УДК 517

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА КАРЛЕМАНА НА ПАРЕ ОТРЕЗКОВ

Л.А. Хвощинская
Белорусский государственный аграрный технический университет,
Беларусь, Минск, ludmila.ark@gmail.com

Аннотация. Рассмотрен один метод решения интегрального уравнения типа Карлемана на паре отрезков. Задача сведена к краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками. Решение выражено через решения дифференциального уравнения класса Фукса, в котором удалось определить все параметры.

Ключевые слова: интегральное уравнения типа Карлемана, каноническая матрица, краевая задача Римана, дифференциальное уравнение класса Фукса.

SOLUTION OF THE INTEGRAL EQUATION OF CARLEMANN TYPE FOR PAIR SEGMENTS

L.A. Khvoschinskaia
Belarusian State Agrarian Technical University,
Belarus, Minsk, ludmila.ark@gmail.com

Abstract. Considered one method of solving integral equations of Carlemann type for the pair of segments. The problem is reduced to boundary problem of Riemann with piecewise constant matrix and four singular points. The solution is expressed via the solution of a differential equation of Fuchs class in which it was possible to define all the parameters.

Keywords: integral equations of Carlemann type, the canonical matrix, Riemann boundary value problem, differential equation of the Fuchs class.

В 1823г. Н. Абелем рассмотрено и решено интегральное уравнение $\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt$, $0<\alpha<1,\ x>a$, которое описывает движение материальной точки под действием силы тяжести в вертикальной плоскости вдоль кривой. Интегральные уравнения Абеля $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = f(x),\ 0<\alpha<1,\ x>a$, возникают при решении обратных задач в физике твердого тела. Интегральное уравнение Абеля с постоянными пределами

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt = f(x),\ 0<\alpha<1,\ a<x<b, \tag{1}$$

решено Карлеманом [1]. Единственное решение уравнения (1) задается формулой [2]

$$\varphi(x) = \frac{tg\frac{\pi\alpha}{2}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} - \frac{\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi^2}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{dt}{(x-t)^\alpha}\cdot\frac{d}{dt}\int\limits_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int\limits_\tau^b \left(\frac{s-a}{b-s}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{f(s)ds}{(s-\tau)^\alpha} \tag{2}$$

.

Рассмотрим интегральное уравнение Карлемана на паре отрезков

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\alpha_1}} + \int\limits_{a_2}^{a_3} \frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\alpha_2}} = f(x),\ a_1<x<a_3, \tag{3}$$

где α_1, α_2 – заданные действительные числа, $0<\alpha_k<1$, $k=1,2$, $\alpha_1\neq\alpha_2$, $a_1<a_2<a_3$.

Решение уравнения (3) в случае $a_3=\infty$ построено в работе [3] в явном виде и выражено через гипергеометрические функции. Отмечено, что при $a_3\neq\infty$ решение уравнения (3) значительно усложняется. Цель настоящей работы – построить решение уравнения (3) при $a_3\neq\infty$, используя результаты работ [4, 5].

Запишем уравнение (3) в виде системы трех уравнений

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2}\frac{\varphi_1(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha_1}}+\int_{a_2}^{a_3}\frac{\varphi_2(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha_2}}= f_1(x),\ a_1<x<a_2,\\
&\int_{a_1}^{a_2}\frac{\varphi_1(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha_1}}+\int_{a_2}^{a_3}\frac{\varphi_2(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha_2}}= f_2(x),\ a_2<x<a_3,\\
&\int_{a_1}^{a_2}\frac{\varphi_1(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha_1}}+\int_{a_2}^{a_3}\frac{\varphi_2(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha_2}}=0,\ a_3<x<\infty .
\end{aligned}\tag{4}$$

Введем две новые неизвестные функции $\Phi_k(z)=\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\varphi_k(t)\,dt}{|t-z|^{\alpha_k}}$, $k=1,2$, которые аналитичны в комплексной плоскости Z с разрезом по лучу (a_1,∞). Найдем предельные значения этих функций на берегах разреза. Для $a_1<x<a_2$ получаем $\Phi_1^{\pm}(x)=e^{\pm\pi i\alpha_1}\int_{a_1}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha_1}}+\int_{x}^{a_2}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha_1}}$, откуда находим

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha_1}}=\frac{e^{\pi i\alpha_1}\Phi_1^+(x)+\Phi_1^-(x)}{1+e^{\pi i\alpha_1}},\ \Phi_2^+(x)=\Phi_2^-(x)=\int_{a_2}^{a_3}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha_2}}. \tag{5), (6}$$

Аналогично для $a_2<x<a_3$ получаем

$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha_2}}=\frac{e^{\pi i\alpha_2}\Phi_2^+(x)+\Phi_2^-(x)}{1+e^{\pi i\alpha_2}},\ \Phi_1^+(x)=e^{-2\pi i\alpha_1}\Phi_1^-(x)=e^{-\pi i\alpha_1}\int_{a_1}^{a_2}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha_1}}. \tag{7), (8}$$

Для $a_3<x<\infty$

$$\Phi_1^+(x)=e^{-\pi i\alpha_1}\Phi_1^-(x),\ \Phi_2^+(x)=e^{-\pi i\alpha_2}\Phi_2^-(x). \tag{9), (10}$$

С помощью формул (5) - (10) перепишем систему (4) в виде краевых условий для двух функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$:

$$\begin{cases}\Phi_1^+(x)=-e^{\pi i\alpha_1}\Phi_1^-(x)-\left(1+e^{-\pi i\alpha_1}\right)\Phi_2^-(x)+\left(1+e^{-\pi i\alpha_1}\right)f_1(x),\\ \Phi_2^+(x)=\Phi_2^-(x),\quad a_1<x<a_2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Phi_1^+(x)=e^{-2\pi i\alpha_1}\Phi_1^-(x),\quad a_2<x<a_3,\\ \Phi_2^+(x)=-e^{-\pi i\alpha_1}\left(1+e^{-\pi i\alpha_2}\right)\Phi_1^-(x)-e^{-\pi i\alpha_2}\Phi_2^-(x)+\left(1+e^{-\pi i\alpha_2}\right)f_2(x),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Phi_1^+(x)=e^{-2\pi i\alpha_1}\Phi_1^-(x),\\ \Phi_2^+(x)=e^{-2\pi i\alpha_2}\Phi_2^-(x),\end{cases}\quad a_3<x<\infty.$$

Таким образом, для вектор-функции $\Phi(z)=\left(\Phi_1(z),\Phi_2(z)\right)$ мы получили краевую задачу Римана с кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками a_1, a_2, a_3, ∞:

$$\Phi^+(x)=A_k\Phi^-(x)+F_k(x),\quad a_k<x<a_{k+1},\ k=1,2,3;\ a_4=\infty, \tag{11}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}-e^{-\pi i\alpha_1} & -\left(1+e^{-\pi i\alpha_1}\right)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad F_1(x)=\begin{pmatrix}\left(1+e^{-\pi i\alpha_1}\right)f_1(x)\\ 0\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}e^{-\pi i\alpha_1} & 0\\ -e^{-\pi i\alpha_1}\left(1+e^{-\pi i\alpha_2}\right) & -e^{-\pi i\alpha_2}\end{pmatrix},\qquad F_2(x)=\begin{pmatrix}0\\ \left(1+e^{-\pi i\alpha_2}\right)f_2(x)\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix} e^{-2\pi i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\alpha_2}\end{pmatrix}, \qquad F_3(x)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Решение задачи (11) ищем в классе функций, ограниченных при $z\to a_k$, $k=1,2,3$, и исчезающих на бесконечности.

Запишем матрицы V_1, V_2, V_3, V_4 группы монодромии задачи (11) и их характеристические числа λ_k, μ_k. $\left(k=\overline{1,4}\right)$:

$$V_1=A_1^{-1}=\begin{pmatrix} -e^{\pi i\alpha_1} & -\left(1+e^{\pi i\alpha_1}\right) \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad V_2=A_1A_2^{-1}=\begin{pmatrix} -e^{\pi i\alpha_1}+\left(1+e^{\pi i\alpha_1}\right)\left(1+e^{\pi i\alpha_2}\right) & e^{\pi i\alpha_2}\left(1+e^{-\pi i\alpha_1}\right) \\ -e^{\pi i\alpha_1}\left(1+e^{\pi i\alpha_2}\right) & -e^{\pi i\alpha_2}\end{pmatrix},$$

$$V_3=A_2A_3^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{\pi i\alpha_1}\left(1+e^{-\pi i\alpha_2}\right) & -e^{\pi i\alpha_2}\end{pmatrix}, \ V_4=A_3, \ \lambda_1=-e^{\pi i\alpha_1}, \ \mu_1=1; \ \lambda_2=-1, \ \mu_2=-e^{\pi i(\alpha_1+\alpha_2)};$$

$\lambda_3=1$, $\mu_3=-e^{-\pi i\alpha_2}$; $\lambda_4=e^{-2\pi i\alpha_1}$, $\mu_4=e^{-2\pi i\alpha_2}$.

Далее находим числа $\rho_k=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\lambda_k$, $0\le\operatorname{Re}\lambda_k<1$, $\sigma_k=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\mu_k$, $0\le\operatorname{Re}\sigma_k<1$, $k=\overline{1,4}$, $0\le\operatorname{Re}\lambda_k<1$, $\rho_1=\dfrac{1+\alpha_1}{2}$, $\sigma_1=0$; $\rho_2=\dfrac{1}{2}$, $\sigma_2=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+1}{2}$; $\rho_3=0$, $\sigma_3=\dfrac{1+\alpha_2}{2}$; $\rho_4=1-\alpha_1$, $\sigma_4=1-\alpha_2$, где для определенности считаем, что $0<\alpha_1+\alpha_2<1$, $\Delta=\sum_{k=1}^{4}\left(\rho_k+\sigma_k\right)=4$, $\rho=\rho_4-1=-\alpha_1$, $\sigma=\sigma_4-2=-\alpha_2-1$, если $\alpha_1>\alpha_2$ и $\rho=\rho_4-2=-\alpha_1-1$, $\sigma=\sigma_4-1=-\alpha_2$, если $\alpha_1<\alpha_2$. Числа ρ_k,σ_k ($k=1,2,3$), ρ, σ удовлетворяют соотношению Фукса: $\sum_{k=1}^{3}\left(\rho_k+\sigma_k\right)+\rho+\sigma=1$. Индекс æ и частные индексы æ$_1$, æ$_2$ задачи равны æ$=-\Delta=-4$, æ$_1$ = æ$_2=-2$, т.е. задача (11) будет разрешима при выполнении четырех условий разрешимости. Находим также характеристические числа λ_{12}, μ_{12} и λ_{23}, μ_{23} матриц

$$V_{12}=V_1\cdot V_2=A_2^{-1}=\begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha_1} & 0 \\ -e^{\pi i(\alpha_1+\alpha_2)}\left(1-e^{-\pi i\alpha_2}\right) & -e^{\pi i\alpha_2}\end{pmatrix}, \ \lambda_{12}=-e^{\pi i\alpha_1}, \ \mu_{12}=-e^{\pi i\alpha_2};$$

$$V_{23}=V_2\cdot V_3=A_1\cdot A_3^{-1}=\begin{pmatrix} -e^{\pi i\alpha_1} & -e^{2\pi i\alpha_2}\left(1+e^{-\pi i\alpha_1}\right) \\ 0 & e^{2\pi i\alpha_2}\end{pmatrix}, \ \lambda_{23}=-e^{\pi i\alpha_1}, \ \mu_{23}=e^{2\pi i\alpha_2}.$$

Ветви логарифмов чисел $\rho_{k,k+1}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\lambda_{k,k+1}$ и $\sigma_{k,k+1}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\mu_{k,k+1}$ удовлетворяют условиям

$$\rho_{12}+\sigma_{12}=\rho_1+\sigma_1+\rho_2+\sigma_2=1+\alpha_1+\frac{1+\alpha_2}{2} \Rightarrow \rho_{12}=1+\alpha_1, \sigma_{12}=\frac{1+\alpha_2}{2},$$

$$\rho_{23}+\sigma_{23}=\rho_2+\sigma_2+\rho_3+\sigma_3=1+\alpha_2+\frac{1+\alpha_1}{2} \Rightarrow \rho_{23}=\frac{1+\alpha_1}{2}, \sigma_{12}=1+\alpha_2.$$

Каноническая матрица $X(x)$ однородной краевой задачи $X^{+}(x)=A_kX^{-}(x)$, $a_k<x<a_{k+1}$, $k=1,2,3$, соответствующей задаче (11), является решением системы дифференциальных уравнений класса Фукса

$$\frac{dX}{dz}=X\sum_{k=1}^{3}\frac{U_k}{z-a_k}, \tag{12}$$

где $U_k\sim\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k=1,2,3$. Обозначим $W=\begin{pmatrix} -\min(\rho,\sigma) & 0 \\ 0 & 1-\max(\rho,\sigma)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_2\end{pmatrix}$.

Матрица W с точностью до постоянного множителя единственным образом представима в виде суммы матриц [4]

$$W = S_1 + S_2 + S_3 = S_1 + S_{23} = S_{12} + S_3, \tag{13}$$

где $S_k \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $S_{12} \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_{12}$, $S_{23} \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_{23}$.

$$S_1 + S_{23} = W \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha_1}{2} & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha_1}{2} & -c \\ 0 & \alpha_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$S_{12} + S_3 = W \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + 1 & 0 \\ d & \frac{\alpha_2 + 1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -d & \frac{1+\alpha_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_2 \end{pmatrix},$$

где c, d – произвольные постоянные. Из (13) следует, $S_2 = S_{23} - S_3 = S_{12} - S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha_1}{2} & -c \\ d & \frac{1+\alpha_2}{2} \end{pmatrix}$.

Поскольку $S_2 \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_2$, то $\det S_2 = \rho_2 \cdot \sigma_2$, или $\frac{1+\alpha_1}{2} \cdot \frac{1+\alpha_2}{2} + c \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha_1+\alpha_2}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow c \cdot d = -\frac{1}{4}\alpha_1 \cdot \alpha_2$. Матрицы S_k $(k = 1, 2, 3)$ являются дифференциальными матицами системы (12), которая принимает вид

$$\frac{dX}{dz} = X\left[\frac{\begin{pmatrix} (1+\alpha_1)/2 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{z-a_1} + \frac{\begin{pmatrix} (1+\alpha_1)/2 & -c \\ -\alpha_1 \cdot \alpha_2 / c & (1+\alpha_2)/2 \end{pmatrix}}{z-a_2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 / c & (1+\alpha_2)/2 \end{pmatrix}}{z-a_3}\right], \tag{14}$$

где c – произвольная постоянная.

Элементы матрицы $X(z)$ являются решениями дифференциального уравнения класса Фукса с четырьмя особыми точками a_1, a_2, a_3, ∞:

$$u'' - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1+1}{z-a_1} + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{z-a_2} + \frac{\alpha_2-1}{z-a_3}\right)u' + \frac{1}{4}\left(\frac{2(\alpha_1+1)}{(z-a_1)^2} + \frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{(z-a_2)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\left(4\alpha_1\alpha_2 + 3(\alpha_1-\alpha_2-1)\right)z + (\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_1\alpha_2+1)(a_1-a_3) + (\alpha_1-\alpha_2+1)a_2}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\right)u = 0 \cdot$$

С помощью замены $u \cdot v = (z-a_1)(z-a_2)^{\frac{1}{2}}$ последнее уравнение преобразуется в уравнение вида

$$v'' - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1-1}{z-a_1} + \frac{\alpha_1+\alpha_2-1}{z-a_2} + \frac{\alpha_2-1}{z-a_3}\right)v + \frac{(1-2\alpha_1)(3-2\alpha_2)z+q}{4\prod_{k=1}^{3}(z-a_k)}v = 0, \tag{15}$$

где $q = \alpha_1(1-2\alpha_2)a_1 + (\alpha_1+\alpha_2-1)a_2 + (1-2\alpha_1)(\alpha_2-2)a_3$.

В окрестности каждой особой точки a_k $\left(k = \overline{1,4}\right)$ уравнение (15) имеет 2 линейно независимых решения, представимое рядами $v_{1k}(z) = (z-a_k)^{\rho_k^*}\sum_{n=0}^{\infty} c_k (z-a_k)^n$,

$v_{2k}(z)=(z-a_k)^{\sigma_k^*}\sum_{n=0}^{\infty}d_k(z-a_k)^n$, где $\rho_1^*=\dfrac{\alpha_1-1}{2}$, $\sigma_1^*=0$; $\rho_2^*=0$, $\sigma_2^*=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$; $\rho_3^*=0$, $\sigma_3^*=\dfrac{\alpha_2+1}{2}$; $\rho_4^*=\dfrac{1}{2}-\alpha_1$, $\sigma_4^*=\dfrac{3}{2}-\alpha_2$, а коэффициенты находятся непосредственно из рекуррентных соотношений после подстановки рядов в уравнение. Каноническая матрица $X(z)$ задачи (11) в окрестности каждой особой точки задается формулой $X(z)=(z-a_1)\sqrt{z-a_2}D_k\begin{pmatrix} v_{1k} & (z-a_2)(z-a_3)v'_{1k} \\ v_{2k} & (z-a_2)(z-a_3)v'_{2k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & q(z)(z-a_1)^{-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $k=1,2,3$, где D_k матрицы, приводящие матицы V_k к нормальной жордановой форме, $q(z)=\left(\dfrac{1}{2}-\alpha_1\right)\left(\dfrac{3}{2}-\alpha_2\right)z+4q$.

Решение краевой задачи (11) находим по формуле

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}X(z)\sum_{k=1}^{3}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left[X^+(x)\right]^{-1}F_k(x)\frac{dx}{x-z}=\frac{1}{2\pi i}X(z)\left[\int_{a_1}^{a_2}\left[X^+(x)\right]^{-1}F_1(x)\frac{dx}{x-z}+\right.$$

$$\left.+\int_{a_2}^{a_3}\left[X^+(x)\right]^{-1}F_2(x)\frac{dx}{x-z}\right].$$

Учитывая, что $X^+(x)=A_kX^-(x)$, $a_k<x<a_{k+1}$, $k=1,2,3$, и применяя формулы Сохоцкого, а также формулы (5) и (7), находим интегралы

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\alpha_k}}=g_k(x),\ k=1,2. \qquad (16)$$

Обращая уравнения (16) по формулам (2), получим единственное решение интегрального уравнения (3).

Библиографический список

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640с.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и техника, 1987. 688с.
3. Хвощинская Л.А. Явное решение одного интегрального уравнения типа уравнения Карлема на полуоси // Весці АН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук. 1994. №4. С.32-37.
4. Хвощинская Л.А. О применении логарифмирования произведения матриц к решению проблемы Римана // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. в 12т. [под ред. А.А. Большакова]. 2015. Т.7. С.28-31.
5. Хвощинская Л.А. Об одном методе построения дифференциальных матриц проблемы Римана // Междунар. семнадцатая науч. конф. им. акад. М. Кравчука: материалы. 2016. Т.1. Киев: НТУУ «КПИ». 2016. С.263–266.