция, состоящая из двух и более балок, называется рамой.

3.2. Виды опор

Для соединения в плоской системе различных инженерных конструкций с основанием применяются следующие типы опор.

Односвязная, или шарнирно подвижная опора (рис. 3.1).

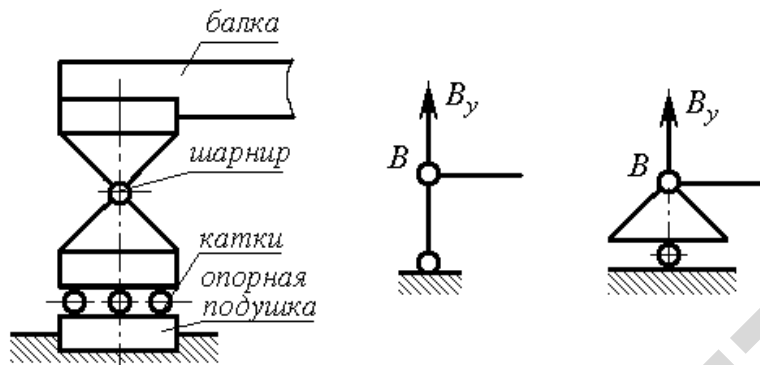


Рис. 3.1. Шарнирно подвижная опора

Эта опора накладывает на конструкцию одну связь: запрещает ее перемещение в вертикальном направлении. Реакция опоры будет приложена в центре шарнира и направлена вертикально, неизвестной является только ее величина.

Двухсвязная, или шарнирно неподвижная опора (рис. 3.2). Эта опора накладывает на конструкцию две связи: запрещает ее перемещение в горизонтальном и вертикальном направлениях. Реакция опоры будет определяться горизонтальной и вертикальной составляющими силами.

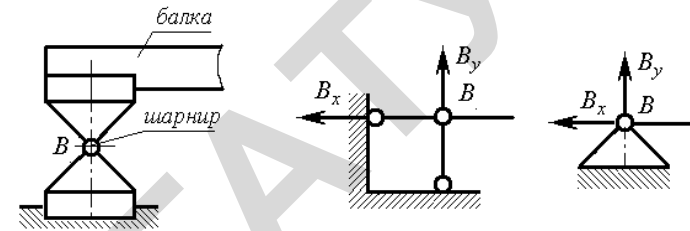


Рис. 3.2. Шарнирно неподвижная опора

Трехсвязная неподвижная опора, или заделка (рис. 3.3).

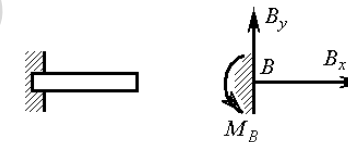


Рис. 3.3. Заделка

Такая опора накладывает на конструкцию полное число связей (3 связи для плоской системы): запрещает в плоскости любые ее перемещения. Реакция опоры будет определяться горизонтальной и вертикальной составляющими силами и опорными, или защемляющими, моментами.

Величины опорных реакций находятся из условия равновесия конструкции как свободного твердого тела. Составляющие (проекции) неизвестных реакций опор в общем случае удобно направлять по положительным направлениям осей координат. Если в результате решения составляющая окажется отрицательной, это значит, что сила в действительности направлена в противоположную сторону и ее направление нужно на схеме заменить на обратное. При составлении уравнений равновесия стремятся к тому, чтобы каждая неизвестная составляющая реакций определялась независимо от других из одного уравнения:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_z(F_i) = 0, \quad (3.1)$$

где x – ось, совпадающая с осью тела (элемента конструкции);

y, z – главные центральные оси инерции поперечного сечения.

Первостепенное значение в задачах имеет правильное определение величин и направлений реакций опор и должно подвергаться обязательной проверке. Как правило, для выполнения проверки применяется не используемое уравнение равновесия (3.1).

3.3. Внутренние силовые факторы: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_z

Рассмотрим балку, нагруженную внешними силами, лежащими в плоскости yx (рис. 3.4). Применяя метод сечений, проведем секущую плоскость и, воспользовавшись уравнениями равновесия для оставшейся (левой) части балки, получим соотношения для определения Q_y и M_z :

$$Q_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad (3.2)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n m_z(F_i). \quad (3.3)$$

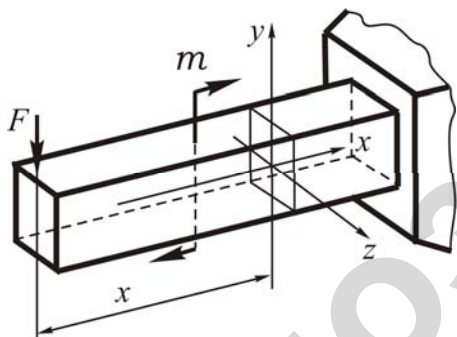


Рис. 3.4. Схема нагружения балки

Поперечная сила Q_y и в поперечном сечении бруса (балки) равна алгебраической сумме проекций на ось y всех внешних сил, действующих на его оставшуюся часть.

При определении поперечной силы Q_y используют правило знаков: если внешняя сила стремится вращать оставшуюся часть бруса (балки) по направлению хода часовой стрелки, то она вызывает в рассматриваемом сечении положительную поперечную силу, против хода часовой стрелки – отрицательную поперечную силу (рис. 3.5).

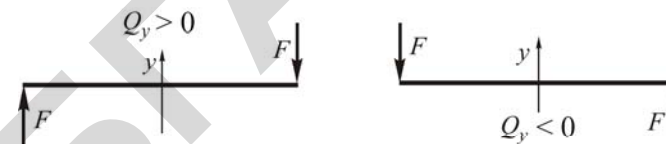


Рис. 3.5. Схема правила знаков для Q_y

Изгибающий момент M_z в поперечном сечении бруса (балки) равен алгебраической сумме моментов относительно оси z всех внешних сил, действующих на его оставшуюся часть.

При определении изгибающего момента M_z используют правило знаков: если внешний момент сжимает верхние волокна бруса (балки), то он вызывает в рассматриваемом сечении положительный изгибающий момент, если сжимает нижние волокна – отрицательный изгибающий момент (рис. 3.6).

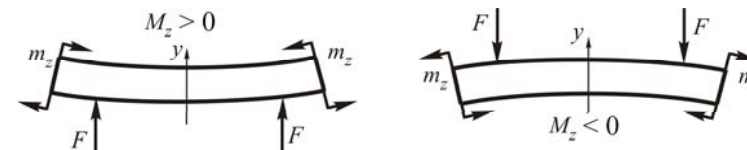


Рис. 3.6. Схема правила знаков для M_z

По найденным значениям Q_y и M_z на каждом расчетном участке строятся их эпюры для всей конструкции. При построении эпюр внутренних силовых факторов будем исходить из того, что:

1. Ординаты эпюр откладываются в принятом масштабе перпендикулярно геометрической оси бруса.
2. Положительные ординаты эпюр поперечных сил и изгибающих моментов откладываются вверх от оси балки, отрицательные – вниз; у рам положительные ординаты эпюр откладываются с наружной стороны, отрицательные – с внутренней стороны элементов рамы.

3. Для стержней, расположенных внутри рамы, ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются со стороны сжатых волокон, при этом знаки на эпюре не ставятся; положительные ординаты эпюры поперечных сил откладываются с левой стороны, а отрицательные – с правой стороны стержней. Таким образом, эпюра изгибающих моментов всегда строится со стороны сжатых волокон.

4. Ординаты эпюры продольных сил откладываются симметрично по обе стороны от оси бруса с указанием знака.

Внешняя нагрузка, поперечная сила и изгибающий момент связаны между собой следующими дифференциальными соотношениями:

$$\frac{dQ}{dx} = p, \quad (3.4)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (3.5)$$

Соотношения (3.4) и (3.5) показывают, что производная от поперечной силы по длине бруса равна интенсивности распределенной нагрузки, а производная от изгибающего момента по длине бруса равна поперечной силе. Из этих соотношений вытекают следствия, используемые для контроля правильности построения эпюр Q , и M для балок и прямолинейных элементов рам:

1. На участках, где отсутствует распределенная нагрузка, эпюра поперечных сил ограничена линией параллельной оси, а эпюра изгибающих моментов – наклонной прямой.

2. На участках, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой постоянной интенсивности, эпюра поперечных сил ограничена наклонной прямой линией, а эпюра изгибающих моментов – параболой.

3. На участках, где поперечная сила отсутствует, эпюра изгибающих моментов ограничена линией параллельной оси.

4. При перемещении вдоль оси сечения слева направо на участках, имеющих положительную поперечную силу, изгибающий момент алгебраически возрастает, а на участках, имеющих отрицательную поперечную силу, изгибающий момент алгебраически убывает.

5. Если в пределах расчетного участка эпюра поперечных сил пересекает нулевую линию, то в сечении, где $Q = 0$, изгибающий момент будет иметь экстремальное значение.

Для контроля правильности построения эпюр Q , и M для балок и прямолинейных элементов рам используются также следствия, вытекающие из метода сечений:

1. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, перпендикулярная к оси, на эпюре поперечных сил возникает скачок, равный по величине приложенной силе, а на эпюре изгибающих моментов получается излом.

2. В сечении, где приложена внешняя пара сил (сосредоточенный момент), на эпюре изгибающих моментов возникает скачок, равный по величине моменту приложенной пары.

3. Для рам обязательна статическая проверка, заключающаяся в проверке равновесия каждого узла, вырезанного из нагруженной рамы.

Например, внутренние силовые факторы M_{x_1} , M_{x_2} , M_{x_3} , Q_{x_1} , Q_{x_2} , Q_{x_3} , N_{x_1} , N_{x_2} , N_{x_3} (рис. 3.7) представляют усилия и моменты, заменяющие действие на узел отброшенных стержней, принимаемые с учетом знаков из построенных эпюр. M_B – внешний момент, приложенный к узлу.

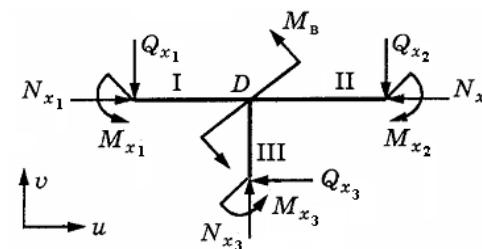


Рис. 3.7. Схема нагружения узла рамы

Уравнения равновесия узла имеют вид:

$$\sum v = N_{x_3} - Q_{x_1} - Q_{x_2} = 0;$$

$$\sum u = N_{x_1} - N_{x_2} - Q_{x_3} = 0;$$

$$\sum m_D = M_{x_2} - M_{x_3} - M_{x_1} - M_B = 0.$$

Считается, что поперечные силы $Q_{x_1}, Q_{x_2}, Q_{x_3}$ проходят через точку D и их плечи относительно точки D равны нулю, поэтому они не входят в уравнение моментов. Если к узлу приложены внешние сосредоточенные силы или моменты, то они должны включаться в уравнения равновесия. Так как алгебраическая сумма моментов в узле равняется нулю, то изгибающий момент при переходе через узел, соединяющий два стержня, когда в узле не приложена внешняя пара сил (сосредоточенный момент), должен оставаться неизменным как по величине, так и по знаку.

3.4. Напряжения в поперечных сечениях балки при чистом изгибе

Примем балку, имеющую продольную плоскость симметрии, в которой действуют все внешние силы. В этом случае балка будет работать в условиях плоского изгиба, т. е. без коробления или скручивания. Представим наиболее простой случай изгиба – чистый изгиб (рис. 3.8). В поперечных сечениях балки действует только изгибающий момент, причем одинаковой величины, равной m .

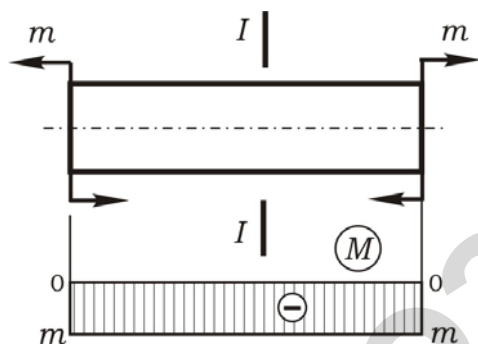


Рис. 3.8. Чистый изгиб бруса

Воспользуемся методом сечений, проведем секущую плоскость $I-I$ и представим оставшуюся левую часть балки (рис. 3.9). Проведем в правом торцевом сечении координатные оси: y – в продольной плоскости симметрии балки; x – вдоль нейтрального слоя

в продольной плоскости симметрии балки (слой продольных волокон, который не изменяет своей длины при нагружении, называется нейтральным слоем); z – совпадает с нейтральной линией (линия, образованная от пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением). При чистом изгибе оси y и z являются главными центральными осями инерции поперечного сечения. В окрестности произвольной точки B с координатами z и y выделим элементарную площадку dA , в пределах которой действует сила, равная $dN = \sigma dA$.

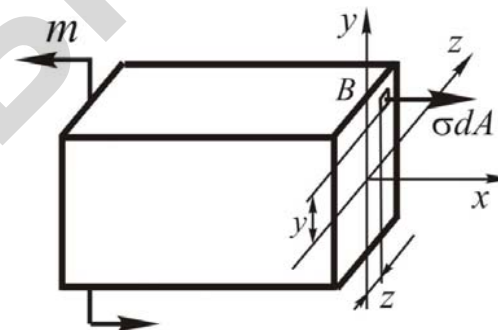


Рис. 3.9. Оставшаяся левая часть балки

При чистом изгибе нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения бруса, расположенной на расстоянии y от нейтральной оси, определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (3.6)$$

где M_z – изгибающий момент в поперечном сечении бруса относительно оси z ;

I_z – момент инерции сечения относительно оси z .

Анализ формулы (3.6) показывает:

- напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки прямо пропорционально расстоянию от нейтральной оси до этой точки;
- напряжения, изменяясь по высоте сечения, остаются постоянными по его ширине.

Эпюра нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении балки при чистом изгибе, представлена на рис. 3.10, из

которого видно, что, максимальные напряжения при изгибе возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\max} \quad (3.7)$$

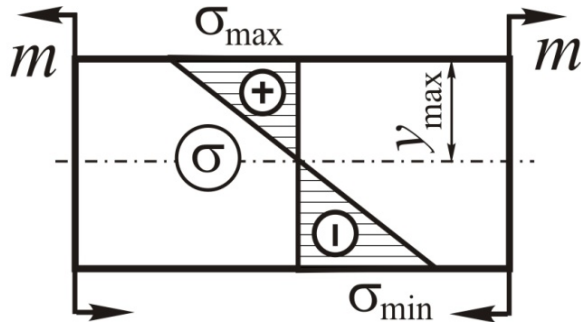


Рис. 3.10. Эпюра нормальных напряжений

Таким образом, наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в поперечном сечении балки возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

При чистом изгибе ось балки искривляется в продольной плоскости симметрии, перпендикулярной нейтральному слою. Зависимость кривизны оси балки от изгибающего момента представляется формулой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (3.8)$$

Произведение EI_z называется жесткостью поперечного сечения балки при изгибе. При $EI_z = \text{const}$ и $M_z = \text{const}$ ось балки искривляется по дуге окружности радиусом ρ . Как видно из формулы (3.8), кривизна оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту M_z и обратно пропорциональна жесткости поперечного сечения балки EI_z .

Примечание. Формулы нормальных напряжений (3.7) и кривизны оси (3.8) для чистого изгиба балки будут давать точные значения и при поперечном изгибе. Если поперечная сила изменяется вдоль оси бруса, то формула (3.7) для нормальных напряжений дает незначительную погрешность, величина которой имеет порядок h/l по сравнению с 1 (где h – высота поперечного сечения, l – длина бруса).

3.5. Касательные напряжения при поперечном изгибе

Представим консольно закрепленную балку, испытывающую поперечный изгиб (рис. 3.11). Рассмотрим некоторое сечение $A-A$. Полное касательное напряжение τ вблизи контура направлено по касательной к контуру сечения. Касательное напряжение в каждой точке сечения можно разложить на две составляющие τ_{xy} и τ_{xz} . Методами теории упругости доказывается, что в большинстве случаев составляющие τ_{xz} оказывают на прочность значительно меньшее влияние, чем τ_{xy} . Определим касательные напряжения при поперечном изгибе, предположив, что $\tau \approx \tau_{xy}$. Вычислить эти напряжения проще через парные им касательные напряжения, возникающие в продольных сечениях бруса.

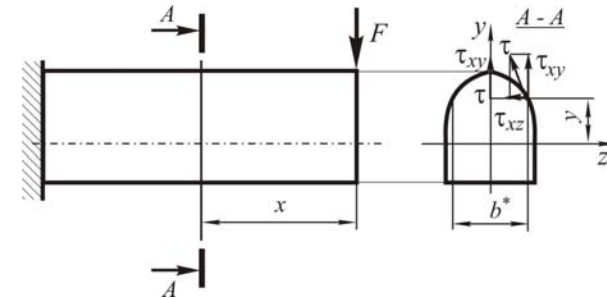


Рис. 3.11. Поперечный изгиб балки

Принимая в первом приближении равномерное распределение касательных напряжений по ширине сечения, запишем формулу для их вычисления:

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b^*} \quad (3.9)$$

где S_z^* – статический момент относительно оси z части площади поперечного сечения бруса, расположенной выше или ниже уровня y , в точках которого вычисляются касательные напряжения;

I_z – момент инерции относительно оси z площади всего поперечного сечения бруса;

b^* – ширина поперечного сечения бруса на уровне y , в точках которого вычисляются касательные напряжения.

Формула для определения касательных напряжений (3.9) была выведена (и носит его имя) русским ученым и инженером Д. И. Журавским, который первым провел исследование касательных напряжений при поперечном изгибе.

Используя формулу Журавского, получаем формулу (3.10) для вычисления касательных напряжений в балке прямоугольного поперечного сечения в точках, расположенных на расстоянии y от нейтральной оси, т. е. от оси z (рис. 3.12).

$$\tau = \frac{6 Q_y}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (3.10)$$

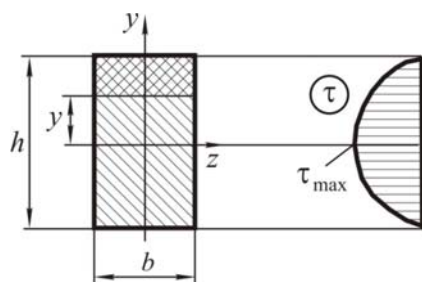


Рис. 3.12. Поперечное сечение балки и эпюра касательных напряжений

По формуле (3.10) построена эпюра касательных напряжений (см. рис. 3.12), из которой видно, что в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси ($y = \frac{h}{2}$), касательное напряжение равно нулю, а в точках на нейтральной оси ($y = 0$) касательное напряжение имеет максимальное значение, равное

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{b h}. \quad (3.11)$$

3.6. Расчет балок на прочность при изгибе

При поперечном изгибе максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении бруса существенно превышают максимальные касательные напряжения (σ_{\max} относится к τ_{\max} примерно как длина

бруса к высоте поперечного сечения). Также известно, что в точках поперечного сечения бруса, наиболее удаленных от нейтральной оси, $\sigma = \sigma_{\max}$, $\tau = 0$, а на нейтральной оси $\tau = \tau_{\max}$, $\sigma = 0$. В этой связи расчет нетонкостенных балок на прочность при поперечном изгибе производится по нормальным напряжениям. При выполнении этого расчета принимается во внимание, что опасными точками являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси, и находятся они в сечении балки, в котором действует максимальный изгибающий момент. Тогда условие прочности при изгибе имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max} \leq [\sigma]. \quad (3.12)$$

Отношение $\frac{I_z}{y_{\max}}$ обозначается через W_z и называется осевым моментом сопротивления. Тогда условие прочности при изгибе можно представить соотношением:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (3.13)$$

При использовании для балок хрупкого материала, который, как известно, при сжатии сопротивляется лучше, чем при растяжении ($[\sigma_c] > [\sigma_p]$), поперечное сечение должно быть несимметричным относительно нейтральной оси, причем большая часть его площади располагается в растянутой зоне (рис. 3.13). Условие прочности в данном случае представится двумя соотношениями:

$$\sigma_{\min} = \sigma_{(1)} = \frac{M_{\max}}{I_z} y_1 \leq [\sigma_c], \quad (3.14)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(2)} = \frac{M_{\max}}{I_z} y_2 \leq [\sigma_p], \quad (3.15)$$

где $\sigma_{(1)}$ и $\sigma_{(2)}$ – нормальные напряжения в точках, соответственно, 1 и 2;

$[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ – допускаемое напряжение, соответственно, на растяжение и на сжатие.

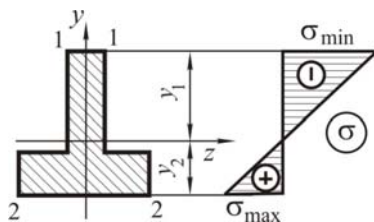


Рис. 3.13. Несимметричное поперечное сечение бруса

Осевой момент инерции I_z , осевой момент сопротивления W_z для некоторых симметричных сечений определяется по формулам, представленным в табл. 3.1.

Значения осевых моментов сопротивления для стандартных прокатных профилей принимаются из соответствующих таблиц сортамента.

Таблица 3.1

Некоторые геометрические характеристики сечений

Форма и размеры поперечного сечения	Геометрические характеристики сечения
	$I_z = \frac{b h^3}{12},$ $y_{\max} = \frac{h}{2},$ $W_z = \frac{b h^2}{6}.$
	$I_z = \frac{\pi d^4}{64},$ $y_{\max} = \frac{d}{2},$ $W_z = \frac{\pi d^3}{32}.$

Форма и размеры поперечного сечения	Геометрические характеристики сечения
	$I_z = \frac{\pi d_n^4}{64} (1 - c^4),$ $c = \frac{d_b}{d_n}, \quad y_{\max} = \frac{d_n}{2},$ $W_z = \frac{\pi d_n^3}{32} (1 - c^4).$

3.7. Метод начальных параметров

Под действием внешних сил, расположенных в продольной плоскости симметрии прямой балки, ее ось искривляется в этой же плоскости; при этом точки оси балки перемещаются. Под перемещением, или прогибом, сечения (y) понимается перемещение его центра тяжести по направлению, перпендикулярному к оси балки в ненагруженном состоянии, а под углом поворота сечения (θ) – угол, на который поворачивается сечение по отношению к своему положению в ненагруженном состоянии.

Прогиб считается положительным, если перемещение центра тяжести поперечного сечения при нагружении балки происходит вверх, отрицательным – если вниз. Угол поворота сечения считается положительным, если поперечное сечение поворачивается при нагружении балки против хода часовой стрелки, отрицательным – если по ходу часовой стрелки.

Для определения перемещений в балках существует метод, не требующий непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси, который называется методом Коши–Крылова, или методом начальных параметров. Представим левую часть балки длиной x , к которой приложены пара сил с моментом m , сосредоточенная сила F и распределенная нагрузка постоянной

интенсивности p (рис. 3.14). Выберем начало координат в крайнем левом сечении балки, ось y направим вверх, ось x – вправо. Тогда прогиб и угол поворота сечения балки в начале координат будут обозначены соответственно y_0 и θ_0 , а определяемые прогиб и угол поворота сечения на расстоянии x от начала координат – соответственно y_x и θ_x .

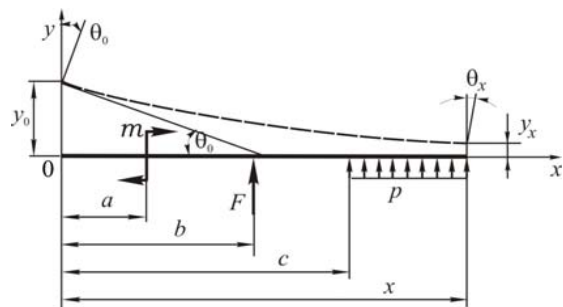


Рис. 3.14. Схема нагружения балки

В сечении балки на расстоянии x от начала координат действует изгибающий момент, равный

$$M_{(x)} = m + F(x-b) + p \frac{(x-c)^2}{2}. \quad (3.16)$$

Тогда дифференциальное уравнение упругой линии балки представится в следующем виде:

$$EI_z \frac{d^2 y_x}{dx^2} = m + F(x-b) + p \frac{(x-c)^2}{2}. \quad (3.17)$$

Интегрируя уравнение (3.17), получаем формулу для определения угла поворота сечения (3.18), интегрируя которую получаем формулу для определения прогиба сечения балки (3.19), расположенного на расстоянии x от начала координат:

$$EI_z \theta_x = EI_z \theta_0 + m(x-a) + F \frac{(x-b)^2}{2} + p \frac{(x-c)^3}{6}. \quad (3.18)$$

$$EI_z y_x = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x + m \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + p \frac{(x-c)^4}{24}. \quad (3.19)$$

Если к балке слева от сечения, где определяется перемещение, приложено число n_i пар сил с моментами m_i , число n_j сосредоточенных сил F_j и число n_k распределенных нагрузок постоянной интенсивности p_k , то формулы для определения углов поворота θ_x и прогибов y_x сечений балки, расположенных на расстоянии x от начала координат, соответственно можно записать в виде:

$$EI_z \theta_x = EI_z \theta_0 + \sum_{i=1}^{n_i} m_i (x-a_i) + \sum_{j=1}^{n_j} F_j \frac{(x-b_j)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_k} p_k \frac{(x-c_k)^3}{6}; \quad (3.20)$$

$$EI_z y_x = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x + \sum_{i=1}^{n_i} m_i \frac{(x-a_i)^2}{2} + \sum_{j=1}^{n_j} F_j \frac{(x-b_j)^3}{6} + \sum_{k=1}^{n_k} p_k \frac{(x-c_k)^4}{24}, \quad (3.21)$$

где y_0, θ_0 – соответственно, прогиб и угол поворота сечения в начале координат, или начальные параметры;

a_i, b_i, c_k – соответственно, расстояние от начала координат до пары сил с моментом m_i , сосредоточенной силы F_j , начала распределенной нагрузки интенсивностью p_k .

При нахождении перемещений с помощью метода начальных параметров, в котором используются формулы (3.20, 3.21), нужно иметь ввиду следующие обстоятельства:

– в формулы (3.20, 3.21) подставляются значения внешних нагрузок, расположенных только слева от сечения, в котором определяются перемещения;

– если распределенная нагрузка не доходит до сечения, в котором определяется перемещение (рис. 3.15, а), то ее необходимо продлить

вправо до сечения и ввести компенсирующую распределенную нагрузку той же интенсивности, но противоположно направленную (рис. 3.15, б).

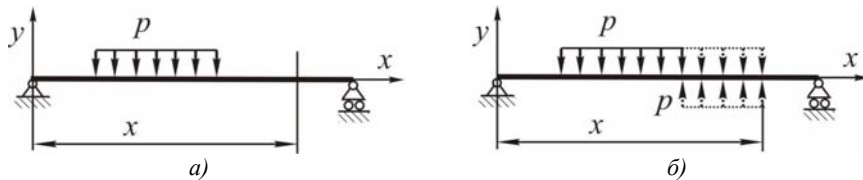


Рис. 3.15. Учет распределенной нагрузки

– в правой части формул (3.20, 3.21) знак перед каждым слагаемым, содержащим внешнюю нагрузку (m , F , p), ставится таким же, как и знак изгибающего момента от соответствующей внешней нагрузки.

Начальные параметры y_0 и θ_0 определяются из граничных условий, вытекающих из схемы закрепления балки, которую можно свести к одному из следующих случаев.

1. Балка жестко закреплена одним концом:

– жесткая заделка слева (рис. 3.16) – $y_0 = 0$ и $\theta_0 = 0$;

– жесткая заделка справа (рис. 3.17) – $y_0 \neq 0$ и $\theta_0 \neq 0$. Если балку зеркально отобразить относительно жесткой заделки (рис. 3.18), то окажется, что $y_0 = 0$ и $\theta_0 = 0$.

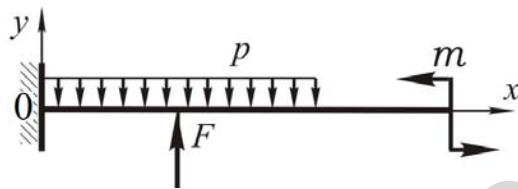


Рис. 3.16. Жесткая заделка слева

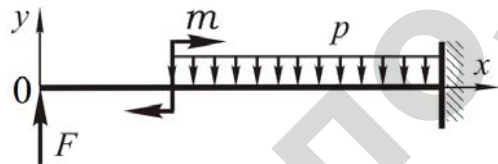


Рис. 3.17. Жесткая заделка справа

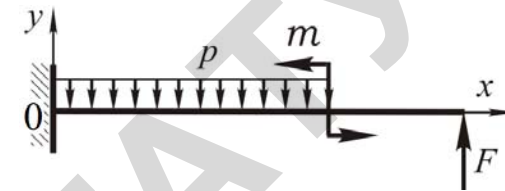


Рис. 3.18. Зеркальное отображение балки

2. Балка закреплена с помощью неподвижного и подвижного шарниров:

а) один из шарниров приходится на крайнее левое сечение балки (рис. 3.19) – $y_0 = 0$ и $\theta_0 \neq 0$.

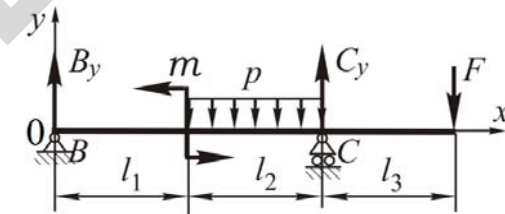


Рис. 3.19. Положение шарнира – в крайнем левом сечении балки

Для определения начального параметра θ_0 используем граничное условие, вытекающее из расчетной схемы балки (рис. 3.19) – прогиб в сечении C равен нулю ($y_C = 0$). Составляем уравнение прогиба для сечения C в виде

$$EI_z y_C = EI_z \theta_0 x_C - m \frac{(x_C - l_1)^2}{2} + B_y \frac{(x_C)^3}{6} - p \frac{(x_C - l_1)^4}{24} = 0. \quad (3.22)$$

Подставляя в уравнение (3.22) $x_C = l_1 + l_2$, находим величину $E I_z \theta_0$ и начальный параметр θ_0 ;

б) балка справа и слева имеет консоли (рис. 3.20) – $y_0 \neq 0$ и $\theta_0 \neq 0$.

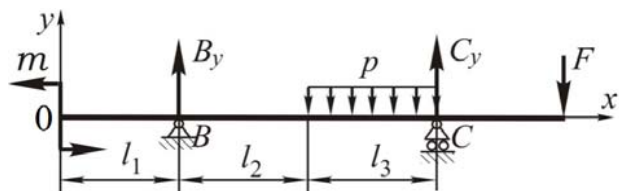


Рис. 3.20. Балка с консолями (слева и справа)

Для определения начальных параметров y_0 и θ_0 используем граничные условия, вытекающие из расчетной схемы балки (рис. 3.20) – прогибы в сечениях B и C равны нулю ($y_B = 0$; $y_C = 0$). Составим уравнения прогибов для сечений B и C в виде

$$EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_B - m \frac{x_B^2}{2} = 0, \quad (3.23)$$

$$EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_C - m \frac{x_C^2}{2} + B_y \frac{(x_C - l_1)^3}{6} - p \frac{(x_C - l_1 - l_2)^4}{24} = 0. \quad (3.24)$$

Подставляя $x_B = l_1$ и $x_C = (l_1 + l_2 + l_3)$ и решая систему уравнений (3.23), (3.24), находим величины $EI_z y_0$ и $EI_z \theta_0$, а затем, если нужно, – начальные параметры y_0 и θ_0 .

3.8. ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

Для заданных схем балок и рам требуется:

- 1) построить эпюры внутренних силовых факторов;
- 2) подобрать размеры поперечного сечения, приняв форму для схем:
 - № 1 – круг (материал – дерево, $[\sigma] = 10$ МПа, $E = 1 \cdot 10^4$ МПа);
 - № 2 – два рядом стоящих швеллера (ГОСТ 8240–89, материал – сталь Ст3, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа);
 - № 3 – двутавр (ГОСТ 8239–89, материал – сталь Ст3, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа);

№ 4 – кольцо с заданным соотношением внутреннего диаметра к наружному $c = \frac{d_B}{d_H}$ (материал – сталь Ст3, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа);

№ 5 – прямоугольник с заданным соотношением высоты поперечного сечения к ширине $\frac{h}{b}$ (материал – сталь Ст3, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа);

3) для схем № 1 и № 3 определить прогибы на границах расчетных участков и построить приближенную изогнутую ось (упругую линию), для схемы № 3 определить углы поворота сечений на опорах.

Исходные данные и схемы для выполнения ИДЗ «Прямой поперечный изгиб» – в табл. 3.2 и на рис. 3.21.

Таблица 3.2

Исходные данные к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

№ п/п	Размеры, м			Нагрузки			Соотношение размеров сечения	
	a	b	c	m , кН·м	F , кН	p , кН/м	Кольцо, $c = \frac{d_B}{d_H}$	Прямоугольник, $\frac{h}{b}$
1	2,0	1,2	0,8	10	22	18	0,9	2,0
2	1,6	1,4	1,0	11	18	16	0,7	2,2
3	1,2	2,0	0,8	12	20	15	0,5	2,4
4	1,8	1,2	1,0	13	21	14	0,8	2,6
5	1,5	1,1	1,4	14	22	13	0,6	2,8
6	1,4	1,5	1,1	15	23	12	0,7	3,0
7	1,3	1,5	1,2	10	24	11	0,8	2,1
8	1,2	1,4	1,4	11	23	10	0,9	2,3
9	1,3	1,7	1,0	12	22	11	0,7	2,5
10	1,4	1,5	1,1	13	21	12	0,6	2,7
11	1,5	1,3	1,2	14	20	13	0,8	2,9

Окончание табл. 3.2

№ п/ п	Размеры, м			Нагрузки			Соотношение размеров сечения	
	a	b	c	m , кН·м	F , кН	p , кН/м	Кольцо, $c = \frac{d_v}{d_n}$	Прямо- угольник, $\frac{h}{b}$
12	1,6	1,1	1,3	15	19	14	0,5	2,0
13	1,7	1,2	1,1	16	18	15	0,9	2,2
14	1,8	1,3	0,9	18	15	16	0,8	2,4
15	1,9	1,1	1,0	19	12	17	0,6	2,6
16	2,0	0,9	1,1	20	11	18	0,5	2,8
17	1,9	1,0	1,1	10	14	19	0,7	3,0
18	1,8	1,2	1,0	12	13	20	0,9	2,1
19	1,7	1,4	0,9	14	12	18	0,5	2,3
20	1,6	1,3	1,1	16	11	17	0,8	2,5
21	1,5	1,2	1,3	18	10	16	0,6	2,7
22	1,4	1,6	1,0	20	12	15	0,7	2,9
23	1,3	1,8	0,9	22	11	14	0,9	2,0
24	1,2	2,0	0,8	24	14	12	0,5	2,4
25	1,1	1,8	1,1	21	13	10	0,8	2,6
26	1,0	1,7	1,3	19	16	11	0,7	2,8
27	1,2	1,4	1,4	17	15	12	0,9	3,0
28	1,4	1,6	1,0	15	18	13	0,6	2,1
29	1,6	1,1	1,3	13	17	14	0,5	2,3
30	1,8	1,0	1,2	11	19	15	0,7	2,5

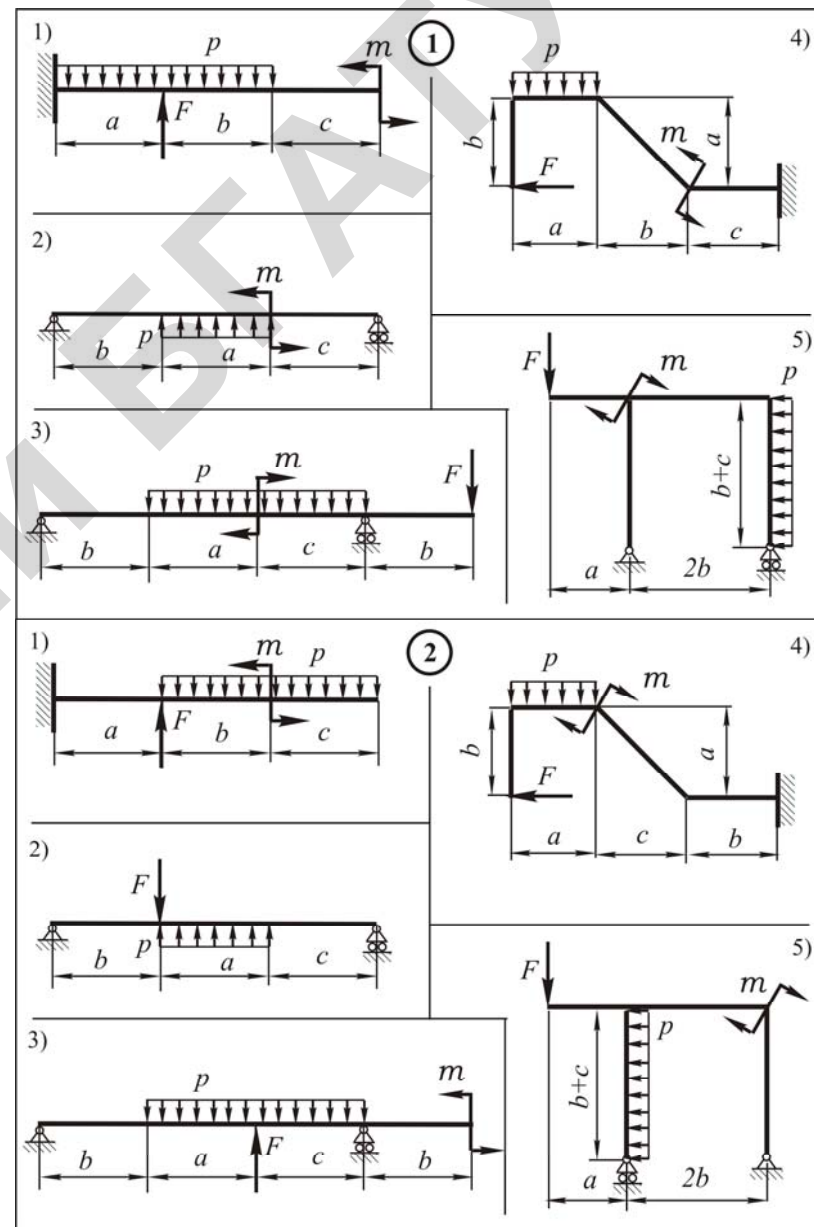


Рис. 3.21. Схемы (1–2) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

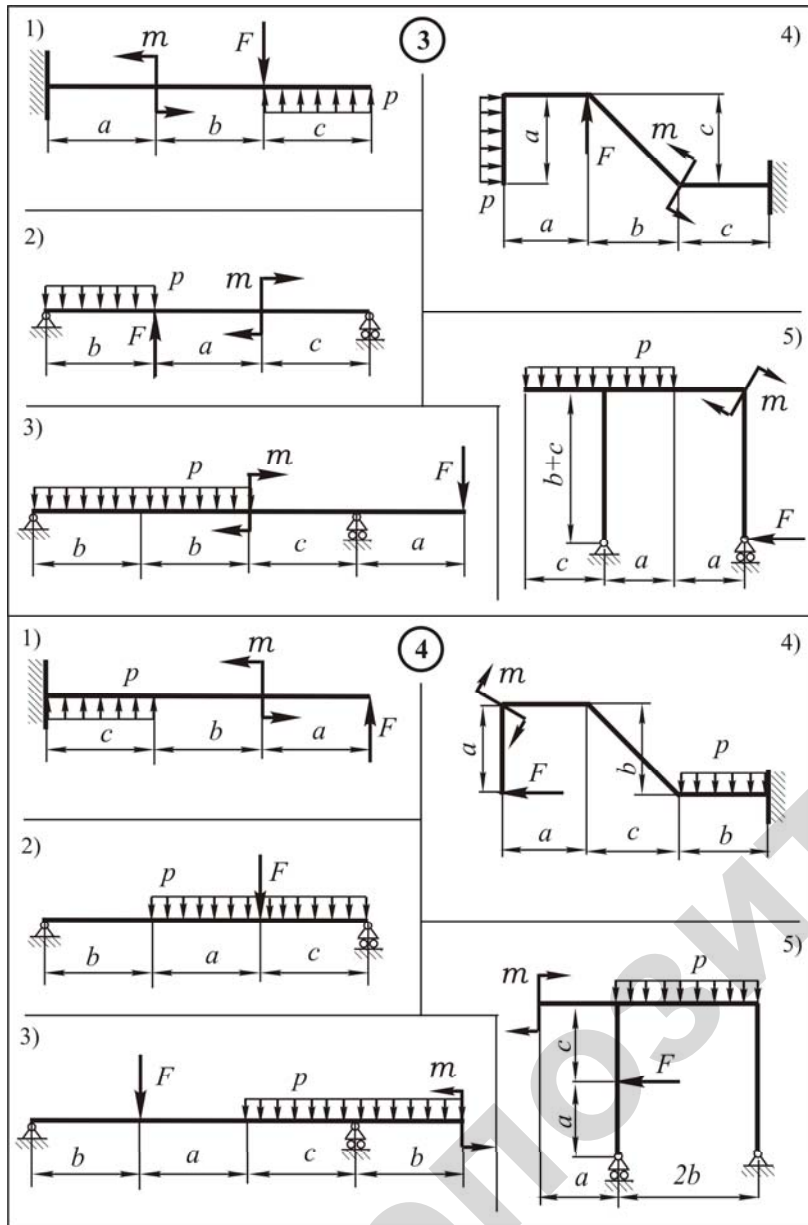


Рис. 3.21. Схемы (3–4) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

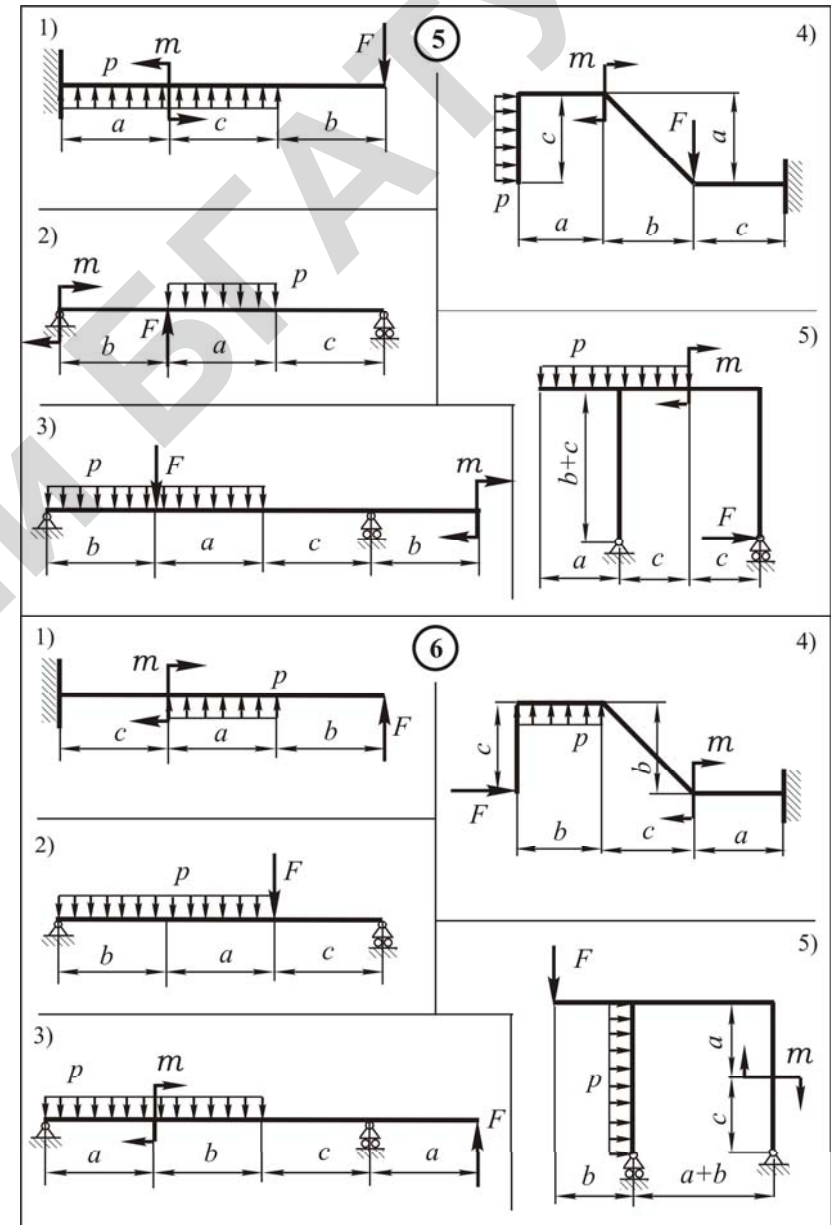


Рис. 3.21. Схемы (5–6) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

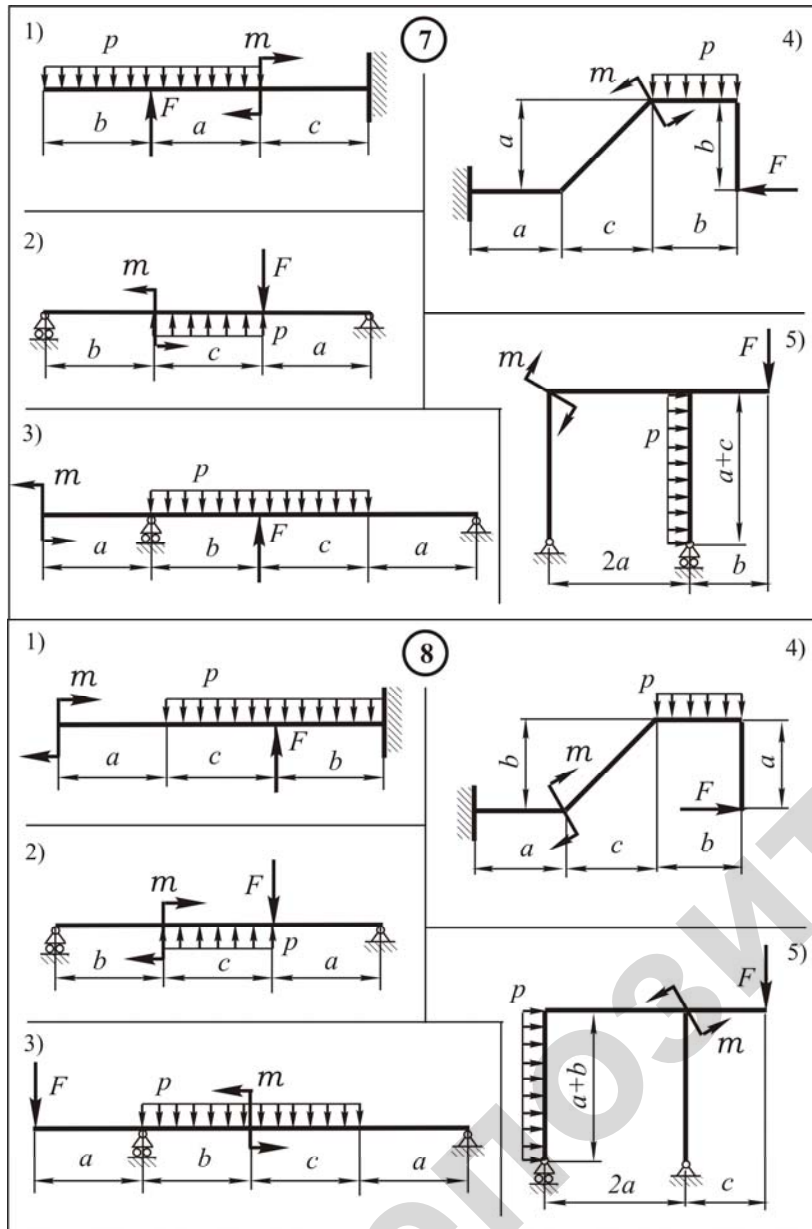


Рис. 3.21. Схемы (7–8) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

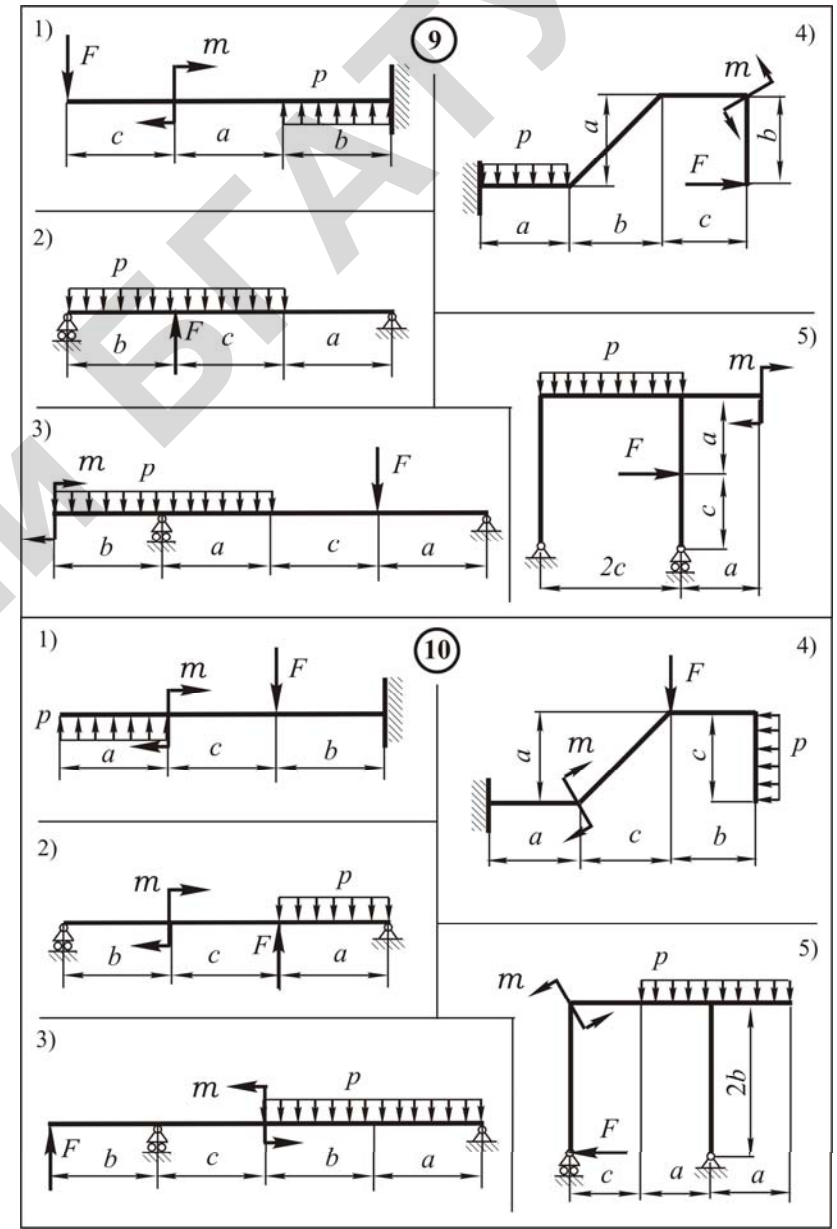


Рис. 3.21. Схемы (9–10) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

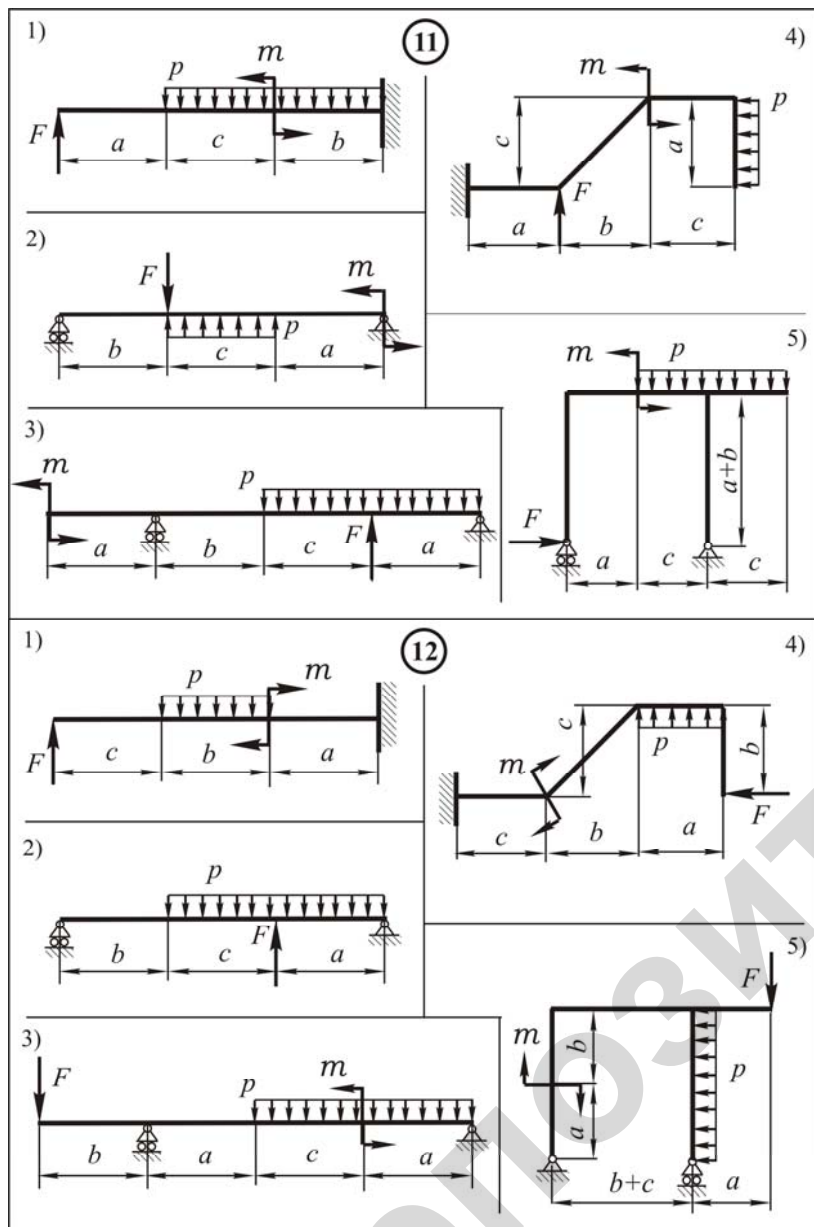


Рис. 3.21. Схемы (11–12) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

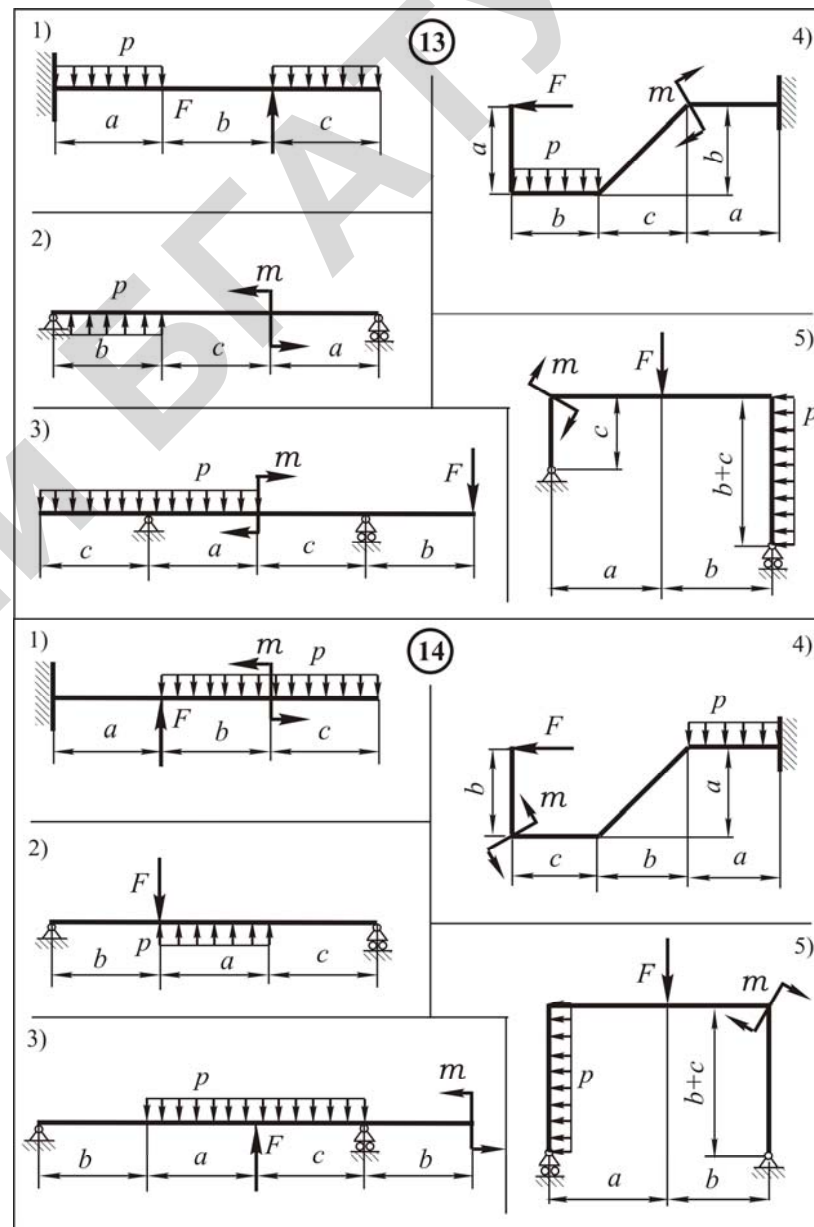


Рис. 3.21. Схемы (13–14) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

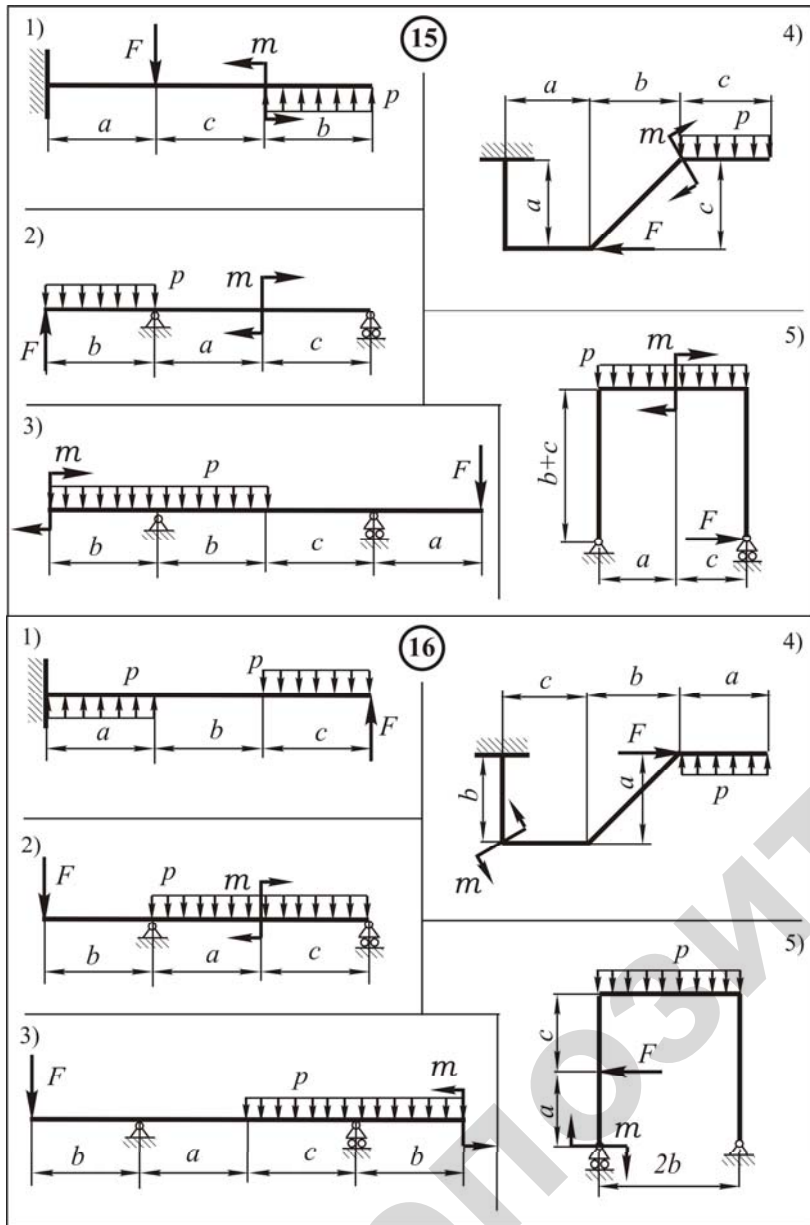


Рис. 3.21. Схемы (15–16) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

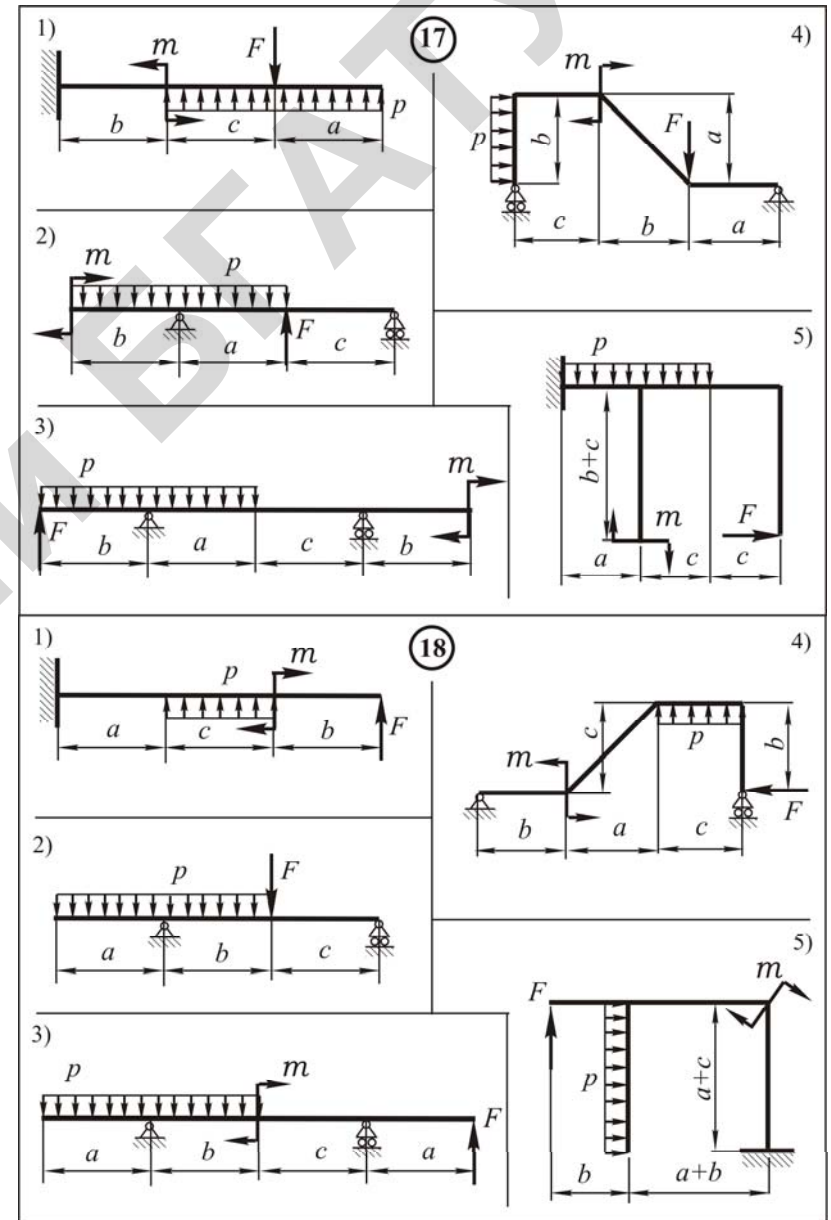


Рис. 3.21. Схемы (17–18) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

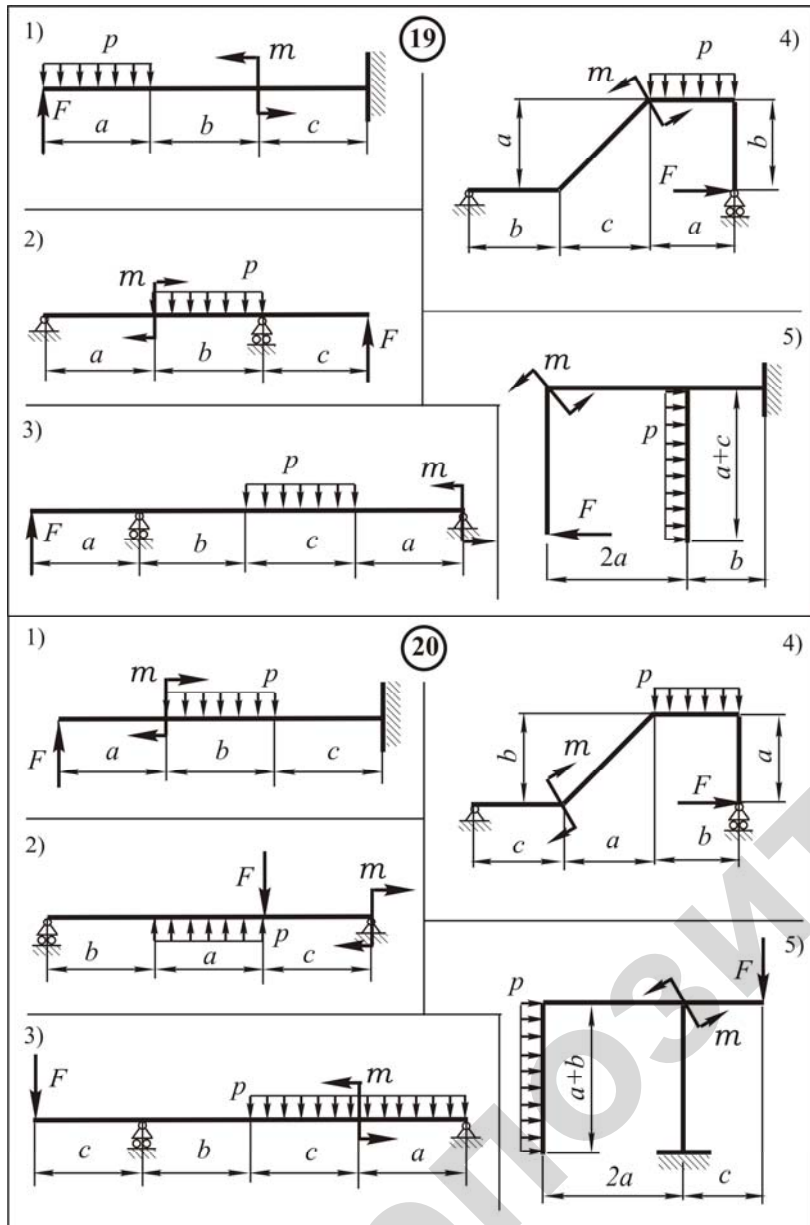


Рис. 3.21. Схемы (19–20) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

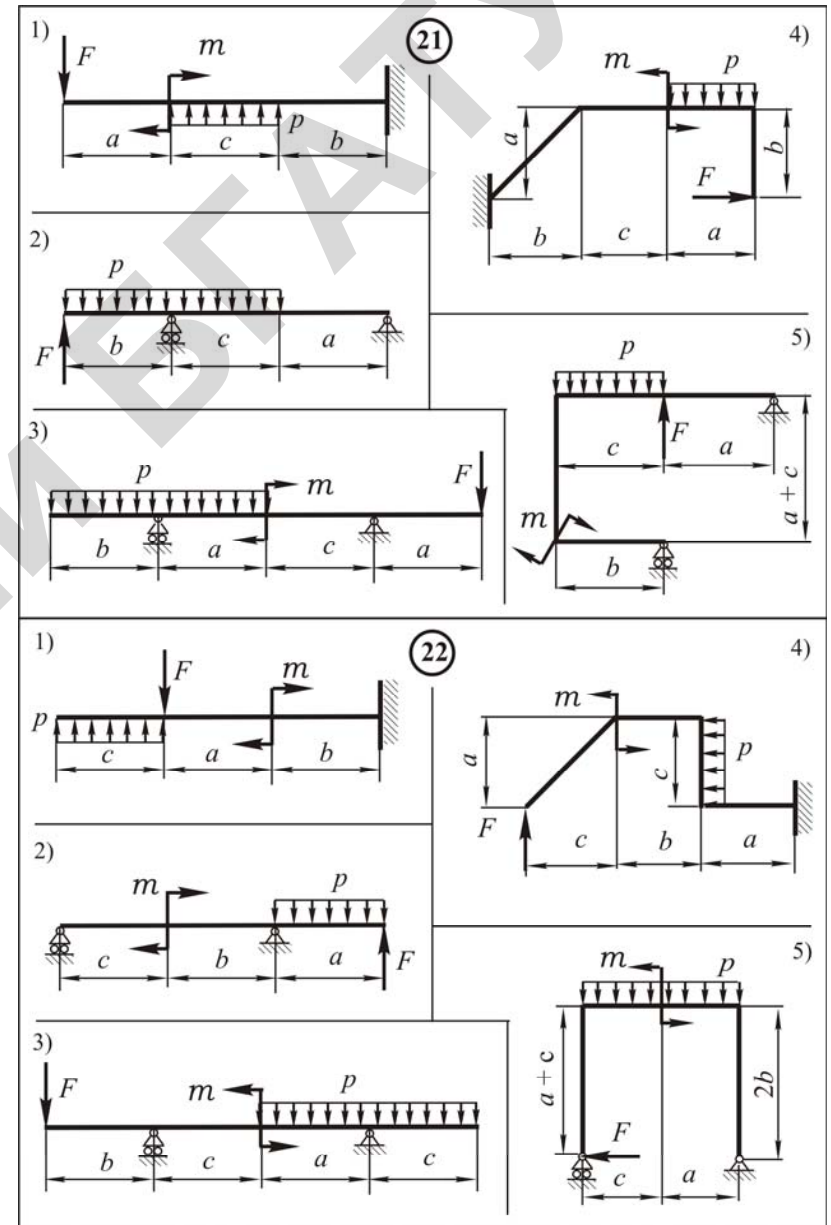


Рис. 3.21. Схемы (21–22) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

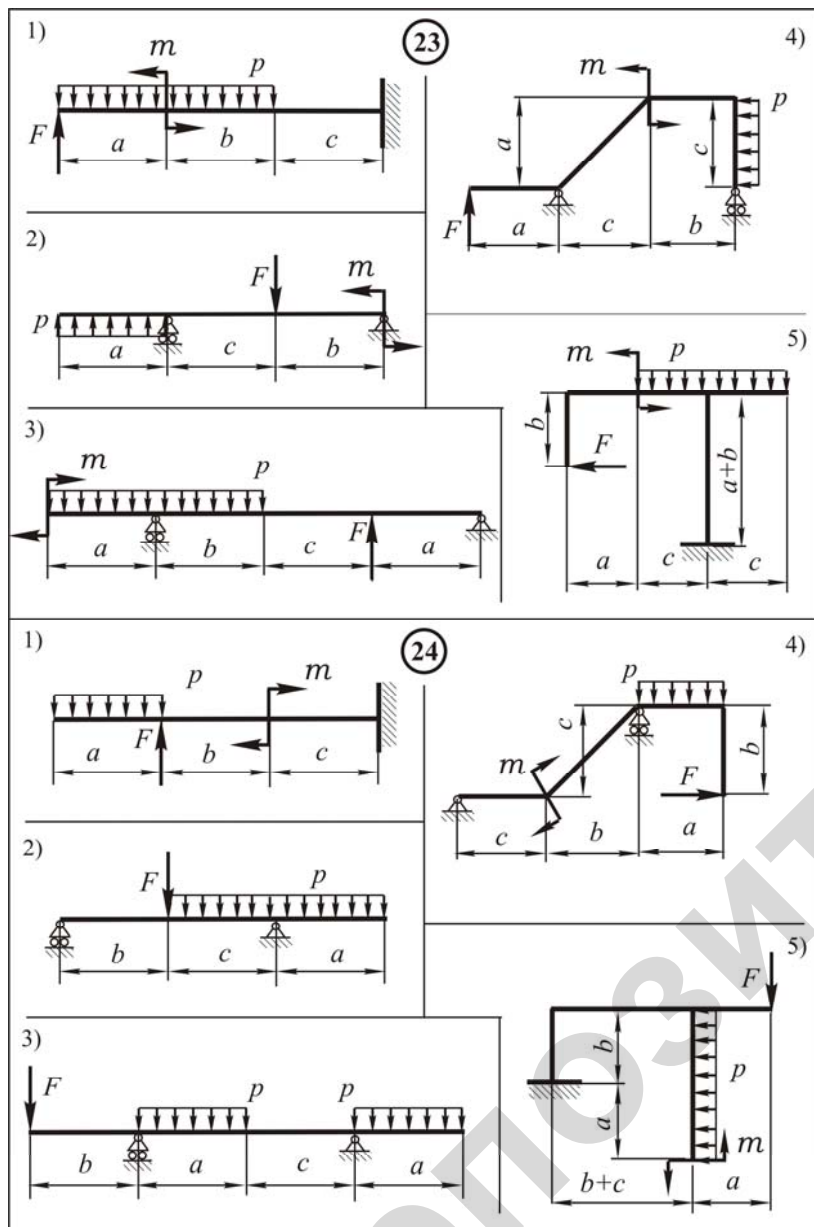


Рис. 3.21. Схемы (23–24) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

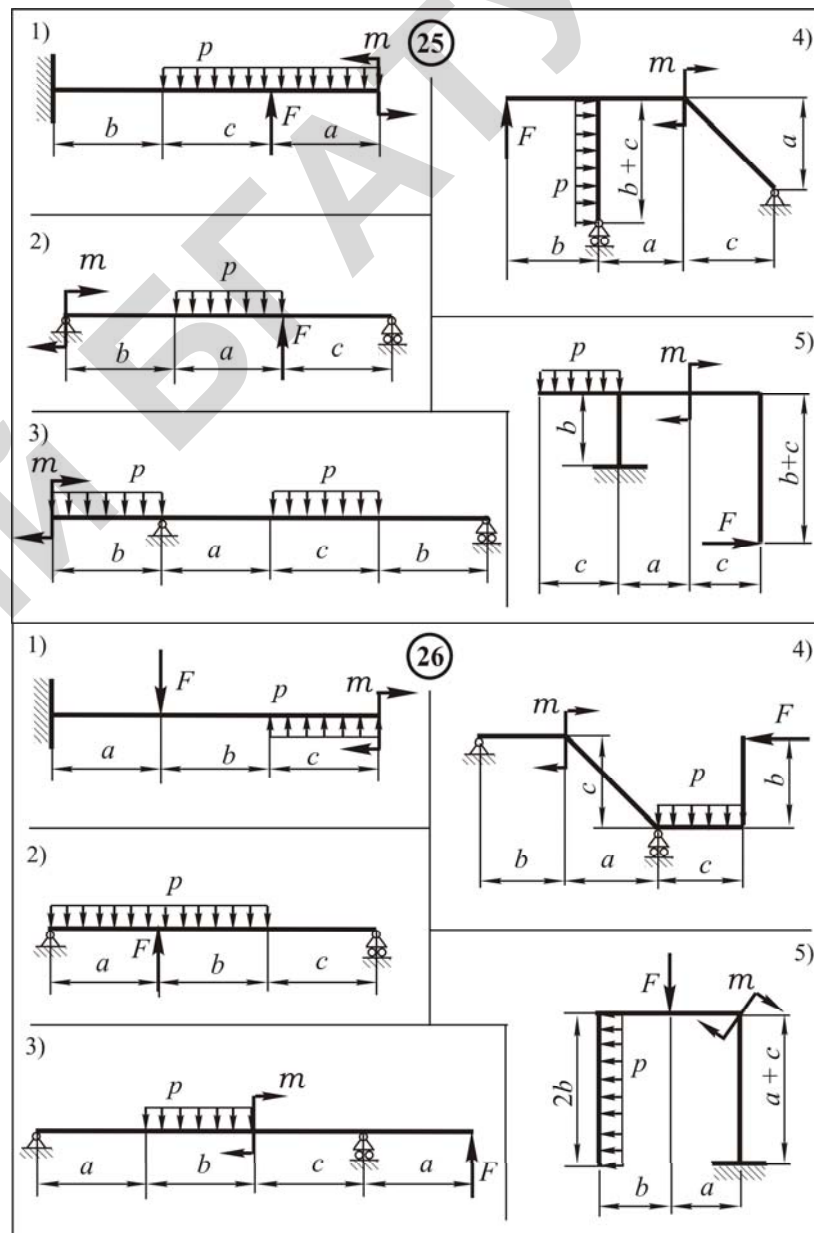


Рис. 3.21. Схемы (25–26) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

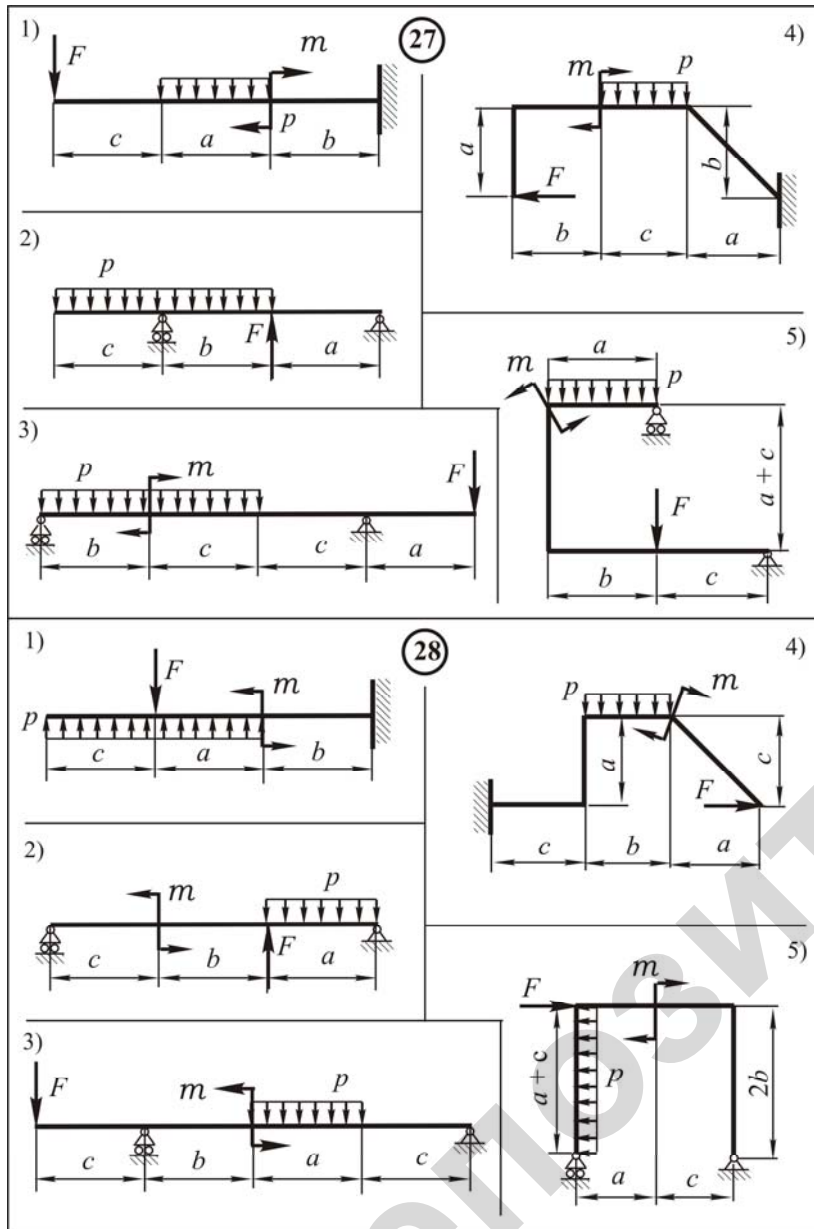


Рис. 3.21. Схемы (27–28) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

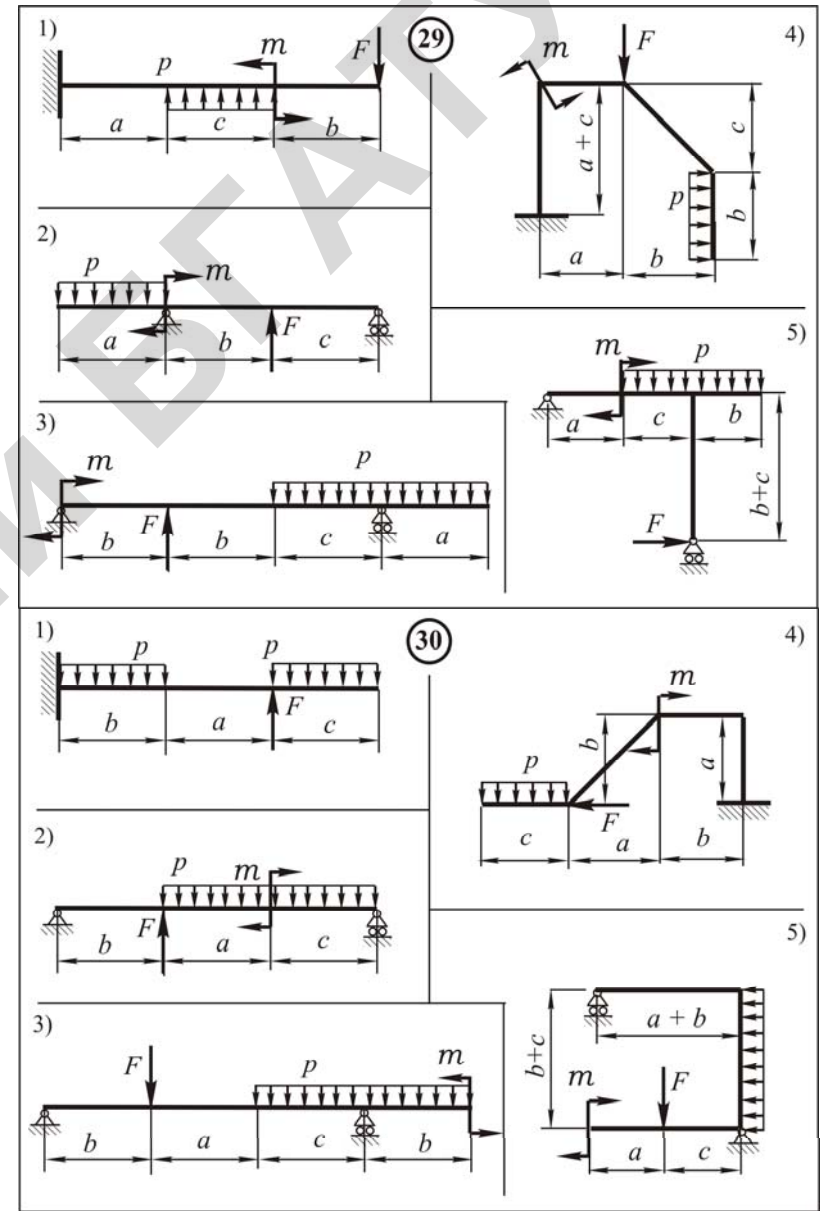


Рис. 3.21. Схемы (29–30) к ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

3.9. Методические указания для выполнения ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

1. Вычертить в масштабе схему балки (рамы), указать ее размеры, величины внешних нагрузок, оставляя под ней место для эпюр внутренних силовых факторов.

2. Показать реакции опор и обозначить их.

3. Используя уравнения равновесия для балки (рамы) как плоской системы, определить величину реакций опор, а также выполнить проверку правильности их нахождения.

4. Установить количество расчетных участков. Расчетным участком называется часть длины балки, в пределах которой внутренний силовой фактор изменяется по одному и тому же закону. Тогда границами участков будут являться сечения, в которых изменяется характер действующей нагрузки.

5. Последовательно, для каждого расчетного участка схемы:

– провести перпендикулярно оси x секущую плоскость, разделяющую балку (раму) на две части. Расстояние до поперечного сечения, совпадающего с секущей плоскостью, отсчитывается от крайнего левого или правого сечения балки (для рамы это расстояние также может отсчитываться от крайнего верхнего или нижнего сечения) и обозначается x_i (i – порядковый номер расчетного участка);

– составить уравнение поперечной силы, произвести ее расчет и построить эпюру поперечных сил Q ;

– составить уравнение изгибающего момента, произвести его расчет и построить эпюру изгибающих моментов M ;

– составить уравнение продольной силы, произвести ее расчет и построить эпюру продольных сил N .

6. Проверить правильность построения эпюр Q и M , используя следствия, вытекающие из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, сущности метода сечений. Для рам также проверить равновесие всех узлов.

7. Используя условие прочности при изгибе, в каждой задаче подобрать размеры поперечного сечения, исходя из заданной формы и соотношения размеров.

8. Применяя метод начальных параметров, определить перемещения в требуемых условиях задач сечениях балок.

3.10. Примеры решения некоторых задач ИДЗ «Прямой поперечный изгиб»

Пример 1

Для заданной балки (рис. 3.22) требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать номер профиля стального двутавра при $[\sigma] = 160$ МПа. Используя метод начальных параметров, определить прогибы в сечениях, приходящихся на границы расчетных участков, и углы поворота сечений, приходящихся на опоры, построить приближенную изогнутую ось (упругую линию) балки. Весом балки пренебречь.

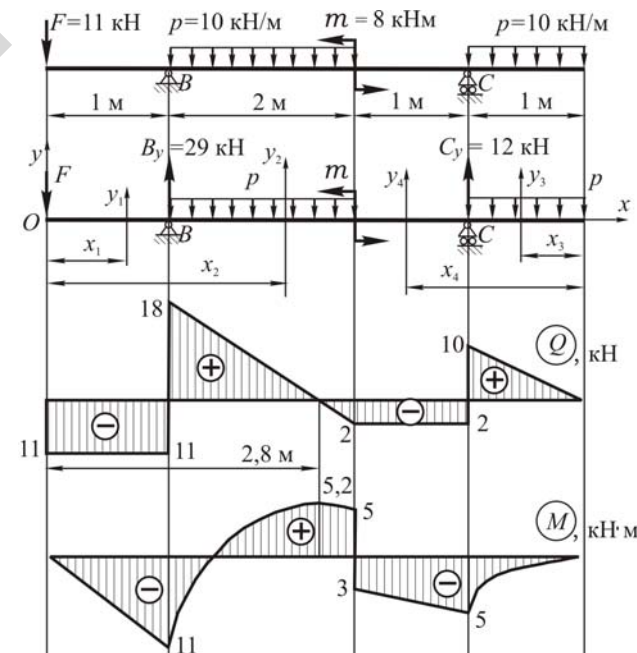


Рис. 3.22. Расчетные схемы, эпюры поперечных сил, изгибающих моментов в сечениях балки

Решение. Проводим координатные оси. При этом ось x совмещаем с осью балки, ось y проводим перпендикулярно оси x в точке B .

Рассматриваем равновесие балки, для чего наложенные связи со стороны опор заменяем реакциями. Опора B – шарнирно-неподвижная. Реакцию опоры представляем составляющими B_y и B_x , проходящими через ось шарнира. Опора C – шарнирно-подвижная. Реакция такой опоры проходит через ось шарнира и направлена перпендикулярно оси балки.

Таким образом, на балку действует уравновешенная плоская система сил. Для нахождения неизвестных B_y , B_x и C_y , составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma m_c(F_i) = -B_y \cdot 3 + F \cdot 4 + m + p \cdot 2 \cdot 2 - p \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$\Sigma m_B(F_i) = -C_y \cdot 3 - m + p \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 1 + p \cdot 1 \cdot 3,5 = 0;$$

$$\Sigma F_x = B_x = 0.$$

Последнее уравнение необходимо для определения составляющей B_x , которая в данной задаче равна нулю, поскольку к балке не приложены силы, проектируемые на ось x .

Решаем уравнения равновесия и находим реакции опор:

$$B_y = \frac{F \cdot 4 + m + p \cdot 2 \cdot 2 - p \cdot 0,5}{3} =$$

$$= \frac{11 \cdot 4 + 8 + 10 \cdot 2 \cdot 2 - 10 \cdot 0,5}{3} = 29 \text{ кН},$$

$$C_y = \frac{-m + p \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 1 + p \cdot 1 \cdot 3,5}{3} =$$

$$= \frac{-8 + 10 \cdot 2 - 11 + 10 \cdot 3,5}{3} = 12 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим не использованное в этой задаче уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось y и подставим их значения:

$$\Sigma F_y = B_y - p \cdot 2 - F + C_y - p \cdot 1 = 29 - 20 - 11 + 12 - 10 = 0.$$

В результате расчета получили $\Sigma F_y = 0$, что указывает на правильность определения реакций опор.

Разбиваем балку на четыре расчетных участка, принимая за их границы сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы, момент, а также начало и конец распределенной нагрузки.

В пределах первого участка проводим произвольное поперечное сечение на расстоянии x_1 от начала координат (точки O). Мысленно отбрасываем правую часть балки и, учитывая правила знаков, составляем уравнения для Q_{x_1} и M_{x_1} на первом участке.

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 1$ м):

$$Q_{x_1} = -F;$$

$$M_{x_1} = -F x_1.$$

Из уравнений следует, что на первом участке поперечная сила постоянная, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Задавая x_1 значения, соответствующие границам участка, находим Q_{x_1} и M_{x_1} :

$$Q_{x_1} = \text{const} = -11 \text{ кН};$$

$$x_1 = 0; \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1 \text{ м}; \quad M_{x_1} = -11 \cdot 1 = -11 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюры для первого участка, отмечая на них найденные значения Q_{x_1} и M_{x_1} (см. рис. 3.22).

Подобным образом проводим произвольное поперечное сечение в пределах второго расчетного участка на расстоянии x_2 от крайней левой точки O . Отбрасывая мысленно правую часть балки и рассматривая силы, действующие на оставшуюся часть, составляем уравнения Q_{x_2} и M_{x_2} для второго участка.

Участок II ($1 \text{ м} \leq x_2 \leq 3$ м):

$$Q_{x_2} = -F + B_y - p(x_2 - 1);$$

$$M_{x_2} = -F x_2 + B_y(x_2 - 1) - p \frac{(x_2 - 1)^2}{2}.$$

На втором участке поперечная сила представляет линейную функцию, а изгибающий момент изменяется по квадратичной функции. Задавая x_2 значения, соответствующие границам участка II, находим Q_{x_2} и M_{x_2} :

$$x_2 = 1 \text{ м}; \quad Q_{x_2} = -11 + 29 = 18 \text{ кН};$$

$$x_2 = 3 \text{ м}; \quad Q_{x_2} = -11 + 29 - 10 \cdot 2 = -2 \text{ кН};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}; \quad M_{x_2} = -11 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 3 \text{ м}; \quad M_{x_2} = -11 \cdot 3 + 29 \cdot 2 - 10 \frac{(3-1)^2}{2} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Так как на втором участке поперечная сила Q_{x_2} непрерывно убывает и происходит смена ее знака, то в сечении, где $Q_{x_2} = 0$, эпюра моментов M_{x_2} примет экстремальное значение, при вычислении которого воспользуемся дифференциальной зависимостью между Q_{x_2} и M_{x_2} . Приравняв к нулю выражение поперечной силы Q_{x_2} , находим расстояние x_2 до сечения с экстремальным значением изгибающего момента:

$$Q_{x_2} = -F + B_y - p(x_2 - 1) = 0,$$

$$x_2 = \frac{-F + B_y + p}{p} = \frac{-11 + 29 + 10}{10} = 2,8 \text{ м}.$$

Подставив полученное значение x_2 в уравнение моментов M_{x_2} , находим величину экстремального изгибающего момента:

$$x_2 = 2,8 \text{ м}; \quad M_{x_2} = -11 \cdot 2,8 + 29(2,8 - 1) - 10 \frac{(2,8 - 1)^2}{2} = 5,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры для второго участка и отмечаем на них найденные значения Q_{x_2} и M_{x_2} (см. рис. 3.22).

Проводим сечение в пределах третьего расчетного участка на расстоянии x_3 от крайней правой точки балки. Рассматривая силы, действующие на правую часть балки, составляем уравнения Q_{x_3} и M_{x_3} для третьего участка:

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 1$ м):

$$Q_{x_3} = p x_3;$$

$$M_{x_3} = -p \frac{x_3^2}{2}.$$

На третьем участке поперечная сила представляет линейную функцию, а изгибающий момент изменяется по квадратичной функции. Задавая x_3 значения, соответствующие границам участка III, находим Q_{x_3} и M_{x_3} :

$$x_3 = 0; \quad Q_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1 \text{ м}; \quad Q_{x_3} = 10 \text{ кН};$$

$$x_3 = 0; \quad M_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1 \text{ м}; \quad M_{x_3} = -10 \frac{1^2}{2} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюры Q_{x_3} и M_{x_3} на третьем участке (см. рис. 3.22). Поскольку эпюра поперечных сил на этом участке не изменяет знак, то изгибающий момент не будет принимать экстремального значения.

Проводим сечение в пределах четвертого расчетного участка на расстоянии x_4 от крайней правой точки балки. Рассматривая силы, действующие на правую часть балки, составляем уравнения Q_{x_4} и M_{x_4} для четвертого участка.

Участок IV ($1 \text{ м} \leq x_4 \leq 2$ м):

$$Q_{x_4} = -C_y + p \cdot 1;$$

$$M_{x_4} = C_y(x_4 - 1) - p \cdot 1(x_4 - 0,5).$$

Из уравнений следует, что на четвертом участке поперечная сила постоянная, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Подставляя числовые значения x_4 на границах участка IV, находим Q_{x_4} и M_{x_4} :

$$Q_{x_4} = \text{const} = -12 + 10 = -2 \text{ кН};$$

$$x_4 = 1 \text{ м}; \quad M_{x_4} = -10(1 - 0,5) = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_4 = 2 \text{ м}; \quad M_{x_4} = 12 \cdot 1 - 10(2 - 0,5) = -3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным данным Q_{x_4} и M_{x_4} строим эпюры на четвертом участке (см. рис. 3.22).

Контроль правильности построения эпюр с использованием общих выводов, вытекающих из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, сущности метода сечений показывает, что эпюры Q и M построены верно.

Из эпюр Q и M устанавливаем, что опасное сечение балки находится на расстоянии 1 м от крайнего левого сечения балки.

Подбираем поперечное сечение для заданной балки в виде двутавра (рис. 3.23). Для этого из условия прочности при изгибе находим величину требуемого осевого момента сопротивления поперечного сечения:

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{11 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 6,88 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 68,8 \text{ см}^3.$$

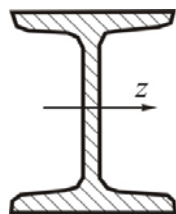


Рис. 3.23. Поперечное сечение балки – двутавр

По сортаменту прокатной стали (сталь горячекатаная, балки двутавровые, ГОСТ 8239–89) и $W_z = 68,8 \text{ см}^3$ выбираем двутавр № 14, у которого $W_z = 81,7 \text{ см}^3$, $I_z = 572 \text{ см}^4$.

Определяем перемещения, возникающие в сечениях балки. Для этого используем метод начальных параметров. Выберем начало координат в крайнем левом сечении балки, ось y направим вверх, ось x – вправо (см. рис. 3.22). Для определения начальных

параметров y_0 и θ_0 используем граничные условия, вытекающие из расчетной схемы балки, прогибы в сечениях B и C равны нулю ($y_B = 0$; $y_C = 0$). Принимая во внимание формулу (3.24), составим уравнения прогибов для сечений B и C в виде:

$$EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_B - F \frac{x_B^3}{6} = 0,$$

$$EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_C - m \frac{(x_C - 3)^2}{2} - F \frac{x_C^3}{6} +$$

$$+ B_y \frac{(x_C - 1)^3}{6} - p \frac{(x_C - 1)^4}{24} + p \frac{(x_C - 3)^4}{24} = 0.$$

Подставляя в уравнения прогибов для сечений B и C $x_B = 1 \text{ м}$, $x_C = 4 \text{ м}$ и значения внешних нагрузок, получаем:

$$EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 1 - 11 \frac{1^3}{6} = 0,$$

$$EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 4 - 8 \frac{(4 - 3)^2}{2} - 11 \frac{4^3}{6} +$$

$$+ 29 \frac{(4 - 1)^3}{6} - 10 \frac{(4 - 1)^4}{24} + 10 \frac{(4 - 3)^4}{24} = 0.$$

После вычислений имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 - 1,183 = 0, \\ EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 4 - 24,166 = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим величины $EI_z y_0$, $EI_z \theta_0$, а затем и начальные параметры y_0 и θ_0 .

$$EI_z y_0 = -5,611 \text{ кН}\cdot\text{м}^3, \quad EI_z \theta_0 = 7,444 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

$$y_0 = \frac{-5,611 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0049 \text{ м} = -4,9 \text{ мм},$$

$$\theta_0 = \frac{7,444 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0065 \text{ рад} = 0,37^\circ.$$

Находим прогиб сечения балки на границе второго и третьего участков, когда $x_D = 3$ м.

$$\begin{aligned} EI_z y_D &= EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_D - F \frac{x_D^3}{6} + \\ &+ B_y \frac{(x_D - 1)^3}{6} - p \frac{(x_D - 1)^4}{24}. \\ EI_z y_D &= EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 3 - 11 \frac{3^3}{6} + \\ &+ 29 \frac{(3-1)^3}{6} - 10 \frac{(3-1)^4}{24} = -0,779 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \\ y_D &= \frac{-0,779 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0007 \text{ м} = -0,7 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Находим прогиб правого концевого сечения балки, для которого $x_K = 5$ м.

$$\begin{aligned} EI_z y_K &= EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_K - m \frac{(x_K - 2)^2}{2} - F \frac{x_K^3}{6} + \\ &+ B_y \frac{(x_K - 1)^3}{6} + C_y \frac{(x_K - 4)^3}{6} - p \frac{(x_K - 1)^4}{24} + p \frac{(x_K - 3)^4}{24}. \\ EI_z y_K &= EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot 5 - 8 \frac{(5-3)^2}{2} - 11 \frac{5^3}{6} + 29 \frac{(5-1)^3}{6} + \\ &+ 12 \frac{(5-4)^3}{6} - 10 \frac{(5-1)^4}{24} + 10 \frac{(5-3)^4}{24} = -2,642 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \\ y_K &= \frac{-2,642 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0023 \text{ м} = -2,3 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Используя формулу (3.20), определяем углы поворота сечений балки, приходящихся на опоры, для которых $x_B = 1$ м и $x_C = 4$ м.

$$EI_z \theta_B = EI_z \theta_0 - F \frac{x_B^2}{2} = 7,444 - 11 \frac{1^2}{2} = 1,944 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$\theta_B = \frac{1,944 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 0,0017 \text{ рад} = 0,1^\circ.$$

$$EI_z \theta_C = EI_z \theta_0 - m(x_C - 3) - F \frac{x_C^2}{2} +$$

$$+ B_y \frac{(x_C - 1)^2}{2} - p \frac{(x_C - 1)^3}{6} + p \frac{(x_C - 3)^3}{6}.$$

$$EI_z \theta_C = 7,444 - 8(4-3) - 11 \frac{4^2}{2} + 29 \frac{(4-1)^2}{2} -$$

$$- 10 \frac{(4-1)^3}{6} + 10 \frac{(4-3)^3}{6} = -1,389 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

$$\theta_C = \frac{-1,389 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = -0,0012 \text{ рад} = -0,07^\circ.$$

Принимая во внимание найденные прогибы и углы поворота сечений, строим приближенную упругую линию балки (рис. 3.22).

Пример 2

Построить эпюры внутренних силовых факторов для рамы (рис. 3.24). Подобрать размеры поперечного сечения элементов рамы, если оно имеет форму кольца (отношение внутреннего диаметра к наружному равно 0,8). Допускаемое напряжение принять равным $[\sigma] = 160$ МПа. Собственным весом рамы пренебречь.

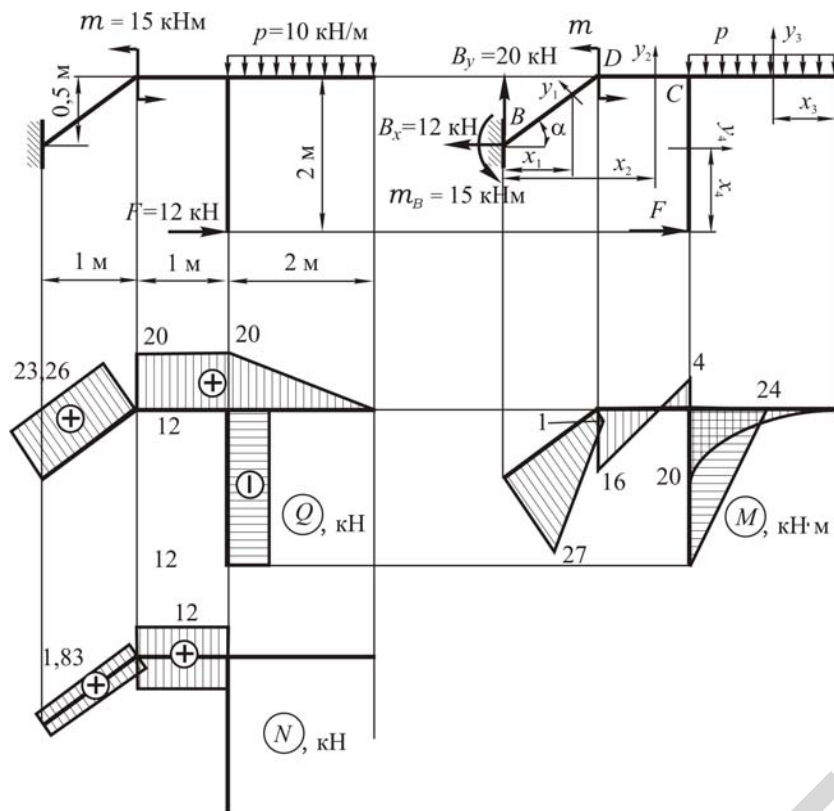


Рис. 3.24. Расчетная схема и эпюры внутренних силовых факторов рамы

Решение. Определяем реакции жесткой заделки, представленные составляющими B_y и B_x , m_B (рис. 3.24). На раму действует уравновешенная плоская система сил. Неизвестные силовые факторы B_y , B_x , m_B найдем, составляя уравнения равновесия в виде суммы проекций сил на горизонтальную ось x , на вертикальную ось y и суммы моментов относительно точки B :

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= F - B_x = 0; \\ \Sigma F_y &= B_y - p \cdot 2 = 0; \\ \Sigma m_B (F_i) &= -m_B + p \cdot 2 \cdot 3 - m - F \cdot 1,5 = 0.\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}B_x &= F = 20 \text{ кН}; \\ B_y &= p \cdot 2 = 20 \text{ кН}; \\ m_B &= p \cdot 6 - m - F \cdot 1,5 = 60 - 15 - 18 = 27 \text{ кН}\cdot\text{м}.\end{aligned}$$

Для проверки правильности вычисления реакций заделки B составляем уравнение равновесия в виде суммы моментов относительно точки C и подставим их значения:

$$\begin{aligned}\Sigma m_c (F_i) &= B_y \cdot 2 + B_x \cdot 0,5 - m_B - m - F \cdot 2 + p \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= 20 \cdot 2 + 12 \cdot 0,5 - 27 - 15 - 12 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

В результате расчета получили $\Sigma m_c (F_i) = 0$, что указывает на правильность определения реакций заделки B .

Рама имеет четыре расчетных участка. На каждом расчетном участке проводим сечение и, рассматривая силы, действующие на оставшуюся часть, составляем уравнения для поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил, соблюдая соответствующие правила знаков.

Проводим сечение на первом участке на расстоянии x_1 от жесткой заделки B и составляем уравнения для Q_{x_1} , M_{x_1} , N_{x_1} .

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 1$ м):

$$\begin{aligned}Q_{x_1} &= B_y \cos \alpha + B_x \sin \alpha; \\ M_{x_1} &= -m_B + B_y x_1 + B_x x_1 \operatorname{tg} \alpha; \\ N_{x_1} &= -B_y \sin \alpha + B_x \cos \alpha,\end{aligned}$$

где α – угол, который составляет ось элемента с горизонтальной осью, величина которого равна $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{0,5}{1} = 26,6^\circ$.

Из уравнений следует, что на первом участке поперечная сила и продольная сила постоянные, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Подставляя числовые значения x_1 на границах участка I, получаем:

$$Q_{x_1} = \operatorname{const} = 20 \cos 26,6^\circ + 12 \sin 26,6^\circ = 23,26 \text{ кН};$$

$$x_1 = 0; \quad M_{x_1} = -27 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_1 = 1 \text{ м}; \quad M_{x_1} = -27 + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 1 \cdot \text{tg } 26,6^\circ = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$N_{x_1} = \text{const} = -20 \sin 26,6^\circ + 12 \cos 26,6^\circ = 1,83 \text{ кН};$$

Строим эпюры для первого участка, отмечая на них найденные значения Q_{x_1} и M_{x_1} , N_{x_1} (см. рис. 3.24).

Проводим сечение на втором участке на расстоянии x_2 от жесткой заделки B и составляем уравнения для Q_{x_2} , M_{x_2} , N_{x_2} .

Участок II ($1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$):

$$Q_{x_2} = B_y;$$

$$M_{x_2} = -m_B - m + B_y x_2 + B_x \cdot 0,5;$$

$$N_{x_2} = B_x.$$

Из уравнений следует, что на втором участке поперечная сила и продольная сила постоянные, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Подставляя числовые значения x_2 на границах участка II, получаем:

$$Q_{x_2} = \text{const} = 20 \text{ кН};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}; \quad M_{x_2} = -27 - 15 + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 0,5 = -16 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 2 \text{ м}; \quad M_{x_2} = -27 - 15 + 20 \cdot 2 + 12 \cdot 0,5 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$N_{x_2} = \text{const} = 12 \text{ кН}.$$

Строим эпюры для второго участка, отмечая на них найденные значения Q_{x_2} и M_{x_2} , N_{x_2} (см. рис. 3.24).

Проводим сечение на третьем участке на расстоянии x_3 от крайнего правого сечения и составляем уравнения для Q_{x_3} , M_{x_3} , N_{x_3} .

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$):

$$Q_{x_3} = p x_3;$$

$$M_{x_3} = -p \frac{x_3^2}{2};$$

$$N_{x_3} = 0.$$

Из уравнений следует, что на третьем участке поперечная сила представляет линейную функцию, изгибающий момент изменяется по квадратичной функции, а продольная сила равна нулю. Подставляя числовые значения x_3 на границах участка III, получаем:

$$x_3 = 0; \quad Q_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 2 \text{ м}; \quad Q_{x_3} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН};$$

$$x_3 = 0; \quad M_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 2 \text{ м}; \quad M_{x_3} = -10 \frac{2^2}{2} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$N_{x_3} = 0.$$

Строим эпюры для третьего участка, отмечая на них найденные значения Q_{x_3} и M_{x_3} , N_{x_3} (см. рис. 3.24).

Проводим сечение на четвертом участке на расстоянии x_4 от крайнего нижнего сечения и составляем уравнения для Q_{x_4} , M_{x_4} , N_{x_4} .

Участок IV ($0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м}$):

$$Q_{x_4} = -F;$$

$$M_{x_4} = F x_4;$$

$$N_{x_4} = 0.$$

Из уравнений следует, что на четвертом участке поперечная сила постоянная, изгибающий момент изменяется по линейному закону, а продольная сила равна нулю. Подставляя числовые значения x_4 на границах участка IV, получаем:

$$Q_{x_4} = \text{const} = -12 \text{ кН};$$

$$x_2 = 0; \quad M_{x_4} = 0;$$

$$x_2 = 2 \text{ м}; \quad M_{x_4} = 12 \cdot 2 = 24 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$N_{x_4} = 0.$$

Строим эпюры для четвертого участка, отмечая на них найденные значения Q_{x_4} и M_{x_4} , N_{x_4} (см. рис. 3.24).

Контроль правильности построения эпюр с использованием общих выводов, вытекающих из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, сущности метода сечений показывает, что эпюры Q и M построены верно. Для рам является обязательной проверка равновесия узлов. Составляем уравнения равновесия для узла C (рис. 3.25):

$$\Sigma F_x = -20 + 20 = 0;$$

$$\Sigma F_y = 20 - 20 = 0;$$

$$\Sigma m_C (F_i) = 4 + 20 - 24 = 0.$$

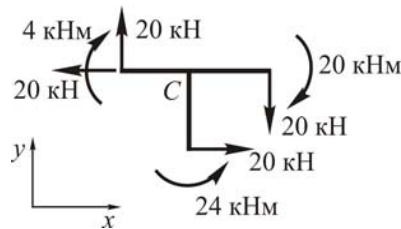


Рис. 3.25. Узел рамы C

Составляем уравнения равновесия для узла D (рис. 3.26):

$$\Sigma F_x = -23,26 \sin 26,6^\circ - 1,83 \cos 26,6^\circ + 12 = 0;$$

$$\Sigma F_y = 23,26 \cos 26,6^\circ - 1,83 \sin 26,6^\circ - 20 = 0;$$

$$\Sigma m_D (F_i) = -1 - 15 + 16 = 0.$$

Уравнения равновесия для узлов C и D удовлетворяются. Выполненные проверки позволяют заключить, что все эпюры построены, верно.

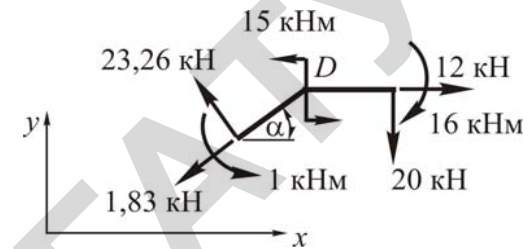


Рис. 3.26. Узел рамы D

Подбираем одинаковое поперечное сечение в виде кольца для всех элементов рамы. Для этого из условия прочности при изгибе находим величину требуемого осевого момента сопротивления поперечного сечения. Значение наибольшего изгибающего момента принимаем из эпюры (см. рис. 3.24) $M_{\max} = 27 \text{ кН}\cdot\text{м}$:

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{27 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,69 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Находим размеры поперечного сечения элементов рамы, имеющего форму кольца (рис. 3.27):

$$d_H = \sqrt[3]{\frac{32 W_z}{\pi(1-c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 169 \cdot 10^{-4}}{3,14(1-0,8^4)}} = 0,079 \text{ м};$$

$$d_B = d_H c = 0,079 \cdot 0,8 = 0,063 \text{ м}.$$

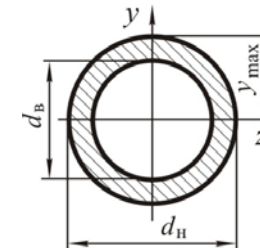


Рис. 3.27. Поперечное сечение элементов рамы – кольцо

В соответствии с нормальными линейными размерами (ГОСТ 6636–69 в ред. 1990 г.) принимаем $d_H = 80 \text{ мм}$, $d_B = 63 \text{ мм}$.

4. КОСОЙ ИЗГИБ

Литература: [1, с. 173–176; 2, с. 336–342].

Косой изгиб, основные понятия. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса. Нахождение опасного сечения. Положение нейтральной оси и опасных точек в поперечном сечении. Условие прочности. Определение размеров поперечного сечения бруса. Перемещения при косом изгибе.

4.1. Основные понятия. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса. Условие прочности

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором след плоскости изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения.

Косой изгиб может быть плоским и пространственным. При плоском косом изгибе все внешние силы располагаются в одной плоскости, которая проходит через ось бруса. В этом случае след плоскости изгибающего момента (силовой плоскости) образует по всей длине бруса постоянный угол α с его главной центральной плоскостью (рис. 4.1), а упругая линия бруса будет представлять плоскую кривую линию.

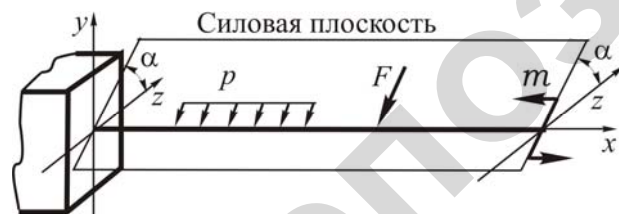


Рис. 4.1. Плоский косой изгиб

При пространственном косом изгибе внешние силы располагаются в разных плоскостях ($\alpha_p, \alpha_F, \alpha_m$), проходящих через ось бруса (рис. 4.2). В этом случае след плоскости изгибающего момента (силовой плоскости) в каждом поперечном сечении бруса образует с его главной центральной осью свой угол α , а упругая линия бруса будет представлять пространственную кривую линию.

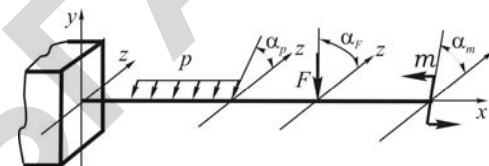


Рис. 4.2. Пространственный косой изгиб

При расчетах на прочность и жесткость как плоский, так и пространственный косой изгиб приводится к двум изгибам в главных центральных плоскостях инерции бруса.

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, нагруженную силой F , линия действия которой составляет с главной центральной осью z угол α_F (рис. 4.3). Пускай в поперечном сечении балки на расстоянии x от крайнего левого сечения действует изгибающий момент, равный

$$M = -F x. \quad (4.1)$$

Спроектируем все действующие на балку внешние силы в главную центральную плоскость $yoх$ и составим расчетную схему (рис. 4.3):

$$F_y = F \sin \alpha_F. \quad (4.2)$$

В поперечном сечении балки на расстоянии x от крайнего левого сечения действует изгибающий момент относительно оси z , равный

$$M_z = -F_y x = -F \sin \alpha_F x = M \sin \alpha, \quad (4.3)$$

где α – угол, который составляет след силовой плоскости (плоскости действия полного изгибающего момента M) с главной центральной осью инерции z .

В рассматриваемом случае плоского косоуго изгиба угол α равен углу α_F .

Используя уравнение (4.3), строим эпюру M_z (рис. 4.3).

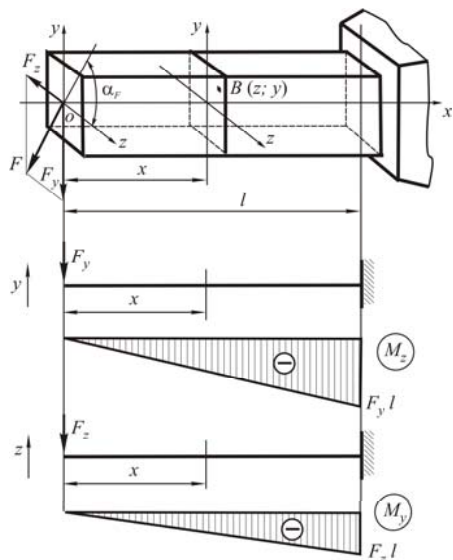


Рис. 4.3. Общий вид, расчетные схемы балки и эпюры изгибающих моментов

Спроектируем все действующие на балку внешние силы в главную центральную плоскость zox и составим расчетную схему (см. рис. 4.3):

$$F_z = F \cos \alpha_F. \quad (4.4)$$

В поперечном сечении балки на расстоянии x от крайнего левого сечения действует изгибающий момент относительно оси y , равный

$$M_y = -F_z x = -F \cos \alpha_F x = M \cos \alpha. \quad (4.5)$$

В рассматриваемом случае плоского косоугольного изгиба угол α равен углу α_F . Используя уравнение (4.5), строим эпюру M_y (см. рис. 4.3).

Разделив уравнение (4.5) на (4.3), получим угол, который составляет след плоскости действия полного изгибающего момента M с главной центральной осью инерции z :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{M_y}{M_z}. \quad (4.6)$$

При расчетах на прочность элементов конструкций, испытывающих косоугольный изгиб, рассматривают только нормальные напряжения, а влиянием касательных напряжений, как и при прямом изгибе, пренебрегают.

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки согласно принципу независимости действия сил определяется как алгебраическая сумма напряжений от изгибающих моментов относительно главных центральных осей инерции M_z и M_y :

$$\sigma = \pm \sigma_{M_z} \pm \sigma_{M_y},$$

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z. \quad (4.7)$$

При расчете нормальных напряжений все величины подставляются в правую часть выражения (4.7) по модулю, а знаки перед каждым из двух слагаемых ставятся с учетом растяжения или сжатия в рассматриваемой точке (растяжение – «+», сжатие – «-») при действии соответствующего изгибающего момента. Так, для показанной на рис. 4.3 схемы нагружения бруса продольные волокна, расположенные выше оси z (как видно из эпюры M_z), испытывают сжатие, ниже оси z – растяжение, а продольные волокна, расположенные справа от оси y (как видно из эпюры M_y), испытывают сжатие, слева от оси y – растяжение. Тогда напряжение в точке $B(z; y)$, принадлежащей первому квадранту поперечного сечения балки, можно найти по формуле (4.7), поставив перед каждым слагаемым в правой части знак «+»:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (4.8)$$

Из формулы (4.7) видно, что нормальные напряжения в некоторых точках поперечного сечения балки, испытывающей косоугольный изгиб, равны нулю. Эти точки располагаются на прямой линии, проходящей через начало координат (центр тяжести), называемой нейтральной осью. Приравняв выражение (4.8) к нулю, получаем уравнение нейтральной оси в виде

$$y = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} z. \quad (4.9)$$

Поскольку нейтральная ось проходит через начало координат, то ее уравнение удобно представить следующим выражением:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y}, \quad (4.10)$$

где β – угол, который составляет нейтральная ось с главной центральной осью инерции z (рис. 4.4).



Рис. 4.4. След действия M и нейтральная ось в поперечном сечении бруса

Из анализа уравнений (4.9) и (4.10) следует, что положение нейтральной оси вдоль оси бруса постоянного поперечного сечения:

– при плоском косом изгибе остается постоянным, так как

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{M_y}{M_z} = \operatorname{const};$$

– при пространственном косом изгибе изменяется в соответствии с изменением отношения изгибающих моментов $\frac{M_y}{M_z}$.

Нейтральная ось в поперечном сечении бруса при косом изгибе не перпендикулярна следу полного изгибающего момента. Она отклоняется от перпендикуляра к следу полного изгибающего момента к главной центральной оси инерции сечения, относительно которой

момент инерции минимальный. По мере удаления точки от нейтральной оси нормальное напряжение в ней линейно возрастает (рис. 4.5).

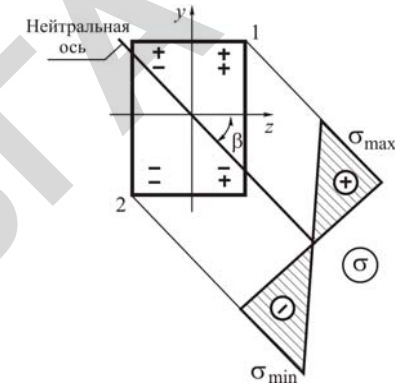


Рис. 4.5. Эпюра нормальных напряжений

Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси по разные от нее стороны. Причем в одной опасной точке возникает наибольшее растягивающее напряжение σ_{\max} , а в другой – наибольшее сжимающее напряжение σ_{\min} .

При косом изгибе напряженное состояние в опасной точке принимается линейным, и расчет на прочность производится по нормальным напряжениям, возникающим в поперечном сечении бруса, где изгибающие моменты имеют наибольшие значения. Если $M_{z \max}$ и $M_{y \max}$ действуют в разных сечениях бруса, то расчет на прочность проводится для двух предположительно опасных сечений, в одном из которых действуют $M_{z \max}$ и M_y , а в другом – M_z и $M_{y \max}$.

Условия прочности при косом изгибе для заданной схемы нагружения бруса можно записать в виде следующих соотношений:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(1)} = \frac{M_z}{I_z} y_1 + \frac{M_y}{I_y} z_1 \leq [\sigma_p]; \quad (4.11)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{(2)} = \left| -\frac{M_z}{I_z} y_2 - \frac{M_y}{I_y} z_2 \right| \leq [\sigma_c]. \quad (4.12)$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то при оценке прочности достаточно обеспечить выполнение одного условия, в котором будет использовано наибольшее по абсолютной величине напряжение. Для сечений с двумя осями симметрии и выступающими угловыми точками условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_p]. \quad (4.13)$$

Направление полного прогиба сечения бруса, испытывающего кривой изгиб, не совпадает со следом действия полного изгибающего момента M и перпендикулярно нейтральной оси.

4.2. ИДЗ «Кривой изгиб»

Для заданной балки, нагруженной сосредоточенной силой F , равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p и моментом в виде пары сил m (рис. 4.6), требуется:

- 1) определить положение опасного сечения балки;
- 2) провести в опасном сечении балки нейтральную ось и найти опасные точки;
- 3) определить нормальные напряжения в опасных точках, а также в выступающих угловых точках опасного сечения и построить эпюры нормальных напряжений по сторонам этого сечения.

Исходные данные и схемы для выполнения ИДЗ «Кривой изгиб» – в табл. 4.1 (двутавр ГОСТ 8239–89, швеллер ГОСТ 8240–89) и на рис. 4.6.

Исходные данные к ИДЗ «Косой изгиб»

№ п/п	Размеры, м			Нагрузки			Форма и размеры поперечного сечения						α_0 , градус	
	a	b	c	m , кН·м	F , кН	p , кН/м	Прямо- угольник, м		Дву- тавр, № пр.	Швел- лер, № пр.	Труба прямоугольная, м			
							h	b			h	b		t
1	1,0	1,7	1,3	17	14	10	0,30	0,14	30а	33	0,32	0,16	0,02	20
2	1,2	1,4	1,4	15	13	11	0,28	0,15	30	30	0,31	0,15	0,02	20
3	1,4	1,6	1,0	13	16	12	0,26	0,16	27а	27	0,30	0,14	0,02	20
4	1,6	1,1	1,3	11	15	13	0,24	0,17	27	24а	0,29	0,15	0,02	20
5	1,8	1,0	1,2	9	17	14	0,22	0,16	24а	24	0,28	0,16	0,02	20
6	1,4	1,5	1,1	13	21	12	0,20	0,16	24	22а	0,27	0,17	0,02	20
7	1,3	1,5	1,2	8	18	11	0,22	0,18	22а	22	0,26	0,18	0,02	25
8	1,2	1,4	1,4	9	21	10	0,24	0,16	22	20а	0,25	0,18	0,02	25
9	1,3	1,7	1,0	10	20	11	0,26	0,18	20а	20	0,24	0,19	0,02	25
10	1,4	1,5	1,1	11	19	12	0,28	0,20	20	27	0,23	0,20	0,02	25
11	2,0	0,9	1,1	15	10	16	0,30	0,18	27а	24а	0,34	0,14	0,01	25
12	1,9	1,0	1,1	8	12	17	0,29	0,16	27	24	0,33	0,15	0,01	25
13	1,8	1,2	1,0	10	11	15	0,27	0,22	24а	22а	0,32	0,16	0,01	30
14	1,7	1,4	0,9	12	10	16	0,25	0,18	24	22	0,31	0,17	0,01	30
15	1,6	1,3	1,1	14	13	15	0,23	0,16	22а	20а	0,30	0,18	0,01	30
16	1,5	1,2	1,3	16	10	14	0,21	0,16	22	20	0,29	0,19	0,01	30

112

Окончание табл. 4.1

№ п/п	Размеры, м			Нагрузки			Форма и размеры поперечного сечения						α_0 , градус	
	a	b	c	m , кН·м	F , кН	p , кН/м	Прямо- угольник, м		Дву- тавр, № пр.	Швел- лер, № пр.	Труба прямоугольная, м			
							h	b			h	b		t
17	1,4	1,6	1,0	15	12	13	0,22	0,17	30	33	0,28	0,20	0,01	30
18	1,3	1,8	0,9	20	11	14	0,24	0,18	27а	30	0,27	0,21	0,01	30
19	1,2	2,0	0,8	18	12	11	0,26	0,17	27	27	0,26	0,22	0,01	35
20	1,1	1,8	1,1	19	13	10	0,28	0,15	24а	24а	0,25	0,20	0,01	35
21	2,0	1,2	0,8	10	17	16	0,30	0,19	24	24	0,28	0,14	0,03	35
22	1,6	1,4	1,0	11	16	14	0,30	0,21	22а	33	0,27	0,15	0,03	35
23	1,2	2,0	0,8	12	18	12	0,29	0,16	30а	30	0,26	0,16	0,03	35
24	1,8	1,2	1,0	13	19	13	0,28	0,15	30	27	0,25	0,17	0,03	35
25	1,5	1,1	1,4	12	20	12	0,27	0,18	27а	24а	0,24	0,18	0,03	40
26	1,5	1,3	1,2	13	18	11	0,26	0,15	27	24	0,23	0,17	0,03	40
27	1,6	1,1	1,3	14	17	14	0,25	0,14	24а	22а	0,22	0,16	0,03	40
28	1,7	1,2	1,1	15	16	12	0,24	0,16	22а	22	0,21	0,15	0,03	40
29	1,8	1,3	0,9	16	15	11	0,22	0,14	22	20а	0,20	0,16	0,03	40
30	1,9	1,1	1,0	17	12	13	0,26	0,16	30	20	0,24	0,26	0,03	40

113

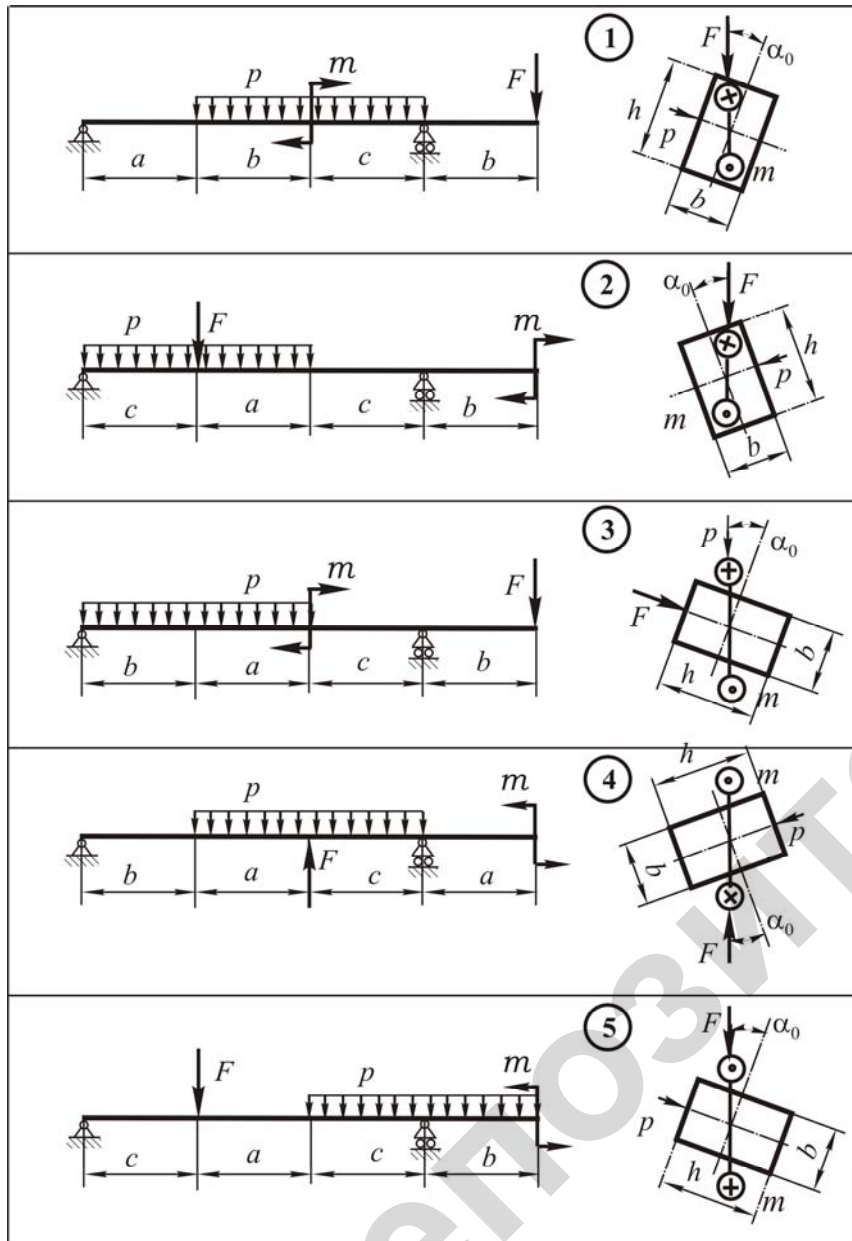


Рис. 4.6. Схемы (1–5) к ИДЗ «Косой изгиб»

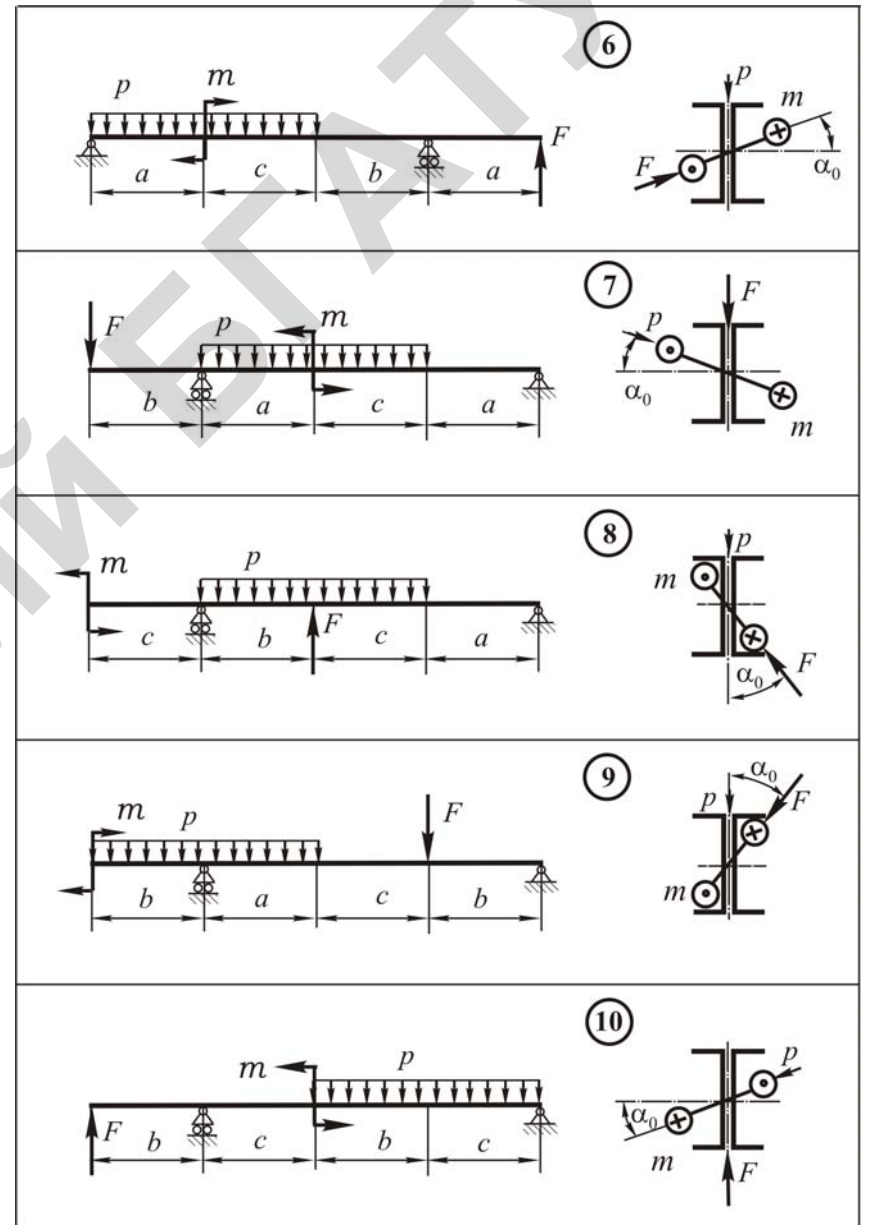


Рис. 4.6. Схемы (6–10) к ИДЗ «Косой изгиб»

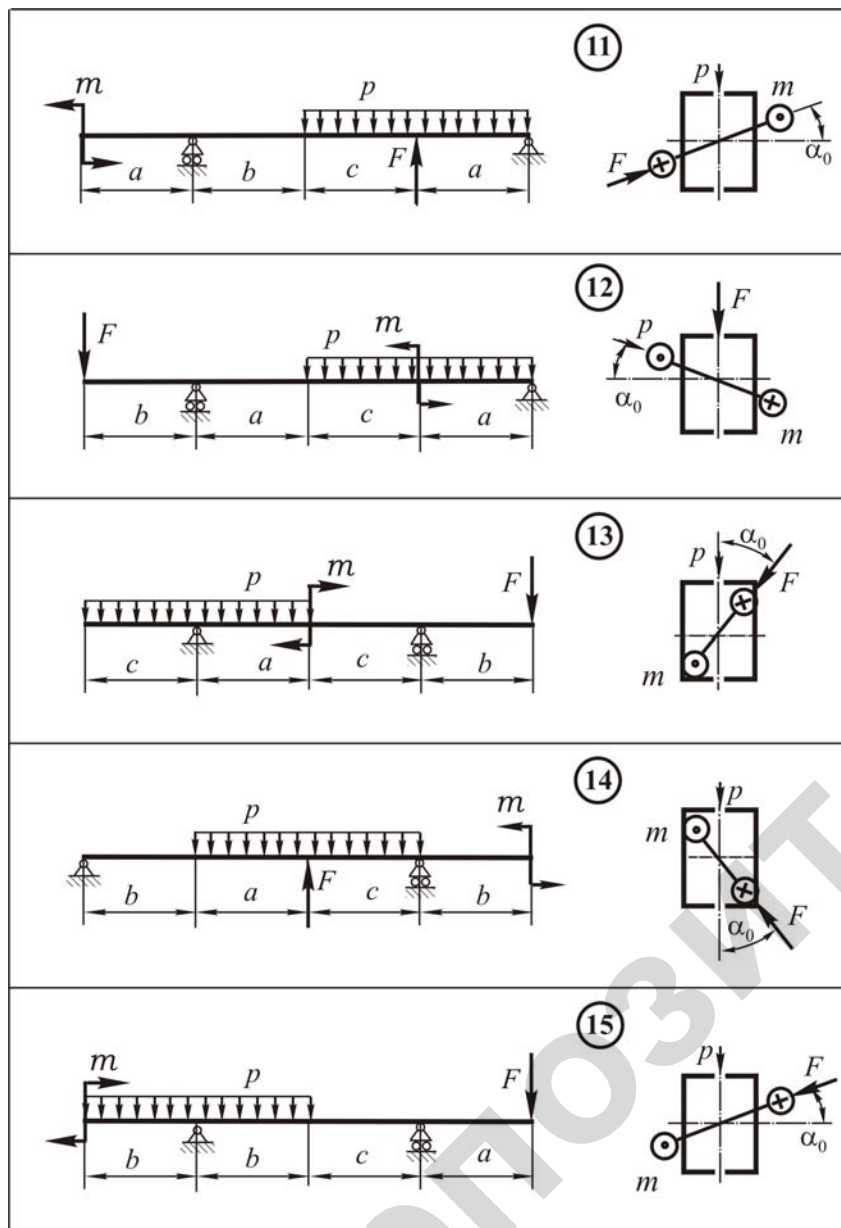


Рис. 4.6. Схемы (11–15) к ИДЗ «Косой изгиб»

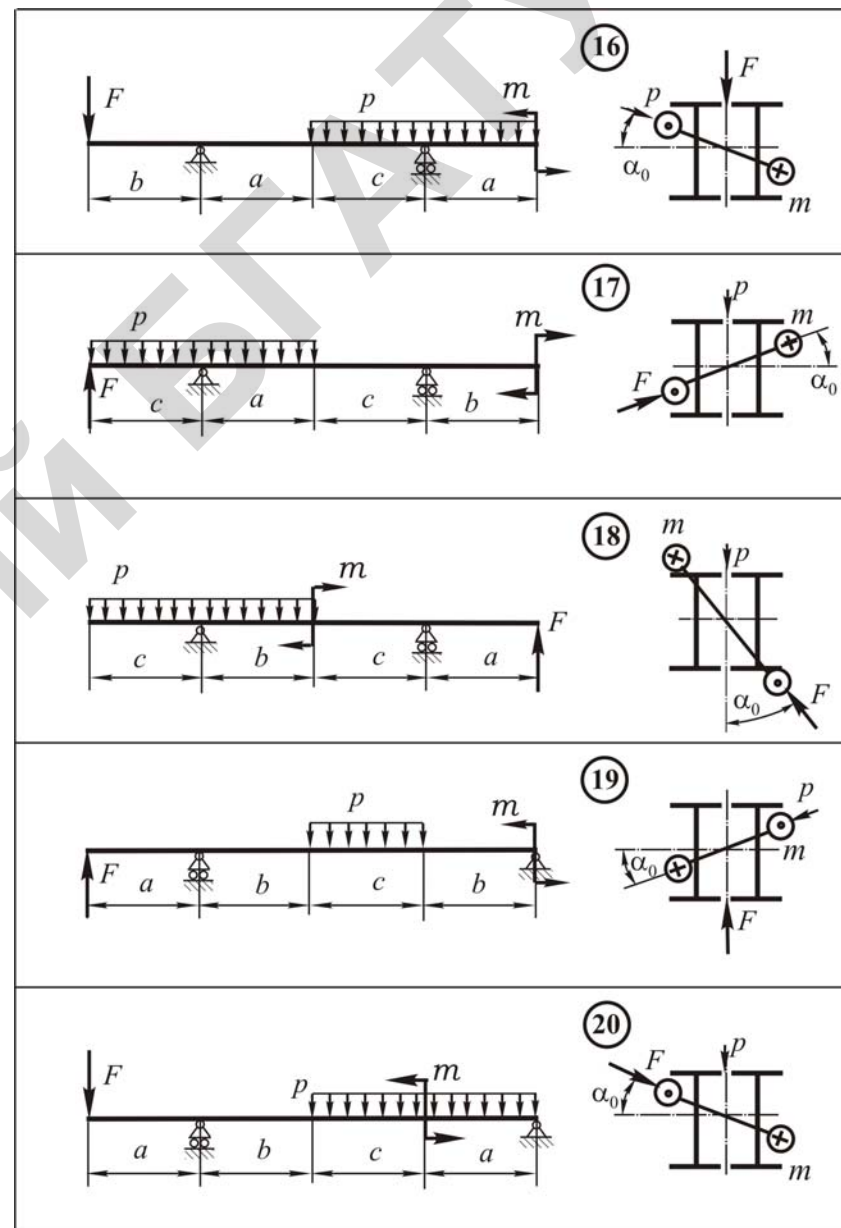


Рис. 4.6. Схемы (16–20) к ИДЗ «Косой изгиб»

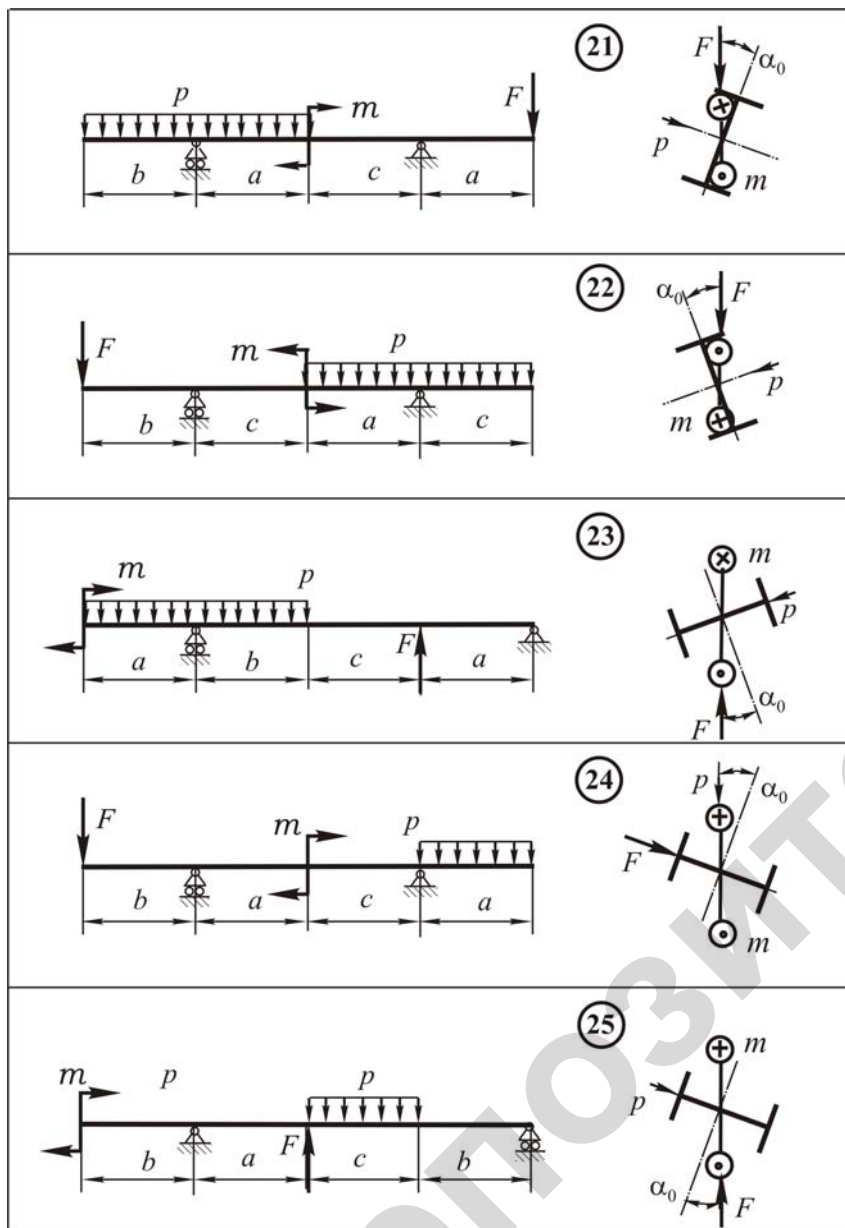


Рис. 4.6. Схемы (21–25) к ИДЗ «Косой изгиб»

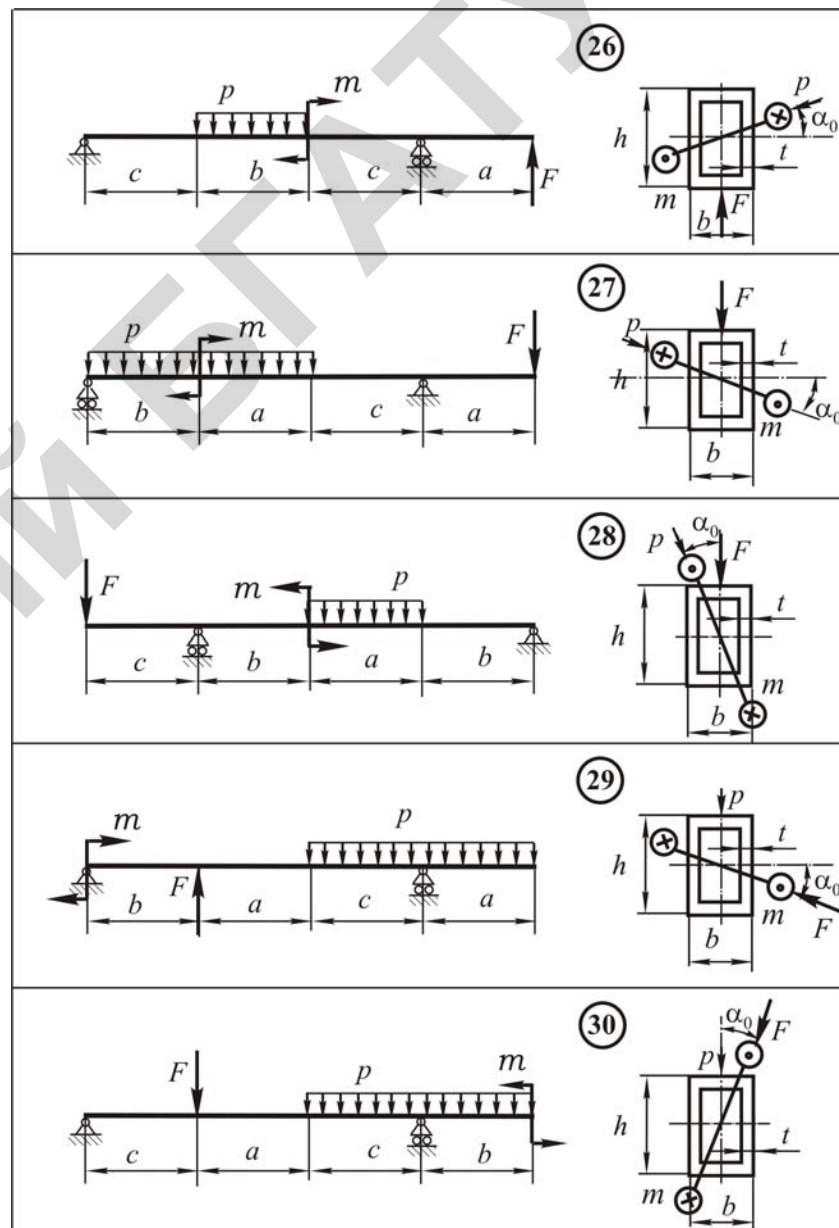


Рис. 4.6. Схемы (26–30) к ИДЗ «Косой изгиб»

4.3. Методические указания для выполнения ИДЗ «Косой изгиб»

1. Вычертить в масштабе схему балки, оставляя под ней место для других схем и эпюр внутренних силовых факторов.
2. Провести и обозначить в поперечном сечении балки главные центральные оси инерции z и y , ось x совместить с осью балки.
3. Составить расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в главной центральной плоскости $yoх$.
4. Построить эпюры изгибающих моментов относительно оси z (M_z).
5. Составить расчетную схему балки нагруженной внешними силами в главной центральной плоскости zox .
6. Построить эпюру изгибающих моментов относительно оси y (M_y).
7. Определить положение опасного сечения балки (опасное сечение – поперечное сечение, в котором находится опасная точка балки, т. е. точка, в которой действует максимальное нормальное напряжение σ_{\max}).
8. В опасном сечении балки провести нейтральную ось и установить положение опасных точек.
9. Определить нормальные напряжения в опасных точках.
10. Определить нормальные напряжения в выступающих угловых точках опасного сечения балки.
11. Построить эпюры нормальных напряжений по сторонам опасного сечения балки.

4.4. Пример выполнения ИДЗ «Косой изгиб»

Балка прямоугольного поперечного сечения ($h \times b = 0,3 \times 0,2$ м) нагружена сосредоточенной силой F , равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p и моментом в виде пары сил m (рис. 4.7). Определить положение опасного сечения балки, провести в нем нейтральную ось, найти нормальные напряжения в опасных точках, а также в выступающих угловых точках опасного сечения и построить эпюры нормальных напряжений по сторонам этого сечения.

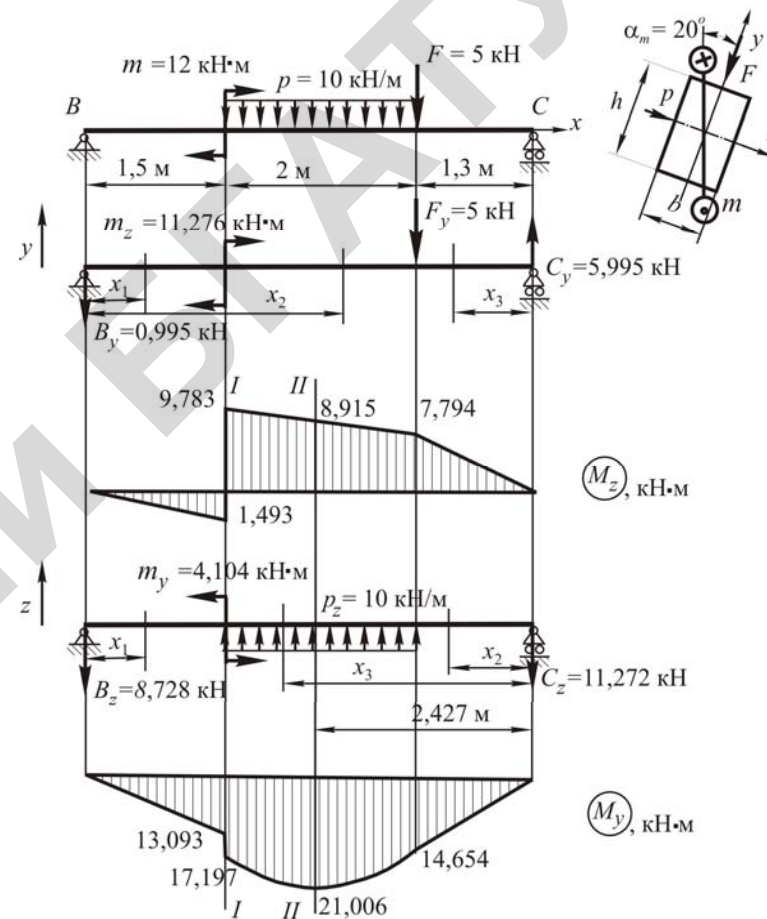


Рис. 4.7. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов балки

Решение. Проведем для поперечных сечений балки главные центральные оси инерции y, z ; ось x совместим с осью балки (рис. 4.7).

Спроецируем силы, действующие на балку, в главную центральную плоскость инерции $yoх$:

$$F_y = F = 5 \text{ кН};$$

$$m_z = m \cos \alpha_m = 12 \cos 20^\circ = 11,276 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составляем расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в плоскости yx (рис. 4.7). Для нахождения неизвестных реакций опор B_y и C_y используем уравнения равновесия. Составляющая реакции B_x в шарнире B равна нулю, так как все силы, действующие на балку, перпендикулярны оси x :

$$\Sigma m_c (F_i) = -B_y \cdot 4,8 + m_z - F_y \cdot 1,3 = 0;$$

$$\Sigma m_B (F_i) = -C_y \cdot 4,8 + m_z + F_y \cdot 3,5 = 0.$$

Решая уравнения равновесия, находим реакции опор:

$$B_y = \frac{m_z - F_y \cdot 1,3}{4,8} = \frac{11,276 - 5 \cdot 1,3}{4,8} = 0,995 \text{ кН},$$

$$C_y = \frac{m_z + F_y \cdot 3,5}{4,8} = \frac{11,276 + 5 \cdot 3,5}{4,8} = 5,995 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим не использованное в этой задаче уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось y и подставим их значения:

$$\Sigma F_y = -B_y + C_y - F_y = -0,995 + 5,995 - 5 = 0.$$

В результате расчета получили $\Sigma F_y = 0$, что указывает на правильность определения реакций опор.

Разбиваем балку на три расчетных участка и находим значения изгибающего момента M_z .

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 1,5$ м):

$$M_{x_1} = -B_y x_1;$$

$$x_1 = 0: \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,5 \text{ м}: \quad M_{x_1} = -0,995 \cdot 1,5 = -1,493 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II ($1,5 \text{ м} \leq x_2 \leq 3,5$ м):

$$M_{x_2} = -B_y x_2 + m;$$

$$x_2 = 1,5 \text{ м}: \quad M_{x_2} = -0,995 \cdot 1,5 + 11,276 = 9,783 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 3,5 \text{ м}: \quad M_{x_2} = -0,995 \cdot 3,5 + 11,276 = 7,794 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 1,3$ м):

$$M_{x_3} = C_y x_2;$$

$$x_3 = 0: \quad M_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1,3 \text{ м}: \quad M_{x_3} = 5,995 \cdot 1,3 = 7,794 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям изгибающего момента строим эпюру M_z (см. рис. 4.7).

Спроецируем силы, действующие на балку, в главную центральную плоскость инерции zx :

$$p_z = p = 10 \text{ кН/м};$$

$$m_y = m \sin \alpha_m = 12 \cdot \sin 20^\circ = 4,104 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составляем расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в плоскости zx (рис. 4.7). Для нахождения неизвестных реакций опор B_z и C_z составим уравнения равновесия. Составляющая реакции B_x в шарнире B равна нулю, так как силы, действующие на балку, перпендикулярны оси x .

$$\Sigma m_c (F_i) = -B_z \cdot 4,8 - m_y + p_z \cdot 2 \cdot 2,3 = 0;$$

$$\Sigma m_B (F_i) = -C_z \cdot 4,8 + m_y + p_z \cdot 2 \cdot 2,5 = 0.$$

Решая уравнения равновесия, находим реакции опор:

$$B_z = \frac{-m_y + p_z \cdot 2 \cdot 2,3}{4,8} = \frac{-4,104 + 10 \cdot 2 \cdot 2,3}{4,8} = 8,728 \text{ кН},$$

$$C_z = \frac{m_y + p_z \cdot 2 \cdot 2,5}{4,8} = \frac{4,104 + 10 \cdot 2 \cdot 2,5}{4,8} = 11,272 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим не использованное в этой задаче уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось z и подставим их значения:

$$\Sigma F_z = -B_z + p_z \cdot 2 - C_z = -8,728 + 20 - 11,272 = 0.$$

В результате расчета получили $\Sigma F_z = 0$, что указывает на правильность определения реакций опор.

Разбиваем балку на три расчетных участка и находим значения изгибающего момента M_y .

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 1,5$ м):

$$M_{x_1} = -B_z x_1;$$

$$x_1 = 0: \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,5 \text{ м}: \quad M_{x_1} = -8,728 \cdot 1,5 = -13,093 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II ($0 \leq x_2 \leq 1,3$ м):

$$M_{x_2} = -C_z x_2;$$

$$x_2 = 0: \quad M_{x_2} = 0;$$

$$x_2 = 1,3 \text{ м}: \quad M_{x_2} = -11,272 \cdot 1,3 = 14,654 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III: ($1,3 \text{ м} \leq x_3 \leq 3,3 \text{ м}$):

$$M_{x_3} = -C_z x_3 + p_z \frac{(x_3 - 1,3)^2}{2};$$

$$x_3 = 1,3 \text{ м}: \quad M_{x_3} = -11,272 \cdot 1,3 = 14,654 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 3,3 \text{ м}: \quad M_{x_3} = -11,272 \cdot 3,3 + 10 \frac{(3,3 - 1,3)^2}{2} = 17,197 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На третьем расчетном участке изгибающий момент M_y имеет экстремальное значение. Для его определения составим и приравняем к нулю выражение поперечной силы Q_{x_3} , а также найдем расстояние x_3 до сечения с экстремальным значением изгибающего момента:

$$Q_{x_3} = C_z - p_z (x_3 - 1,3) = 0,$$

откуда

$$x_3 = \frac{11,272 + 1,3 \cdot 10}{10} = 2,427 \text{ м}.$$

Подставив полученное значение x_3 в уравнение моментов M_{x_3} , найдем величину искомого экстремального момента:

$$M_{x_3} = -11,272 \cdot 2,427 + 10 \frac{(2,427 - 1,3)^2}{2} = -21,006 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям изгибающего момента строим эпюру M_y (см. рис. 4.7).

Находим положение опасного сечения балки. Как показывают эпюры изгибающих моментов M_z и M_y , опасное сечение может располагаться на расстоянии 1,5 м от точки B ($M_{z \max} = 9,783 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_y = 17,197 \text{ кН}\cdot\text{м}$) или на расстоянии 2,427 м от точки C ($M_z = 5,995 \cdot 2,427 - 5(2,427 - 1,3) = 8,915 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_{y \max} = 21,006 \text{ кН}\cdot\text{м}$). Определяем величину максимального напряжения в этих сечениях по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y},$$

где W_z и W_y – соответственно, момент сопротивления поперечного сечения относительно осей z и y :

$$W_z = \frac{b h^2}{6} = \frac{0,2 \cdot 0,3^2}{6} = 0,003 \text{ м}^3;$$

$$W_y = \frac{h b^2}{6} = \frac{0,3 \cdot 0,2^2}{6} = 0,002 \text{ м}^3.$$

Тогда

$$\sigma_{\max I} = \frac{9,783 \cdot 10^3}{0,003} + \frac{17,197 \cdot 10^3}{0,002} = 119 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 11,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max II} = \frac{8,915 \cdot 10^3}{0,003} + \frac{21,006 \cdot 10^3}{0,002} = 135 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 13,5 \text{ МПа}.$$

Значит, опасным сечением является сечение II, так как $\sigma_{\max II} > \sigma_{\max I}$. Определяем в опасном сечении балки положение нейтральной оси:

$$\text{tg} \beta = -\text{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} = -\frac{M_y}{M_z} \frac{12 b h^3}{12 h b^3} = -\frac{21,006}{8,915} \frac{0,3^2}{0,2^2} = 5,302.$$

$$\beta = \arctg \beta = \arctg 5,302 = 79,3^\circ .$$

Откладываем от оси z против хода часовой стрелки угол β и проводим нейтральную ось (рис. 4.8).

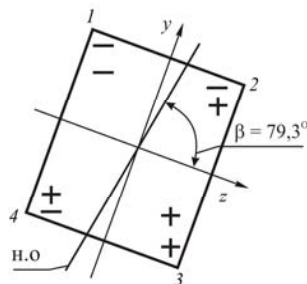


Рис. 4.8. Нейтральная ось и знаки напряжений в опасном сечении балки

Опасными точками будут точки опасного поперечного сечения, наиболее удаленные от нейтральной оси, т. е. точки 1 и 3. Исходя из растяжения или сжатия, обусловленных изгибающими моментами M_z и M_y , расставляем для каждого квадранта опасного поперечного сечения знаки напряжений (рис. 4.8), где верхние знаки – для напряжений от M_z , нижние знаки – для напряжений от M_y . Найдём нормальные напряжения в опасных точках, а также в выступающих угловых точках опасного сечения по формуле

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} .$$

$$\sigma_{(1)} = -\frac{8,915 \cdot 10^3}{0,003} - \frac{21,006 \cdot 10^3}{0,002} = -135 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -13,5 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{8,915 \cdot 10^3}{0,003} + \frac{21,006 \cdot 10^3}{0,002} = 135 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 13,5 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_{(2)} = -\frac{8,915 \cdot 10^3}{0,003} + \frac{21,006 \cdot 10^3}{0,002} = 75,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 7,53 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_{(4)} = \frac{8,915 \cdot 10^3}{0,003} - \frac{21,006 \cdot 10^3}{0,002} = -75,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -7,53 \text{ МПа} .$$

По найденным значениям строим эпюры нормальных напряжений по сторонам опасного сечения балки (рис. 4.9).

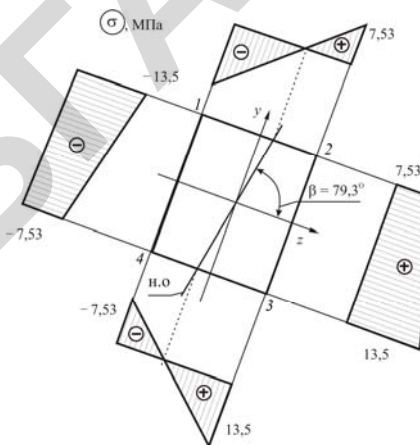


Рис. 4.9. Эпюры нормальных напряжений по сторонам опасного сечения балки

Из эпюр видно (см. рис. 4.9), что в точках, в которых нейтральная ось пересекает контур сечения, нормальные напряжения равны нулю.

5. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Литература: [1, с. 424–434; 2, с. 345–351].

Изгиб с кручением вала круглого поперечного сечения. Определение эквивалентного момента с использованием 3-й и 4-й теорий прочности, опасное сечение вала. Нахождение диаметра вала сплошного и кольцевого сечений.

5.1. Внутренние силовые факторы

Изгибом с кручением называется вид сложного нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникают изгибающий и крутящий моменты. С сочетанием изгиба и кручения брус круглого поперечного сечения наиболее часто приходится встречаться при расчете валов. Значительно реже встречаются случаи изгиба с кручением брус круглого сечения. Изгиб с кручением испытывают валы различных редукторов, механизмов, коробок перемены передач и т. д. Валы обычно устанавливаются в подшипниковых опорах, которые позволяют им вращаться относительно оси. На валах устанавливаются звенья различных передач (шкивы, зубчатые колеса, звездочки, полумуфты и т. д.). При передаче мощности от одного звена другому вал нагружается силами, которые всегда вызывают изгиб и кручение вала.

Представим вал (рис. 5.1, а), который опирается на подшипники В и С и вращается с частотой n (мин^{-1}). На вал насажены шкив ременной передачи диаметром $D_{\text{ш}}$ и звездочка цепной передачи диаметром D_3 , через которые перекинуты, соответственно, ремень и цепь. Мощность P подводится к валу ременной передачей и снимается цепной передачей. Предположим, что вал вращается в подшипниках без трения; собственной массой вала, шкива, звездочки

пренебрегаем. Натяжение рабочей ветви ремня обозначим t_p , холодной ветви – t_x , рабочей ветви цепи – F_t . Направим ось y поперечного сечения вала вертикально, а ось z – горизонтально.

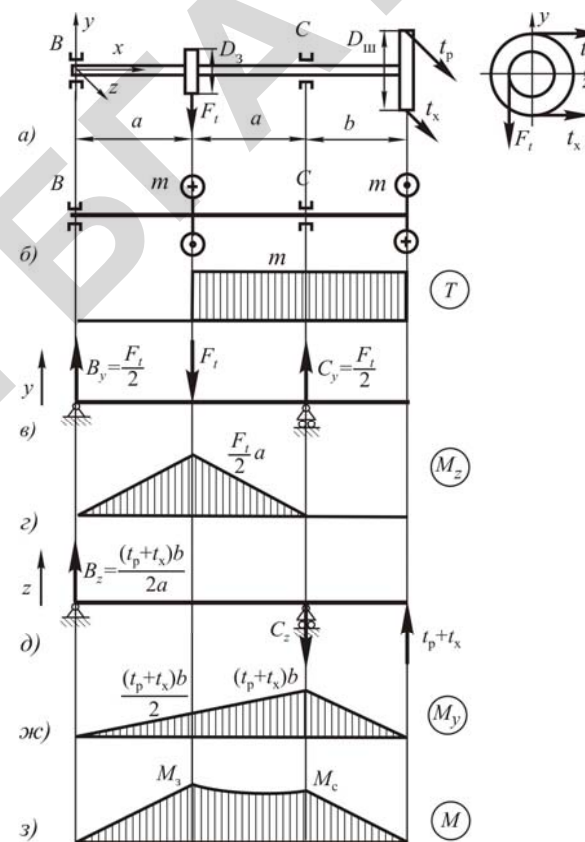


Рис. 5.1. Расчетные схемы и эпюры крутящих и изгибающих моментов для вала испытывающего изгиб с кручением

Скручивающие моменты, которыми нагружается вал m , шкив $m_{\text{ш}}$, звездочка m_3 , будут равны:

$$m = m_{\text{ш}} = m_3 = \frac{P}{\omega} = \frac{\pi n}{30}, \quad (5.1)$$

где ω – угловая скорость, с^{-1} .

Силы натяжения ветвей ремня и звездочки представляются в виде:

$$(t_p - t_x) = \frac{2m}{D_{ш}}; \quad (5.2)$$

$$F_t = \frac{2m}{D_3}. \quad (5.3)$$

При этом t_p и t_x определяются через задаваемое соотношение между ними. Для установления внешних силовых факторов, действующих на вал со стороны шкива (рис. 5.2, а), в центре тяжести вала в направлении и против оси z прикладываются силы t_p и t_x , со стороны звездочки (рис. 5.2, б) – в направлении и против оси y прикладывается сила F_t . Тогда перечеркнутые силы (рис. 5.2, а) представят пары сил с моментами $m_p = t_p \frac{D_{ш}}{2}$, $m_x = t_x \frac{D_{ш}}{2}$, $m_3 = F_t \frac{D_3}{2}$ (рис. 5.2, б).

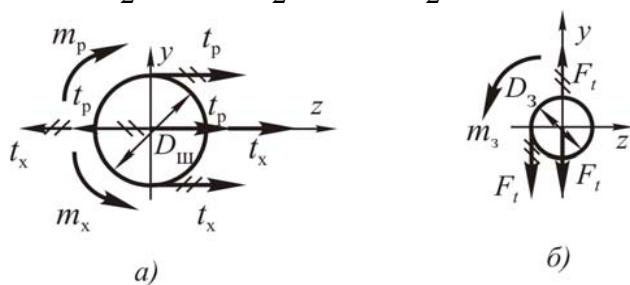


Рис. 5.2. Схема сил, действующих на вал со стороны: а) – шкива, б) – звездочки

В результате вал будет испытывать действие скручивающих моментов $m_{ш} = m_p - m_x = m$, $m_3 = m$ и сосредоточенных сил, приложенных в центре тяжести вала под шкивом $t_p - t_x$, под звездочкой – F_t .

К валу, в сечениях которых расположены звездочка и шкив, прикладываются соответствующие скручивающие моменты (см. рис. 5.1, б) и строится эпюра крутящих моментов T , как и при чистом кручении. (Для рассматриваемого вала она показана на рис. 5.1, в.)

Вал представляется как балка, закрепленная с помощью неподвижного и подвижного шарниров. Силы, действующие на вал, проектируются в плоскость yx (рис. 5.2, в), определяются реакции B_y и

C_y и строится эпюра изгибающих моментов M_z (рис. 5.2, з). Затем силы, действующие на вал, проектируются в плоскость zx (рис. 5.2, д), определяются реакции B_z и C_z и строится эпюра изгибающих моментов M_y (рис. 5.2, ж). С использованием значений M_z , M_y определяется результирующий (полный) изгибающий момент (5.4) в сечениях вала и строится эпюра M (рис. 5.2, з):

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}. \quad (5.4)$$

Эпюра изгибающих моментов M характеризует величину этих моментов в каждом сечении вала. Плоскости действия этих моментов в различных сечениях вала различны, но ординаты эпюры условно для всех сечений совмещены с плоскостью чертежа.

Опасное сечение вала устанавливается с помощью эпюр полных изгибающих моментов M и крутящих моментов T . Если в сечении вала постоянного диаметра с наибольшим изгибающим моментом M_{max} действует и наибольший крутящий момент T_{max} , то это сечение является опасным. Если же наибольший изгибающий момент и наибольший крутящий момент действуют в разных поперечных сечениях, то опасным может оказаться сечение, в котором ни изгибающий момент M , ни крутящий момент T не являются наибольшими. В брусках переменного диаметра опасным может оказаться сечение, в котором действуют значительно меньшие изгибающие и крутящие моменты, чем в других сечениях.

В тех случаях, когда положение опасного сечения невозможно установить непосредственно по эпюрам M и T , необходимо проверить прочность вала в нескольких его сечениях и таким путем устанавливать опасные напряжения.

5.2. Напряжения в поперечных сечениях круглого вала. Условие прочности

После того как установлено положение опасного сечения вала (или намечено несколько сечений, одно из которых может оказаться опасным), необходимо найти в нем положение опасных точек. Для этого рассмотрим напряжения, возникающие в поперечном

сечении бруса, когда в нем одновременно действуют изгибающий момент M и крутящий момент T . След силовой плоскости совместим с осью y , тогда ось z будет нейтральной осью сечения (рис. 5.3, а). В поперечном сечении бруса возникают нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения.

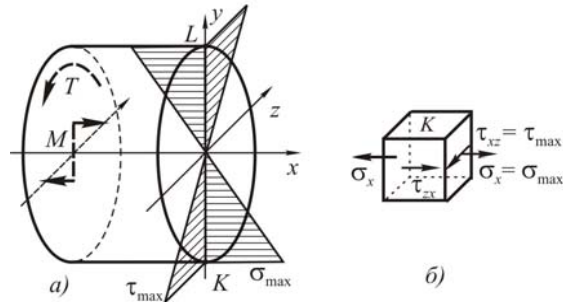


Рис. 5.3. Эпюры нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении вала при изгибе с кручением

Нормальные напряжения определяются по формуле $\sigma = \frac{M}{I_z} y$.

Эпюра этих напряжений показана на рис. 5.3, а. Наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения возникают в точках K и L . Эти напряжения равны $\sigma_x = \frac{M}{W_z}$. Касательные напряжения определяются по формуле $\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho$.

Эпюра этих напряжений показана на рис. 5.3, а. В каждой точке поперечного сечения они направлены по нормали к радиусу, соединяющему эту точку с центром сечения. Наибольшие касательные напряжения возникают в точках, расположенных по периметру сечения; они равны $\tau_{xz} = \frac{T}{W_\rho}$.

Для круглого поперечного сечения $W_\rho = W_z$.

Касательные напряжения от поперечной силы Q в рассматриваемом случае не оказывают существенного влияния на прочность, а в точках K и L они равны нулю. Наибольшее значение они имеют

в центре тяжести сечения, где нормальные напряжения от изгибающего момента M равны нулю. В расчетах касательными напряжениями от поперечной силы пренебрегают, так как наибольшее главное напряжение возникает в точке, где действуют наибольшее нормальное напряжение и наибольшее касательное напряжение от крутящего момента T .

Выделим в окрестности опасной точки K бесконечно малый элемент в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 5.3, б). Так как на поверхности вала напряжений нет, то элемент находится в плоском напряженном состоянии. Обычно валы изготавливают из стали (пластичный материал), поэтому их расчет рекомендуется проводить с использованием третьей или четвертой классических теорий прочности. Величины главных напряжений в точке K , определяют по формуле

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xz}^2}; \quad \sigma_2 = 0. \quad (5.5)$$

Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставляя значения напряжений σ_x и τ_{xz} в (5.5), значения главных напряжений – в условие прочности, по третьей теории получим

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (5.6)$$

или

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{M_{\text{прив III}}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (5.7)$$

где $M_{\text{прив III}} = \sqrt{M^2 + T^2}$ – приведенный момент в сечении вала по третьей теории прочности.

Условие прочности по четвертой теории прочности при $\sigma_2 = 0$ имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma] \quad (5.8)$$

Подставляя значения напряжений σ_x и τ_{xz} в (5.5), значения главных напряжений – в условие прочности, по четвертой теории получим

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (5.9)$$

или

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив IV}}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (5.10)$$

где $M_{\text{прив IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2}$ – приведенный момент в сечении вала по четвертой теории прочности.

Таким образом, эквивалентное напряжение при изгибе с кручением вала равно отношению приведенного момента к осевому моменту сопротивления. Все полученные формулы можно применять и к валам, у которых сечение – кольцо.

5.3. ИДЗ «Определение диаметра вала при изгибе с кручением»

Вал опирается на два подшипника (рис. 5.4) и вращается с частотой n оборотов в минуту. На вал насажены три шкива: один с диаметром D_1 и углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 передает мощность P , два других с диаметрами D_2 и углами наклона ветвей к горизонту α_2 передают мощность $P/2$ каждый. Определить диаметр вала по третьей теории прочности при $[\sigma] = 70$ МПа и принять его значение из стандартного ряда. Исходные данные и схемы – в табл. 5.1 и на рис. 5.4.

Таблица 5.1

Исходные данные к ИДЗ «Определение диаметра вала при изгибе с кручением»

135

№ п/п	P, кВт	n, мин ⁻¹	Размеры, м					α ₁ , градус	α ₂ , градус
			a	b	c	D ₁	D ₂		
1	7	120	1,3	1,0	1,2	0,6	0,5	12	20
2	8	140	1,0	0,9	1,3	0,5	0,4	14	18
3	6	100	0,5	1,0	1,2	0,4	0,3	16	45
4	10	190	1,0	0,7	1,3	0,6	0,4	18	42
5	14	280	0,5	1,1	1,0	0,7	0,4	20	40
6	9	130	0,6	1,0	0,8	0,6	0,5	22	38
7	15	380	0,7	1,2	0,6	0,8	0,6	24	36
8	11	160	0,8	1,1	0,7	0,7	0,6	25	35
9	16	430	0,9	1,2	0,8	0,8	0,5	28	34
10	12	210	0,7	1,1	0,9	0,8	0,7	30	32
11	8	100	1,1	0,7	1,0	0,8	0,6	10	45
12	10	180	1,2	0,9	1,1	0,8	0,7	12	42
13	12	280	1,3	0,8	1,2	0,7	0,6	15	40
14	15	350	1,4	0,7	1,3	0,8	0,5	18	36
15	17	450	0,5	1,0	1,4	0,8	0,6	20	35

Окончание табл. 5.1

136

№ п/п	P, кВт	n, мин ⁻¹	Размеры, м					α ₁ , градус	α ₂ , градус
			a	b	c	D ₁	D ₂		
16	9	170	0,6	1,5	1,2	0,6	0,5	24	30
17	7	100	0,7	1,4	1,6	0,5	0,3	25	28
18	11	160	0,8	1,3	0,7	0,6	0,5	28	25
19	14	300	0,9	1,2	0,8	0,7	0,5	30	22
20	16	360	1,0	1,1	0,8	0,7	0,6	32	20
21	10	220	0,8	1,0	1,2	0,7	0,5	35	18
22	13	240	1,0	0,9	0,6	0,8	0,4	38	16
23	11	220	0,7	1,1	1,0	0,7	0,4	40	15
24	10	250	1,0	0,7	0,6	0,6	0,5	42	12
25	14	380	0,6	1,2	1,0	0,6	0,4	45	10
26	9	230	0,6	1,2	0,8	0,7	0,5	48	12
27	15	400	0,7	1,0	0,8	0,7	0,6	50	15
28	11	360	0,6	1,1	0,8	0,6	0,5	52	18
29	13	370	0,7	1,2	0,9	0,8	0,5	54	20
30	12	410	0,7	0,8	0,9	0,8	0,7	55	25

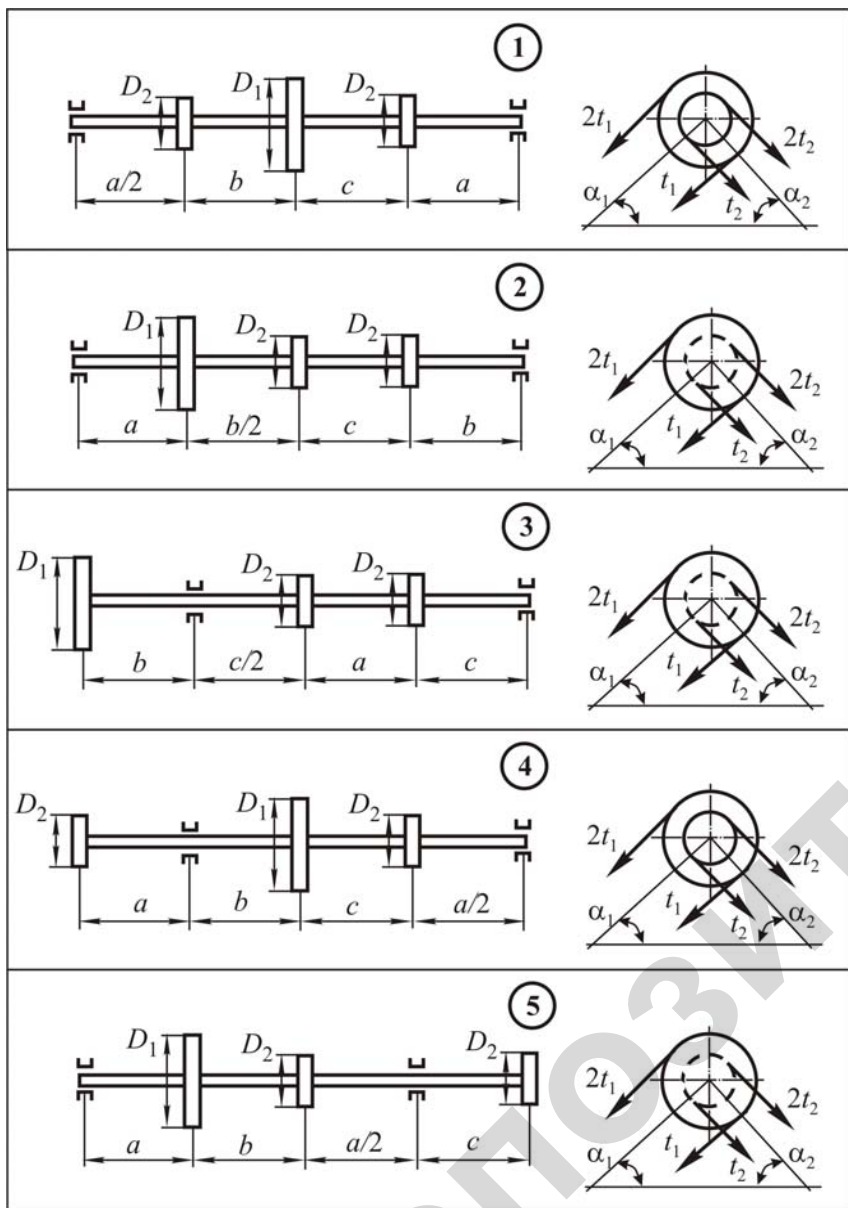


Рис. 5.4. Схемы (1–5) к ИДЗ «Определение диаметра вала при изгибе с кручением»

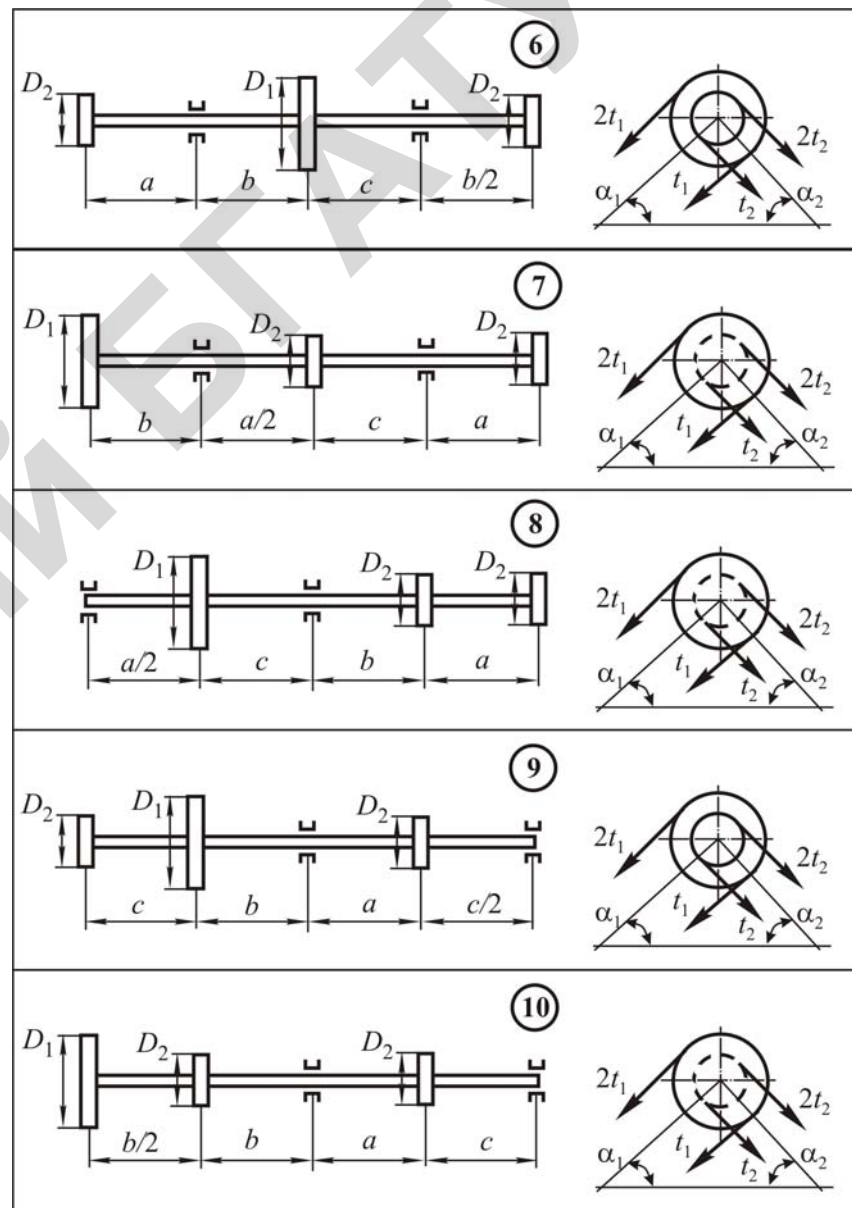


Рис. 5.4. Схемы (6–10) к ИДЗ «Определение диаметра вала при изгибе с кручением»

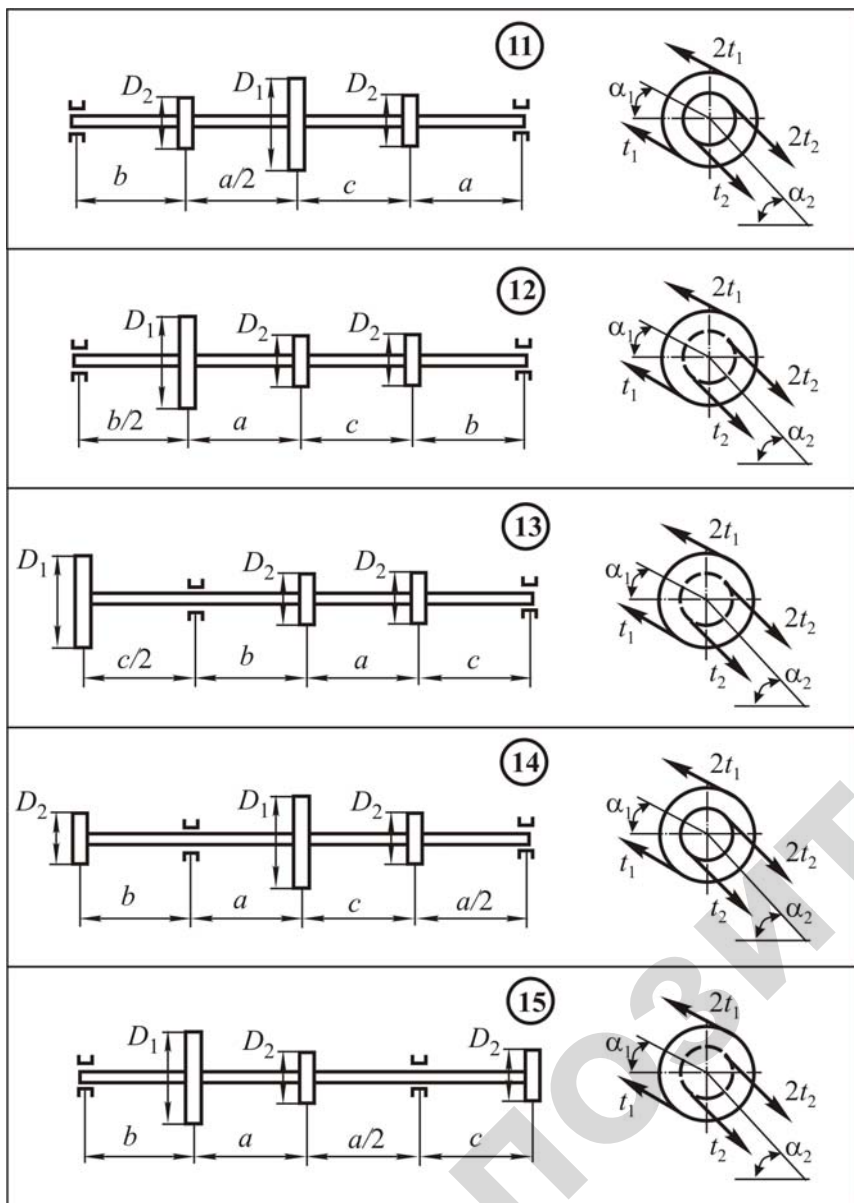


Рис. 5.4. Схемы (11–15) к ИДЗ «Определение диаметра вала при изгибе с кручением»

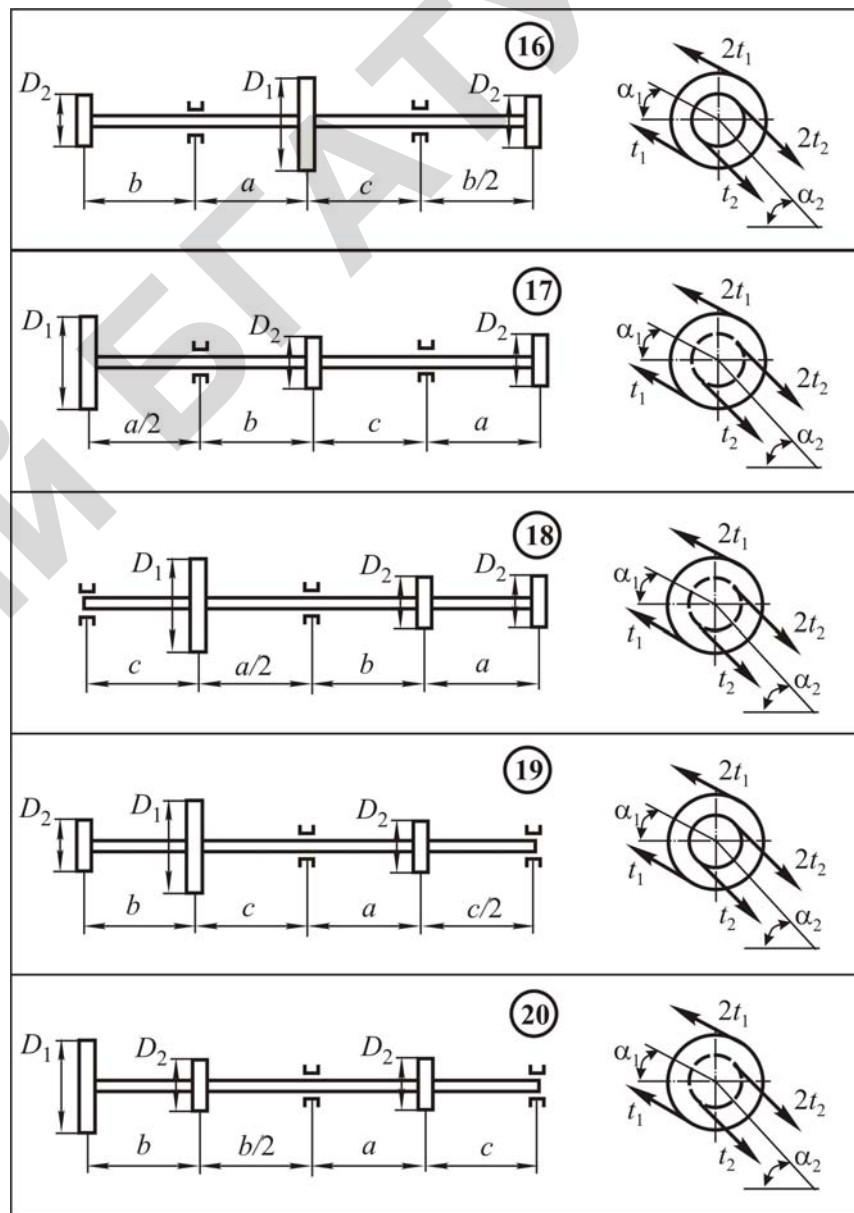


Рис. 5.4. Схемы (16–20) к ИДЗ «Определение диаметра вала при изгибе с кручением»

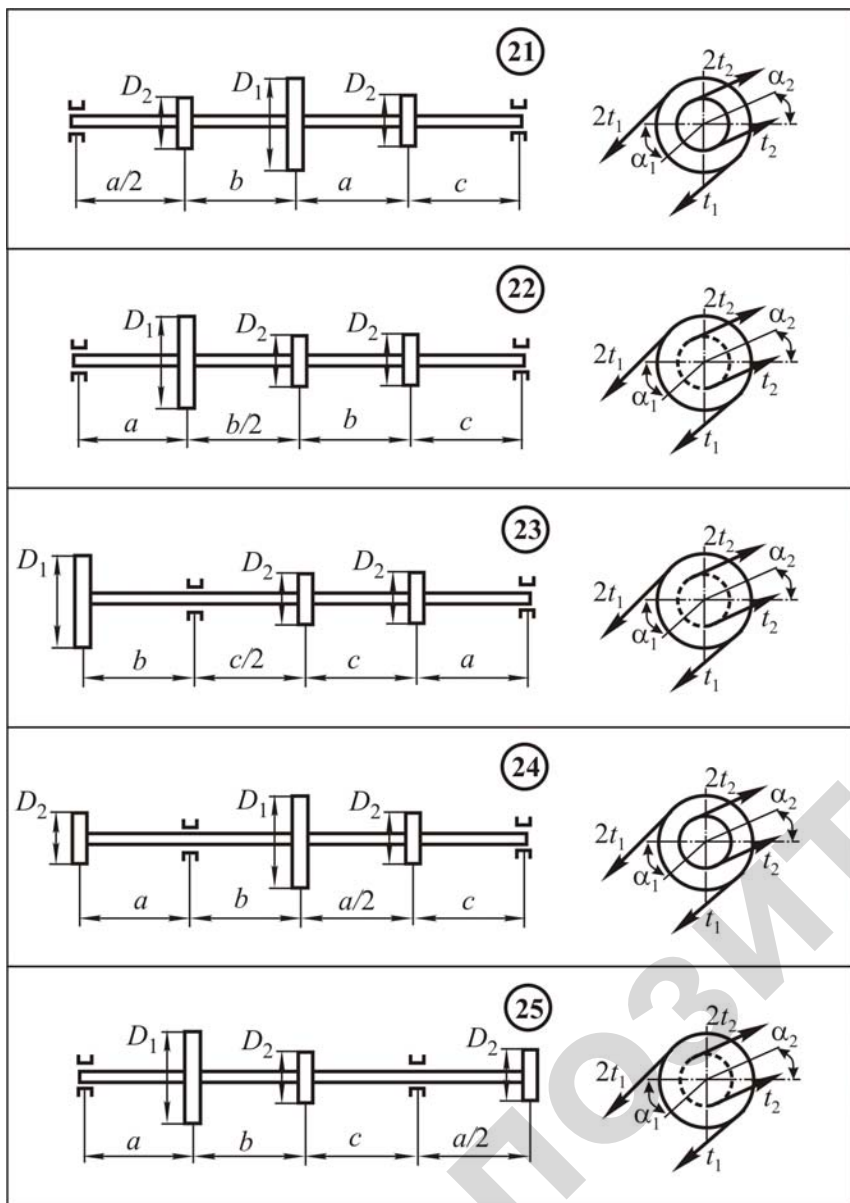


Рис. 5.4. Схемы (21–25) к ИДЗ «Определение диаметра вала при изгибе с кручением»

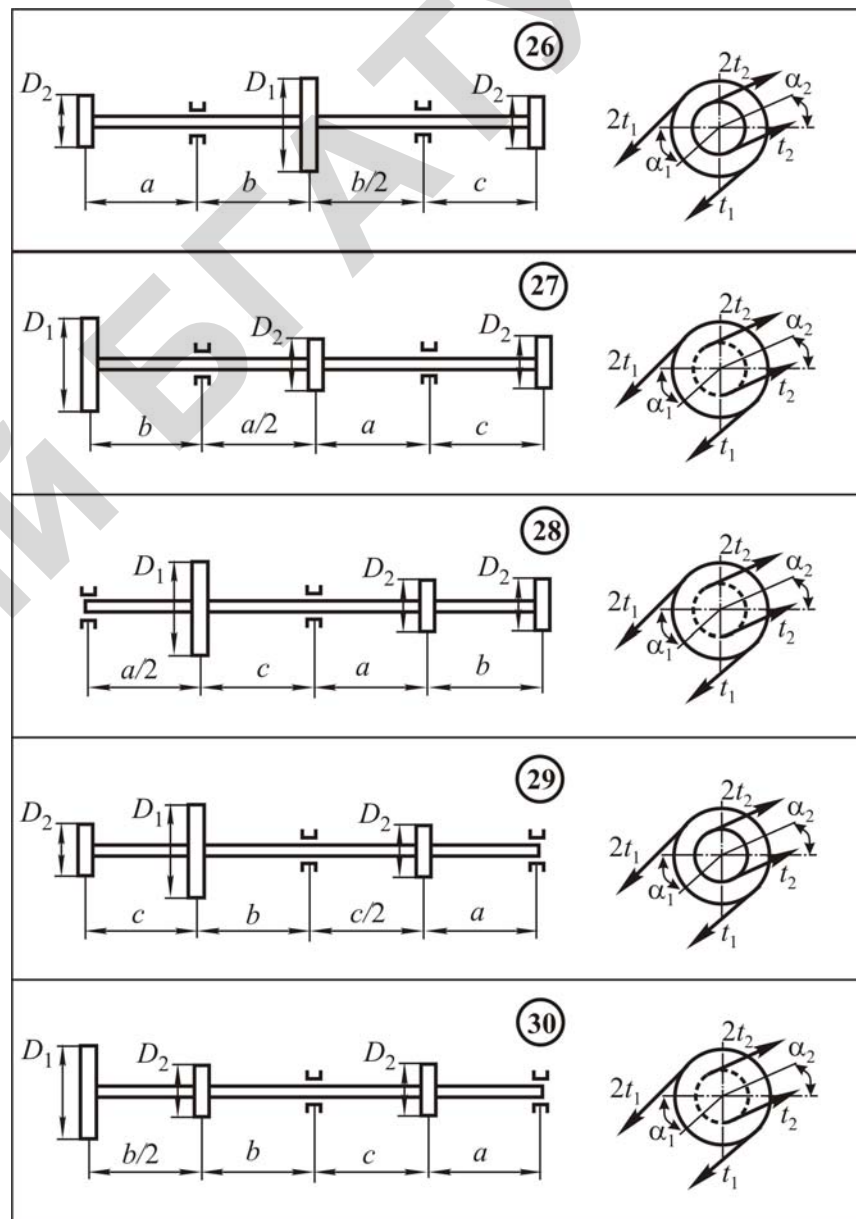


Рис. 5.4. Схемы (26–30) к ИДЗ «Определение диаметра вала при изгибе с кручением»

5.4. Методические указания для выполнения ИДЗ «Определение диаметра вала при изгибе с кручением»

1. Выполнить в масштабе расчетную схему вала с расположенными на нем шкивами.
2. Провести и обозначить в поперечном сечении вала главные центральные оси инерции z и y , ось x совместить с осью вала.
3. По заданным P и n определить скручивающие моменты, приложенные к шкивам.
4. Построить эпюру крутящих моментов (T).
5. Определить окружные усилия t , действующие на шкивы, по найденным скручивающим моментам и заданным диаметрам шкивов.
6. Определить усилия, действующие на вал со стороны шкивов, принимая их равными трем окружным усилиям t .
7. Составить расчетную схему вала, нагруженного внешними силами в главной центральной плоскости yx .
8. Построить эпюру изгибающих моментов вала относительно оси z (M_z).
9. Составить расчетную схему вала, нагруженного внешними силами в главной центральной плоскости zx .
10. Построить эпюру изгибающих моментов вала относительно оси y (M_y).
11. Построить эпюру полных изгибающих моментов M (для каждого поперечного сечения вала имеется своя плоскость действия полного изгибающего момента, но для круглого сечения можно совместить плоскость M для всех поперечных сечений и построить эпюру M в плоскости чертежа).
12. Определить опасное сечение вала, используя эпюры M , T и третью классическую теорию прочности.
13. Определить диаметр вала и принять его значение из стандартного ряда.

5.5. Пример выполнения ИДЗ «Определение диаметра вала при изгибе с кручением»

Определить диаметр вала (рис. 5.5, *a*) по третьей теории прочности, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 80$ МПа. Ведущий шкив $D_1 = 0,8$ м

передает мощность $P_1 = 15$ кВт, ведомые шкивы $D_2 = 0,6$ м и $D_3 = 1,0$ м передают мощности $P_2 = 5$ кВт и $P_3 = 10$ кВт соответственно, при частоте вращения $n = 1200$ мин⁻¹. Ветви ремней параллельны и образуют с горизонтом: угол $\alpha_1 = 45^\circ$ на ведущем шкиве и угол $\alpha_2 = 60^\circ$ на ведомых шкивах. Натяжение ведущих ветвей ремней в 2 раза больше натяжения ведомых ветвей.

Решение. Определяем скручивающие моменты, приложенные к шкивам. Скручивающий момент, приложенный к первому шкиву (D_1), равен

$$m_1 = \frac{30P_1}{\pi n} = \frac{30 \cdot 15 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1200} = 119,4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Скручивающий момент, приложенный ко второму шкиву (D_2), равен

$$m_2 = \frac{30P_2}{\pi n} = \frac{30 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1200} = 39,8 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Скручивающий момент, приложенный к третьему шкиву (D_3), равен

$$m_3 = \frac{30P_3}{\pi n} = \frac{30 \cdot 10 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1200} = 79,6 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного скручивающими моментами (рис. 5.5, *б*) и строим эпюру крутящих моментов T (рис. 5.5, *в*).

Определяем окружные усилия t_1 , t_2 и t_3 , действующие на шкивы. Скручивающий момент на шкиве равен

$$m = (2t - t) \frac{D}{2}.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{2m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 119,4}{0,8} = 298,6 \text{ Н};$$

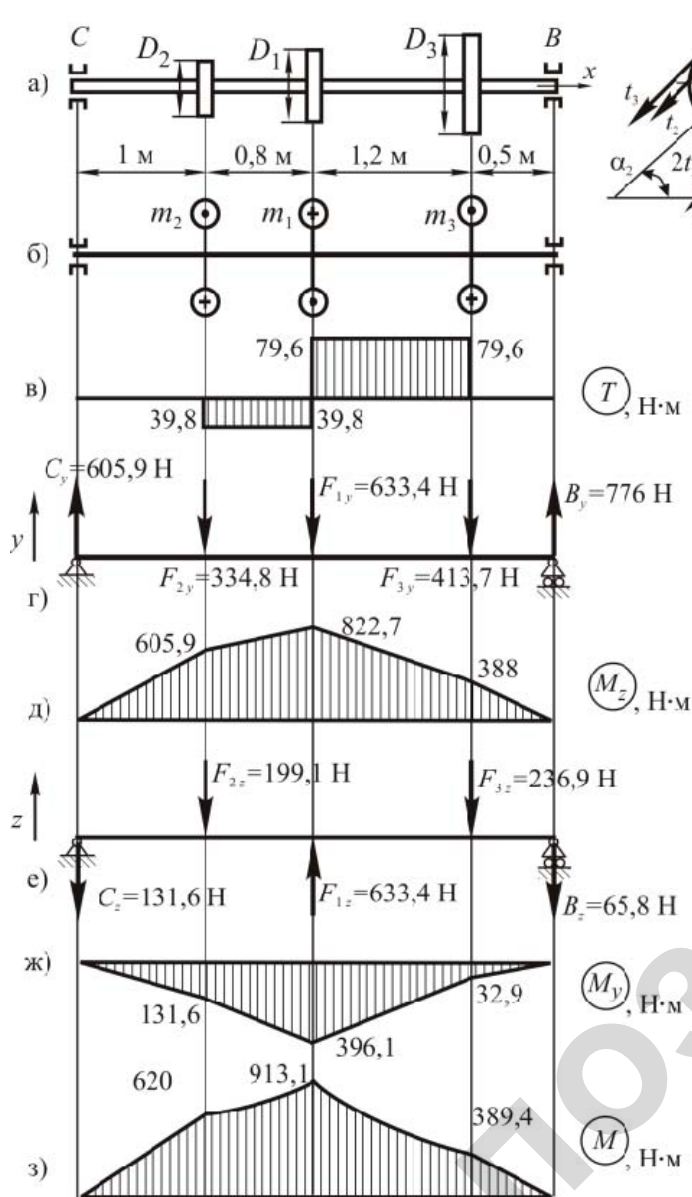


Рис. 5.5. Расчетные схемы нагружения, эпюры крутящих и изгибающих моментов в сечениях вала

$$t_2 = \frac{2m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 39,8}{0,6} = 132,7 \text{ Н};$$

$$t_3 = \frac{2m_3}{D_3} = \frac{2 \cdot 79,6}{1} = 159,2 \text{ .}$$

Определяем усилия, действующие на вал:

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot 298,6 = 896 \text{ Н};$$

$$F_2 = 3 \cdot t_2 = 3 \cdot 132,7 = 398 \text{ Н};$$

$$F_3 = 3 \cdot t_3 = 3 \cdot 159,2 = 478 \text{ Н}.$$

Проектируем силы, действующие на вал, в плоскость ux :

$$F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1 = 896 \cdot \sin 45^\circ = 633,4 \text{ Н};$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2 = 398 \cdot \sin 60^\circ = 344,8 \text{ Н};$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \alpha_3 = 478 \cdot \sin 60^\circ = 413,7 \text{ Н}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного силами в плоскости ux (рис. 5.5, z), и определяем реакции в опорах:

$$\sum M_B = F_{1y} \cdot 1,7 + F_{2y} \cdot 2,5 + F_{3y} \cdot 0,5 - C_y \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_B = 633,4 \cdot 1,7 + 334,8 \cdot 2,5 + 413,7 \cdot 0,5 - C_y \cdot 3,5 = 0.$$

Откуда $C_y = 605,9 \text{ Н}$;

$$\sum M_C = F_{1y} \cdot 1,8 + F_{2y} \cdot 1,0 + F_{3y} \cdot 3,0 - B_y \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_C = 633,4 \cdot 1,8 + 334,8 \cdot 1,0 + 413,7 \cdot 3,0 - B_y \cdot 3,5 = 0.$$

Откуда $B_y = 776 \text{ Н}$.

Проверка:

$$\sum F_{iy} = -F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} + B_y + C_y = 0;$$

$$\sum F_{iy} = -633,4 - 334,8 - 413,7 + 605,9 + 776 = 0.$$

Реакции в опорах B_y и C_y определены верно.

Строим эпюру изгибающих моментов M_z (рис. 5.5, д). Проецируем силы, действующие на вал, в плоскость zx :

$$F_{1z} = F_1 \cos \alpha_1 = 896 \cdot \cos 45^\circ = 633,4 \text{ Н};$$

$$F_{2z} = F_2 \cos \alpha_2 = 398 \cdot \cos 60^\circ = 199,1 \text{ Н};$$

$$F_{3z} = F_3 \cos \alpha_3 = 478 \cdot \cos 60^\circ = 236,9 \text{ Н}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного силами в плоскости zx (рис. 5.5, е), и определяем реакции в опорах:

$$\sum M_B = F_{1z} \cdot 1,7 - F_{2z} \cdot 2,5 - F_{3z} \cdot 0,5 - C_z \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_B = 633,4 \cdot 1,7 - 199,1 \cdot 2,5 - 236,9 \cdot 0,5 - C_z \cdot 3,5 = 0.$$

Откуда $C_z = 131,6 \text{ Н}$;

$$\sum M_C = F_{1z} \cdot 1,8 - F_{2z} \cdot 1,0 - F_{3z} \cdot 3,0 + B_z \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_C = 633,4 \cdot 1,8 - 199,1 \cdot 1,0 - 236,9 \cdot 3,0 - B_z \cdot 3,5 = 0.$$

Отсюда $B_z = 65,84 \text{ Н}$.

Проверка:

$$\sum F_{iz} = F_{1z} - F_{2z} - F_{3z} - B_z - C_z = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 633,4 - 199,1 - 236,9 - 65,8 - 131,6 = 0.$$

Реакции в опорах B_z и C_z определены верно. Строим эпюру изгибающих моментов M_y (рис. 5.5, ж).

Строим эпюру полных изгибающих моментов в сечениях вала (рис. 5.5, з), используя формулу:

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Определяем положение опасного сечения вала. Из эпюр M и T следует, что опасное сечение вала находится в месте крепления первого шкива (D_1).

Из формулы (5.9) осевой момент сопротивления можно выразить:

$$W_z = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{[\sigma]} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Отсюда выражается диаметр вала и определяется его значение:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{M^2 + T^2}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{(79,6 \cdot 10^3)^2 + (913,1 \cdot 10^3)^2}}{3,14 \cdot 80}} = 48,8 \text{ мм} \approx 50 \text{ мм}.$$

6. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Литература: [1, с. 474–529; 2, с. 405–427].

Статически неопределимые системы. Степень статической неопределимости системы. Метод сил. Основная и эквивалентная системы. Канонические уравнения метода сил. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил. Особенности расчета симметричных систем. Определение перемещений в статически неопределимых системах.

6.1. Основные понятия

Статически неопределимые системы, основные понятия. Степень статической неопределимости, внутренние связи, внешние связи. Метод сил, основная система, эквивалентная система. Канонические уравнения метода сил, коэффициенты канонических уравнений. Статическая проверка, деформационная проверка. Определение размеров поперечного сечения.

Стержневой системой называется любая кинематически неизменяемая конструкция, состоящая из элементов, имеющих форму бруса. Перемещение в таких системах возможно только за счет деформации составляющих ее элементов.

Системы, в которых опорные реакции и внутренние силовые факторы не могут быть определены с помощью уравнений статики и метода сечений, называются статически неопределимыми. Для прочностного расчета таких систем необходимо составить дополнительные уравнения, учитывающие условия деформирования элементов системы, которые называются уравнениями перемещений.

Статически неопределимые системы позволяют за счет более рационального распределения усилий по элементам конструкции

достигать значительной экономии материала. Дополнительные связи увеличивают жесткость конструкции и при нарушении любой связи предохраняют ее от разрушения. Недостатком таких систем является высокая чувствительность к изменению температуры, неточности изготовления отдельных элементов, нарушению расположения опор.

6.2. Степень статической неопределимости

Степенью статической неопределимости системы называется разность между числом наложенных связей и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы.

Для определения числа дополнительных связей с помощью кинематического анализа необходимо вычесть из общего числа степеней свободы системы число внешних опорных и внутренних связей, налагаемых на движение элементов системы.

Число степеней свободы для плоской системы равно

$$H = 3D - C_o - C_v, \quad (6.1)$$

где D – число стержней, образующих систему;

C_v – число внутренних связей;

C_o – число внешних, опорных связей.

Возможны три варианта:

1) $H > 0$ – система кинематически изменяема и не применяется в качестве инженерного сооружения;

2) $H = 0$ – система статически определима;

3) $H < 0$ – система статически неопределима, имеет дополнительные (лишние) связи.

При расчете C_v следует учитывать, что каждый шарнир, соединяющий два элемента, накладывает две внутренние связи. Добавление стержня в шарнирный узел увеличивает число внутренних связей на две (рис. 6.1).

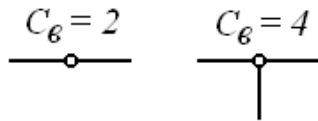


Рис. 6.1. Шарнирное соединение стержней

Неподвижное соединение двух элементов в узле эквивалентно трем внутренним связям (рис. 6.2).

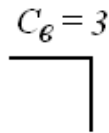


Рис. 6.2. неподвижное соединение стержней

Между стержнями-элементами связей нет (рис. 6.3).

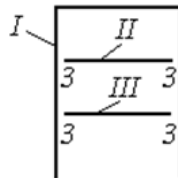


Рис. 6.3. Деление конструкции на элементы

В данном случае система разделяется на три элемента. Первый элемент представляет собой изогнутый стержень. Число внутренних связей равно 12.

В плоской системе шарнирно-подвижная опора налагает одну внешнюю связь, шарнирно-неподвижная опора – две внешние связи, заделка – три.

6.3. Метод сил. Канонические уравнения

Метод сил и метод перемещений – основные методы, используемые для расчета напряженно-деформированных состояний конструкций. Метод сил является наиболее общим методом раскрытия статической

неопределимости стержневых систем. Метод перемещений более удобен при расчете конструкций методом конечных элементов.

Суть метода сил заключается в том, что статически неопределимая система путем освобождения от дополнительных (лишних) связей превращается в статически определимую, геометрически неизменяемую. Действие отброшенных связей заменяется неизвестными силами и моментами. Их величины подбираются так, чтобы перемещения в системе оставались такими же, что и при наличии дополнительных связей. Таким образом, неизвестными при этом способе являются силы, откуда и происходит название «метод сил».

Расчет начинается с выбора основной системы. Основной системой является статически определимая, кинематически неизменяемая система, получаемая из заданной в результате освобождения ее от дополнительных связей. Основная система, к которой приложены все внешние нагрузки и неизвестные силы, заменяющие отброшенные связи, называется эквивалентной.

При рассмотрении перемещений в эквивалентной системе составляются уравнения перемещений, которые называются каноническими уравнениями метода сил. При $H = -2$ они имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Канонические уравнения выражают условия равенства нулю суммарных перемещений по направлению каждой из отброшенных связей. Их можно составить столько, сколько раз статически неопределима система.

Коэффициенты при неизвестных силах представляют собой перемещения в основной системе, вызванные единичными силами, заменяющими неизвестные силы. Перемещения с одинаковыми индексами δ_{11} , δ_{22} называются главными коэффициентами канонических уравнений. Они всегда положительны и не равны нулю. Перемещения с разными индексами называются побочными коэффициентами канонических уравнений и могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Чем больше этих коэффициентов равно нулю, тем рациональнее выбрана основная система. Согласно теореме о взаимности перемещений эти коэффициенты попарно равны, т. е. $\delta_{12} = \delta_{21}$.

Свободные члены уравнений, обозначенные буквой Δ , представляют перемещения в основной системе под действием заданных внешних сил.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений определяются с помощью интегралов Максвелла–Мора или способа Верещагина путем перемножения эпюр. Индексы указывают, какие эпюры должны быть перемножены. После их определения решается система канонических уравнений, и определяются неизвестные силы.

К основной системе с учетом знаков прикладываются найденные силы и заданные нагрузки. Обычным способом (как для статически определимой рамы) строятся суммарные эпюры внутренних силовых факторов M, Q, N .

После построения суммарной эпюры изгибающих моментов проводятся проверки:

1) статическая, которая заключается в проверке равновесия каждого вырезанного из рамы узла под действием внешних сил и внутренних силовых факторов;

2) деформационная, которая заключается в определении перемещений в системе по направлению лишней связей. Так как в эквивалентной системе перемещение по направлению лишней связи должно отсутствовать, то произведение окончательной эпюры изгибающих моментов на каждую из единичных эпюр должно равняться нулю.

Для определения погрешности вычислений необходимо найти суммы положительных и отрицательных членов. Разность этих сумм в процентах от меньшей из них не должна превышать 2 %.

По наибольшему значению изгибающего момента на эпюре находится опасное сечение. Для него по условию прочности при изгибе подбираются размеры поперечного сечения или номер прокатного профиля.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \Rightarrow W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \quad (6.3)$$

В рамах в поперечном сечении кроме изгибающего момента действует продольная сила, которая вызывает в сечении нормальные напряжения. Поэтому необходимо выполнить проверку с учетом продольной силы

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (6.4)$$

где N – продольная сила в опасном сечении.

Если σ_{\max} отличается от $[\sigma]$ не более чем на 5 %, расчет считается законченным.

6.4. Особенности расчета симметричных систем

Симметричной называется конструкция, имеющая плоскость симметрии, относительно которой одна ее часть по форме контура, наложенным связям и характеристикам жесткости представляет зеркальное отображение другой части. Основную систему для симметричных статически неопределимых систем рационально выбирать так, чтобы симметрия сохранялась.

Внешняя нагрузка называется симметричной, если силы, приложенные к правой части конструкции, являются зеркальным отображением сил, приложенных к левой части. Если приложенные к правой части силы по величине являются зеркальным отображением, но противоположны по знаку приложенным к левой части силам, то нагрузка называется кососимметричной (рис. 6.4).

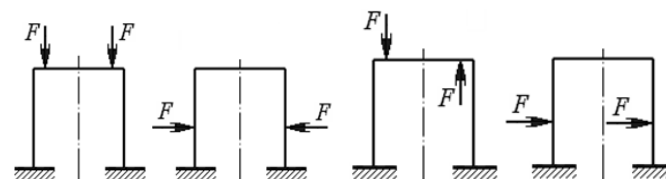


Рис. 6.4. Примеры симметричных и кососимметричных нагрузок

Аналогично внешним нагрузкам классифицируются внутренние силовые факторы. Изгибающие моменты и продольные силы относительно сечения являются симметричными силовыми внутренними факторами, крутящий момент и поперечная сила – кососимметричными внутренними силовыми факторами.

Перемножение кососимметричных эпюр от единичных силовых факторов на симметричные эпюры от единичных факторов дает

нуль. Независимо от характера внешней нагрузки в сечении, расположенном на оси симметрии, коэффициенты канонических уравнений, у которых один индекс принадлежит симметричному, а другой – кососимметричному силовому фактору, будут равны нулю.

Рассмотрим симметричную статически неопределимую раму. Выберем основную систему, разрезав раму по оси симметрии (рис. 6.5). Обозначим: X_1 и X_3 – симметричные силовые факторы (продольная сила и изгибающий момент), X_2 – кососимметричный силовой фактор (поперечная сила).

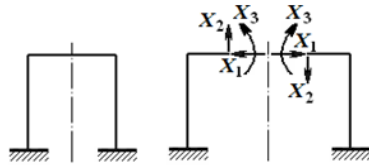


Рис. 6.5. Выбор основной системы для симметричной трижды статически неопределимой рамы

Система канонических уравнений для заданной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0. \end{cases}$$

Эпюры изгибающих моментов от единичных сил, заменяющих неизвестные силы: от X_2 – кососимметричная, от X_1 и X_3 – симметричные (рис. 6.6).

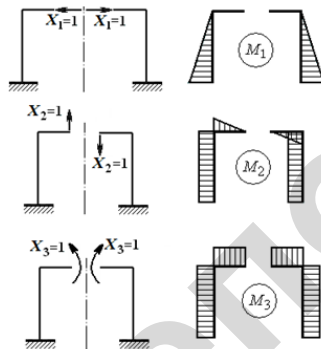


Рис. 6.6. Симметричные и кососимметричная единичные эпюры

При перемные для выполнения ИЗД «Расчет плоской статически неопределимой симметричной и кососимметричной эпюр побочные коэффициенты канонических уравнений согласно теореме о взаимности перемещений будут равны нулю:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0 \text{ и } \delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

Система канонических уравнений значительно упроститься и примет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0. \end{cases}$$

6.5. ИЗД «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

Для заданной плоской статически неопределимой рамы (рис. 6.7) требуется:

1) построить эпюры внутренних силовых факторов;

2) определить положение опасного сечения;

3) подобрать при $[\sigma] = 160$ МПа размеры поперечного сечения:

для схем 1–10 – кольца, если отношение меньшего диаметра к большему 0,7;

для схем 11–20 – прямоугольника, если отношение высоты к ширине 1,5;

для схем 21–30 – трубчатого квадратного, если отношение меньшего размера к большему 0,8.

Исходные данные рамы методом сил – в табл. 6.1 и на рис. 6.8.

Таблица 6.1

Исходные данные к ИДЗ «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

№ п/п	Размеры, м			Нагрузки		
	a	b	c	m , кН·м	F , кН	p , кН/м
1	1,0	1,4	0,8	8	12	10
2	1,2	1,5	1,0	10	6	8
3	1,5	1,2	1,0	12	4	10
4	1,0	0,8	1,5	14	10	16
5	1,6	1,2	1,0	15	8	12
6	1,4	1,0	1,2	6	9	8
7	1,2	1,4	0,8	12	15	10
8	1,0	1,2	1,4	10	8	12
9	1,2	1,0	1,2	8	10	14
10	1,6	0,9	1,4	15	9	10
11	1,5	1,2	0,6	10	6	12
12	1,0	1,4	1,0	6	4	10
13	1,8	0,9	1,4	5	14	8
14	1,0	1,6	1,2	12	10	14
15	1,5	1,2	1,4	8	16	10
16	1,4	1,0	1,5	10	5	15
17	1,0	1,5	1,0	14	7	12
18	1,6	1,0	1,4	12	9	10
19	1,5	1,0	1,2	10	8	14
20	1,8	1,0	1,5	8	12	12
21	1,7	1,5	0,7	5	8	16
22	1,5	1,0	0,8	12	10	8
23	1,0	1,7	1,4	6	5	12
24	1,6	1,5	1,0	10	14	6
25	1,7	1,0	1,5	8	6	10
26	1,8	1,2	1,0	14	12	7
27	1,5	1,5	1,2	5	10	14
28	1,0	1,6	0,8	12	14	10
29	1,7	1,2	1,0	10	12	8
30	1,8	1,0	1,2	6	10	12

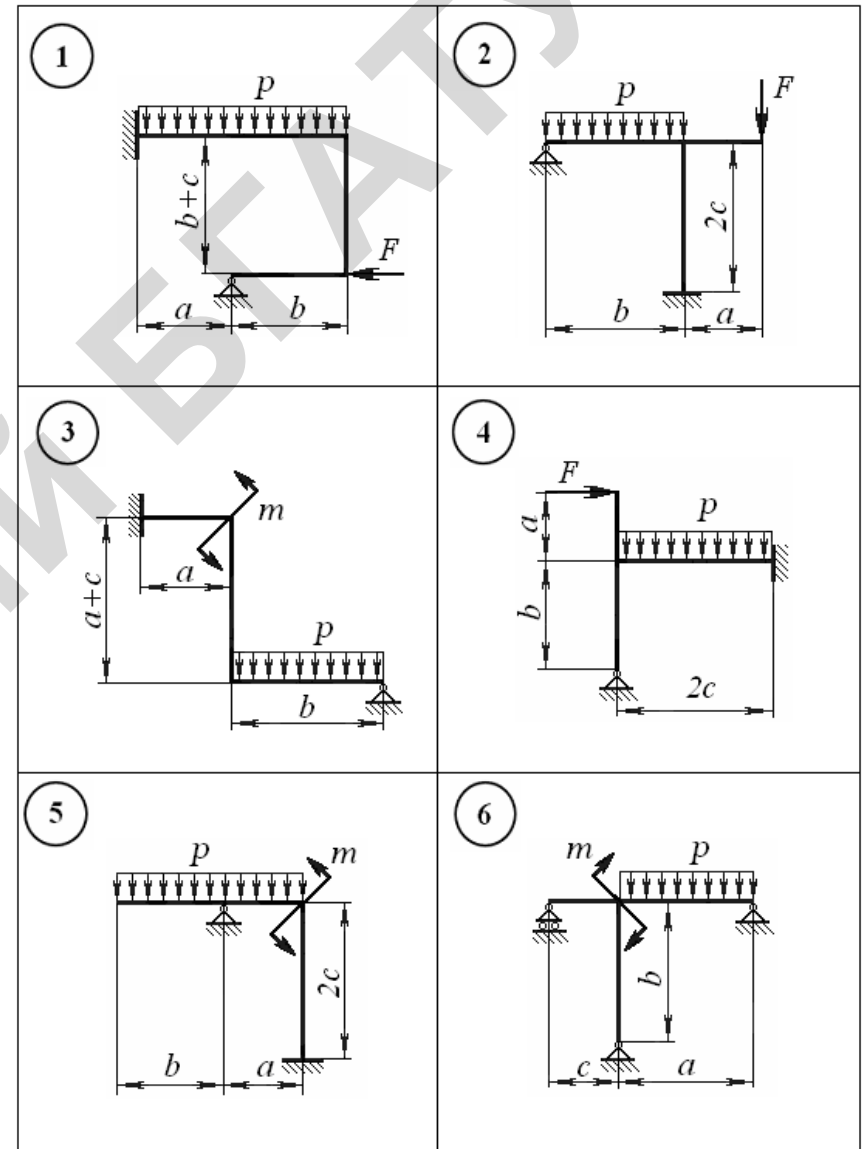


Рис. 6.7. Схемы (1-6) к ИДЗ «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

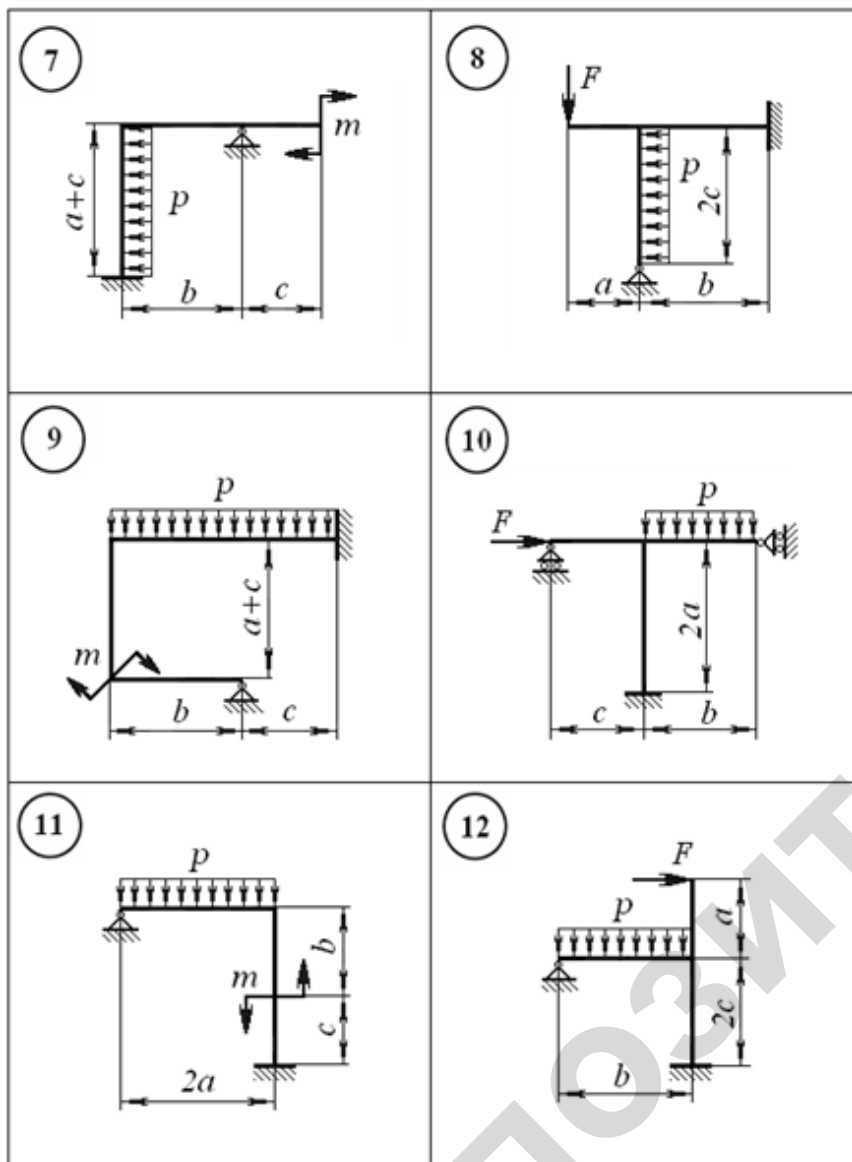


Рис. 6.7. Схемы (7–12) к ИДЗ «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

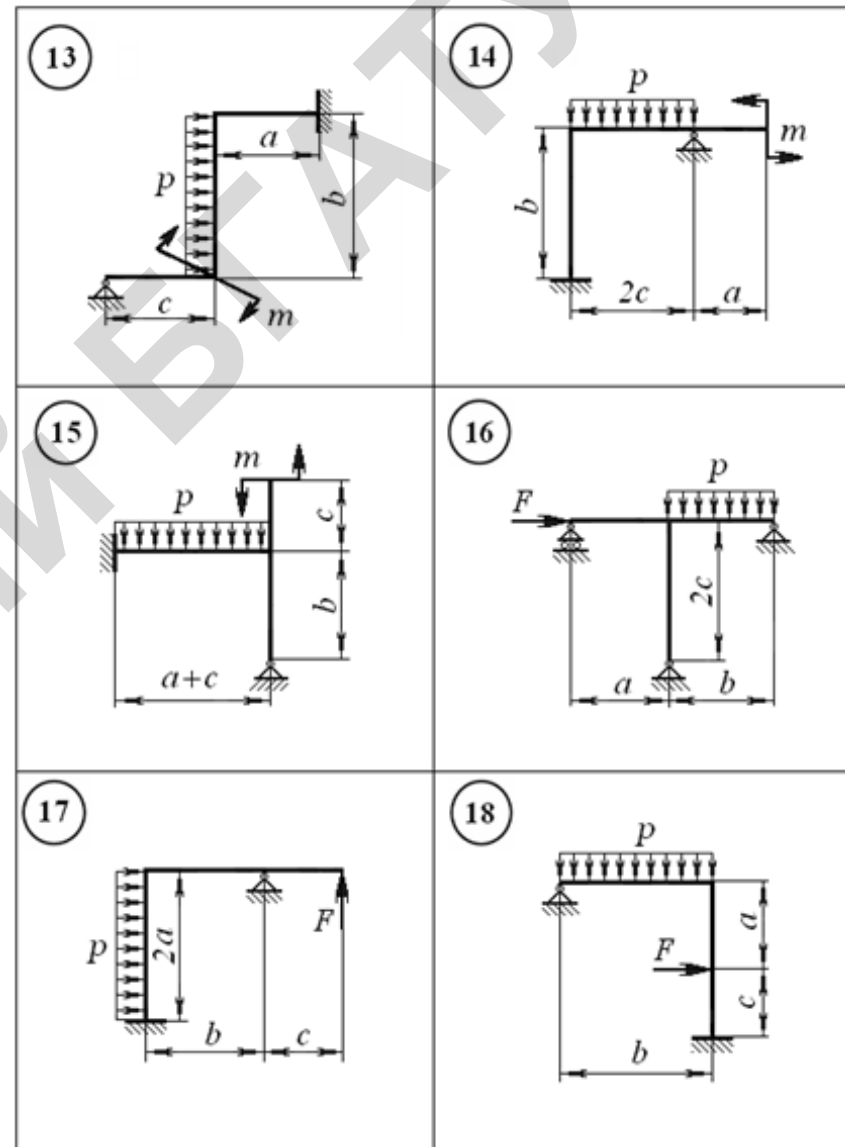


Рис. 6.7. Схемы (13–18) к ИДЗ «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

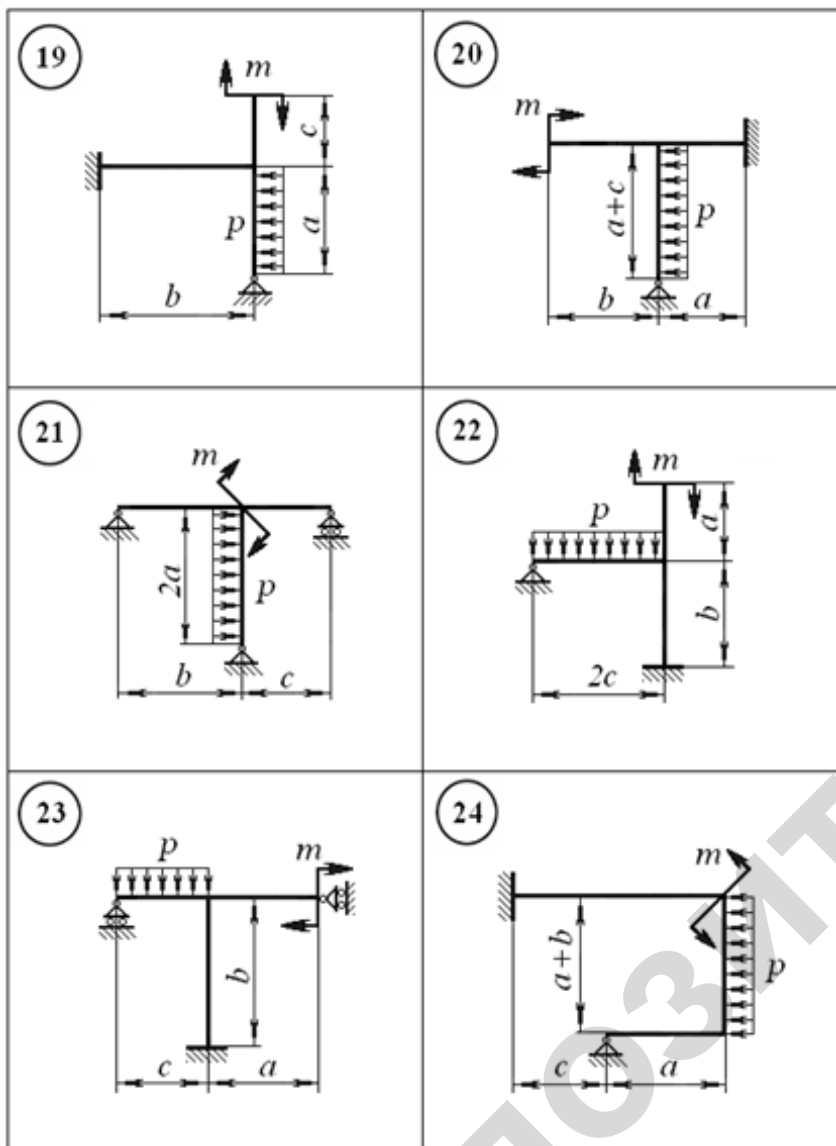


Рис. 6.7. Схемы (19–24) к ИДЗ «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

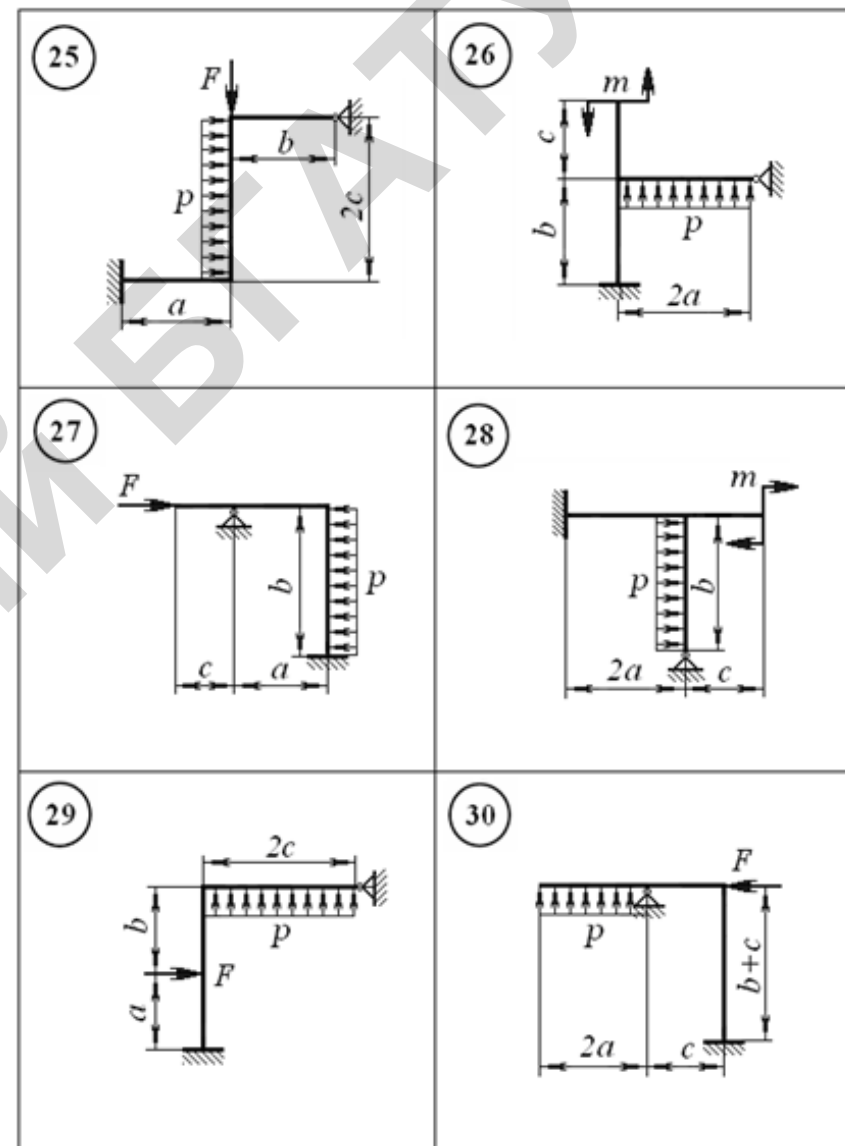


Рис. 6.7. Схемы (25–30) к ИДЗ «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

6.6. Методические указания для выполнения ИДЗ «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

1. Вычертить в масштабе схему рамы, приложить внешние нагрузки, оставить на этой странице место для схем и эпюр.
2. Определить степень статической неопределимости системы.
3. Выбрать основную и эквивалентную системы.
4. Составить канонические уравнения метода сил.
5. Построить в основной системе эпюры изгибающих моментов от действия заданной нагрузки M_F .
6. Построить в основной системе эпюры изгибающих моментов от действия единичных сил, заменяющих неизвестные силы M_1 и M_2 .
7. Определить коэффициенты канонических уравнений путем перемножения эпюр способом Верещагина.
8. Полученные значения коэффициентов подставить в канонические уравнения и определить неизвестные силы.
9. Найденные значения сил приложить к основной системе и построить суммарную эпюру изгибающих моментов.
10. Выполнить статическую и деформационную проверки.
11. Построить эпюры поперечных и продольных сил.
12. Определить положение опасного сечения.
13. Подобрать размеры поперечного сечения.

6.7. Пример выполнения ИДЗ «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

Для заданной рамы (рис. 6.8) построить эпюры внутренних силовых факторов и подобрать размеры поперечного сечения прямоугольника, если отношение высоты к ширине $h/b = 2$. Принять $[\sigma] = 160$ МПа, $a = 1$ м, $b = 1,4$ м, $c = 0,8$ м, $F = 8$ кН, $p = 10$ кН/м.

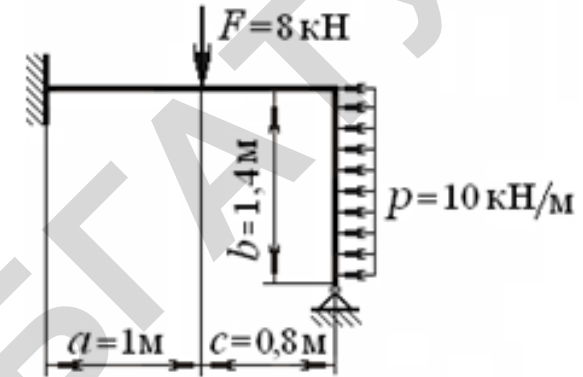


Рис. 6.8. Расчетная схема рамы

Решение. 1. Вычерчиваем в масштабе схему рамы и прикладываем к ней внешние нагрузки (рис. 6.8).

2. Система состоит из одного элемента – изогнутого стержня, поэтому внутренние связи отсутствуют. В заделке возникают три опорные реакции, в шарнирно-неподвижной опоре – две. Определяем степень статической неопределимости:

$$H = 3D - C_0 - C_B = 3 \cdot 1 - 5 - 0 = -2.$$

Следовательно, система дважды статически неопределимая. В ней можно отбросить две дополнительные связи, обозначив их X_1 и X_2 . Для нее можно составить два канонических уравнения, построить две единичные эпюры.

3. Выбираем основную и эквивалентную системы (рис. 6.9).

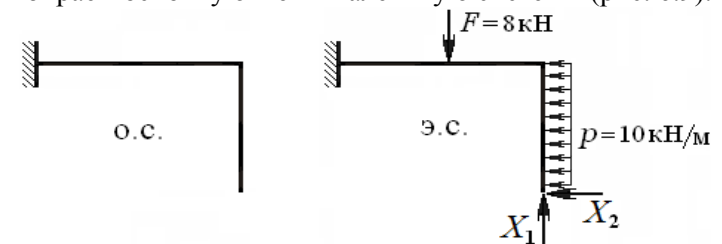


Рис. 6.9. Основная и эквивалентная системы

4. Составляем канонические уравнения метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

5. Прикладываем к основной системе заданные нагрузки (рис. 6.10)

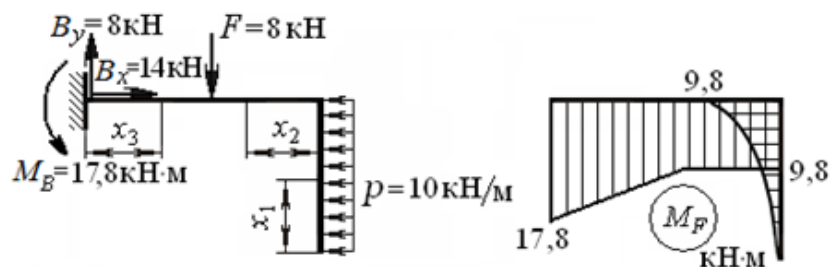


Рис. 6.10. Схема для построения грузовой эпюры и грузовая

и определяем опорные реакции с помощью уравнений статики:

$$\sum F_x = 0; \quad B_x - p \cdot 1,4 = 0; \quad B_x = 14 \text{ кН.}$$

$$\sum F_y = 0; \quad B_y - F = 0; \quad B_y = 8 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad M_B - F \cdot 1 - p \cdot 1,4 \cdot 0,7 = 0;$$

$$M_B = 8 + 10 \cdot 1,4 \cdot 0,7 = 17,8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Разбиваем раму на участки и записываем уравнения изгибающих моментов на каждом из них:

I участок: $0 \leq x_1 \leq 1,4 \text{ м.}$

$$M_{x_1} = -\frac{px_1^2}{2};$$

$$x_1 = 0: \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,4 \text{ м:} \quad M_{x_1} = -\frac{10 \cdot 1,4^2}{2} = -9,8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

II участок: $0 \leq x_2 \leq 0,8 \text{ м.}$

$$M_{x_2} = -p \cdot 1,4 \cdot 0,7 = -9,8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

III участок: $0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м.}$

$$M_{x_3} = -M_B + B_y x_3;$$

$$x_3 = 0: \quad M_{x_3} = -17,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 1 \text{ м:} \quad M_{x_3} = -17,8 + 8 \cdot 1 = -9,8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

По найденным значениям изгибающих моментов строим грузовую эпюру M_F (рис. 6.10).

6. Прикладываем к основной системе силу $X_1 = 1$ и строим единичную эпюру M_1 (рис. 6.11).

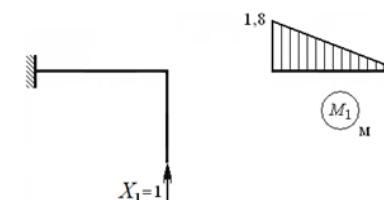


Рис. 6.11. Схема для построения единичной эпюры и единичная эпюра M_1

Прикладываем к основной системе силу $X_2 = 1$ и строим единичную эпюру M_2 (рис. 6.12).

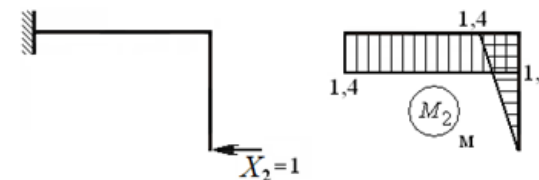


Рис. 6.12. Схема для построения единичной эпюры и единичная эпюра M_2

7. Определяем коэффициенты канонических уравнений путем перемножения эпюр способом Верещагина (на рис. 6.13 показаны единичные и грузовая эпюры, разделенные на простейшие фигуры).

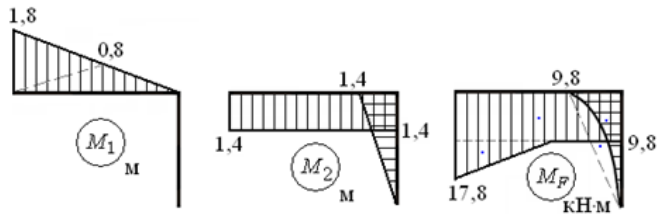


Рис. 6.13. Единичные и грузовая эпюры

Численные значения определяем с точностью три знака после запятой:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_Z} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 1,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,8 \right) = \frac{1,994}{EI_Z};$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_Z} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 1,8 \cdot 1,4 \right) = -\frac{2,268}{EI_Z};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_Z} \left(-9,8 \cdot 1,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,8 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,8 + \frac{1}{3} \cdot 0,8 \right) \right) = -\frac{21,744}{EI_Z};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI_Z} \left(\frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 - \frac{10 \cdot 1,4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \times \right. \\ \left. \times 1,4 + 9,8 \cdot 1,8 \cdot 1,4 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1,4 \right) = \frac{35,098}{EI_Z}.$$

Можно провести проверку правильности вычисления коэффициентов канонических уравнений. Для этого нужно построить в основной системе суммарную единичную эпюру моментов M_S (рис. 6.14): и умножить ее саму на себя:

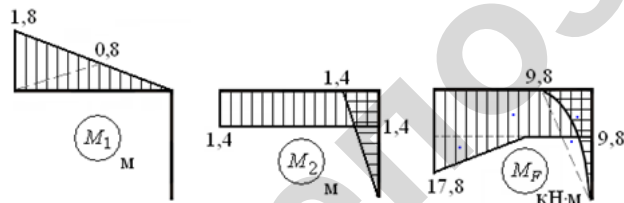


Рис. 6.14. Единичные эпюры

$$\delta_{SS} = \frac{1}{EI_Z} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 + \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 1,8 \left(\frac{2}{3} \cdot 0,4 - \frac{1}{3} \cdot 1,4 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 1,8 \left(\frac{2}{3} \cdot 1,4 - \frac{1}{3} \cdot 0,4 \right) \right) = \frac{1,851}{EI_Z}.$$

Результат перемножения должен быть равен сумме коэффициентов при неизвестных всех членов в канонических уравнениях. Просуммировав коэффициенты всех членов уравнений, получим ту же величину:

$$\delta = \delta + \delta + \delta + \delta = \delta + 2 \cdot \delta + \delta = \\ = \frac{1,944}{EI} - 2 \frac{2,268}{EI} + \frac{4,443}{EI} = \frac{1,851}{EI}.$$

При перемножении грузовой эпюры на суммарную единичную (рис. 6.15) должна быть получена сумма свободных членов канонических уравнений:

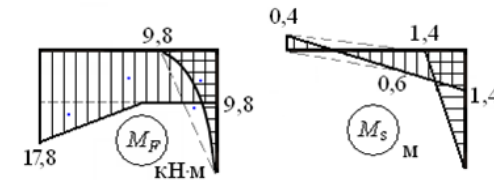


Рис. 6.15. Грузовая и суммарная единичная эпюры

$$\Delta_{SF} = \frac{1}{EI_Z} \left(\frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 - \frac{10 \cdot 1,4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,4 + 9,8 \cdot 1,8 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{2} \cdot 1,4 - \frac{1}{2} \cdot 0,4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,6 - \frac{2}{3} \cdot 0,4 \right) \right) = \\ = \frac{1}{EI_Z} (6,403 - 1,601 + 8,82 - 0,267) = \frac{13,355}{EI_Z};$$

$$\Delta = \Delta + \Delta = -\frac{21,743}{EI} + \frac{35,098}{EI} = \frac{13,355}{EI}.$$

Следовательно, коэффициенты канонических уравнений метода сил определены верно.

8. Подставляем полученные значения в канонические уравнения и находим неизвестные X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} \frac{1,944}{EI_Z} X_1 - \frac{2,268}{EI_Z} X_2 - \frac{21,743}{EI_Z} = 0 \\ -\frac{2,268}{EI_Z} X_1 + \frac{4,443}{EI_Z} X_2 + \frac{35,098}{EI_Z} = 0. \end{cases}$$

Приведа к общему знаменателю и сократив жесткость, получим:

$$\begin{cases} 1,994X_1 - 2,268X_2 - 21,743 = 0 \\ -2,268X_1 + 4,443X_2 + 35,098 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим, $X_1 = 4,868$ кН и $X_2 = -5,415$ кН. Отрицательное значение силы X_2 означает, что ее направление противоположно направлению единичной силы в эквивалентной системе.

9. Прикладываем найденные силы, изменяя направление силы X_2 , и рассматриваем их как внешние силы, приложенные к эквивалентной системе (рис. 6.16).

Определяем опорные реакции:

$$\sum F_x = 0; \quad B_x + X_2 - p \cdot 1,4 = 0; \quad B_x = 8,585 \text{ кН.}$$

$$\sum F_y = 0; \quad B_y - F + X_1 = 0; \quad B_y = 3,132 \text{ кН.}$$

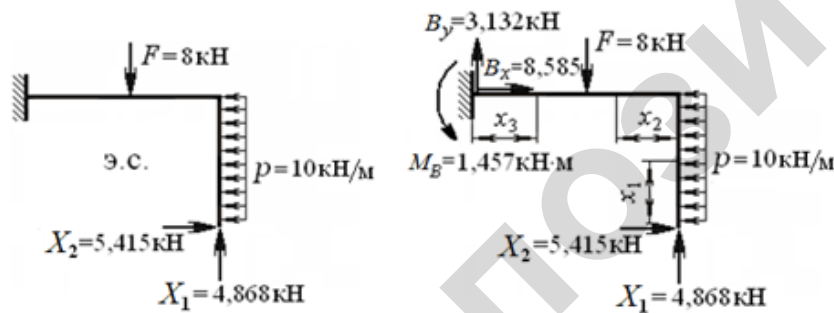


Рис. 6.16. Эквивалентная система и схема для построения эпюры M

$$\sum M_B = 0;$$

$$M_B - F \cdot 1 - p \cdot 1,4 \cdot 0,7 + X_1 \cdot 1,8 + X_2 \cdot 1,4 = 0;$$

$$M_B = 1,457 \text{ кН·м.}$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 6.17):

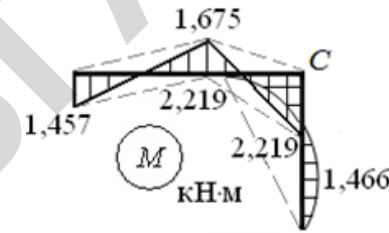


Рис. 6.17. Эпюра изгибающих моментов M

I участок: $0 \leq x_1 \leq 1,4$ м.

$$M_{x_1} = X_2 x_1 - \frac{p x_1^2}{2};$$

$$x_1 = 0: \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,4 \text{ м:} \quad M_{x_1} = 5,415 \cdot 1,4 - \frac{10 \cdot 1,4^2}{2} = -2,219 \text{ кН·м.}$$

Проверяем наличие экстремума:

$$Q_{x_1} = \frac{dM_{x_1}}{dx_1} = X_2 - p x_1 = 0 \Rightarrow \quad x_1 = \frac{X_2}{p} = \frac{5,415}{10} = 0,542 \text{ м;}$$

$$x_1 = 0,542 \text{ м:} \quad M_{x_1} = 5,415 \cdot 0,542 - \frac{10 \cdot 0,542^2}{2} = 1,466 \text{ кН·м.}$$

II участок: $0 \leq x_2 \leq 0,8$ м.

$$M_{x_2} = X_2 \cdot 1,4 + X_1 x_2 - p \cdot 1,4 \cdot 0,7;$$

$$x_2 = 0: \quad M_{x_2} = -2,219 \text{ кН·м;}$$

$$x_2 = 0,8 \text{ м:} \quad M_{x_2} = 1,675 \text{ кН·м.}$$

III участок: $0 \leq x_3 \leq 1$ м.

$$M_{x_3} = -M_B + B_y \cdot x_3;$$

$$x_3 = 0: M_{x_3} = -1,457 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 1 \text{ м}: M_{x_3} = -1,457 + 3,132 \cdot 1 = 1,675 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

10. Выполняем проверки:

а) статическая – проверяем равновесие вырезанного из рамы узла *C* под действием внешних сил и внутренних силовых факторов (рис. 6.18).

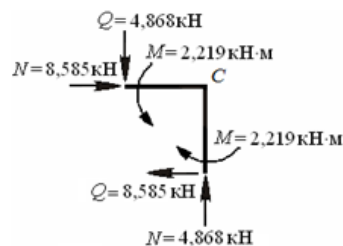


Рис. 6.18. Статическая проверка равновесия узла рамы

б) деформационная – определяем перемещения в системе по направлению лишних связей (перемещения в опорах должны равняться нулю), перемножая поочередно суммарную эпюру изгибающих моментов на единичные эпюры (рис. 6.19):

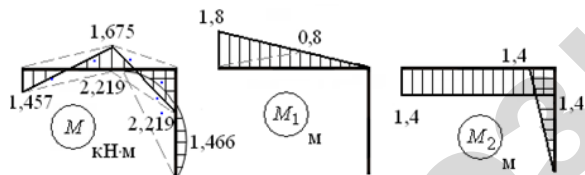


Рис. 6.19. Эпюра изгибающих моментов и единичные эпюры

Определяем погрешность вычислений:

$$\frac{0,0011}{1,3054} 100\% = 0,084\% < [2\%].$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{1}{EI_Z} \left(-\frac{10 \cdot 1,4^3}{12} \frac{1}{2} 1,4 + \frac{1}{2} 2,219 \cdot 1,4 \frac{2}{3} 1,4 + \frac{1}{2} 2,219 \cdot 0,8 \cdot 1,4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} 1,675 \cdot 0,8 \cdot 1,4 + \frac{1}{2} 1,457 \cdot 0,8 \cdot 1,4 - \frac{1}{2} 1,675 \cdot 0,8 \cdot 1,4 \right) = \\ &= \frac{-1,6007 + 1,4497 + 1,2426 - 0,938 + 1,0199 - 1,1725}{EI_Z} = \\ &= \frac{3,7122 - 3,7112}{EI_Z} = \frac{0,001}{EI_Z}. \end{aligned}$$

Определяем погрешность вычислений:

$$\frac{0,001}{3,7112} 100\% = 0,03\% < [2\%].$$

Следовательно, неизвестные силы определены верно, эпюра *M* построена правильно.

11. Строим эпюру поперечных сил (рис. 6.20):

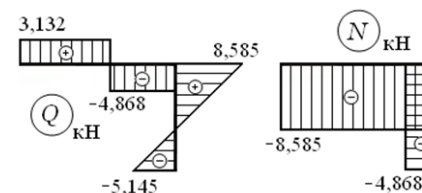


Рис. 6.20. Эпюры поперечных и продольных сил

I участок: $0 \leq x_1 \leq 1,4$ м.

$$Q_x = -X + px;$$

$$x = 0: Q_{x_1} = -5,415 \text{ кН};$$

$$x_1 = 1,4 \text{ м}: Q_{x_1} = -5,415 + 10 \cdot 1,4 = 8,585 \text{ кН}.$$

II участок: $0 \leq x_2 \leq 0,8$ м.

$$Q_{x_2} = -X_1 = -4,868 \text{ кН}.$$

III участок: $0 \leq x_3 \leq 1$ м.

$$Q_{x_3} = B_y = 3,132 \text{ кН.}$$

Строим эпюру продольных сил (рис. 6.20):

I участок: $0 \leq x_1 \leq 1,4$ м.

$$N_{x_1} = -X_1 = -4,868 \text{ кН.}$$

II участок: $0 \leq x \leq 0,8$ м.

$$N_{x_2} = X_2 - p \cdot 1,4 = 5,145 - 14 = -8,585 \text{ кН.}$$

III участок: $0 \leq x_3 \leq 1$ м.

$$N_{x_3} = -B_x = -8,585 \text{ кН.}$$

12. Определяем положение опасного сечения заданной рамы. Максимальное значение изгибающего момента на эпюре M равно $2,219 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и относится к крайнему верхнему сечению участка x_1 и крайнему правому сечению участка x_2 (узел C). Значение продольной силы, создающей нормальные напряжения в поперечном сечении, больше на участке x_2 , следовательно, опасным будет сечение в начале этого участка.

13. Подбираем поперечное сечение. Определяем размеры поперечного сечения по условию прочности при изгибе без учета продольной силы:

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3M}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2,219 \cdot 10}{2 \cdot 160}} = 100 \sqrt[3]{0,0208} = 27,5 \text{ мм.}$$

Принимаем $b = 27,5 \text{ мм}$ и $h = 55 \text{ мм}$.

Производим проверку прочности выбранного сечения с учетом продольной силы:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{N}{A} \right| = \left| \frac{2,219 \cdot 10^6}{27,5 \cdot 55^2} - \frac{8,585 \cdot 10^3}{27,5 \cdot 55} \right| = 160,05 + 5,68 = 165,73 \text{ МПа.}$$

Процент перегрузки $\frac{165,73 - 160}{160} \cdot 100 \% = 3,58 \% < [5\%]$, что допустимо.

На оставленном рядом со схемой заданной системы месте должны быть изображены основные расчетные схемы и эпюры (рис. 6.21).

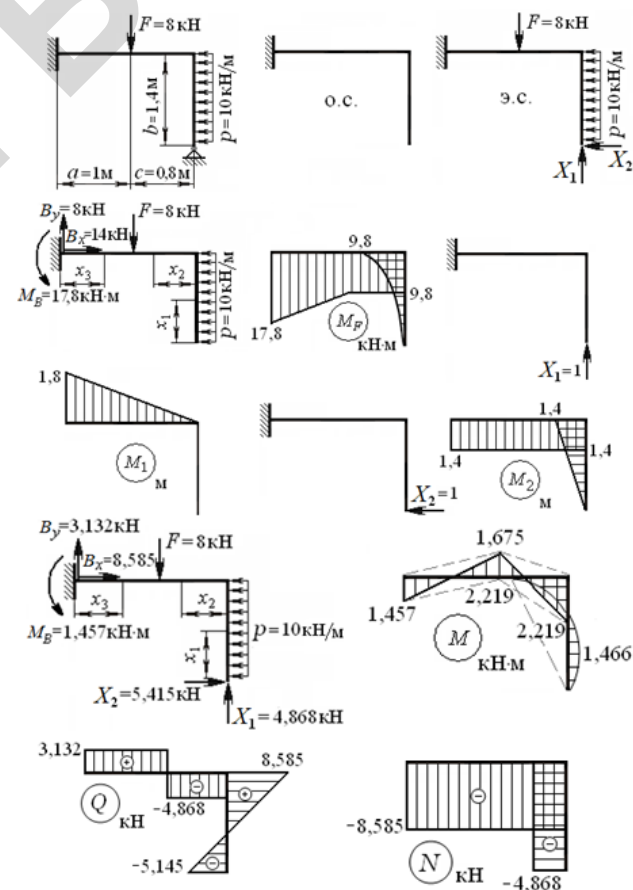


Рис. 6.21. Основные расчетные схемы и эпюры

7. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Литература: [1, с. 173–176, 2, с. 536–559].

Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия упругих тел. Устойчивость прямолинейной формы сжатых стержней. Критическая сила. Формула Эйлера. Влияние закрепления концов стержня на величину критической силы. Пределы применимости формулы Эйлера. Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности, формула Ясинского. Расчет на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемых напряжений. Условие устойчивости сжатых стержней. Практические расчеты стержней на устойчивость. Выбор материалов и рациональной формы поперечных сечений для сжатых стержней.

7.1. Понятие об устойчивости равновесия упругих тел

Под устойчивостью понимается способность упругой системы сохранять под нагрузкой свою первоначальную форму равновесия. Если система этой способностью не обладает, то она называется неустойчивой, и ее состояние является неустойчивым. Например, если шарик находится на дне лунки (рис. 7.1, а), то его состояние устойчивое, а если шарик располагается на вершине выпуклости (рис. 7.1, б), то его состояние неустойчивое.



Рис. 7.1. Устойчивое и неустойчивое состояния системы

В реальных условиях эксплуатации конструкции всегда существуют какие-либо причины, из-за которых может произойти отклонение, даже самое незначительное, от исходного состояния равновесия. Следовательно, в неустойчивой системе всегда реализуется возможность перехода в новое состояние равновесия, т. е. происходит потеря устойчивости, что в подавляющем большинстве случаев сопровождается значительными перемещениями, возникновением пластических деформаций или полным разрушением. Явление потери устойчивости для упругих тел можно наблюдать на целом ряде примеров. Наиболее простыми и распространенными случаями являются потеря устойчивости при центральном сжатии длинных (по сравнению с поперечными размерами) стержней, тонкостенных труб, прокатных профилей и т. д.

Явление потери устойчивости проследим на примере стержня, нагруженного центрально приложенной сжимающей силой F , которая постепенно возрастает (рис. 7.2, а). Пока сила F мала, стержень, выведенный из равновесия какой-либо незначительной кратковременно действующей силой Q (рис. 7.2, б), совершив, возможно, несколько колебаний (рис. 7.2, в), вернется в исходное прямолинейное состояние. По мере роста силы F стержень будет медленнее и медленнее возвращаться в исходное состояние. И, наконец, при некотором значении силы F стержень, выведенный из равновесия силой Q , останется в искривленном состоянии (рис. 7.2, г). Значит, произошла потеря устойчивости.

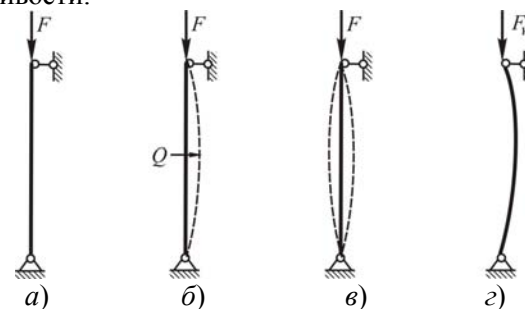


Рис. 7.2. Нагружение и потеря устойчивости сжатого стержня

Наименьшая сжимающая осевая сила, при которой прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется критической силой и обозначается F_k .

Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня под действием осевой сжимающей нагрузки называется продольным изгибом. В этом случае в сечениях стержня наряду с продольной силой действует и изгибающий момент, интенсивно возрастающий при увеличении нагрузки сверх критической. Изгибающий момент вызывает резкое увеличение напряжений и часто является причиной разрушения конструкции.

Критическая сила вызывает в стержне критические напряжения, которые являются опасными:

$$\sigma = \frac{F}{A} . \quad (7.1)$$

Надежная работа сжатого стержня будет обеспечена, если выполняются условия:
прочности

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] , \quad (7.2)$$

устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma] , \quad (7.3)$$

где $A_{\text{нетто}}$, $A_{\text{брутто}}$ – площадь поперечного сечения стержня, соответственно, с учетом и без учета местных ослаблений;

$[\sigma_c]$ – допускаемое напряжение на сжатие для материала стержня;

$[\sigma_y]$ – допускаемое напряжение на устойчивость, равное $[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{[n_y]}$, где $[n_y]$ – нормативный коэффициент безопасности

по устойчивости.

Коэффициент безопасности по устойчивости всегда принимается несколько больше коэффициента безопасности на прочность. Это делается потому, что для центрально сжатых стержней ряд обстоятельств почти неизбежны на практике (эксцентриситет приложения, неоднородность материала) и способствуют продольному изгибу, в то время как при других видах нагружения эти обстоятельства почти не влияют на прочность. Коэффициент

безопасности по устойчивости принимают в пределах: для сталей $[n_y] = 1,8 \div 3,0$; для чугуна $[n_y] = 5,0 \div 5,5$; для дерева $[n_y] = 2,8 \div 3,2$.

7.2. Определение критической силы. Условие устойчивости

Впервые задачу о равновесии стержня, сжатого центральными силами, поставил и решил Леонард Эйлер в середине XVIII в. Формула Эйлера для определения критической силы сжатого стержня имеет вид:

$$F = \frac{\pi E I}{(\mu l)^2} , \quad (7.4)$$

где I_{\min} – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня;

l – длина стержня;

μ – коэффициент приведения длины, величина которого зависит от способов закрепления концов стержня.

Коэффициент приведения длины показывает, во сколько раз необходимо изменить длину шарнирно закрепленного и сжатого центральными силами стержня по концам, чтобы его критическая сила была равна критической силе стержня длиной l при заданном способе закрепления и нагружения. Для наиболее часто встречающихся на практике случаев закрепления и нагружения стержня коэффициент μ имеет определенные значения (табл. 7.1).

Напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня при $F = F_k$, называются критическими и определяются по формуле

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} , \quad (7.5)$$

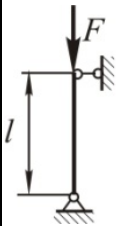
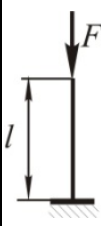
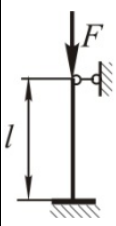

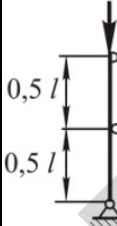

где A – площадь поперечного сечения стержня;

E – модуль продольной упругости материала стержня;

$\lambda = \frac{\mu l}{i}$ – гибкость стержня, $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ – минимальный радиус

инерции сечения.

Значения коэффициента приведения длины стержня (μ)
при различных схемах закрепления и нагружения

Способ закрепления стержня	Оба конца шарнирно закреплены	Один конец жестко зашце́млен	Один конец зашце́млен, другой – шарнирно закре́пен	Оба конца зашце́млены	Оба конца шарнирно закре́плены, посере́дине шарнир	Один конец шарнирно закре́пен, посере́дине шарнир
Схема закрепления и нагружения стержня						
Коэффициент приведения длины μ	1,0	2,0	0,7	0,5	0,5	1,35

Формула Эйлера применима, когда критические напряжения в стержне σ_k не превышают предела пропорциональности σ_p , т. е.

$$\sigma = \frac{\pi E}{\lambda} \leq \sigma_p. \quad (7.6)$$

Наименьшая гибкость стержня, при которой еще применима формула Эйлера, называется предельной гибкостью и определяется по формуле

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi E}{\sigma_p}}. \quad (7.7)$$

Предельная гибкость стержня зависит от физико-механических свойств материала. Примерные значения предельной гибкости: для стали Ст2 и Ст3 $\lambda_{\text{пред}} \approx 100$, для стали Ст5 $\lambda_{\text{пред}} \approx 90$, для чугуна $\lambda_{\text{пред}} \approx 80$, для дерева (сосны) $\lambda_{\text{пред}} \approx 70$, для некоторых марок легированной стали $\lambda_{\text{пред}} \approx 60-70$.

Формула Эйлера применима к расчету стержней, для которых гибкость больше или равна предельной гибкости $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$. Такие стержни называются стержнями большой гибкости.

Стержни, для которых $\lambda_{\text{пред}} > \lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$, относятся к стержням средней гибкости ($\lambda_{\text{пред}}$ – значение гибкости, при котором критические напряжения у стержней из пластичных материалов достигают предела текучести, из хрупких материалов – предела прочности). Расчет стержней средней гибкости ведется с использованием формулы Ясинского:

$$\sigma = a - b\lambda, \quad (7.8)$$

для чугуна применяется параболическая зависимость

$$\sigma = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (7.9)$$

где a , b , c – опытные коэффициенты, зависящие от свойств материала и имеющие размерность напряжения (табл. 7.2).

Материал	Характеристики прочности, МПа		Эмпирические коэффициенты формулы Ясинского, МПа			Гибкость	
	σ_t	σ_r	a	b	c	$\lambda_{\text{пред}}$	λ_0
Сталь Ст2	220	190	264	0,68	–	105	62
Сталь Ст3	240	200	310	1,11	–	100	61
Сталь Ст4 Сталь 20	260	220	328	1,07	–	96	60
Сталь Ст5 Сталь: 25, 35Л	280	240	350	1,13	–	92	57
Сталь: 35, 45Л	320	270	398	1,40	–	90	55
Сталь 45	360	305	449	1,64	–	85	52
Сталь: 50, 55Л	380	320	473	1,83	–	82	50
Сталь: 10Г2СЛ, 14Г2, 15ГС, 14ХГС, 15 ХСНД	350	300	429	1,49	–	83	50
Сталь: 30ХМА, 35ХМФА, 30ГСА, 40ХНМА	850	700	1000	5,46	–	55	28
Дюралюминий Д16Т	320	255	406	2,78	–	53	30
Дюралюминий Д6Т	280	220	300	1,40	–	57	15
Сосна, ель	–	–	29,3	0,19	–	70	–
Чугун	–	–	776	12,0	0,052	80	–

Таблица 7.3

Коэффициент продольного изгиба φ

Гибкость стержня λ	Сталь Ст4, 3, 2	Сталь Ст5	Бетон		Дюрлюминий Д16Т	Чугун СЧ 15-30 СЧ 15-18 СЧ 15-36 СЧ 21-40	Дерево (сосна)
			тяжелый	легкий			
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	1,00	1,00	0,999	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,96	0,96	0,998	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,90	0,86	0,835	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,84	0,73	0,700	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,76	0,68	0,568	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,70	0,59	0,455	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,63	0,52	0,353	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,57	0,46	0,269	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,51	–	0,212	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,45	–	0,172	0,16	0,31
110	0,52	0,43	–	–	0,142	–	0,25
120	0,45	0,36	–	–	0,119	–	0,22
130	0,40	0,33	–	–	0,101	–	0,18
140	0,36	0,29	–	–	0,087	–	0,16
150	0,32	0,26	–	–	0,076	–	0,14
160	0,29	0,24	–	–	–	–	0,12
170	0,26	0,21	–	–	–	–	0,11
180	0,23	0,19	–	–	–	–	0,10
190	0,21	0,17	–	–	–	–	0,09
200	0,19	0,16	–	–	–	–	0,08

7.3. ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»

Для заданного стержня (рис. 7.3), нагруженного сосредоточенной силой F , требуется определить:

– размеры поперечного сечения;

Стержни, для которых $\lambda < \lambda_0$, относятся к стержням малой гибкости. Расчет ведется на прочность, поскольку в этом случае потери устойчивости практически не происходит.

Критическая сила в этом случае вычисляется по формуле

$$F = \sigma A \quad (7.10)$$

Допускаемая величина сжимающей силы определяется по формуле

$$[F] = \frac{F}{[n]} \quad (7.11)$$

Расчет стержней на устойчивость ведется аналогично расчету на простое сжатие коротких стержней по допускаемым напряжениям $[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c]$, уменьшенным по сравнению с $[\sigma_c]$. Тогда условие устойчивости сжатого стержня представится выражением

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брутто}}} \leq \varphi [\sigma_c] \quad (7.12)$$

где φ – коэффициент снижения допускаемого напряжения, или коэффициент продольного изгиба (значения коэффициента φ изменяются в пределах от 0 до 1).

При выполнении практических расчетов значения коэффициентов продольного изгиба приводятся в справочниках обычно в виде таблиц и принимаются в зависимости от материала и гибкости стержня. Для наиболее часто используемых материалов значения коэффициента продольного изгиба φ приведены в табл. 7.3.

На основе использования условия устойчивости можно выполнять проектировочный или конструкторский расчет сжатых стержней, имеющий целью определение размеров поперечного сечения.

- критическую силу для заданной стойки;
- коэффициент безопасности по устойчивости.

Исходные данные и схемы для выполнения ИДЗ – в табл. 7.4 (двутавр ГОСТ 8239–89, швеллер ГОСТ 8240–89, уголок неравнополочный ГОСТ 8510–72) и на рис. 7.3.

Таблица 7.4

Исходные данные к ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»

№ п/п	l , м	F , кН	№ п/п	l , м	F , кН
1	1,8	100	17	2,2	200
2	2,6	220	18	3,0	180
3	3,4	340	19	3,8	250
4	4,2	140	20	4,6	480
5	3,2	160	21	2,4	460
6	4,0	200	22	3,6	480
7	3,2	220	23	2,8	500
8	2,4	290	24	2,0	60
9	2,0	150	25	2,4	200
10	2,8	180	26	3,2	100
11	3,6	300	27	4,0	200
12	4,4	100	28	3,6	300
13	3,6	320	29	3,8	250
14	3,8	240	30	3,4	500
15	3,0	160	31	2,6	150
16	2,2	140	32	1,8	320

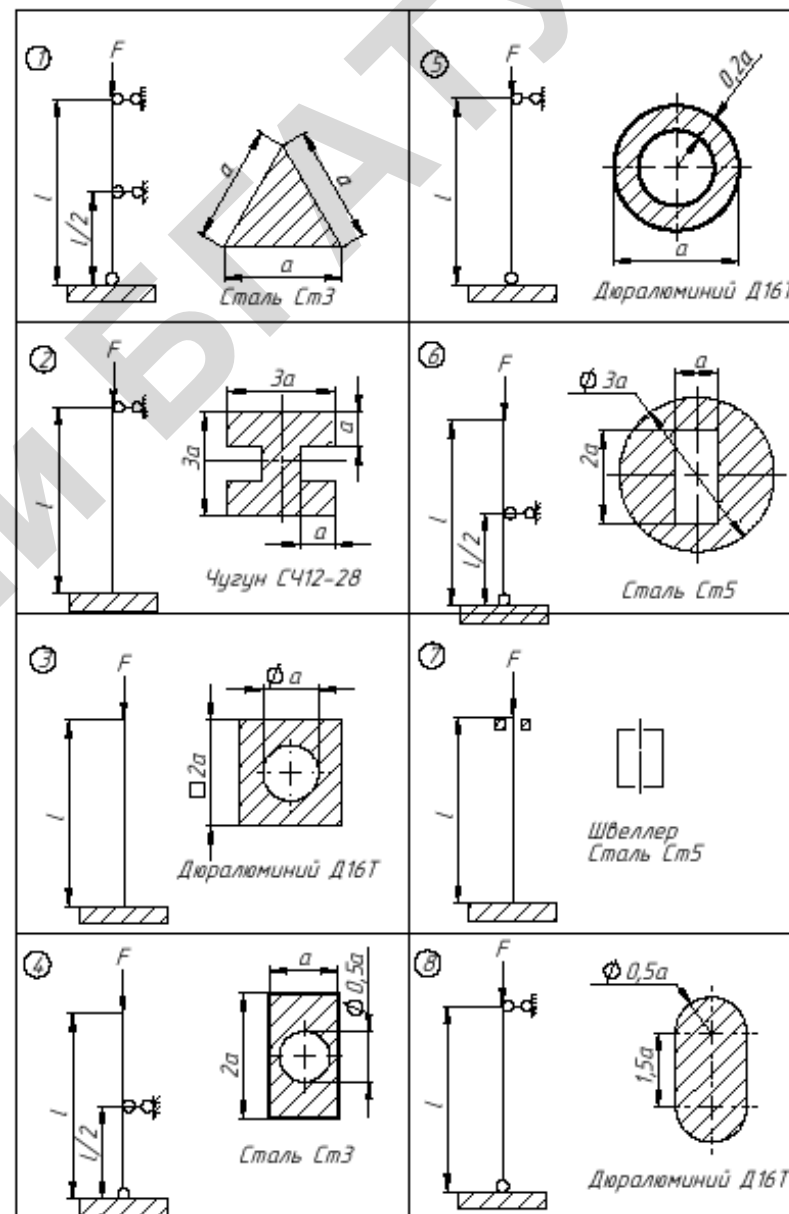


Рис. 7.3. Схемы (1–8) к ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»

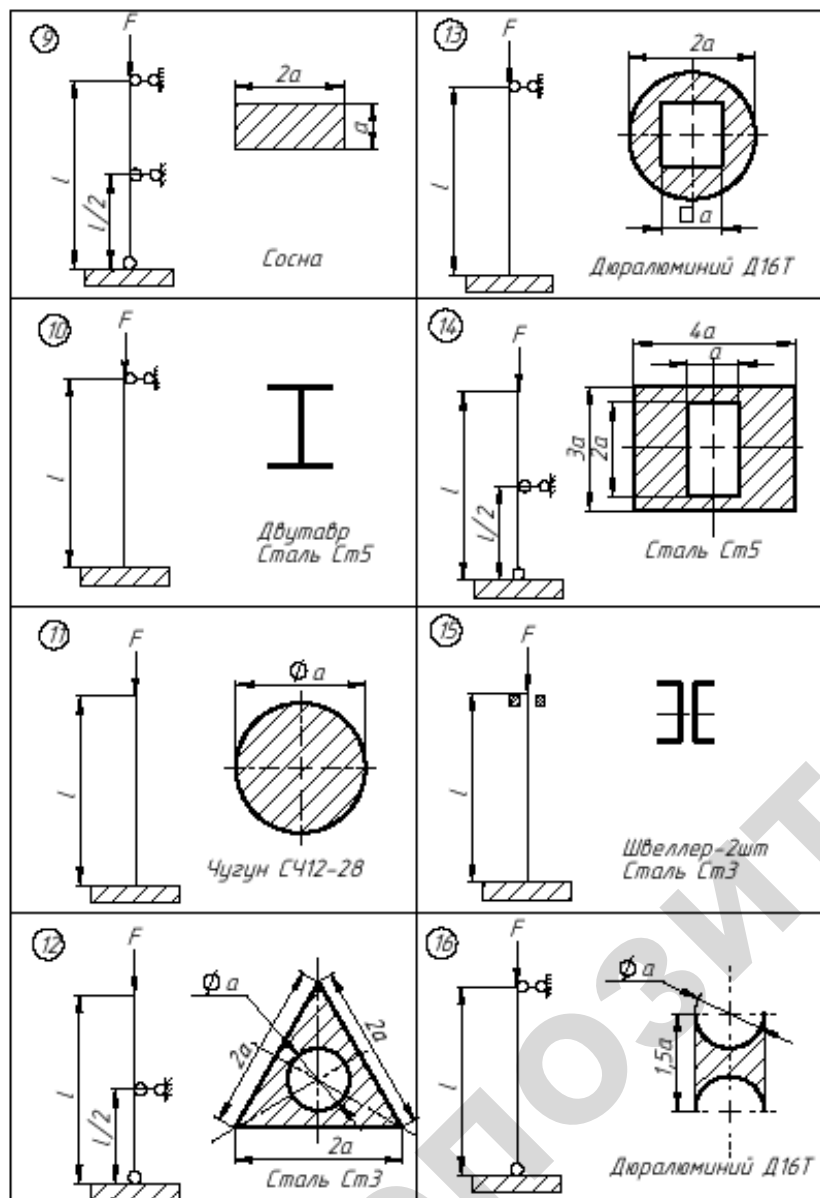


Рис. 7.3. Схемы (9–16) к ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»

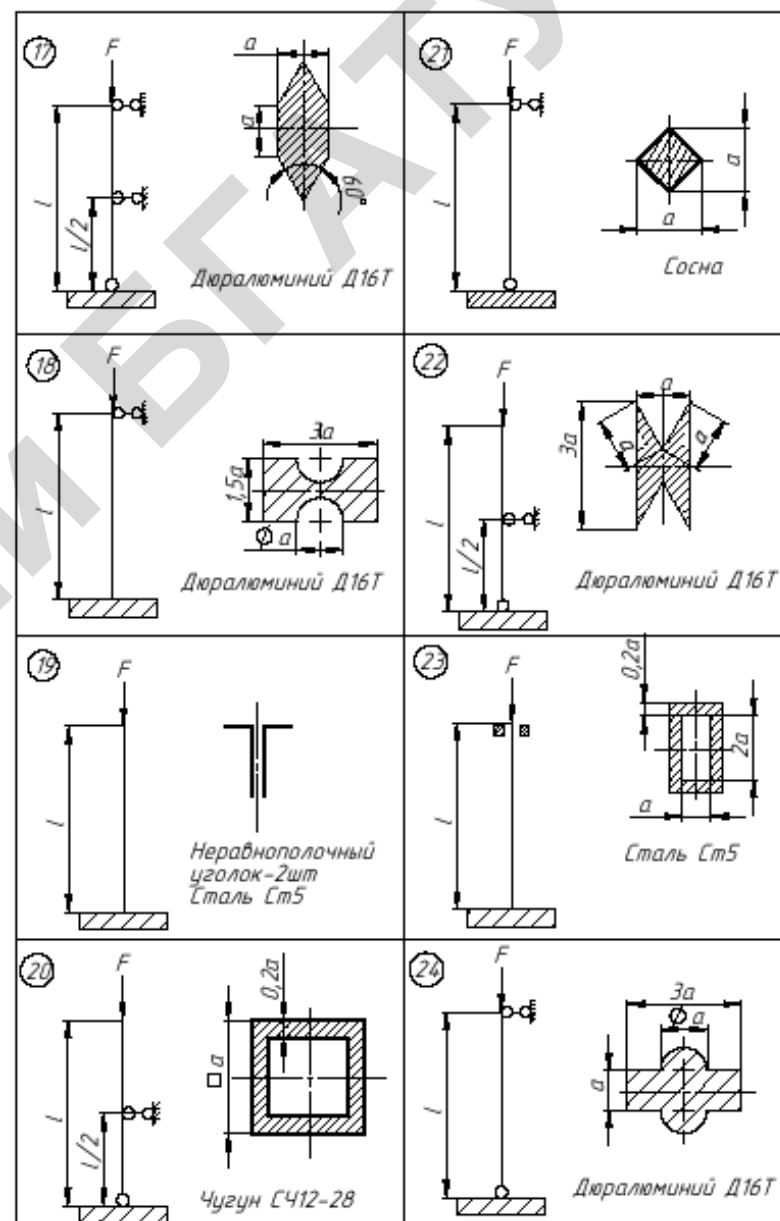


Рис. 7.3. Схемы (17–24) к ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»

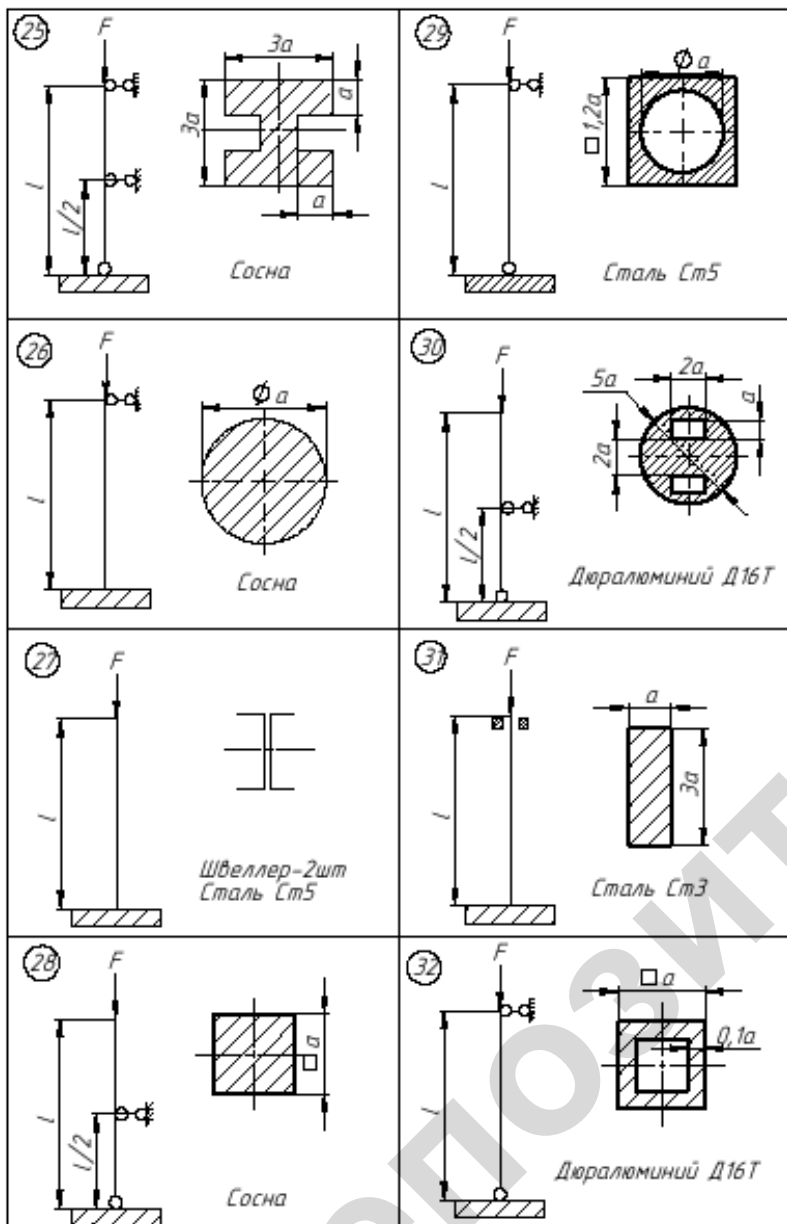


Рис. 7.3. Схемы (25–32) к ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»

7.4. Методические указания для выполнения ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»

1. Вычертить в масштабе схему и поперечное сечение стержня.
2. В поперечном сечении стержня провести главные центральные оси инерции.
3. Выразить, используя соотношение размеров сечения a , следующие геометрические характеристики (площадь A , минимальный осевой момент инерции I_{\min} , минимальный радиус инерции i_{\min}), а также, принимая во внимание расчетную схему, – гибкость стержня λ .
4. Для решения задачи использовать метод последовательных приближений, задаваясь коэффициентом продольного изгиба (φ); в первом приближении принять $\varphi_1 = 0,5$ и последовательно определить A , a , I_{\min} , i_{\min} , λ .
5. Принять по таблице действительное значение коэффициента продольного изгиба φ_1^* .
6. Если значения коэффициентов φ_1^* и φ_1 значительно (более 5 %) отличаются один от другого, а значит, в такой же мере будут отличаться и напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня, от допускаемых напряжений на устойчивость, то в расчете следует предпринять следующую попытку, приняв:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2}$$

Обычно бывает достаточным выполнение в расчете трех попыток.

7. По соответствующей формуле (в зависимости от фактической и предельной гибкостей) определить критическую силу или критическое напряжение для заданного стержня и вычислить коэффициент безопасности по устойчивости.

7.5. Пример выполнения ИДЗ «Устойчивость сжатых стержней»

Определить размеры поперечного сечения и коэффициент безопасности по устойчивости деревянного стержня (рис. 7.4), если $l = 2,5$ м; $F = 22$ кН; $[\sigma] = 8$ МПа.

Решение. Условие устойчивости сжатого стержня имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{бп}}} \leq \varphi [\sigma].$$

Отсюда выражаем площадь поперечного сечения стержня

$$A_{\text{бп}} = \frac{F}{\varphi [\sigma]}.$$

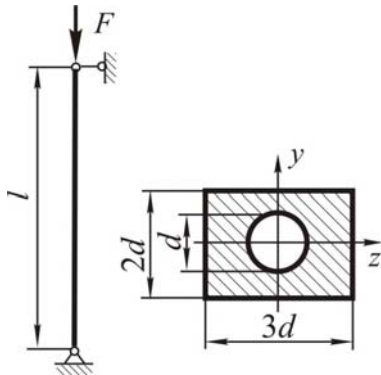


Рис. 7.4. Схема стойки и поперечного сечения

Пользуясь заданной формой и соотношением размеров поперечного сечения стержня, составляем выражения для определения площади поперечного сечения $A_{\text{бп}}$, размера d , минимального момента инерции I_{min} , минимального радиуса инерции i_{min} , гибкости стержня λ :

$$A_{\text{бп}} = 3d \cdot 2d - \frac{\pi d^2}{4} = 5,215 d^2; \quad d = \sqrt{\frac{A_{\text{бп}}}{5,215}};$$

$$I_{\text{min}} = I_z = \frac{3d (2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 1,95 d^4;$$

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{A_{\text{бп}}}} = \sqrt{\frac{1,95 d^4}{5,215 d^2}} = 0,612 d;$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}} = \frac{1 \cdot 2500}{0,612 d} = \frac{4085}{d}.$$

Подбор сечения производится методом последовательных приближений. В первом приближении принимаем коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$ и находим численные значения:

$$A_{\text{бп1}} = \frac{22000}{0,5 \cdot 8} = 5500 \text{ мм}^2; \quad d_1 = \sqrt{\frac{5500}{5,215}} = 32 \text{ мм}; \quad \lambda_1 = \frac{4085}{32} = 127.$$

Из справочной таблицы принимаем значения φ при гибкости стержня λ :

$$\begin{aligned} \lambda = 120: & \quad \varphi = 0,22; \\ \lambda = 130: & \quad \varphi = 0,18. \end{aligned}$$

Интерполируя, находим действительное значение коэффициента продольного изгиба при гибкости стержня $\lambda = 127$:

$$\varphi_1^* = 0,22 - \frac{0,22 - 0,18}{130 - 120} (127 - 120) = 0,19.$$

Так как φ_1 и φ_1^* отличаются значительно (более 5%), то принимаем другое приближение и повторяем расчет:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,19}{2} = 0,35;$$

$$A_{\text{бп2}} = \frac{22000}{0,35 \cdot 8} = 7857 \text{ мм}^2; \quad d_2 = \sqrt{\frac{7857}{5,215}} = 39 \text{ мм}; \quad \lambda_2 = \frac{4085}{39} = 105.$$

Из справочной таблицы принимаем значения φ при гибкости стержня λ :

$$\begin{aligned} \lambda = 100: & \quad \varphi = 0,31; \\ \lambda = 110: & \quad \varphi = 0,25. \end{aligned}$$

Интерполируя, находим действительное значение коэффициента продольного изгиба при гибкости стержня $\lambda = 105$:

$$\varphi_2^* = 0,31 - \frac{0,31 - 0,25}{110 - 100} (105 - 100) = 0,28.$$

Так как φ_2 и φ_2^* отличаются значительно (более 5%), то принимаем третье приближение и повторяем расчет:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^*}{2} = \frac{0,35 + 0,28}{2} = 0,32;$$

$$A_{бр3} = \frac{22000}{0,32 \cdot 8} = 8594 \text{ мм}^2; d_3 = \sqrt{\frac{8594}{5,215}} = 41 \text{ мм};$$

$$\lambda_3 = \frac{4085}{41} = 100.$$

Из справочной таблицы принимаем действительное значение коэффициента продольного изгиба при гибкости стержня $\lambda = 100$: $\varphi_3^* = 0,31$.

Так как φ_3 и φ_3^* отличаются незначительно (менее 5%), то проверяем выполнение условия устойчивости при $\varphi_3^* = 0,31$.

Определяем напряжение в материале стойки:

$$\sigma = \frac{F}{A_{бр3}} = \frac{22000}{8594} = 2,56 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi_3^* [\sigma] = 0,31 \cdot 8 = 2,48 \text{ МПа}.$$

Перегрузка равна

$$\frac{\sigma - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} 100\% = \frac{2,56 - 2,48}{2,48} 100\% = 3,2\% < [5\%].$$

Перенапряжение допустимо.

Определяем предельную гибкость по формуле

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{п}}},$$

где E – модуль упругости материала (для дерева $E = 10^4$ МПа);
 $\sigma_{п}$ – предел пропорциональности материала (для дерева $\sigma_{п} = 20$ МПа).

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 10^4}{20}} = 70,2.$$

Так как фактическая гибкость стержня $\lambda = \lambda_3 = 100 > \lambda_{пред} = 70,2$, то критическую силу определяем по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{мин}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 0,8 \cdot 10^4 \cdot 1,95 \cdot 41^4}{(1 \cdot 2500)^2} = 69412 \text{ Н}.$$

Коэффициент безопасности стержня по устойчивости равен

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{69412}{22000} = 3,2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. – Минск : Выш. шк., 2007. – 797 с.
2. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов. Практикум по решению задач : учеб. пособие / М. Д. Подскребко. – Минск : Выш. шк., 2009. – 633 с.
3. Механика материалов : учеб. пособие / О. И. Мисуно [и др.] – Минск : БГАТУ, 2013. – 252 с.
4. Механика материалов : справочник / сост. О. И. Мисуно, Д. Н. Колоско, С. А. Легенький. – Минск : БГАТУ, 2011. – 48 с.
5. Сопротивление материалов. Руководство к решению задач : учеб.-метод. пособие / БГАТУ ; кафедра сопротивления материалов и деталей машин; сост.: М. Д. Подскребко, О. И. Мисуно, С. А. Легенький. – Минск, 2004. – 80 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Образец титульного листа индивидуального домашнего задания

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика материалов и детали машин»

Индивидуальное домашнее задание
по дисциплине «Механика материалов»
на тему: _____

Вариант:
схема № ____; строка № ____

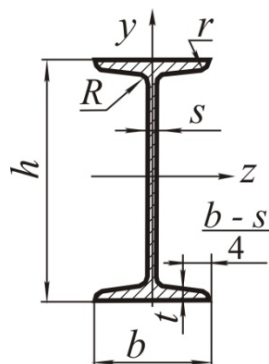
Выполнил:
студент _____
группа _____

Проверил:

Минск 20__

Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239–89)

Размеры и справочные величины для осей двутавров



Обозначения:

h – высота балки;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полки;

J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции

197

Номер профиля	Размеры, мм						Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей						
	h	b	s	t	R	r			J_z , см ⁴	W_{z_0} , см ³	i_{z_0} , см	S_{z_0} , см	J_{y_0} , см ⁴	W_{y_0} , см ³	i_{y_0} , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,5	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,7	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88

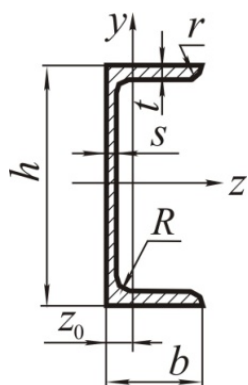
Окончание табл. П.1

Номер профиля	Размеры, мм						Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей						
	h	b	s	t	R	r			J_z , см ⁴	W_{z_0} , см ³	i_{z_0} , см	S_{z_0} , см	J_{y_0} , см ⁴	W_{y_0} , см ³	i_{y_0} , см
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,0	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,7	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,3	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,4	3800	317,0	10,1	178,0	260,0	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,5	5010	371,0	11,2	210,0	260,0	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,9	5500	407,0	11,3	229,0	337,0	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,5	7080	472,0	12,3	268,0	337,0	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,2	7780	518,0	12,5	292,0	436,0	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,2	9840	597,0	13,5	339,0	419,0	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,6	13380	743,0	14,7	423,0	516,0	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,0	19062	953,0	16,2	545,0	667,0	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,5	27696	1231,0	18,1	708,0	808,0	101,0	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,5	39727	1589,0	19,9	919,0	1043,0	123,0	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,6	55962	2035,0	21,8	1181,0	1356,0	151,0	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	76806	2560,0	23,6	1491,0	1725,0	182,0	3,54

198

Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240–89)

Размеры и справочные величины для осей швеллеров



Обозначения:

h – высота балки;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полки;

J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции;
 z_0 – расстояние от оси y до наружной грани стенки

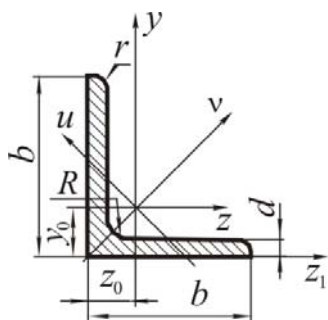
Номер профиля	Размеры, мм						Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей							z_0 , см
	h	b	s	t	R	r			J_{z_0} , см ⁴	W_{z_0} , см ³	i_{z_0} , см	S_{z_0} , см ³	J_{y_0} , см ⁴	W_{y_0} , см ³	i_{y_0} , см	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,6	5,6	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67

Окончание табл. П.2

Номер профиля	Размеры, мм						Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей							z_0 , см
	h	b	s	t	R	r			J_{z_0} , см ⁴	W_{z_0} , см ³	i_{z_0} , см	S_{z_0} , см ³	J_{y_0} , см ⁴	W_{y_0} , см ³	i_{y_0} , см	
14а	140	62	4,9	8,7	8,0	4,5	17,00	13,30	545,0	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	19,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16а	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,1	105,0	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,8	113,0	20,5	2,20	2,07
20а	200	80	5,2	9,7	9,5	5,5	25,20	19,80	1670,0	167,0	8,15	95,9	139,0	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,0	25,1	2,37	2,21
22а	220	87	5,4	10,2	10,0	6,0	28,80	22,60	2330,0	212,0	8,90	121,0	187,0	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,0	31,6	2,60	2,42
24а	240	95	5,6	10,7	10,5	6,0	32,90	25,80	3180,0	265,0	9,84	151,0	254,0	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	378,0	262,0	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,0	327,0	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,0	410,0	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,10	41,90	10200,0	601,0	14,20	350,0	513,0	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	8,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,0	642,0	73,4	3,23	2,75

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509–93)

Размеры и справочные величины для осей уголков равнополочных



Обозначения:

- b – ширина полки;
 d – толщина полки;
 J – момент инерции;
 i – радиус инерции;
 z_0, y_0 – расстояния от центра тяжести до наружных граней полок

201

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей						z_0 , см
	b	d	R	r			J_z , см ⁴	i_z , см	$J_{v \max}$, см ⁴	$i_{v \max}$, см	$J_{u \min}$, см ⁴	$i_{u \min}$, см	
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	0,73
2,5	25	4	3,5	1,2	1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	0,76
2,5	25	5	3,5	1,2	2,27	1,78	1,22	0,73	1,91	0,92	0,53	0,48	0,80
3,0	30	3	4,0	1,3	1,74	1,36	1,45	0,91	2,30	1,15	0,60	0,59	0,85
3,0	30	4	4,0	1,3	2,27	1,78	1,84	0,80	2,92	1,13	0,77	0,58	0,89
3,0	30	5	4,0	1,3	2,78	2,18	2,20	0,89	3,47	1,12	0,94	0,58	0,93
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	0,89
3,2	32	4	4,5	1,5	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	0,94
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	0,99

Продолжение табл. П.3

202

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей						z_0 , см	
	b	d	R	r			J_z , см ⁴	i_z , см	$J_{v \max}$, см ⁴	$i_{v \max}$, см	$J_{u \min}$, см ⁴	$i_{u \min}$, см		J_{z_1} , см ⁴
3,6	36	4	4,5	1,5	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	5,0	1,7	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
4	40	4	5,0	1,7	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4	40	5,0	5,0	1,7	3,79	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17
4,5	45	3,0	5,0	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
4,5	45	4,0	5,0	1,7	3,48	2,73	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26
4,5	45	5,0	5,0	1,7	4,29	3,37	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30
5	50	3,0	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33
5	50	4,0	5,5	1,8	3,89	3,05	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38
5	50	5,0	5,5	1,8	4,80	3,77	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42
5,6	56	4,0	6,0	2,0	4,38	3,44	13,10	1,73	20,80	2,38	5,41	1,11	23,30	1,52
5,6	56	5,0	6,0	2,0	5,41	4,25	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57
6,3	63	4,0	7,0	2,3	4,96	3,90	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69
6,3	63	5,0	7,0	2,3	6,13	4,81	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74
6,3	63	6,0	7,0	2,3	7,28	5,72	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78
7	70	4,0	8,0	2,7	6,20	4,87	29,00	2,16	46,00	2,72	12,00	1,39	51,00	1,88
7	70	5,0	8,0	2,7	6,86	5,38	31,90	2,16	50,70	2,72	13,20	1,39	56,70	1,90
7	70	6,0	8,0	2,7	8,15	6,39	37,60	2,15	59,60	2,71	15,50	1,38	68,40	1,94
7	70	7,0	8,0	2,7	9,42	7,39	43,00	2,14	68,20	2,69	17,80	1,37	80,10	1,99

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей							z ₀ , см
	b	d	R	r			J _z , см ⁴	i _z , см	J _{v max} , см ⁴	i _{v max} , см	J _{u min} , см ⁴	i _{u min} , см	J _{z1} , см ⁴	
7	70	8,0	8,0	2,7	10,70	8,37	48,20	2,13	76,40	2,68	20,00	1,37	91,90	2,02
7,5	75	5,0	9,0	3,0	7,39	5,80	39,50	2,31	62,60	2,91	16,40	1,49	69,60	2,02
7,5	75	6,0	9,0	3,0	8,78	6,89	46,60	2,30	73,90	2,90	19,30	1,48	83,90	2,06
7,5	75	7,0	9,0	3,0	10,10	7,96	53,30	2,29	84,60	2,89	22,10	1,48	98,30	2,10
7,5	75	8,0	9,0	3,0	11,50	9,02	59,80	2,28	94,90	2,87	24,80	1,47	113,00	2,15
7,5	75	9,0	9,0	3,0	12,80	10,10	66,10	2,27	105,00	2,86	27,50	1,46	127,00	2,18
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	6,78	52,70	2,47	83,60	3,11	21,80	1,59	93,20	2,17
8	80	6,0	9,0	3,0	9,38	7,36	57,00	2,47	90,40	3,11	23,50	1,58	102,00	2,39
8	80	7,0	9,0	3,0	10,80	8,51	65,30	2,45	104,00	3,09	27,00	1,58	119,00	2,23
8	80	8,0	9,0	3,0	12,30	9,65	73,40	2,44	116,00	3,08	30,30	1,57	137,00	2,27
9	90	6,0	10	3,3	10,60	8,33	82,10	2,78	130,00	3,50	34,00	1,79	145,00	2,43
9	90	7,0	10	3,3	12,30	9,64	94,30	2,77	150,00	3,49	38,90	1,78	169,00	2,47
9	90	8,0	10	3,3	13,90	10,90	106,00	2,76	168,00	3,48	43,80	1,77	194,00	2,51
9	90	9,0	10	3,3	15,60	12,20	118,00	2,75	186,00	3,46	48,60	1,77	239,00	2,55
10	100	6,5	12	4,0	12,80	10,10	122,00	3,09	193,00	3,88	50,70	1,99	214,00	2,68
10	100	7,0	12	4,0	13,80	10,80	131,00	3,08	207,00	3,88	54,20	1,98	231,00	2,71
10	100	8,0	12	4,0	15,60	12,20	147,00	3,07	233,00	3,87	60,90	1,98	265,00	2,75
10	100	10,0	12	4,0	19,20	15,10	179,00	3,05	284,00	3,84	74,10	1,96	333,00	2,83
10	100	12,0	12	4,0	22,80	17,90	209,00	3,03	331,00	3,81	86,90	1,95	402,00	2,91
10	100	14,0	12	4,0	26,30	20,60	237,00	3,00	375,00	3,78	99,30	1,94	472,00	2,99

203

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей							z ₀ , см
	b	d	R	r			J _z , см ⁴	i _z , см	J _{v max} , см ⁴	i _{v max} , см	J _{u min} , см ⁴	i _{u min} , см	J _{z1} , см ⁴	
10	100	16,0	12	4,0	29,70	23,30	264,00	2,98	416,00	3,74	112,00	1,94	542,00	3,06
11	110	7,0	12	4,0	15,20	11,90	176,00	3,40	279,00	4,29	72,70	2,19	308,00	2,96
11	110	8,0	12	4,0	17,20	13,50	193,00	3,39	315,00	4,28	81,80	2,18	353,00	3,00
12,5	125	8,0	14	4,6	19,70	15,50	294,00	3,87	467,00	4,87	122,00	2,49	516,00	3,36
12,5	125	9,0	14	4,6	22,00	17,30	327,00	3,86	520,00	4,86	135,00	2,48	582,00	3,40
12,5	125	10,0	14	4,6	24,30	19,10	360,00	3,85	571,00	4,84	149,00	2,47	649,00	3,45
12,5	125	12,0	14	4,6	28,90	22,70	422,00	3,82	670,00	4,82	174,00	2,46	782,00	3,53
12,5	125	14,0	14	4,6	33,40	26,20	482,00	3,80	764,00	4,78	200,00	2,45	916,00	3,61
12,5	125	16,0	14	4,6	37,80	29,60	539,00	3,78	853,00	4,75	224,00	2,44	1051,00	3,68
14	140	9,0	14	4,6	24,70	19,40	466,00	4,31	739,00	5,47	192,00	2,79	818,00	3,78
14	140	10,0	14	4,6	27,30	21,50	512,00	4,33	814,00	5,46	211,00	2,78	911,00	3,82
14	140	12,0	14	4,6	32,50	25,50	602,00	4,31	957,00	5,43	248,00	2,76	1097,00	3,90
16	160	10,0	16	5,3	31,40	24,70	774,00	4,96	1229,00	6,25	319,00	3,19	1356,00	4,30
16	160	11,0	16	5,3	34,40	27,00	844,00	4,95	1341,00	6,24	348,00	3,18	1494,00	4,35
16	160	12,0	16	5,3	37,40	29,40	913,00	4,94	1450,00	6,23	376,00	3,17	1633,00	4,39
16	160	14,0	16	5,3	43,30	34,00	1046,00	4,92	1662,00	6,20	431,00	3,16	1911,00	4,47
16	160	16,0	16	5,3	49,10	38,50	1175,00	4,89	1866,00	6,17	485,00	3,14	2191,00	4,55
16	160	18,0	16	5,3	54,80	43,00	1299,00	4,87	2061,00	6,13	537,00	3,13	2472,00	4,63
16	160	20,0	16	5,3	60,40	47,40	1419,00	4,85	2248,00	6,10	589,00	3,12	2756,00	4,70

204

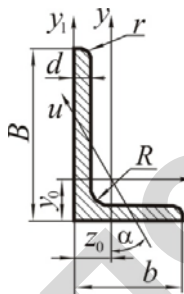
Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей							z ₀ , см
	b	d	R	r			J _z , см ⁴	i _z , см	J _{v max} , см ⁴	i _{v max} , см	J _{u min} , см ⁴	i _{u min} , см	J _{z1} , см ⁴	
18	180	11,0	16	5,3	38,80	30,50	1216,00	5,60	1933,00	7,06	500,00	3,59	2128,00	4,85
18	180	12,0	16	5,3	42,20	33,10	1317,00	5,59	2093,00	7,04	540,00	3,58	2324,00	4,89
20	200	12,0	18	6,0	47,10	37,00	1823,00	6,22	2896,00	7,84	749,00	3,99	3182,00	5,37
20	200	13,0	18	6,0	50,90	39,90	1961,00	6,21	3116,00	7,83	805,00	3,98	3452,00	5,42
20	200	14,0	18	6,0	54,60	42,80	2097,00	6,20	3333,00	7,81	861,00	3,97	3722,00	5,46
20	200	16,0	18	6,0	62,00	48,70	2363,00	6,17	3755,00	7,78	970,00	3,96	4264,00	5,54
20	200	20,0	18	6,0	76,50	50,10	2871,00	6,12	4560,00	7,72	1182,00	3,93	5355,00	5,70
20	200	25,0	18	6,0	94,30	74,00	3166,00	6,06	5494,00	7,63	1438,00	3,91	6733,00	5,89
20	200	30,0	18	6,0	111,50	87,60	4020,00	6,00	6351,00	7,55	1688,00	3,89	8130,00	6,07
22	220	14,0	21	7,0	60,38	47,40	2814,00	6,83	4470,00	8,60	1159,00	4,38	4470,00	5,91
22	220	16,0	21	7,0	65,58	53,83	3175,00	6,80	5045,00	8,58	1306,00	4,36	5552,00	6,02
25	250	16,0	24	8,0	78,40	61,55	4717,00	7,76	7492,00	9,78	1942,00	4,98	8289,00	6,75
25	250	18,0	24	8,0	87,72	68,86	5247,00	7,73	8337,00	9,75	2158,00	4,96	9339,00	6,83
25	250	20,0	24	8,0	96,96	76,11	5765,00	7,71	9160,00	9,72	2370,00	4,94	10395,00	6,91
25	250	22,0	24	8,0	106,12	83,31	6270,00	7,09	9961,00	9,69	2579,00	4,93	11470,00	7,00
25	250	25,0	24	8,0	119,71	93,97	7006,00	7,65	11126,00	9,64	2887,00	4,91	13058,00	7,11
25	250	28,0	24	8,0	133,12	104,5	7717,00	7,61	12244,00	9,59	3190,00	4,90	14676,00	7,23
25	250	30,0	24	8,0	141,96	111,4	8177,00	7,59	12965,00	9,56	3389,00	4,89	15763,00	7,31

205

Таблица П.4

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (по ГОСТ 8510–86)

Размеры и справочные величины для осей уголков неравнополочных



Обозначения:

- B – ширина большой полки;
- b – ширина малой полки;
- d – толщина полки;
- R – радиус внутреннего закругления полки;
- r – радиус наружного закругления полки;
- J – момент инерции;
- i – радиус инерции;
- z₀, y₀ – расстояния от центра тяжести до наружных граней полок

206

Номер профиля	Размеры, мм					Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей										Угол наклона оси u tgα
	B	b	d	R	r			J _z , см ⁴	i _z , см	J _y , см ⁴	i _y , см	J _{z1} , см ⁴	y ₀ , см	J _{y1} , см ⁴	z ₀ , см	J _u , см ⁴	i _u , см	
2,5/1,6	25	16	3	4	1,2	1,16	0,6	0,7	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3	4	1,2	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
3,2/2	32	20	4	4	1,2	1,94	1,52	1,93	1,00	0,37	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4/2,5	40	25	3	4	1,3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
4/2,5	40	25	4	4	1,3	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,281
4,5/2,8	45	28	3	5	1,7	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
4,5/2,8	45	28	4	5	1,7	2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,10	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379
5/3,2	50	32	3	6	1,8	2,42	1,90	6,18	1,60	1,99	0,91	12,40	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403

Номер профиля	Размеры, мм					Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей								Угол наклона оси u tga		
	B	b	d	R	r			J_z , см ⁴	i_z , см	J_y , см ⁴	i_y , см	J_{z_1} , см ⁴	y_0 , см	J_{y_1} , см ⁴	z_0 , см		J_u , см ⁴	i_u , см
5/3,2	50	32	4	6	1,8	3,17	1,59	7,98	1,59	2,56	0,90	16,60	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	4	6	2,0	3,58	2,81	11,37	1,78	3,70	1,02	23,20	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
5,6/3,6	56	36	5	6	2,0	4,41	3,46	13,82	1,77	4,48	1,01	29,20	1,87	7,91	0,88	2,65	0,78	0,404
6,3/4	63	40	4	7	2,3	4,04	3,17	16,33	2,01	5,16	1,13	33,00	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
6,3/4	63	40	5	7	2,3	4,98	3,91	19,91	2,00	6,26	1,12	41,40	2,08	10,80	0,95	3,73	0,86	0,396
6,3/4	63	40	6	7	2,3	5,90	4,63	23,31	1,99	7,29	1,11	40,90	2,12	13,10	0,99	4,36	0,86	0,393
6,3/4	63	40	7	7	2,3	7,68	6,03	29,60	1,96	9,15	1,09	66,90	2,20	17,90	1,07	5,58	0,86	0,386
7/4,5	70	45	5	8	2,7	5,59	4,39	27,56	2,23	9,05	1,27	56,70	2,28	15,20	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	4,79	34,81	2,39	12,47	1,43	69,70	2,39	20,80	1,17	7,24	1,09	0,436
7,5/5	75	50	6	8	2,7	7,25	5,69	40,92	2,38	14,60	1,42	83,90	2,44	25,20	1,21	8,48	1,08	0,435
7,5/5	75	50	8	8	2,7	9,47	7,43	52,38	2,35	18,52	1,40	112,00	2,52	34,20	1,29	10,87	1,06	0,430
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,49	41,64	2,56	12,68	1,41	84,60	2,60	20,80	1,13	7,57	1,09	0,387
8/5	80	50	6	8	2,7	7,55	5,92	48,89	2,55	14,85	1,40	102,00	2,65	25,20	1,17	8,88	1,08	0,386
9/5,6	90	56	5,5	9	3,0	7,86	6,17	65,28	2,88	19,67	1,58	132,00	2,92	32,20	1,26	11,17	1,22	0,384
9/5,6	90	56	6	9	3,0	8,54	6,70	70,58	2,88	21,22	1,58	145,00	2,95	35,20	1,28	12,70	1,22	0,384
9/5,6	90	56	8	9	3,0	11,18	8,57	90,87	2,85	27,08	1,56	194,00	3,04	47,80	1,36	16,29	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,58	7,53	98,29	3,20	30,58	1,79	198,00	3,23	49,90	1,42	18,20	1,38	0,393
10/6,3	100	63	7	10	3,3	11,09	8,70	112,86	3,19	34,99	1,78	232,00	3,28	58,70	1,46	20,83	1,37	0,392
10/6,3	100	63	8	10	3,3	12,57	9,87	126,96	3,18	39,21	1,77	266,00	3,32	67,60	1,50	23,38	1,36	0,391
10/6,3	100	63	10	10	3,3	15,47	12,14	153,95	3,15	47,18	1,75	333,00	3,40	85,80	1,58	28,34	1,35	0,387
11/7	110	70	7	10	3,3	11,45	8,98	142,42	3,53	45,61	2,00	286,00	3,55	74,80	1,58	26,94	1,53	0,402

Номер профиля	Размеры, мм					Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей								Угол наклона оси u tga		
	B	b	d	R	r			J_z , см ⁴	i_z , см	J_y , см ⁴	i_y , см	J_{z_1} , см ⁴	y_0 , см	J_{y_1} , см ⁴	z_0 , см		J_u , см ⁴	i_u , см
11/7	110	70	8	10	3,3	13,93	10,93	171,54	3,51	54,64	1,98	353,00	3,61	92,30	1,64	32,31	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,06	11,04	226,53	4,01	75,73	2,29	452,00	4,01	119,00	1,80	43,40	1,76	0,407
12,5/8	125	80	8	11	3,7	15,98	12,58	225,62	4,00	80,95	2,28	518,00	4,05	137,00	1,84	48,52	1,75	0,406
12,5/8	125	80	10	11	3,7	19,70	15,47	311,61	3,98	100,47	2,26	649,00	4,14	173,00	1,92	59,33	1,74	0,404
12,5/8	125	80	12	11	3,7	23,36	18,34	364,79	3,95	116,84	2,24	781,00	4,22	210,00	2,00	69,47	1,72	0,400
14/9	140	90	8	12	4,0	18,00	14,13	363,68	4,49	119,79	2,58	727,00	4,49	194,00	2,03	70,27	1,98	0,411
14/9	140	90	10	12	4,0	22,24	17,46	444,45	4,47	145,54	2,56	911,00	4,58	245,00	2,12	85,51	1,96	0,409
16/10	160	100	9	13	4,3	22,87	17,96	605,97	5,15	186,03	2,85	1221,00	5,19	300,00	2,24	110,40	2,20	0,391
16/10	160	100	10	13	4,3	25,28	19,58	666,69	5,13	204,09	2,84	1359,00	5,23	335,00	2,28	121,16	2,19	0,390
16/10	160	100	12	13	4,3	30,04	23,58	784,22	5,11	238,75	2,82	1634,00	5,32	405,00	2,36	142,14	2,18	0,388
16/10	160	100	14	13	4,3	34,72	27,26	897,29	5,08	271,60	2,8	1910,00	5,40	477,00	2,43	162,49	2,16	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,33	22,20	952,38	5,80	276,37	3,12	1993,00	5,88	444,00	2,44	165,44	2,42	0,376
18/11	180	110	12	14	4,7	33,69	26,40	1122,70	5,77	324,09	3,1	2324,00	5,97	537,00	2,52	194,28	2,4	0,374
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,80	27,37	1449,00	6,45	446,36	3,58	2920,00	6,50	718,00	2,79	263,84	2,75	0,392
20/12,5	200	125	12	14	4,7	37,89	29,74	1568,20	6,43	481,93	3,57	3189,00	6,54	786,00	2,83	285,04	2,74	0,392
20/12,5	200	125	14	14	4,7	43,87	34,43	1800,80	6,41	550,77	3,54	3726,00	6,62	922,00	2,91	326,54	2,73	0,390
20/12,5	200	125	16	14	4,7	49,77	39,07	2026,10	6,38	616,66	3,52	4264,00	6,71	1061,00	2,99	366,99	2,72	0,388
25/16	250	160	12	18	6,0	48,30	37,90	3147,00	8,07	1032,00	4,62	6212,00	7,97	1634,00	3,53	604,00	3,54	0,410
25/16	250	160	16	18	6,0	63,60	49,90	4091,00	8,02	1333,00	4,58	8308,00	8,14	2200,00	3,69	781,00	3,50	0,408
25/16	250	160	18	18	6,0	71,10	55,80	4545,00	7,99	1475,00	4,56	9358,00	8,23	2487,00	3,77	866,00	3,49	0,407
25/16	250	160	20	18	6,0	78,50	61,70	4987,00	7,97	1613,00	4,53	10410,00	8,31	2776,00	3,85	949,00	3,48	0,405

Таблица П.5

Модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона для металлов

Наименование материала	Модуль упругости E , МПа	Модуль сдвига G , МПа	Коэффициент Пуассона μ
Стали углеродистые	$2,0-2,1 \cdot 10^5$	$8,0-8,1 \cdot 10^4$	0,24–0,28
Стали легированные	$2,1 \cdot 10^5$	$8,0-8,1 \cdot 10^4$	0,25–0,30
Стальное литье	$1,75 \cdot 10^5$	–	–
Чугун серый, белый	$1,15-1,6 \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23–0,27
Чугун ковкий	$1,55 \cdot 10^5$	–	–
Медь прокатанная	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,31–0,34
Медь холодноотянутая	$1,3 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^4$	–
Медь, литье	$0,84 \cdot 10^5$	–	–
Бронза фосфористая	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	0,32–0,35
Бронза марганцовистая	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,35
Бронза алюминиевая, литье	$1,05 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	–
Латунь холодноотянутая	$0,91-0,99 \cdot 10^5$	$3,5-3,7 \cdot 10^4$	0,32–0,34
Алюминиевые сплавы	$0,69-0,71 \cdot 10^5$	$2,6-2,7 \cdot 10^4$	0,32–0,36
Алюминиевая проволока	$0,7 \cdot 10^5$	–	–
Дюралюминий	$0,71 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$	–
Цинк	$0,78 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$	0,27
Свинец	$0,15-0,2 \cdot 10^5$	$0,7 \cdot 10^4$	0,42
Никель	$2,06 \cdot 10^5$	$7,5 \cdot 10^4$	0,33

Таблица П.6

Коэффициент линейного расширения α твердых тел, $1/^\circ\text{C}$

Материал	α
Алюминий	$24-26 \cdot 10^{-6}$
Бетон	$10-14 \cdot 10^{-6}$
Бронза	$17-19 \cdot 10^{-6}$
Гетинакс	$20 \cdot 10^{-6}$
Дерево (вдоль волокон)	$2-5 \cdot 10^{-6}$
Каменная кладка	$4-7 \cdot 10^{-6}$
Латунь	$19-22 \cdot 10^{-6}$
Медь	$16,5-17,5 \cdot 10^{-6}$
Никель	$13 \cdot 10^{-6}$
Сталь	$10-13 \cdot 10^{-6}$
Текстолит	$33-41 \cdot 10^{-6}$
Чугун антифрикционный	$12 \cdot 10^{-6}$
Чугун	$10,4 \cdot 10^{-6}$

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Мисуно Олег Иосифович,
Колоско Дина Николаевна,
Легенький Сергей Александрович

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск *В. Н. Основин*
Редактор *Т. В. Каркоцкая*
Компьютерная верстка *О. В. Глатанковой*
Дизайн и оформление обложки *И. А. Усенко*

Подписано в печать 06.08.2014 г. Формат 60×84¹/₁₆.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 12,32. Уч.-изд. л. 9,63. Тираж 90 экз. Заказ 618.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/359 от 09.06.2014.
№ 2/151 от 11.06.2014.
Пр-т Независимости, 99–2, 220023, Минск.