РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРЁХЭЛЕМЕНТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СДВИГОМ

Хвощинская Л.А.
Жоровина Т.Н.
Минск, Беларусь

Рассматривается следующая краевая задача: найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[a,b]$ действительной оси, по краевому условию

$$\Phi^+(x)-\lambda\Phi^-(x)=\mu\Phi(-x),\quad a<x<b, \tag{1}$$

где λ,μ — заданные числа, $\lambda\neq 0, \lambda\neq 1, a>0$. Решение задачи ищется в классе функций, ограниченных при $z\to a$, $z\to b$. Введём новую неизвестную функцию $\Psi(z)=\Phi(-z)$, аналитическую в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-b,-a]$. Тогда на интервале $a<x<b$ имеем следующую систему краевых условий:

$$\begin{cases}\Phi^+(x)-\lambda\Phi^-(x)=\mu\Psi^-(x),\\ \Psi^+(x)=\Psi^-(x),\end{cases}\quad a<x<b.$$

Заменяя x на $-x$, получим систему краевых условий на интервале $-b<x<-a$:

$$\begin{cases}\Psi^+(x)-\lambda\Psi^-(x)=\mu\Phi^-(x),\\ \Phi^+(x)=\Phi^-(x),\end{cases}\quad -b<x<-a.$$

Таким образом, мы получаем краевую задачу Римана для вектор-функции $\Omega(z)=(\Phi(z),\Psi(z))$, аналитической в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-b,b]$, с кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками $a_1=-b$, $a_2=-a$, $a_3=a$, $a_4=b$:

$$\Omega^+(x)=A_k\Omega^-(x),\quad a_k<x<a_{k+1},\quad k=1,2,3, \tag{2}$$

где $A_1=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \mu & \lambda\end{pmatrix}$.

Решение краевой задачи (2) выражаем через решение дифференциального уравнения класса Фукса

$$\frac{dY}{dz}=Y\sum_{k=1}^{4}\frac{U_k}{z-a_k}, \tag{3}$$

где U_k — постоянные 2×2 матрицы-вычеты, $\sum_{k=1}^{4}U_k=0$, элементы которых найдены с применением «метода логарифмирования произведения матриц» [1,2]. Для этого находим матрицы группы монодромии дифференциального уравнения (3) по формулам $V_k=A_{k-1}\cdot A_k^{-1}$, $k=1,\dots,4$, $A_0=A_4=E$; их характеристические числа α_k, β_k и числа $\rho_k=\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k=\frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$, $0\le\operatorname{Re}\rho_k<1$, $0\le\operatorname{Re}\sigma_k<1$, $k=1,2,3$, а ветви ρ_4 и σ_4 выбираются таким образом, чтобы выполнялось соотношение Фукса $\sum_{k=1}^{4}(\rho_k+\sigma_k)=1$:

$$V_1 = A_1^{-1}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \beta_1 = 1; \quad V_2 = A_1, \quad \alpha_2 = \lambda, \quad \beta_2 = 1;$$

$$V_3 = A_3^{-1}, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_3 = \frac{1}{\lambda}; \quad V_4 = A_3, \quad \alpha_4 = 1, \quad \beta_4 = \lambda.$$

Обозначив $\rho = \frac{1}{2\pi i}\ln\lambda$, находим $\sigma_1 = \sigma_2 = \rho_3 = 0$, $\rho_2 = \rho$,

$\rho_1 = \sigma_3 = \begin{cases} -\rho, & \text{если } \lambda > 0, \\ 1-\rho, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases}$ $\rho_4 = \begin{cases} \rho, & \text{если } \lambda > 0, \\ \rho - 1, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases}$ $\sigma_4 = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda > 0, \\ 0, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases}$ Далее находим матрицы $V_{k,k+1} = V_k \cdot V_{k+1}$, $k = 1,2,3$, их характеристические числа $\alpha_{k,k+1}$, $\beta_{k,k+1}$ и числа $\rho_{k,k+1} = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{k,k+1}$, $\sigma_{k,k+1} = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_{k,k+1}$, ветви которых выбираем из условий $\rho_{k,k+1} + \sigma_{k,k+1} = \rho_k + \sigma_k + \rho_{k+1} + \sigma_{k+1}$, $\left|\operatorname{Re}(\rho_{k,k+1} - \sigma_{k,k+1})\right| \le 1$:

$$V_{12} = V_1 \cdot V_2 = E, \quad \alpha_{12} = \beta_{12} = 0; \quad V_{34} = V_3 \cdot V_4 = E, \quad \alpha_{34} = \beta_{34} = 1;$$

$$V_{23} = V_2 \cdot V_3 = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} \lambda^2 - \mu^2 & \mu \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{23} = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 - \mu^2 + 1 + \sqrt{(1-\lambda^2-\mu^2)(1+3\lambda^2-\mu^2)}\right), \quad \beta_{23} = \frac{1}{\alpha_{23}};$$

$$\rho_{12} = \rho_{34} = 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{34} = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda > 0, \\ 1, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases} \quad \rho_{23} = \tau := \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{23}, \quad \sigma_{23} = \begin{cases} -\tau, & \text{если } \operatorname{Re}\tau > 0, \\ 1-\tau, & \text{если } \operatorname{Re}\tau < 0. \end{cases}$$

Матрицы-вычеты U_k, $k = 1,\ldots,4$ находим из условий: $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$; $U_k \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k = 1,\ldots,4$; $U_k + U_{k+1} \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_{k,k+1}$, $k = 1,2,3$. Непосредственные вычисления показали, что при $\lambda > 0$ и $\operatorname{Re}\rho_{23} > 0$ система дифференциальных уравнений (3) имеет вид

$$\frac{dY}{dz} = Y\left[\frac{1}{z+b}\begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ \rho - \tau & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z+a}\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ \tau - \rho & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z-a}\begin{pmatrix} 0 & \rho - \tau \\ 0 & -\rho \end{pmatrix} + \frac{1}{z-b}\begin{pmatrix} 0 & \tau - \rho \\ 0 & \rho \end{pmatrix}\right]$$

и сводится к следующему дифференциальному уравнению второго порядка класса Фукса

$$y'' + \left(\frac{1+\rho}{z+b} + \frac{1-\rho}{z+a} - \frac{\rho}{z-a} + \frac{\rho}{z-b}\right)y' + \frac{(b-a)^2\tau^2}{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}y = 0. \qquad (4)$$

В окрестности каждой особой точки a_k, $k = 1,\ldots,4$ уравнение (4) имеет два линейно независимых решения, представимых рядами

$$u_k(z) = (z-a_k)^{\rho_k}\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a_k)^n, \quad v_k(z) = (z-a_k)^{\sigma_k}\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a_k)^n,$$

коэффициенты c_n, d_n которых находим непосредственно из рекуррентных соотношений после подстановки рядов в уравнение.

Решение краевой задачи (2) в окрестности каждой особой точки a_k, $k = 1,\ldots,4$ имеет вид $\Omega(z) = \begin{pmatrix} \Omega_1(z) \\ \Omega_2(z) \end{pmatrix} = D_k\begin{pmatrix} u_k(z) \\ v_k(z) \end{pmatrix}$, где D_k — матрица, приводящая V_k к нормальной жордановой форме, $D_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\mu/\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_3 = D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu/\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

Функция $\Phi(z) = \frac{1}{2}\left(\Omega_1(z) + \Omega_2(-z)\right)$ является решением задачи (1). Аналогично строится решение задачи (1) при $\lambda < 0$ и $\operatorname{Re}\rho_{23} < 0$.

Список литературы:

1. Хвощинская Л.А. Об одном методе построения дифференциальных матриц проблемы Римана // Междунар. 17-я науч. конф. им. акад. М.Кравчука: материалы, 2016, Т. 1. Киев: НТУЦ «КПИ»: 2016. С. 263-266.

2. Khvostchinskaya L.A. On a Method of Solving Integral Equation of Carleman Type on Pair of Segments // Transmutation on Operators and Applications. Springer Nature Switzerland. 2020. P. 431-446.