МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Для студентов- заочников экономических специальностей БГАТУ

Минск 2007

УДК 51 (07)
ББК 22.1 я 7
В У 91

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом факультета предпринимательства и управления БГАТУ.

Протокол № 3 от 20.12.2006 г.

Составители:

канд. физ-мат. наук, доцент *Т.А. Жур*,
канд. физ-мат. наук, доцент *И.М. Морозова*,
канд. пед. наук, доцент, *Н.Г. Серебрякова*

Рецензенты:

д-р пед. наук, профессор, зав. кафедрой ВМ и И ЧУО «ИПД»
Г.М. Булдык,
д-р эконом. наук, профессор, зав. кафедрой МиП АПК «БГАТУ»
И.И. Леньков

В 93 **Учебно-методический комплекс дисциплины «Высшая математика»** : программа, метод. указания и контрольные задания для студентов заочн. формы обучения высш. учеб. заведений по направлению образования Экономика / Сост. Морозова И.М. [и др.]. – Мн. : БГАТУ, 2007. – 232 с.

ISBN

УДК 51(07)
ББК 22.1я 7

ISBN

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методический комплекс (УМК) дисциплины «Высшая математика» предназначен для студентов-заочников экономических специальностей высших учебных заведений, для которых учебным планом предусмотрено изучение курса высшей математики в объеме 136 учебных часов.

УМК состоит из двух частей и содержит программу по курсу высшей математики, разделенную на модули, с указанием в квадратных скобках источников из списка рекомендованной литературы, а также конспект лекций по всем вопросам программы, которые должен знать студент после изучения указанного модуля. В УМК предлагаются после каждого модуля задачи, которые могут решаться на практических занятиях, а также самостоятельно студентом. Методические указания по выполнению каждой из контрольных работ содержат решения задач, тщательный разбор которых поможет студенту-заочнику выполнить соответствующую контрольную работу. Контрольные работы составлены по двадцативариантной системе. Это позволило отразить в них более широкий круг вопросов программы.

ЧАСТЬ I
ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Порядок выполнения контрольной работы № 1

Рабочая программа курса высшей математики 1-го семестра для экономических специальностей вузов состоит из следующих модулей (разделов):

1 Линейная алгебра.

2 Система линейных алгебраических уравнений и неравенств.

3 Векторная алгебра.

4 Аналитическая геометрия.

5 Кривые второго порядка.

6 Функции одной переменной. Непрерывность функции одной переменной.

7 Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

К выполнению каждой контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующего материала курса по учебнику и решения задач, указанных к каждой теме. Следует также внимательно разобрать решения тех задач, которые приводятся в данном пособии к каждой теме. При этом следует руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждую работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть указаны фамилия и инициалы студента, полный шифр зачетной книжки, номер контрольной работы и дата ее отправки в вуз. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. При необходимости следует делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении данной задачи. Все вычисления (в том числе и вспомогательные) необходимо делать полностью. Чертежи и графики должны быть выполнены (желательно па миллиметровой бумаге) аккуратно и четко с указанием единиц масштаба, координатных осей и других элементов чертежа. Объяснения к задачам должны соответствовать тем обозначениям, которые даны на чертеже.

Для замечаний преподавателя необходимо на каждой странице оставлять поля шириной 3–4 см.

2. После получения работы (как зачтенной, так и незачтенной) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом недостатки. В случае незачета студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

3. В период экзаменационной сессии студент обязан представить все прорецензированные и зачтенные контрольные работы. При необходимости (по требованию преподавателя) студент должен давать на экзамене устные пояснения ко всем или некоторым задачам, содержащимся в этих работах.

4. Студент выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в табл. 1, если же предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или нуль (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач для соответствующего варианта даны в табл. 2.

Таблица 1

Номера вариантов	Номера задач контрольной работы № 1				
1	11	31	51	71	91
2	12	32	52	72	92
3	13	33	53	73	93
4	14	34	54	74	94
5	15	35	55	75	95
6	16	36	56	76	96
7	17	37	57	77	97
8	18	38	58	78	98
9	19	39	59	79	99
0	20	40	60	80	100

Таблица 2

Номера вариантов	Номера задач контрольной работы № 1				
1	1	21	41	61	81
2	2	22	42	62	82
3	3	23	43	63	83
4	4	24	44	64	84
5	5	25	45	65	85
6	6	26	46	66	86
7	7	27	47	67	87
8	8	28	48	68	88
9	9	29	49	69	89
0	10	30	50	70	90

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Пискунов, Н.С. Курс дифференциального и интегрального исчисления : Т. 1 / Н.С. Пискунов. — М.: Наука, 1985.
2. Пискунов, Н.С. Курс дифференциального и интегрального исчисления : Т. 2 / Н.С. Пискунов. — М.: Наука, 1985.
3. Жевняк, Р.М. Высшая математика / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. — Мн.: Высш. шк., 1985–1987. — Ч. 2, 3.
4. Красс, М.С. Основы математики и её приложения в экономическом образовании / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. — М.: Дело, 2001.
5. Индивидуальные домашние задания по высшей математике / А.П. Рябушко [и др.]. — Мн.: Высш. шк., 2000. — Ч. 1, 2.
6. Гусак, А.Н. Высшая математика / А.Н. Гусак — Мн.: Тетра Системс, 2000. — Ч. 1, 2.
7. Малыхин, В.И. Математика в экономике / В.И. Малыхин. — М.: ИНФРА-М, 2001.

Дополнительная литература

1. Высшая математика : Общий курс / под общ. ред. С.А. Самаля. — М.: Высшая школа, 2000.
2. Лихолетов, И.И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И.И. Лихолетов, И.П. Мицкевич. — Мн.: Вышэйшая школа, 1976.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Модуль 1
Линейная алгебра

1. Определители и их свойства, вычисление. [6], гл. 4, § 4.3.
2. Матрицы и линейные операции над ними. Умножение матриц. [4], гл. 13, § 13.1.
3. Ранг матрицы. [4], гл. 14, § 14.1.
4. Обратная матрица и ее нахождение. [4], гл. 13, § 13.2.

Модуль 2
Система линейных алгебраических уравнений и неравенств

1. Теорема Кронекера–Капелли о совместности систем линейных уравнений. [4], гл. 15, § 15.1.
2. Правило Крамера решения систем. [6], гл. 4, § 4.8.
3. Матричный метод решения систем линейных уравнений. [4], гл. 15, § 15.1.
4. Метод Гаусса решения систем. [4], гл. 15, § 15.2.
5. Геометрический смысл системы линейных уравнений и системы неравенств с двумя, тремя, n переменными.

Модуль 3
Векторная алгебра

1. Векторы. Операции сложения и вычитания векторов, умножение вектора на число. Линейная зависимость, независимость векторов. [6], гл. 5, § 5.1, 5.2.
2. Линейное пространство, его размерность и базис. [6], гл. 5, § 5.5, 5.6.
3. Проекция вектора на ось. Свойства проекции. Системы координат на прямой, плоскости и в пространстве. Координаты вектора. [6], гл. 5, § 5.4.
4. Деление отрезка в данном отношении. [6], гл. 5, § 5.6.
5. Скалярное произведение двух векторов, его свойства. Длина вектора. Угол между векторами. Направляющие косинусы вектора. [6], гл. 5, § 5.7.
6. Полярные координаты точек на плоскости. [7], тема 2, § 2.2.

Модуль 4
Аналитическая геометрия

1. Уравнения прямой на плоскости: общее уравнение, уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой, проходящей через две точки. [6], гл. 2, § 2.1.

2. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой. [6], гл. 2, § 2.1.
3. Прямая в пространстве. Ее основные уравнения. [6], гл. 6, § 6.5.
4. Взаимное расположение прямых в пространстве. [6], гл. 6, § 6.6.
5. Плоскость, ее основные уравнения. [6], гл. 6, § 6.4.
6. Взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости. [6], гл. 6, §6.5.

Модуль 5
Кривые второго порядка

1. Общее уравнение кривой второго порядка. [6], гл. 2, § 2.3.
2. Окружность. [6], гл. 2, § 2.4.
3. Эллипс. [6], гл. 2, § 2.5.
4. Гипербола. [6], гл. 2, § 2.6.
5. Парабола. [6], гл. 2, § 2.7.

Модуль 6
Функция одной переменной. Непрерывность функции одной переменной

1. Функция, способы задания и классификация. Основные элементарные функции. [1], гл. 1, § 1–10.
2. Предел функции в точке. Бесконечно малые величины и их свойства. Теоремы о пределах. [1], гл. 2, § 1–3.
3. Два замечательных предела. [1], гл. 2, § 6–8.
4. Сравнение бесконечно малых величин. [1], гл. 2, § 4.
5. Непрерывность функции, точки разрыва. [1], гл. 2, §9, 10.

Модуль 7
Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Производная функции, ее геометрический, механический и экономический смысл. [1], гл. 3, § 1–4.
2. Производная суммы, произведения, частного, сложной и обратной функций. [1], гл. 3, § 1–7, 9, 13.
3. Таблица производных основных элементарных функций. [1], гл. 3, § 15.
4. Уравнения касательной и нормали к кривой. [1], гл. 3, § 26.
5. Производные высшего порядка. Механический смысл второй производной. [1], гл. 3, § 22, 23.
6. Дифференциал функции и его нахождение. [1], гл. 3, § 20–21.

7. Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа. [1], гл. 4, § 1–3.
8. Правило Лопиталя и его приложения к раскрытию неопределенностей. [1], гл. 4, § 3.
9. Признаки возрастания и убывания функции. [1], гл. 5, § 2.
10. Экстремум функции. Необходимый признак экстремума. [1], гл. 5, § 3.
11. Первый достаточный признак экстремума функции. [1], гл. 5, § 4.
12. Исследование функций на экстремум с помощью второй производной. [1], гл. 5, § 5.
13. Выпуклость и вогнутость кривых. [1], гл. 5, § 9.
14. Асимптоты кривых и их нахождение. [1], гл. 5, § 10.
15. Общая схема исследования функций и построение графиков. [1], гл. 4, § 11.

МОДУЛЬ 0 ВВЕДЕНИЕ

Преподавание высшей математики для студентов экономических специальностей преследует следующую цель:

– ознакомить студентов с основами высшей математики, необходимыми для решения теоретических и практических задач, обусловленных развитием рынка, которые являются теоретической основой статистических дисциплин, которые непосредственно используются при изучении массовых экономических явлений, обработке экономической информации и выявлении статистических закономерностей сложных и многообразных экономических процессов;
– научить студентов самостоятельно работать с учебной литературой, развить логическое мышление и повысить уровень подготовленности.

МОДУЛЬ 1 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§ 1 Определители

Определителем второго порядка называется число, записанное в виде квадратной таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по правилу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Минором элемента a_{ik} определителя называется определитель, обозначаемый символом M_{ik}, который получается из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} определителя, обозначаемым A_{ik}, называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ik} четная, и со знаком минус в противном случае, т. е.

$$\mathrm{A}_{ik} = (-1)^{i+k}\mathrm{M}_{ik}.$$

Определитель третьего порядка вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример1.1

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 3(-34) + 2(-17) = 68$$

Свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если строки определителя заменить столбцами, а столбцы — соответствующими строками.

2. Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя.

3. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

5. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственно элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

§ 2 Матрицы

Определение. Прямоугольная таблица, составленная из элементов a_{ik} некоторого множества, называется *матрицей.* Обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1_n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{m_n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1_n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{m_n} \end{bmatrix}$$

Первый индекс обозначает номер строки, второй — номер столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Если матрица имеет m строк и n столбцов, то говорят, что матрица имеет размерность $m \times n$. Для обозначения матриц употребляются символы: $A_{n\times m}$, $B_{k\times l}$, (a_{ik}), $[a_{ik}]$, (b_{ij}), $[b_{ij}]$, $(a_{ik})_{m\times n}$ и т. д.

Матрицы, у которых число строк равно числу столбцов, т.е. $m=n$, называются квадратными порядка n. В частности, матрица порядка 1×1 отождествляется с ее элементом, т.е. числа — частный случай матрицы.

Элементы квадратной матрицы a_{11}, $a_{22}, \ldots a_{nn}$ составляют ее главную диагональ.

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то матрица называется диагональной и

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = diag(1, 2, 3).$

Диагональная матрица, все элементы которой равны единице, называется единичной и обозначается Е или E_n где n — порядок матрицы

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_1 = (1)\ ,\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = diag(1, 1, 1)\,.$$

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные ниже (выше) диагонали равны нулю, называется — соответственно верхней (нижней) треугольной матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ 0 & a_{22}...a_{2n} \\ 00 & ....a_{2n} \end{pmatrix} \text{ — верхняя треугольная матрица;}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0... \quad 0 \\ a_{21} & a_{22}... \ 0 \\ .... & \\ a_{n1} & a_{n2}....\ a_{nn} \end{pmatrix} \text{ — нижняя треугольная матрица.}$$

Например, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Нуль-матрицей размерности $n \times m$, обозначаемой $0_{n \times m}$, называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Две матрицы $A = (a_{ij})_{k \times l}$, $B = (a_{ij})_{m \times n}$ называются равными, если они имеют одинаковые размерности, т.е. $n = k$ и $m = l$ и элементы этих матриц, занимающие одну и туже позицию, равны.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, то $A = B$.

§ 3 Основные операции над матрицами

Сложение матриц. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одной и той же размерности $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ той же размерности такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Итак, можно складывать только матрицы одной и той же размерности. При сложении матриц складываются соответственные элементы.

Например, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = 0$ — нуль-матрица размерности 3×2.

Из определения суммы следует, что сложение матриц подчинено:

а) коммутативному закону $A + B = B + A$,

б) ассоциативному закону $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$,

в) $A_{m\times n} + 0_{m\times n} = A_{m\times n}$ — закон поглощения нуля.

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ (или λ на матрицу A) называется матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, т.е. при умножении матрицы на число надо все элементы матрицы умножить на это число.

Например, $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число подчинено:

а) ассоциативному закону относительно числовых множителей $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;

б) дистрибутивным законам:

1) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

в) $1 \times A = A$.

Умножение матриц. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размерности $n\times m$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размерности $m \times p$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размерности $n \times p$ такая, что $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ...a_{im}b_{mj}$; $i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,p$.

Замечание. В дальнейшем мы будем встречаться с кратким обозначением суммы: $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Используя введенное выше обозначение суммы, можно записать правило умножения матриц с помощью знака суммы.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} .$$

Умножать матрицы *A* и *B* можно лишь в том случае, когда число столбцов первого сомножителя *A* (число элементов в каждой строке матрицы *A*) совпадает с числом строк второго сомножителя *B* (число элементов в каждом столбце *B*). Элемент произведения c_{ij}, стоящий в *i*-ой строке и *j*-ом столбце матрицы *C*, равен сумме произведений всех элементов a_{ik} *i*-ой строки матрицы *A* на соответствующие элементы b_{kj} *j*-го столбца матрицы *B*. В частности для квадратных матриц одинакового порядка определены оба произведения *AB* и *BA* и матрицы произведения являются матрицами того же порядка

Пример 1.2 Найти произведение матриц *A* и *B*.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. $C = AB = \begin{pmatrix} -1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 2(-1) \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 4(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix},$

$$Q = BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix},$$

$A \cdot B \neq B \cdot A.$

Пример 1.3 Найти произведение матриц *A* и *B*.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Решение. $A \cdot B = -3 + 2 - 2 = -3,$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

Пример 1.4 Найти произведение матриц A и B, если $A = (3\ \ 2)$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. $A \cdot B = (-1\ \ 9)$, $B \cdot A$ не существует.

Из приведенных примеров ясно, что в общем случае $AB \neq BA$.

Если для двух матриц выполнено условие $AB = BA$, то матрицы называются коммутирующими.

Для умножения матриц определены следующие законы:

1) Ассоциативный закон. Пусть A, B, C — матрицы. Если определено одно из произведений $(AB)C$ или $A(BC)$, то определено также второе произведение и имеет место равенство: $(AB)C = A(BC)$.

2) $A_{m\times n} \cdot E_n = E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

3) Умножение матриц дистрибутивно.

4) Пусть A и B — матрицы одинаковых размеров, тогда:

а) если C такая матрица, что определено произведение AC, то определено произведение BC и $(A + B)C$ и верно равенство $(A + B)C = AC + BC$;

б) если C такая матрица, что определено произведение CA, то определены произведения CB и $C(A + B)$ и верно равенство $C(A + B) = CA + CB$.

§ 4 Транспонированная матрица

Определение. Транспонированием матрицы называется такое ее преобразование, при котором строки этой матрицы становятся ее столбцами с теми же номерами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1_n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{m_n} \end{pmatrix} \qquad A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1_n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{m_n} \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица обозначается A' или A^{T}.

Свойства операции транспонирования:

1. $B^T A^T = (AB)^T$.

2. $\left(A^T\right)^T = A$.

Если $A^T = A$, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$, — матрица называется *симметрической.*

§ 5 Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E — единичная матрица.

Матрица A называется невырожденной, если $\det A \neq 0$. Если матрица невырожденная, то существует единственная обратная ей матрица A^{-1}, причем,

$$A^{-1} = \frac{\text{Ï}}{\det A}, \text{ где } \text{Ï} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix},$$

П — присоединенная матрица;

A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Для составления матрицы П следует транспонировать исходную матрицу А и заменить элементы полученной матрицы соответствующими алгебраическими дополнениями.

Свойства обратной матрицы:

1) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Пример1.5 Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = -5$; $A_{11} = 3$; $A_{12} = -1$; $A_{21} = -2$; $A_{22} = -1$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$. Легко проверить, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

§ 6 Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1_n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{m_n} \end{pmatrix}$$

Выделим в матрице k строк и k столбцов, где k — число меньшее или равное наименьшему из чисел m и n. Определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении k строк и k столбцов, называется определителем, порожденным матрицей A.

Пример 1.6 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Решение. Пусть k=2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ — определители второго порядка, порожденные данной матрицей.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ — определитель третьего порядка, порожденный данной матрицей.

Рангом матрицы называется наибольший из порядков определителей, отличных от нуля, порожденных данной матрицей. Обозначается $r(A)$ или $rang\,(A)$.

Ясно, что если равны нулю все определители порядка k, порожденные данной матрицей, то ранг матрицы меньше k. Действительно, по определению каждый из определителей (k+1)-го порядка выражается линейно через определители k-го порядка. Значит все определители (k+1)-го порядка равны нулю. Аналогично доказывается, что равны нулю все определители (k+2)-го и более высоких порядков. Отсюда следует, что ранг матрицы < k.

Теорема. *Ранг матрицы не изменится, если:*

а) все строки заменить столбцами;

б) поменять местами две строки (столбца);

в) умножить каждый элемент строки (столбца) на один и тот же множитель отличный от нуля;

г) прибавить к элементам одной строки (столбца) соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на один и тот же множитель.

Преобразования а)–г) называются элементарными.

Определение: Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна из другой получаются с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц будем обозначать знаком ~ ($A \sim B$).

Пример 1.7 Определить ранг матрицы А.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & -5 \\ 3 & 0 & -12 & -10 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

таким образом, $r\,A = 2$.

Для определения ранга матрицы упрощаем ее вид с помощью элементарных преобразований, которые не меняют ранга этой матрицы. Прибавляем к элементам второго столбца соответствующие элементы первого. Затем прибавляем к элементам третьего столбца элементы первого, умноженные на –5, а к элементам четвертого столбца элементы первого, умноженные на –4.

Умножаем элементы третьего столбца на –1/6, а четвертого — на –1/5. Вычитаем из элементов четвертого столбца соответствующие элементы третьего столбца. Меняем местами второй и третий столбцы. В полученной в результате указанных элементарных преобразований матрице наибольший порядок отличных от нуля определителей равен двум.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие определителя.
2. Определитель 1, 2, 3 порядка.
3. Определитель n-го порядка.
4. Правила нахождения определителей 2, 3 и n-го порядка.
5. Свойства определителей.
6. Понятие матрицы.
7. Виды матриц.
8. Операции сложения, разности, умножения и возведения в степень.
9. Понятие транспонирования матрицы.
10. Понятие обратной матрицы и схема ее нахождения.
11. Понятие ранга матрицы.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Определители квадратных матриц

Задача 1.1 Найти минор M_{31} элемента a_{31} и алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

Задача 1.2 Вычислить определитель 2-го порядка: $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

Задача 1.3 Вычислить определитель третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. б) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. г) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Задача 1.4 Найти неизвестное число *x* из уравнения: $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Задача 1.5 Найти определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Матрицы. Основные операции над матрицами

Задача 1.6 Найти *2A-B*, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 1.7 Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 1.8 Проверить равенства *AB=BA, (AB)C=A(BC)* для матриц:

$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Транспонирование матриц

Задача 1.9 Вычислить $AB+2C^T$, если $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица

Задача 1.10 Проверить, что матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ является обратной к матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Поиск обратной матрицы с помощью метода Гаусса и с помощью алгебраических дополнений к элементам исходной матрицы

Задача 1.11 Найти A^{-1} для $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 1.12 Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Задача 1.11 Для матрицы $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ найти обратную матрицу A^{-1}.

Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы

Задача 1.12. Привести к ступенчатому виду матрицы $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -7 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Найти их ранги.

МОДУЛЬ 2 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1 Теорема Кронекера-Капелли

Теорема. *Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы A равнялся рангу расширенной матрицы B.*

Точнее:

1) если ранг A равен рангу B и равен числу неизвестных ($r = n$), то система имеет единственное решение;

2) если ранг A равен рангу B, но меньше числа неизвестных ($r<n$), то система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от n-r произвольных параметров.

§ 2 Решение систем линейных уравнений

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Пусть определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (2.1), отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Обозначим

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Правило Крамера. Если определитель системы (1) $\Delta \neq 0$, то система (2.1) имеет единственное решение, получаемое по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \; i = 1,2,\ldots,n,$$

где Δ — определитель системы, а Δ_i (i = 1,2,…,n) — определитель, который получается из определителя Δ при помощи замены i-го столбца соответственно столбцом свободных членов системы (2.1).

Пример 2.1 Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 34; \\ x - 5y + 3z = -1; \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

Решение.

Находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

Значит, $x = \dfrac{-16}{-8} = 2, \qquad y = \dfrac{0}{-8} = 0, \qquad z = \dfrac{8}{-8} = -1.$

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Запишем матрицу коэффициентов системы (2.1).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец переменных,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ — матрица-столбец свободных членов.

Систему (2.1) можно записать в матричной форме

$$A \cdot X = b. \tag{2.2}$$

Пусть A—невырожденная матрица, т.е. $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists \quad A^{-1}$.

Умножим обе части (2.2) на A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot b$$

Пример 2.2 Решить систему:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Решение.

Находим обратную матрицу A^{-1}: $\det A = -10 - 12 - 1 + 5 + 4 + 6 = -8 \neq 0$.

Алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6.$$

Присоединенная матрица:

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица:

$$A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Решение системы:

$$X = A^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Метод Гаусса — метод последовательного исключения переменных заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Пример 2.3 Решим систему.

$$\begin{cases} x - y + 5z + 4t = 0, \\ 2x - 2y + 4z + 3t = 0, \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0, \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -12 & -10 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{A}.$$

Равносильная система:

$$\begin{cases} x - y + 5z + 4t = 0, \\ z + \frac{5}{6}t = 0, \end{cases} \quad z = -\frac{5}{6}t, \quad x = y + \frac{25}{6}t - 4t = y + \frac{1}{6}t.$$

$$\begin{cases} x = y + \frac{1}{6}t, \\ z = -\frac{5}{6}t, \end{cases}$$ ранг A = ранг $B = 2 < 4$, $4 - 2 = 2$.

Решение системы зависит от двух произвольных параметров.

Пример 2.4 Цех выпускает два вида продукции A_1 и A_2, полностью используя для их производства сырье I и II

Продукт	Сырье	
	I	II
A_1	3	1,5
A_2	2	4
Запасы	60	75

Может ли цех удовлетворить заказ трех торговых организаций:

Продукт	Заказ I организации	Заказ II организации	Заказ III организации
A_1	2	3	3
A_2	5	6	4

Решение. Обозначим через x_1 и x_2 — количество единиц продукции A_1 и A_2 соответственно, которое может выпустить цех при данных условиях производства. Зная сколько идет сырья на единицу продукции, и каковы его запасы, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 60 \\ 1{,}5x_1 + 4x_2 = 75 \end{cases}$$

Решая ее любым из выше указанных способов, находим x_1=10, x_2=15. Т.е. продукта A_1 цех произведет 10 единиц, продукта A_2 — 15 единиц.

Выясним вопросы о выполнении заказов.

Продукта A_1 для выполнения заказа надо 8 единиц, а продукта A_2 — 15 единиц. Следовательно, по продукту A_1: 10 – 8=2 (единицы) — заказ будет выполнен, и для свободной продажи останется две единицы; по продукту A_2: 15 – 15 = 0 (единиц) — заказ будет выполнен.

§ 3 Экономический смысл системы линейных неравенств

Рассмотрим систему m линейных неравенств с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{2.3}$$

Каждое неравенство системы определяет полупространство. Решением системы (2.3) является пересечение этих полупространств.

Системы линейных неравенств широко применяются во многих экономических задачах, в частности, при построении линейной модели производства.

Пример 2.5 (задача рациона)

Пусть известно содержание питательных веществ в единице каждого из имеющихся в хозяйстве кормов. Известна также цена каждого корма. Требуется определить все возможные рационы для кормления скота, которые удовлетворяли бы суточную потребность в каждом питательном веществе, а общая стоимость используемых кормов не превосходила бы А.

Введем обозначения:

m — число питательных веществ;

n — число изменяющихся видов кормов;

a_{ij} — количество единиц i-го питательного вещества в единице j -го корма;

b_i — дневная потребность в i-ом питательном веществе;

c_{ij} — стоимость единицы j-го корма;

x_j — количество единиц j-го корма, используемого в рационе $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Задача рациона формулируется следующим образом: определить рацион (x_1, x_2,…,x_n), стоимость которого $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \le A$ удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} x_j \ge 0 (j = 1,2,\cdots,n) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \ge b_n. \end{cases}$$

Решение. Например, пусть $j = 2$; $m = 3$; $n = 2$;

$$a_{11} = 3, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 2, \quad a_{31} = 1, \quad a_{32} = 6$$
$$b_1 = 9, \quad b_2 = 8, \quad b_3 = 12; \quad c_1 = 4, \quad c_2 = 6; \quad A = 48.$$

Получаем систему: $\begin{cases} x_1 > 0, \quad x_2 > 0 \\ 3x_1 + x_2 \ge 9 & (I) \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 & (II) \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 & (III) \\ 4x_1 + 6x_2 \le 48 & (IV) \end{cases}$

На плоскости x_1–x_2 строим многоугольник ограничений:

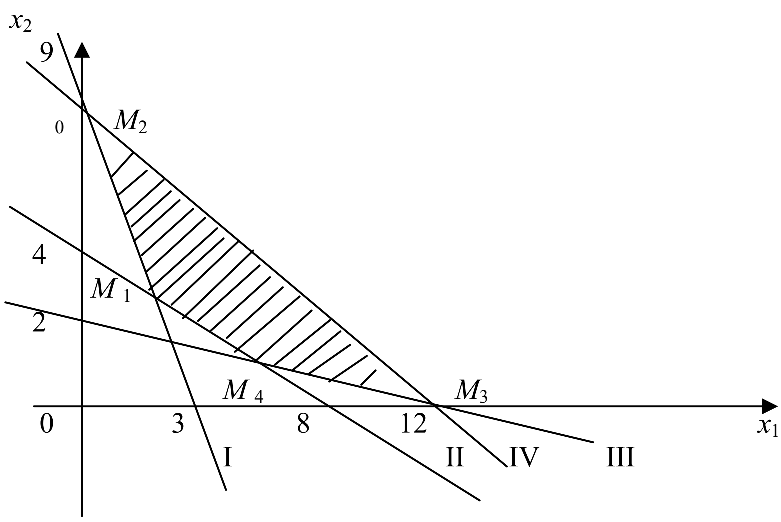


Рис. 2.1

Заштрихованный многоугольник $M_1M_2M_3M_4$ и определяет все возможные рационы (x_1, x_2) для кормления скота, удовлетворяющие данным условиям.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие системы m линейных уравнений и неравенств с n неизвестными.
2. Матричный способ решения системы уравнений (метод обратной матрицы).
3. Метод Крамера решения систем уравнений.
4. Метод Гаусса решения систем уравнений.
5. Понятие однородных систем уравнений.
6. Модель межотраслевого баланса.
7. Уравнение Леонтьева.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.1 Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Задача 2.2 Записать СЛАУ $AX = B$ в виде $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Задача 2.3 Решить СЛАУ с расширенной матрицей $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$.

Задача 2.4 Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$

Задача 2.5 Решить систему уравнений матричным методом и методом

Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ \ \ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Задача 2.6 Для системы уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 10x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 16 \end{cases}$ найти общее и два частных решения.

МОДУЛЬ 3 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1 Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, в котором точка A рассматривается как начало, а точка B как конец вектора. Модуль (длина) вектора по определению равен длине отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AC}\right|$. Вектор может обозначаться одной какой-нибудь буквой, например, $\vec{a}$. Тогда его длина будет $|\vec{a}|$. Векторы, параллельные одной плоскости, называются компланарными. Векторы, параллельные одной прямой, называются коллинеарными.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они:

1) имеют равные модули;
2) коллинеарные;
3) направлены в одну сторону.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число (скаляр) m называется новый вектор, имеющий длину $|\vec{a}|\cdot m$ и направленный одинаково с при $m > 0$ или направленный противоположно с $\vec{a}$ при $m < 0$.

Суммой векторов $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ называется вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OC}$, замыкающий ломаную $OABC$, построенную на данных векторах (рис 3.1).

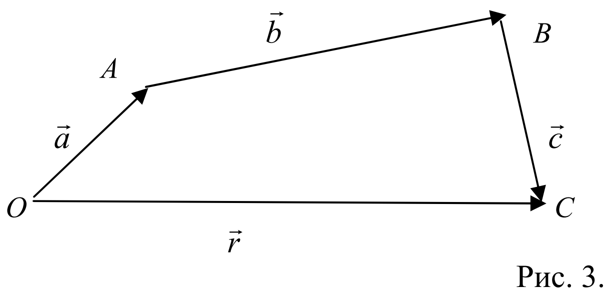


Рис. 3.1

Пусть вектор $\vec{a}$ составляет угол φ с осью Ox. Тогда проекция вектора на эту ось определяется формулой:

$$\text{ïð}_{\text{îõ}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\,\text{ños}\varphi.$$

Если α, β, γ — углы вектора $\vec{u}=(x, y, z)$ с осями координат (рис.3.2), то $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{u}|}; \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{u}|}; \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{u}|}$ и $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{u}$.

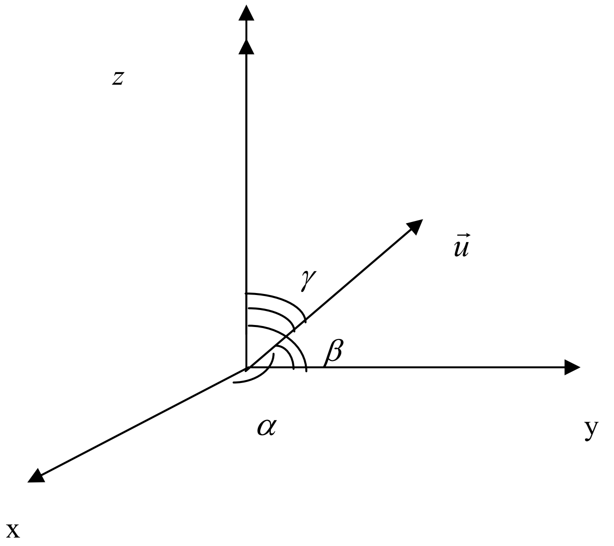


Рис. 3.2

§ 2 Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

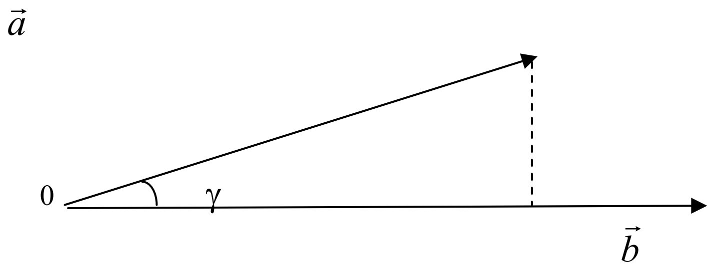


Рис. 3.3

Из рис. 3.3 видно, что $|\vec{a}|\cos\varphi = np_{\vec{b}}\vec{a}, |\vec{b}|\cos\varphi = np_{\vec{a}}\vec{b}$. Поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = |\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}$.

Свойства скалярного произведения и связанные с ним формулы:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ — переместительный закон.
2. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ — распределительный закон.

3. Если $\vec{a} \,//\, \vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$.

4. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^0 = 0$ и обратно, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$

5. Скалярное произведение единичных векторов (ортов) (см. рис. 3.4) удовлетворяет равенствам:

$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \;\; \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \;\; \vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$

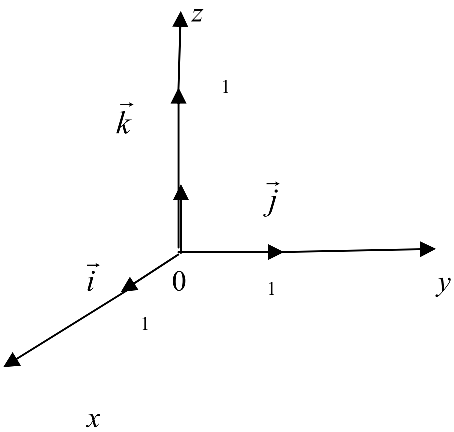


Рис. 3.4

6. Если векторы заданы координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ è $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ или $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ è $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

7. Угол между векторами $\vec{a}$ è $\vec{a}$ определяется по формуле:

$$ños\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

8. Условие коллинеарности векторов

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ è $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$: $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

9. Условие перпендикулярности векторов

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ è $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Пример 3.1 Определить внутренние углы треугольника *ABC* с вершинами *A* (2;–1;3), *B* (1;1;1) и *C*(0;0;5).

Решение. Для нахождения угла *A* найдём векторы $\overrightarrow{A\hat{A}}$ *è* $\overrightarrow{A\tilde{N}}$:

$$\overrightarrow{A\hat{A}} = (1-2)\vec{i} + (1+1)\vec{j} + (1-3)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\,.$$

Аналогично найдём $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$ Тогда

$$\cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-1)\cdot(-2)+2\cdot 1-2\cdot 2}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \frac{0}{9} = 0. \text{ т.е. } \angle A = \frac{\pi}{2}.$$

Для нахождения угла В найдём векторы $\overrightarrow{BC}$ *è* $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{\hat{A}C} = -\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}\,,\ \overrightarrow{BA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}. \text{ Тогда}$$

$$\cos\angle B = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{-1+2+8}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}} = \frac{9}{3\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

т.е. $\angle B = \frac{\pi}{4}.$

Для нахождения угла *C* аналогично найдём векторы $\overrightarrow{C\hat{A}}$ *è* $\overrightarrow{\tilde{N}A}$:

$\overrightarrow{C\hat{A}} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ и $\overrightarrow{CA} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$. Тогда

$$\cos\angle A = \frac{2-1+8}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Т.е. } \angle C = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3.2 Для расчёта себестоимости изделия необходимо определить затраты рабочего времени в часах на каждом рабочем месте для каждого изделия и каждого заказа.

Решение. Рассмотрим сначала одно рабочее место и один заказ. В таблице 1 приведено рабочее время в часах, затрачиваемое на рабочем месте 1 для изготовления одного изделия разных видов.

Таблица 1

Рабочее место	Изделия				
	1	2	3	…	n
1	a_1	a_2	a_3	…	a_n

Обозначим $\vec{a} = \left(\grave{a}_1, \grave{a}_2, ..., \grave{a}_{\ddot{i}}\right)$ — вектор рабочего времени.

Торговая организация дала заказ на предлагаемые изделия (см. табл. 2).

Таблица 2

Изделия	Заказ
1	x_1
2	x_2
…	…
a_n	x_n

Обозначим $\vec{\tilde{o}} = \left(\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, ..., \tilde{o}_{\ddot{i}}\right)$ — вектор заказа.

Для того, чтобы определить затраты рабочего времени на рабочем месте 1 для выполнения данного заказа нужно вычислить произведения a_1x_1, $a_2x_{2,\ldots,}$ $a_nx_{n,}$ а затем сложить их. Это соответствует скалярному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{\tilde{o}}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{\tilde{o}} = \grave{a}_1\tilde{o}_1 + \grave{a}_2\tilde{o}_2 + \grave{a}_3\tilde{o}_3 + \ldots + \grave{a}_{\ddot{i}}\,\tilde{o}_{\ddot{i}} = \sum_{i=1}^{\ddot{i}} \grave{a}_i\,\tilde{o}_i .$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие вектора.
2. Понятие единичного и нулевого вектора.
3. Модуль вектора, формула расстояния между двумя точками.
4. Понятие коллинеарности векторов.
5. Линейные операции над векторами.
6. Понятие проекции вектора на ось.
7. Нелинейные операции над векторами (скалярное, векторное, смешанное произведение).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.1 Найти координаты вектора $4\vec{a}-5\vec{b}+7\vec{c}$, если $\vec{a}=(-1;4;3)$, $\vec{b}=(3;7;10)$, $\vec{c}=(5;6;7)$.

Задача 3.2 Фирма продаёт изделия по ценам, которые характеризуются вектором $\vec{p}=(10;21;15;17)$, а объёмы продаж по регионам определяются вектором $\vec{q}=(300;150;100;180)$. Найти прибыль фирмы, если издержки на реализацию составляют 1000 ден.ед.

Задача 3.3 Определить внешний угол при вершине C в треугольнике ABC с вершинами

A (2; -1; 3), B (1; 1; 1) и C(0; 0; 5).

Задача 3.4 Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, если $\vec{a}=(2,\ 3,\ 4)$ и $\vec{b}=(6,\ 2,\ 2)$.

Задача 3.5. Вычислить объём пирамиды, построенной на вектора $\vec{a}=(2,\ 3,\ 4)$, $\vec{b}=(6,\ 2,\ 2)$, $\vec{c}=(3,\ 7,\ 1)$ как на сторонах.

МОДУЛЬ 4 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1 Прямая на плоскости

В общем виде уравнение линии в прямоугольных координатах записывается

$$F\,(x,y)=0. \qquad (4.\ 1)$$

Теорема. *Всякая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени с двумя переменными x и y; всякое уравнение вида*

$$Ax+By+C=0 \qquad (4.2)$$

при любых действительных значениях коэффициентов A, B,C, исключая одновременное равенство 0 *коэффициентов A и B, определяет прямую.*

Уравнение (4.2) называется общим уравнением прямой. Коэффициенты A и B являются координатами нормального вектора прямой (вектора, перпендикулярного данной прямой). Возможны частные случаи:

1. $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$; $By + C=0$ или $y = b$, где $b=-\dfrac{C}{B}$ — это уравнение прямой, параллельной оси Ox.
2. $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$; $Ax + C=0$ или $x = a$, где $a=-\dfrac{C}{A}$ — это уравнение прямой, параллельной оси Oy.
3. $C = 0$; $A \neq 0$, $B \neq 0$; $Ax + By = 0$ — это уравнение прямой, проходящей через начало координат.
4. $A = 0$; $C = 0$; $By = 0$ или $y = 0$ — это уравнение оси абсцисс Ox.
5. $B = 0$; $C = 0$; $Ax = 0$ или $x = 0$ — это уравнение оси ординат Oy.

Положение прямой на плоскости относительно системы координат можно задать различными способами. Например, прямая однозначно определяется: двумя различными точками: точкой и направлением; отрезками, отсекаемыми прямой на осях координат и др. Однако, обязательно, должна быть точка, лежащая на этой прямой.

В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнения.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1,y_1)$ с заданным нормальным вектором $\vec{n}=(A,B)$:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \qquad (4.3)$$

Направляющим вектором прямой называется всякий ненулевой вектор, параллельный этой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1,y_1)$ с заданным направляющим вектором $\vec{p}=(m,n)$:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}. \qquad (4.4)$$

Пример 4.1 Написать уравнение прямой, проведенной через точку (–2; 3) параллельно прямой $x-2y+15=0$ (l).

Решение. Коэффициенты в уравнении прямой (l) при неизвестных x, y являются координатами ее нормального вектора, т. е. $\vec{n}(1;-2)$. Так как прямые параллельны, то в качестве нормального вектора для искомой прямой примем этот же вектор и по формуле (4.3) имеем: $(x+2)-2(y-3)=0$, где вместо x_1 и y_1 подставили координаты точки M_1. Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые: x-$2y+8=0$.

Уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$y=\kappa x+b \qquad (4.5)$$

$$y-y_0=\kappa(x-x_0), \qquad (4.6)$$

где $\kappa=\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент прямой; b — отрезок оси Оy, отсекаемый прямой с соответствующим знаком; $(x_0; y_0)$ — координаты точки, лежащей на прямой.

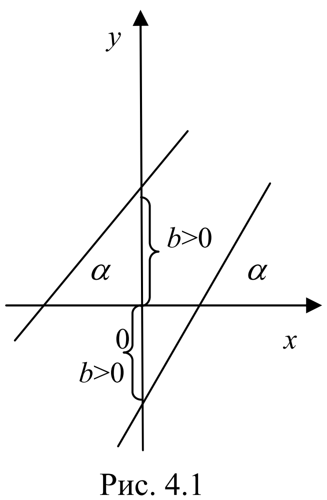


Рис. 4.1

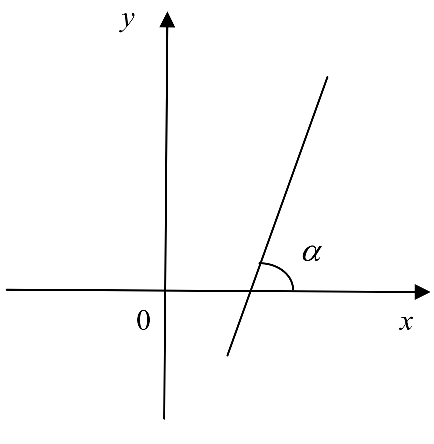


Рис. 4.2

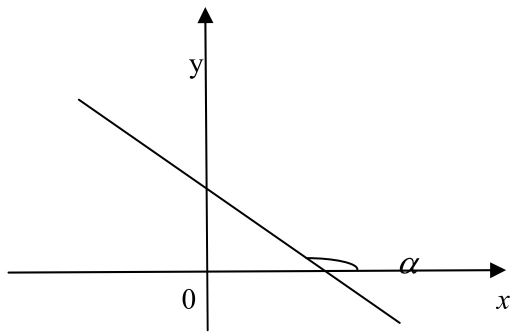


Рис. 4.3

Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс: $к = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Уравнение прямой в отрезках:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где a и b — длины отрезков, отсекаемых прямой l на осях координат, взятые с соответствующими знаками (в зависимости от того, положительные или отрицательные полуоси координат пересекает прямая l).

Пример 4.2. Уравнение прямой l на рис. 4.4 имеет вид $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1$ или $x-2y-2=0$.

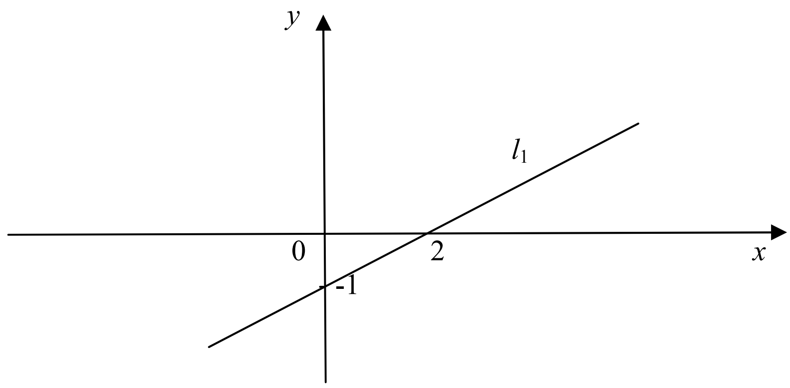


Рис. 4.4

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\left(x_1\neq x_2,\, y_1\neq y_2\right) \qquad (4.6)$$

Если абсциссы точек M_1 и M_2 одинаковы, т.е. $x_1 = x_2 = a$, то прямая M_1M_2 параллельна оси ординат и ее уравнение имеет вид: $x = a$.

Если ординаты точек M_1 и M_2 одинаковы, т. е. $y_1 = y_2 = b$, то прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс и ее уравнение имеет вид: $y=b$.

Угол между двумя прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ можно вычислить по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (4.7)$$

где n_1 и n_2 - нормальные векторы прямых (l_1) и (l_2).

Если прямые (l_1) и (l_2) не перпендикулярны, то угол между ними можно вычислить по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \qquad (4.8)$$

где κ_1, κ_2 — угловые коэффициенты прямых (l_1) и (l_2).

Эта формула удобна и для вычисления угла между прямыми, заданными их уравнениями с угловыми коэффициентами.

Пример4.3 Вычислить угол между прямыми $y = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$ и $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

Решение. Угол между этими прямыми вычислим по формуле (4.8), т.к. известны угловые коэффициенты прямых $\kappa_1 = -\frac{1}{5}, \kappa_2 = \frac{2}{3}$.

Имеем $tg\varphi = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Итак, угол между этими прямыми равен 45°.

Пусть на плоскости заданы две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ (l_1) и $A_2x+B_2y+C_2=0$ (l_2). Если прямые параллельны ($l_1 || l_2$), то их нормальные векторы $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2)$ коллинеарны, а это значит, что их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \qquad (4.9)$$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. *Две прямые l_1и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда в их уравнениях коэффициенты при соответствующих координатах x и y пропорциональны, или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой:*

$$\kappa_1=\kappa_2 \qquad (4.10)$$

Например, $3x-y+1=0$ и $6x-2y-3=0$ параллельны, т.к. $\frac{3}{6}=\frac{-1}{-2}$.

Если прямые перпендикулярны ($l_1 \perp l_2$), то их нормальные векторы $\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1)$ и $\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2)$ тоже перпендикулярны, а это значит, что скалярное произведение этих векторов равно нулю: $\overrightarrow{n_1}\,\overrightarrow{n_2}=0$ или в координатной форме

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \qquad (4.11)$$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. *Две прямые l_1и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных связаны равенством $A_1A_2+B_1B_2=0$, или когда их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку:*

$$\kappa_1=-\frac{1}{\kappa_2} \qquad (4.12)$$

Например, $3x+2y+1$ и $4x-6y-7=0$ перпендикулярны, так как $3\cdot4+2\cdot(-6)=0$.

Чтобы найти расстояние от данной точки $M_0(x_0 y_0)$ до данной прямой $Ax+By+C=0$, используют формулу:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (4.13)$$

Пример 4.4. Найти расстояние от точки $M_0(-2;3)$ до прямой $4x-3y-5=0$.

Решение. Подставляем в формулу (4.13) данные задачи. Тогда получаем

$$d=\frac{|4\cdot(-2)-3\cdot3-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|8-9-5|}{\sqrt{25}}=\frac{22}{5}.$$

Итак, расстояние от точки $M_0(-2;3)$ до прямой $4x-3y-5=0$ равно 22/5 лин.ед.

§ 2 Прямые в решениях экономических задач

Известно, что стоимость перевозки груза состоит из расходов, не связанных с расстоянием перевозки (погрузка, выгрузка, доставка на пункт отправления и т.д.) и из расходов, пропорциональных расстоянию (расход топлива, оплата везущему грузы и т. д.). Пусть a — цена перевозки груза на единицу расстояния, а b — цена, не зависящая от расстояния x. Тогда общая стоимость перевозки груза составит $p=ax+b$.

Пример 4.5 Груз можно перевести железнодорожным или автотранспортом. Стоимость перевозки по железной дороге $y=a_1x+b_1$, а машиной -$y=a_2x+b_2$.Каким транспортом дешевле перевести груз?

Считаем $a_1>0$, $b_1>0$, $a_2>0$, $b_2>0$, и пусть $a_1<a_2$, $b_1>b_2$.

Решение. Будем считать $a_1>0$, $b_1>0$, $a_2>0$, $b_2>0$, и пусть $a_1<a_2$, $b_1>b_2$. Изобразим на плоскости XOY прямые $y=a_1x+b_1$(I) и $y=a_2x+b_2$(II). Найдём точку пересечения этих прямых. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} a_1x-y=b_1 \\ a_2x-y=b_2 \end{cases}$$

Откуда $x_1=\dfrac{b_1-b_2}{a_2-a_1}, y_1=\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2-a_1}$.

Из чертежа ясно, что при $0<x<x_1$ выгоднее использовать автотранспорт, а при $x>x_1$ экономически выгоднее использовать железную

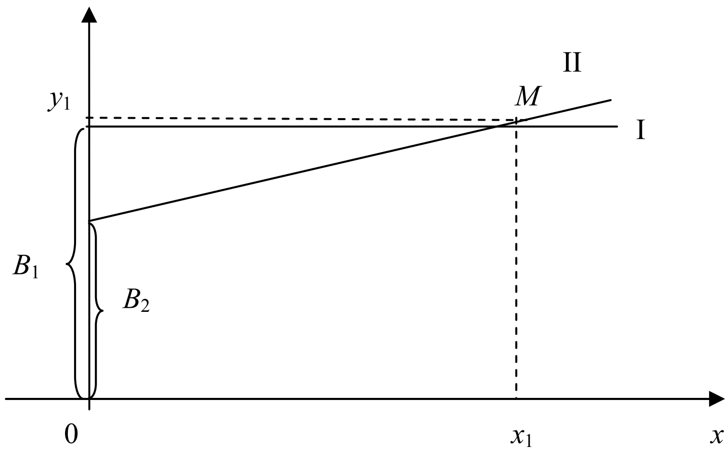


Рис. 4.5

Пример 4.6. При одном и том же способе производства, при производстве товара x_1 издержки производства y_1, а при производстве товара x_2 издержки производства y_2. Найти переменные издержки a, приходящиеся на единицу продукции и постоянные издержки b производства. (Предполагается линейная зависимость издержек от производства товара).

Решение. Так как зависимость издержек от производства товара линейная, воспользуемся формулой (4.7) § 1:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Выразим у, т.е. перейдём к уравнению вида $y=ax+b$.

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1,$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \quad \text{или}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Таким образом, $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = \dfrac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Общее уравнение прямой.
2. Понятие направляющего и нормального вектора прямой.
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
4. Векторно-параметрическое уравнение прямой.
5. Параметрические уравнения прямой.
6. Каноническое уравнение прямой.
7. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
8. Формула для нахождения угла между прямыми.
9. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
10. Уравнения плоскости.
11. Уравнения прямой в пространстве.
12. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
13. Расстояние от точки до прямой и до плоскости.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕШЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4.1 Дана прямая $5y-3x-2=0$. Выписать ее вектор нормали, найти угловой коэффициент, построить прямую на плоскости.

Задача 4.2 Прямая задана параметрическим уравнением $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-3t \end{cases}$. Выписать направляющий вектор данной прямой и координаты двух точек, лежащих на ней, а также координаты ее вектора нормали.

Задача 4.3 Выбрать из прямых (I) – (V) параллельные и перпендикулярные, определить угол между прямыми (I) и (VI):

(I) $y-3x-2=0$	(IV) $x-3y+3=0$;
(II) $2x+6y=0$;	(V) $x+3y-7=0$;
(III) $3x-y=5$;	(VI) $x+y=2$.

Задача 4.4 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-3)$ и образующей с положительным направлением оси OX угол 120°.

Задача 4.5 Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(2, -3)$ параллельно и перпендикулярно прямой $2y + 4x - 5 = 0$.

Задача 4.6 Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; 3)$, $B(-1; 5)$.

Задача 4.7 В треугольнике с вершинами $O(0; 0)$, $A(3; 3)$, $B(-1; 5)$ найти уравнение стороны *AB,* медианы *AE* и высоты *OK* (а также длину высоты *OK)*.

Задача 4.8 Решить графически систему линейных неравенств:

a) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y \leq 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y \leq 2x \\ x \leq 3, y \geq 0 \end{cases}$.

МОДУЛЬ 5 КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1 Окружность

Определение. Окружность — это множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Если r — радиус окружности, а точка $C(a, b)$ — ее центр, то уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{5.1}$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (5.1) примет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{5.2}$$

Пример 5.1 Найти координаты центра и радиус окружности

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4=0.$$

Решение. Разделив уравнение на 2, и сгруппировав члены уравнения, получим $x^2 - 4x + y^2 + (5/2)y = 2$. Дополним выражения $x^{2\,-}$- $4x$ и $y^2+(5/2)y$ до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 4, а ко второму $(5/4)^2$ (одновременно к правой части прибавляется сумма этих чисел):

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + (5/2)y + 25/16) = 2 + 4 + 25/16$ или
$(x - 2)^2 + (y + 5/2)^2 = 121/16.$

Обозначив $x - 2 = X$, $y + 5/2 = Y$, получим $X^2 + Y^2 = (11/4)^2$ —уравнение окружности с центром в начале координат новой системы координат $X0Y$. Систему $X0Y$ получим с помощью переноса начала координат старой системы $x0y$ в точку $(2, –5/2)$:

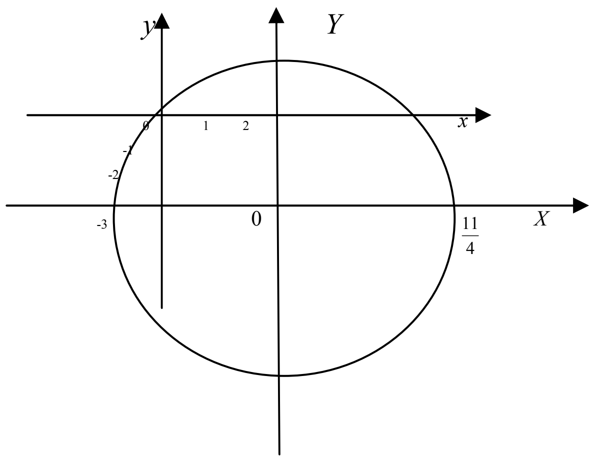


Рис. 5.1

Таким образом, координаты центра окружности a =2, b = –5/4 (в системе $x0y$), а радиус окружности r = 11/4.

§ 2 Эллипс

Определение. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами $|F_1 F_2|$.

Выберем прямоугольную систему координат так, что началом координат является середина отрезка F_1F_2, а осью $0x$ — прямая, проходящая через фокусы (см. рис. 9) Тогда получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5.3}$$

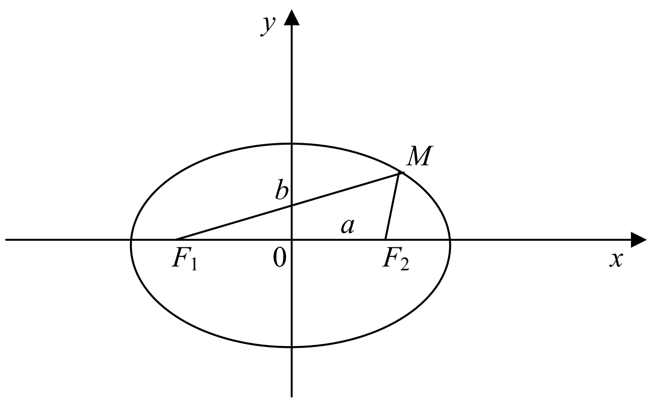


Рис. 5.2

Расстояние между фокусами обозначим через $2c$: $|F_1F_2| = 2c$. В уравнении (5.3) a — большая, b — полуоси эллипса, причем a, b и c связаны соотношением $a^2 = b^2+c^2$.

Форма эллипса характеризуется его эксцентриситетом $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$.

§ 3 Гипербола

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами $|F_1F_2|$.

Если поместить фокусы гиперболы в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, то получится каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.4}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно координатных осей (см. рис. 5.3).

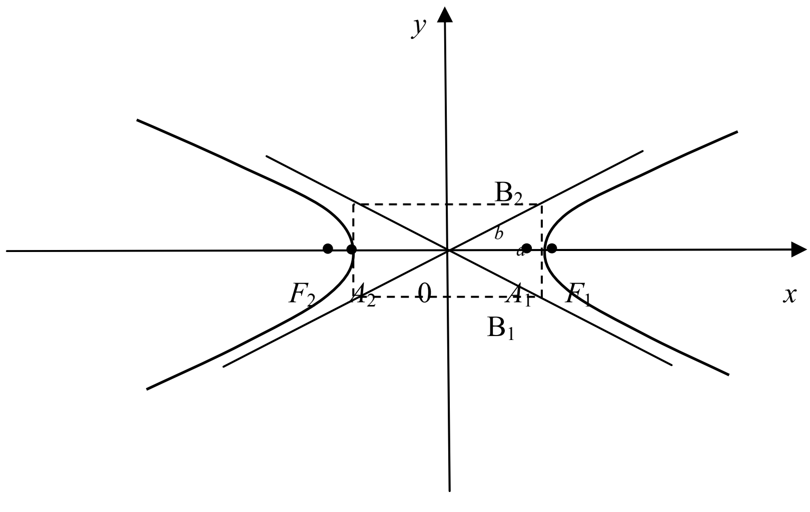


Рис. 5.3

Точки A_1(а; 0) и A_2(-а;0) называются вершинами гиперболы. Отрезок A_1A_2 такой, что | A_1A_2| = $2a$, называется действительной осью гиперболы, а отрезок B_1B_2 такой, что $|B_1B_2| = 2b$ — мнимой осью.

Прямая называется асимптотой гиперболы, если расстояние точки $M(x,y)$ гиперболы до этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a} x.$

Для построения асимптот гиперболы строят осевой прямоугольник гиперболы со сторонами $x = -a, \quad x = a. \quad y = -b, \quad y = b.$ Прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{или} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad) \tag{5.5}$$

также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок оси *0y* длины $2b$.

§ 4. Парабола

Определение. Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки плоскости, называемой фокусом, и от данной прямой плоскости, называемой директрисой.

Если директрисой параболы является прямая $x = -\frac{p}{2}$, а фокусом — точка $F(\frac{p}{2}, c)$, то уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px \tag{5.6}$$

Эта парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс (см. рис. 5.4).

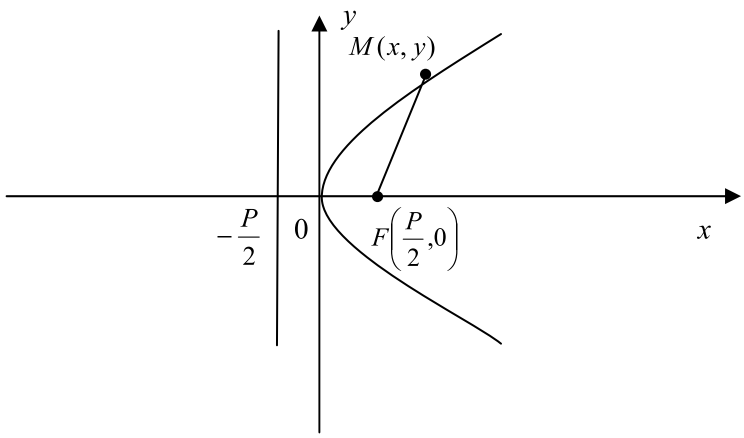


Рис. 5.4

Уравнение $x^2 = 2py$ является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие линии второго порядка.
2. Каноническое уравнение окружности.
3. Каноническое уравнение эллипса, характеристики эллипса.
4. Каноническое уравнение гиперболы, характеристики гиперболы.
5. Каноническое уравнение параболы, характеристики параболы.
6. Метод выделения полного квадрата.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 5.1 Определить тип, размеры и расположение на плоскости линии, заданной уравнением $x^2 + 2y^2 - 5x + 4y - 6 = 0$.

Задача 5.2 Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых от данной точки $A(4, 0)$ и от данной прямой $x = 1$ равно 2.

Задача 5.3 Исследовать график кривой $y = x^2 - 2x + 3$ и построить ее.

МОДУЛЬ 6 ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1 Определение функции и способы задания функции

Определение. Если некоторому значению $x\in$ D соответствует единственное значение $y\in E\in R$, то переменную величину y называют функцией переменной величины x, называемой независимой переменной или аргументом. То обстоятельство, что y есть функция аргумента x, кратко выражают записью: $y=f(x)$, или $y=\varphi(x)$ и т.п. В этой записи символы $f(x)$ и $\varphi(x)$ означают закон соответствия, по которому каждому значению x соответствует значение y.

Множество D называется областью определения функции, а множество E называется областью изменения или областью значений функции $y=f(x)$. Эти области могут представлять собою отдельные точки числовой прямой, отрезки, интервалы этой прямой, множество всех действительных чисел.

Различают следующие *способы задания функции* : табличный, графический, аналитический (с помощью формул). Под графиком функции понимают множество точек плоскости, абсциссы которых есть значения независимой переменной, а ординаты равны соответствующим значениям функции. Для функции, заданной аналитически, т.е. уравнением $y=f(x)$, под графиком понимают множество точек $M(x,y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=f(x)$. График функции есть некоторая линия на плоскости. Например, уравнение $y=x^2$ задает функцию, графиком которой является парабола.

Функция заданная аналитически уравнением $y=f(x)$, определена в точке $x=x_0$, если возможно вычислить $y_0=f(x_0)$. Множество таких точек образует область определения функции.

Пример 6.1 Найти область определения функции $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$.

Решение. Так как логарифм определен, когда $x^2 - 3x + 2 > 0$ и $x^2 - 3x + 2 =$ $= (x - 1)(x - 2)$ то, очевидно, что данная функция определена при $x < 1$ или $x > 2$.

Значит, областью определения данной функции будет множество $x \in$ D = $(-\infty;1) \cup$ $\cup\ (2;+\infty)$.

Основными элементарными функциями называют функции:

1. $y = x^n$, $n \in R$ степенная;

2. $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ показательная;

3. $y = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ логарифмическая;

4. $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ тригонометрические;

5. $y = arcsinx$, $y = arccosx$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ обратные тригонометрические функции.

Определение. Функция, аргумент которой в свою очередь есть функция ($y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$), называется сложной функцией (или композицией функции). Например, функция $y = \lg^3(2^{x^3})$ сложная и она может быть представлена следующей цепью основных элементарных функций: $y=z^3$, $z=\lg u$, $u = 2^v, v = x^3$.

Функции, образованные из основных элементарных функций посредством конечного числа алгебраических операций и путем композиции от функции, называются элементарными. Все остальные функции называются неэлементарными. Примером неэлементарной функции может служить функция вида:

$$y=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

Неявной называют функцию, которая задана уравнением вида $F(x,y) = 0$ неразрешенным относительно функции у. Например, уравнение $2y + x^2 - 4 = 0$ задает неявно функцию $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Понятие обратной функции. Если уравнение $y = f(x)$ может быть однозначно разрешено относительно переменной x , т.е. существует функция $x = \varphi(y)$, такая что $y = f(\varphi(y))$, то функция $x = \varphi(y)$, или в стандартных обозначениях $y = \varphi(x)$, называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$. Очевидно, что функция $y = f(x)$ обратная по отношению к функции $y = \varphi(x)$. Например, для функции $y = 2^x$ обратной функцией является функция $x = \log_2 y$, или в стандартной форме $y = \log_2 x$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

§ 2 Использование элементарных функций в экономике

1. Простые проценты.

$$K_n = K(1+ni)$$

здесь (и ниже) K — начальная сумма, K_n — конечная (накопленная за n лет) сумма, $i = p/100$ — удельная процентная ставка, p — процентная ставка.

Пример 6.2 Если сумма K=5000 ден.ед., то при i=0,04 накопленная сумма составит через 3 года:

Решение. K = 5000(1+3·0,04)=5000·1,12=5600 ден.ед.

2. Сложные проценты.

$$K_n=K(1+i)^n.$$

Выражение $1+i = r$ — называется коэффициентом сложного процента. Следовательно, $K_n = Kr^n$.

Пример 6.3 За период выполнения пятилетнего плана объем продукции должен возрасти на 85%. Каким должен быть средний темп роста?

Решение. Пусть начальный объем продукции составлял K. Через 5 лет он должен составлять по условию задачи K =1,85K или по формуле сложных процентов $K_5 = Kr^5$. Следовательно, $1{,}85K=Kr^5$, откуда $r^5=1{,}85$, $r=\sqrt[5]{1{,}85}=1{,}131$, $1+i=1{,}131$, $i=1{,}131-1=0{,}131$, $i=p/100=0{,}131$, откуда p=13,1%.

Значит для того, чтобы объем продукции за 5 лет вырос на 85%, средний темп роста должен составлять 13,1%.

3. Начисление процентов m раз в году.

$$K = K(1+\frac{i}{m})^{mn}$$

4. Периодический взнос. В банк через определенное время (год) вносится постоянная сумма K (периодический взнос) под сложные проценты при норме p%. Через n лет накопится сумма

$$K = \frac{Kr(r^n - 1)}{r - 1} \qquad (6.1)$$

Пример 6.4 Какая сумма накопится через 10 лет, если ежегодный взнос составляет 3000 ден.ед., а ставка сложного процента 5% годовых.

Решение. По формуле (1) получим:

$$K_{10} = \frac{3000 \cdot 1{,}05(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05} \approx 39620 \text{ ден.ед.}$$

5. Функция спроса. При определенных условиях спрос на некоторый товар есть функция цены. Эта так называемая функция спроса. Пусть q — спрос на товар, p — цена товара. Зависимость между спросом и ценой, т.е. функция спроса, выражается, следовательно, формулой

$$q = f(p).$$

Пример 6.5 Функция спроса может иметь разный вид, например

$$q = \frac{500}{p + 4}.$$

В этом случае находим следующее соответствие:

цена $p = 1$ — спрос $q = 100$,

цена $p = 2$ — спрос $q = 83{,}3$.

Пример 6.6 Функцией спроса может быть также, например функция $q = 5e^{-2p}$.

В этом случае находим следующие соответствия:

цена $p = 1$ — спрос $q = 5/e^2$,

цена $p = 2$ — спрос $q = 5/e^4$.

Зависимость между спросом и ценой можно поставить двояко:

1) как зависимость спроса от цены;

2) как зависимость цены от спроса.

В первом случае говорят о функции спроса, во втором о функции цен спроса; в этом случае функция есть p, а независимая переменная есть q.

6. Суммарная выручка. Если количество q проданного товара умножить на его цену p, получим суммарную выручку продавца или же суммарные расходы покупателя. Следовательно, суммарная выручка

$$R = q \cdot p = q\,f(q).$$

Суммарная выручка есть функция спроса. Функцией суммарной выручки называется закономерность, определяющая зависимость между суммарной выручкой и количеством проданного товара.

Пример 6.7. Если функция цен спроса определяется посредством формулы $p = \frac{500}{q+6}$ то функция суммарной выручки имеет следующий вид:

$$R = \frac{500q}{q+6}.$$

Если $q = 0$, то $R = 0$;

$q = 1$, то $R = 71{,}4$;

$q = 2$, то $R = 125{,}9$.

7. Функция предложения. При прочих равных условиях предложение какого-либо товара зависит от цены. Если через p обозначить цену, а через s — предложение, то эту зависимость можно выразить функцией

$$\mathrm{s} = f(p);$$

это так называемая функция предложения.

И наоборот, каждому предложению s соответствует определенная цена p. Это можно выразить посредством зависимости

$$p = q\,(\mathrm{s});$$

такова так называемая функция цен предложения

8. Функция средних издержек. Закономерность, определяющая зависимость между издержками производства определенного товара и объемом производства, называется функцией издержек. Если через K обозначить суммарные издержки производства x единиц продукта, то функцию суммарных издержек можно выразить в виде $K=f(x)$.

Функция $\Pi = \frac{K}{x} = \frac{f(x)}{x}$ называется функцией средних или удельных издержек.

Пример 6.8. Пусть зависимость между издержками производства данного продукта и количеством произведенных единиц этого продукта имеет вид:

$$K = -0{,}1x^3 + 300\,x.$$

Следовательно, если

$x = 1$, то $K(1) = -0{,}1+300 = 299{,}9$;

$x = 2$, то $K(2) = -0{,}8+600 = 599{,}2$;

$x = 3$, то $K(3) = -2{,}7+900 = 897{,}3$.

Для данного случая функции средних издержек есть

$$\Pi = -0{,}1x^2 + 300.$$

Следовательно, если

$x = 1$, то $\Pi(1) = 299{,}9$;

$x = 2$, то $\Pi(2) = 299{,}6$;

$x = 3$, то $\Pi(3) = 299{,}1$.

9. Распределение доходов. Итальянский экономист Парето сформулировал теорему о распределении доходов в капиталистическом обществе. Если через y обозначить число лиц, имеющих доход, не меньше x, то $y = \frac{a}{x^m}$, где a и m — постоянные.

Закон Парето достаточно точно описывает распределение более высоких доходов; в то же время для низких доходов он не оправдывается.

Пример 6.9 Пусть в каком либо капиталистическом обществе распределение доходов определяется уравнением

$$y = \frac{2000000000}{x^{1,5}},$$

Найти:

а) число лиц, которые обладают доходом, превышающим 100 000;

б) самый низкий доход среди 100 самых богатых лиц.

Решение

а) Имеем: $x = 100000$, откуда $y = \frac{2000000000}{100000^{1,5}} = 63,2$;

Таким образом, 63 человека имеют доход, превышающий 100000.

б) Имеем: $100 = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$, отсюда последовательно находим:

$100\, x^{1,5} = 2000000000$; $x^{1,5} = 20000000$; $x = 73700$.

Таким образом, самый низкий доход среди 100 богатейших лиц составляет 73700.

§ 3 Предел числовой последовательности. Предел функции

Число A называется пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - A| < \varepsilon$ при $n > N$.

Пример 6.10 Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2.$

Решение. Находим модуль разности a_n и $A = 2$:

$$\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1}.$$

Так как $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$, то $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$, $N = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 1\right] + 1$,

где $[\alpha]$ означает целую часть α.

Число A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $|x-x_0|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Это кратко записывается в виде

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Если A есть предел $f(x)$ в точке x_0, то на графике это иллюстрируется следующим образом. Так как из неравенства $|x-x_0|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, то это значит, что для всех x, отстоящих от x_0 не далее чем δ, точка $M(x,y)$ графика функции $y=f(x)$ лежит внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$. Очевидно, что с уменьшением ε величина δ также уменьшается. (см. рис.6.1).

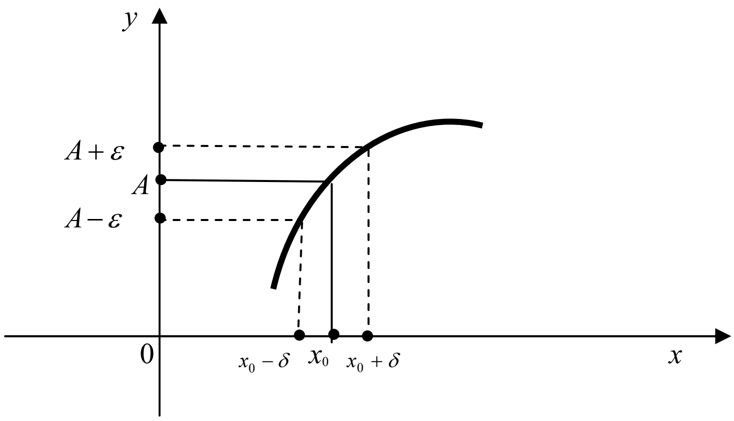


Рис.6.1

Предел $\lim\limits_{x\to x_0 (x<x_0)} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ называется пределом слева данной функции в точке $x=x_0$, а предел $\lim\limits_{x\to x_0 (x>x_0)} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$ называется пределом справа данной функции (см. рис. 6.2).

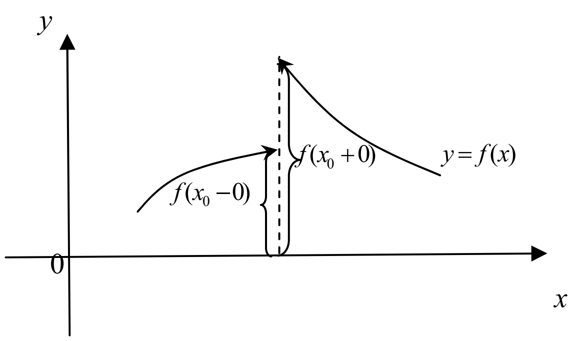


Рис. 6.2

Число A называется пределом функции $y = f(x)$, в точке $x = \pm\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число М >0, что при всех $|x|>M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Смотрите иллюстрацию на рисунке 6.3.

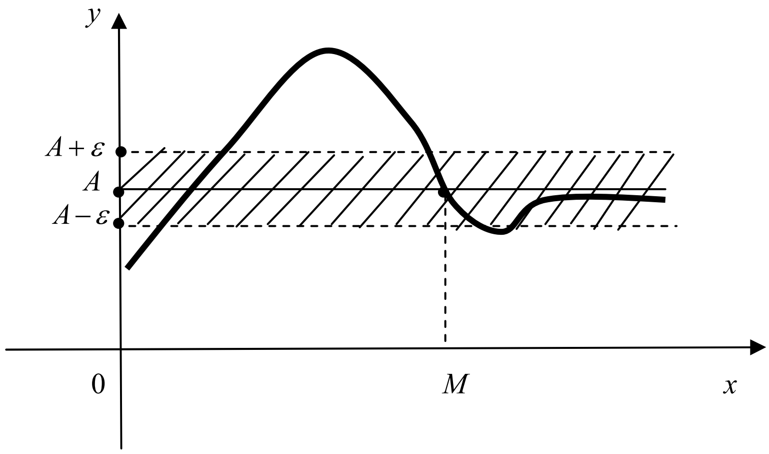


Рис.6.3

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной в области D, если существует постоянное число $M> 0$, что для всех $x\in D$ $|f(x)| < M$.

Например, функция $y=\dfrac{2}{1+x^2}$ ограничена для всех $x \in R$, так как в этой области $|f(x)| \le 2$.

§ 4 Теоремы о пределах

1. Предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)+v(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x) + \lim\limits_{x\to x_0} v(x)$

2. Предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)\cdot v(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} v(x)$

Следствие. Если c=co*n*st, то $\lim\limits_{x\to x_0} cu(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} u(x)$.

3. Предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) \ne 0$.

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (6.2)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e, \qquad (6.3)$$

где е — иррациональное число, е ≈ 2,71828…

Если в логарифмической функции $y = \log_a x$ основание a = е, то получаем функцию $y=log_e\ x = lnx$, которая называется натуральным логарифмом. Для вычисления значений этой функции, так же как для вычисления десятичных логарифмов, пользуются специально составленными таблицами.

Пример 6.11 Нами была приведена формула вычисления конечной величины начальной суммы K через n лет в случае, если удельная процентная ставка есть i, а проценты начисляются m раз в году. Если начисление процентов происходит непрерывно, т.е. $m\to\infty$, то

$$K_n=\lim_{m\to\infty}K(1+\frac{i}{m})^{m\cdot n}=K\lim_{m\to\infty}(1+\frac{i}{m})^{m\cdot n}=K\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m/i})^{m\cdot n}=$$

$$=K\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m/i})^{\frac{m}{i}\cdot ni}=\left|\begin{array}{l} m/i=x \\ (1+\frac{1}{m/i})^{\frac{m}{i}}=(1+\frac{1}{x})^{x} \\ т.к.\ m\to\infty, то\ и\ x\to\infty \end{array}\right|=$$

$$=K\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x\cdot ni}=(\text{в силу }(6.2))=K_n=Ke^{ni}.$$

Следовательно, $K_n=Ke^{ni}$.

§ 5 Непрерывность функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Данное определение требует выполнения следующих условий:

1. Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности;

2. Пределы слева и справа существуют и равны между собой

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)$$

3. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 не выполняется хотя бы одно из указанных условий, то эта точка x_0 называется точкой разрыва функции.

В случае, когда $f(x_0 - 0) \neq (x_0 + 0)$, но эти пределы конечные, то точку x_0 называют точкой разрыва 1-го рода. Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Величина $d = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции в точке разрыва x_0.

Если функция непрерывна во всех точках отрезка $[a,\mathrm{b}]$, то она называется непрерывной на этом отрезке.

Из определения непрерывности функции и теорем о пределах следуют теоремы:

I. Сумма конечного числа непрерывных функций в точке x_0 непрерывна в этой точке.

II. Произведение конечного числа непрерывных функций в точке x_0 непрерывно в этой точке.

III. Частное двух непрерывных функций непрерывно в тех точках x_0, в которых знаменатель отличен от нуля.

IV. Сложная функция, составленная из непрерывных функций, непрерывна в соответствующей точке.

V. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие функции, графика функции, области определения и значений функции.

2. Понятие четности, нечетности и периодичности функции.

3. Понятие возрастающей и убывающей функции.

4. Понятие сложной и обратной функции.

5. Элементарные функции и их свойства.

6. Функции в экономике (функция спроса, предложения и др.).

7. Понятие предела числовой последовательности.

8. Понятие предела функции в точке и в бесконечности.

9. Бесконечно большие и бесконечно малые функции и их свойства.

10. Первый и второй замечательные пределы.

11. Правила раскрытия неопределенностей.

12. Понятие непрерывности функции, классификация точек разрыва.

13. Свойства непрерывных функций.

14. Задача о непрерывном начислении процентов.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 6.1 Найти область определения функции $f(x)=\sqrt[4]{x^2-4}$.

Задача 6.2 Обладают ли свойством четности (нечетности) функции:

$f(x)=x^3+1$ в области определения;

$g(x)=3x^2-2$ в области определения;

$p(x)=3x^2-2$ при $x\in[-1;2]$;

$r(x)=\sqrt{x}$ в области определения;

$\varphi(x)=x\cos x$ в области определения.

Задача 6.3 С помощью преобразования графика гиперболы $y=1/x$ построить график функции $y=\dfrac{x+2}{x+3}$.

Задача 6.4 Построить график функции $f(x)=|\lg x|$.

Задача 6.5 Построить график функции $f(x)=x^2-4x+7$.

Предел функции.

Задача 6.6 Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}$.

Задача 6.7 Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}$.

Задача 6.8 Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}}\dfrac{20x^2-41x+20}{\sqrt{10x}-\sqrt{5x+4}}$.

Задача 6.9 Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 9x}{1-\cos 4x}$.

Задача 6.10 Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{tg^2 4x}$.

Задача 6.11 Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-4}{5x+4}\right)^{9x}$.

Исследование непрерывности функции

Задача 6.12 В точках $x_1=0$ и $x_2=4$ для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{4}(x+4), & \text{если } -\infty<x<0,\\ \dfrac{5}{16}(x-4)^2, & \text{если } 0\le x\le 4,\\ 5x, & \text{если } 4<x<+\infty\end{cases}$$

установить непрерывность или определить характер точек разрыва. Нарисовать схематический график функции $f(x)$.

МОДУЛЬ 7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1 Производная функции, её геометрический, механический и экономический смысл

Любое изменение независимой переменной x, равное разности $x_2 - x_1 = \Delta x$, называется приращением этой переменной. Разность $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ называется приращением функции на отрезке $[x_1, x_2]$ или $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, где $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Функция, имеющая в данной точке конечную производную, называется дифференцируемой в этой точке.

Теорема. *Если функция дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.*

Однако, обратное утверждение не верно. Существуют непрерывные, но не дифференцируемые функции. Например, $y = |x|$, при $x = 0$.

Геометрический смысл производной. Производная функции равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x.

Механический смысл производной. Производная от пути по времени равна скорости движения точки в данный момент времени. Для любой функции $y = f'(x)$ равна скорости того процесса, который описывает функция.

Экономический смысл производной. Издержки производства K однородной продукции есть функция количества продукции x. Поэтому можно записать: $K = K(x)$.

Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Количеству продукции $x + \Delta x$ соответствуют издержки производства $K(x + \Delta x)$. Следовательно, приращению количества продукции соответствует приращение издержек производства продукции

$$\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x).$$

Среднее приращение издержек производства есть $\Delta K / \Delta x$. Это приращение издержек производства на единицу приращения количества продукций. Предел $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$ называется *предельными издержками производства*.

Если обозначить через *u (x)* выручку от продажи *x* единиц товара, то $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = u'(x)$ называется *предельной выручкой.*

С помощью производной можно вычислить приращение зависимой переменной, соответствующее приращению независимой переменной. Во многих задачах удобнее вычислять процент прироста (*относительное приращение*) зависимой переменной, соответствующей проценту прироста независимой переменной, соответствующей проценту прироста независимой переменной. Это приводит нас к понятию эластичности функции (иногда ее называют *относительной производной*).

Итак, пусть дана функция $y = f(x)$, для которой существует производная $y' = f'(x)$. Эластичность функции $y = f(x)$ относительно переменной *x* называют предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} f'(x).$$

Его обозначают

$$E_x(y) = \frac{x}{y} f'(x) = \frac{xdy}{ydx}.$$

Эластичность относительно x есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1%.

§ 2 Производная суммы, произведения, частного, сложной и обратной функций

Если функции дифференцируемы, то

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(uv)' = u'v + v'u$;

3) $(cu)' = cu'$, c =const;

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, $v \neq 0$;

5) Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$ — сложная функция, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ или в других обозначениях $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Это правило легко распространить на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

6) Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, имеющая производную $\varphi'(y) \neq 0$, то справедлива формула

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

§ 3 Таблица производных основных элементарных функций

1.	$u = x$,	$u' = 1$
2.	$y = u^n$,	$y' = nu^{n-1} \cdot u'$; $n \in R$;
3.	$y = a^u$,	$y' = a^u \ln a \cdot u'$;
4.	$y = e^u$,	$y' = e^u \cdot u'$;
5.	$y = \log_a u$,	$y' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$;
6.	$y = \ln u$,	$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
7.	$y = \sin u$,	$y' = \cos u \cdot u'$;
8.	$y = \cos u$,	$y' = -\sin u \cdot u'$;
9.	$y = tg u$,	$y' = \frac{1}{\cos^2} \cdot u'$;
10.	$y = ctg u$,	$y' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
11.	$y = \arcsin u$,	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
12.	$y = \arccos u$,	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
13.	$y = arctg u$,	$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
14.	$y = arcctg u$,	$y' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
15.	$y = \sqrt{u}$,	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
16.	$y = c = const$,	$y' = 0$.

§ 4 Правило Лопиталя и его применение к раскрытию неопределенностей

Теорема. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y=\varphi(x)$ на некотором отрезке $[x_0, b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и в точке $x = x_0$ одновременно обращаются в нуль или равны бесконечности.*

Тогда, если существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

то выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{7.1}$$

Правило применимо и в случае, когда $x_0 = \pm\infty$.

Пример 7.1 Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right)$.

Решение. Так как функции $\sin 5x$ и $3x$ непрерывны и дифференцируемы в точке $x = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \sin 5x = 0, \quad \lim\limits_{x \to 0} 3x = 0$, то, применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5\cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

Пример 7.2 Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{2x}+1}{2e^{2x}-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{2x}+1}{2e^{2x}-1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2e^{2x}}{4e^{2x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Правило Лопиталя применяется и для раскрытия неопределенностей вида:

1) $0 \cdot \infty$; 2) 0^0; 3) 1^∞; 4) ∞^0.

Пример 7.3 Найти $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-x} = (\infty \cdot 0)$.

Решение. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Неопределенность вида 2-4 получается при нахождении предела вида

$$A = \lim_{x \to x_0} (u(x))^{v(x)}, \tag{7.2}$$

в котором $u(x)$ или $v(x)$ стремится при $x \to x_0$ к 0, 1 или ∞. Так как логарифмическая функция непрерывная, то логарифмируем выражение, стоящее под знаком предела в (7.2). Тогда получим

$$\ln A = \lim_{x \to x_0} v(x) \ln u(x) \qquad (7.3)$$

В пределе (7.3) получилась неопределенность вида $(0 \cdot \infty)$.

§ 5 Признаки возрастания и убывания функций. Нахождение интервалов монотонности функции

Если для всех точек отрезка $[a, b]$ при $x_1 < x_2$ выполняется равенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется возрастающей на $[a, b]$. При выполнении условий $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$ функция $f(x)$ называется убывающей на $[a, b]$. Интервалы, в которых функция $f(x)$ только возрастает или только убывает, называются интервалами монотонности функции.

Признак возрастания. Дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда её производная $f'(x) > 0$.

Признак убывания. Дифференцируемая функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда её производная $f'(x) < 0$.

В точках, отделяющих интервалы монотонности функции, производная функции обращается в нуль или не существует. Эти точки называются критическими. Для нахождения интервалов монотонности функции $f(x)$ необходимо найти все её критические точки и установить знак производной в каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область существования функции.

§ 6. Экстремум функции. Необходимый признак экстремума функции

Определение максимума. Точка x_1 называется точкой максимума (*maximum*) функции $f(x)$, если значение функции в этой точке больше её значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1, т.е.

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

для любого Δx (Δx — мало по величине).

Определение минимума. Точка x_2 называется точкой минимума (*minimum*) функции $f(x)$, если значение функции в этой точке меньше её значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_2, т.е.

$$f(x_2+\Delta x) > f(x_2).$$

Точки, в которых функция достигает максимума или минимума, называются точками экстремума функции, а значения функции в этих точках называют *экстремальными.*

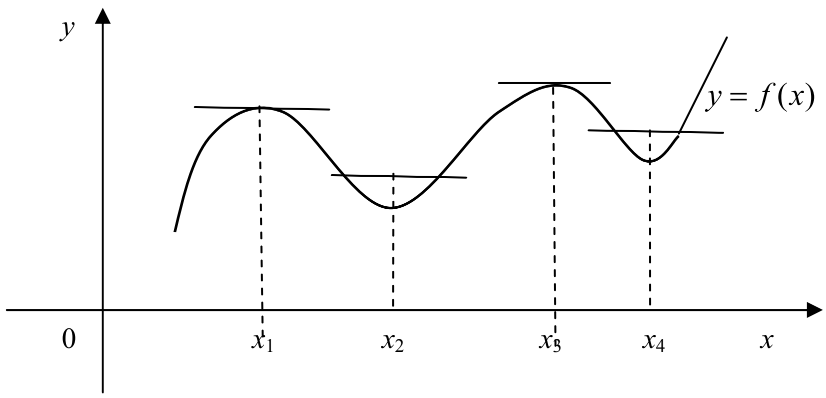


Рис 7.1

Функция, заданная кривой на рис.7.1, в точках x_1 и x_3 достигает максимума, а в точках x_2 и x_4 — минимума.

Необходимый признак экстремума. Если дифференцируемая функция достигает в некоторой точке экстремума, то её производная в этой точке равна нулю или не существуют.

Функция $y = f(x)$ (рис.7.1) в точках x_1, x_2, x_3, x_4 имеет производную равную нулю. Касательная к кривой в этих точках параллельна оси Ox.

§ 7 Достаточные признаки экстремума функции

Первый достаточный признак. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может самой точки x_0). Тогда, если:

а) $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ достигает максимума;

б) $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ достигает минимума.

Второй достаточный признак экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) = 0$ и непрерывную вторую производную f «(x). Тогда, если f «$(x_0) < 0$ в точке x_0 будет максимум, а если f «$(x_0) > 0$ в точке x_0 будет минимум.

Пример 7.4 Издержки предприятия выражаются формулой $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ (x — объем производства). При каком объеме производства средние издержки будут минимальными?

Решение. Средние издержки выражаются формулой $K(x)/x = x^2 - 6x + 15$. Найдем минимум этой функции: $\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2x - 6 = 0$. Это возможно при $x = 3$.

Найдем $\left(\frac{K(x)}{x}\right)'' = 2 > 0$. По второму достаточному признаку экстремума при $x = 3$ средние издержки достигают минимума.

§ 8 Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

Всякая функция может принимать на отрезке наибольшее и наименьшее значения в критических точках, лежащих внутри отрезка или на его концах.

Пример 7.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ на отрезке $[-2; 2]$.

Решение. Находим критические точки данной функции

$$y' = 3x^2 - 6x - 9,\ y' = 0,\ x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3},\ x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Отрезку $[-2, 2]$ принадлежит только одна критическая точка $x_1 = -1$. Вычисляем значения функции в точке $x_1 = -1$ и на концах отрезка: $y_1 = y(-1) = 11$, $y_2 = y(-2) = 4$, $y_3 = y(2) = -16$. Сравнивая полученные значения, найдем, что $y_2 = 4$

есть наибольшее значение функции, а $y_3 = -16$ — наименьшее значение функции на отрезке $[-2; 2]$.

§ 9 Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Кривая, определяемая данной функцией, называется выпуклой вверх или просто *выпуклой* на интервале (a, b), если график расположен ниже любой касательной, проведенной к графику функции в точках (a, b).

Кривая называется выпуклой вниз или *вогнутой* на интервале (a, b), если график расположен выше любой касательной, проведенной к графику функции в точках (a, b).

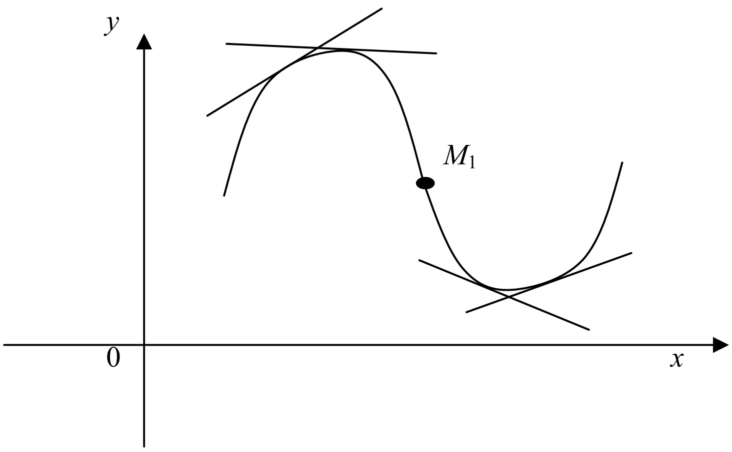


Рис.7.2

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба (рис.7.2). Точка M_1 является точкой перегиба. В точках перегиба вторая производная обращается в нуль или не существует.

Для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба кривой, определяемой функцией $y = f(x)$ находят все точки x, где $f\,(x) = 0$ или не существует и исследуют знак второй производной в интервалах, расположенных между этими точками.

Точки перегиба будут в тех точках x, где $f\,(x)=0$, при переходе через которые вторая производная изменяет знак.

§ 10 Асимптоты графика функции и их нахождение

Вертикальные асимптоты. Если существует число a такое, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$ (рис.7.3).

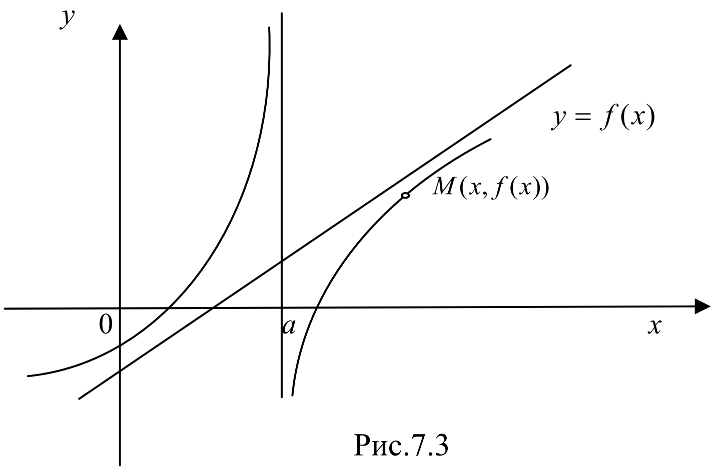


Рис.7.3

Наклонные асимптоты. Уравнение наклонных асимптот графика функции$y = f(x)$ ищется в виде $y = kx+b$,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) \tag{7.4}$$

При удалении точки $M(x, f(x))$ по кривой в бесконечность в правую и левую сторону могут получаться разные асимптоты. Если хотя бы один из пределов (7.4) не существует, то кривая $y = f(x)$ не имеет наклонных асимптот. Если $k = 0$,то асимптота горизонтальная.

§ 11 Общая схема исследования функции и построение её графика

С целью изучения процесса, описываемого заданной функцией, проводится её исследование по следующей схеме.

1. Находится область определения функции, точки пересечения с осями координат, точки разрыва функции.

2. Устанавливается четность или нечетность функции, её периодичность.

3. Находятся точки экстремума функции, вычисляются её экстремальные значения, находятся интервалы монотонности функции.

4. Находятся точки перегиба графика функции, интервалы выпуклости и вогнутости кривой.

5. Находятся асимптоты функций.

6. На координатную плоскость наносятся все найденные характерные точки и по результатам исследования строится график функции.

Пример 7.6 Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ и построить её график.

Решение. Функция определена для всех $x \neq -1$, т.е. область определения $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

В точке $x = -1$ функция терпит разрыв второго ряда. Если $x = 0$, то $y = 0$, значит, кривая проходит через начало координат.

При $x < 0$, $y < 0$, а при $x > 0$, $y > 0$.

$y(-x) = -\frac{x^3}{2(-x+1)^2}$ — функция не является четной и нечетной. Очевидно, что данная функция и непериодическая.

Находим производную

$$y' = \frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)x^3}{2(x+1)^4} = \frac{3x^2(x+1) - 2x^3}{2(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2}{2(x+1)^3}.$$

Производная $y' = 0$ или не существует, если $x^3 + 3x^2 = 0$ или $x + 1 = 0$, т.е. в критических точках $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, которые разбивают область определения функции на интервалы:

$(-\infty,-3)$,	$(-3,-1)$,	$(-1,0)$,	$(0,+\infty)$,
$f'(-4)>0$	$f'(-2)<0$	$f'(-0,5)>0$	$f'(2)>0$.

Поэтому функция растет в интервалах $(-\infty, -3)$ и $(-1, +\infty)$, убывает в интервале $(-3, -1)$.

В критической точке $x_1 = -3$ производная $y' = 0$ и изменяет знак с « плюса» на « минус». Точка $x_1 = -3$ является точкой максимума и $y_{max} = -27/8 \approx -3,4$. В точке $x_3 = -1$ изменяется характер роста функции, но экстремума нет, так как функция при $x = -1$ не существует. В точке $x = 0$ производная $y' = 0$, значит, кривая касается оси абсцисс.

Производная

$$y'' = \frac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - 3(x+1)^2(x^3+3x^2)}{2(x+1)^6} =$$

$$= \frac{(3x^2+6x)(x+1) - 3(x^3+3x^2)}{2(x+1)^4} = \frac{6x}{2(x+1)^4}.$$

Очевидно, что $y''= 0$ при $x_2 = 0$ и не существует при $x_3 = -1$, и при $x < 0$, $y'' < 0$, при $x > 0$, $y' > 0$. Это значит, что кривая, определяемая данной функцией, выпукла при $x\in (-\infty,0)$ и вогнута при $x\in (0,+\infty)$. Точка $M_2(0, 0)$ является точкой перегиба графика функции, так как при переходе через эту точку y'' изменяет свой знак с «минуса» на «плюс».

Находим асимптоты кривой $y = f(x)$. При $x = -1$ значение функции $y = -\infty$, значит, уравнение вертикальной асимптоты запишется в виде $x = -1$.

Наклонные асимптоты ищем в виде $y = kx+b$. По формуле (7.4) находим

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2(x^2+2x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2-1/x}{2(1+1/x)^2} = -1.$$

Следовательно, прямая $y = 1/2x - 1$ является асимптотой графика функции.

По результатам исследования строим график функции (рис.7.4).

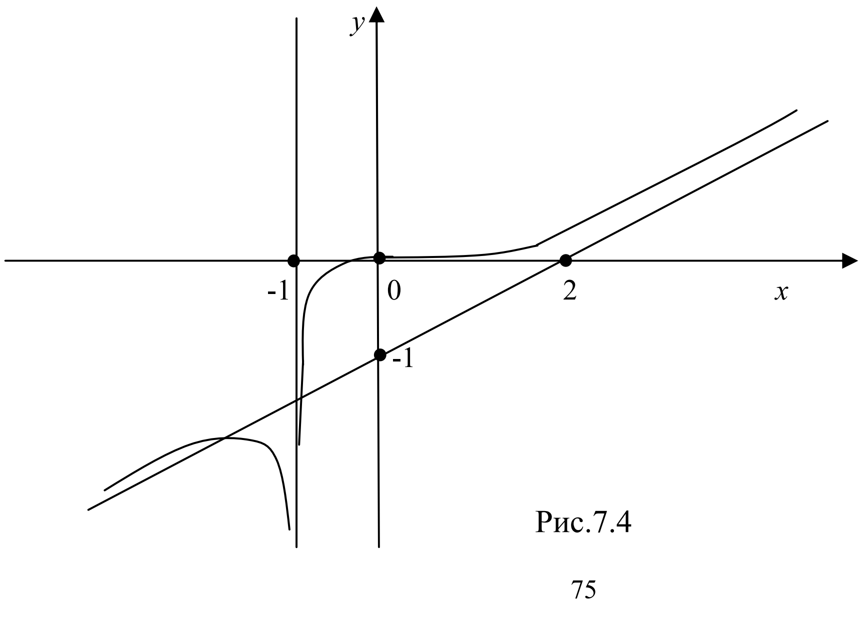


Рис.7.4

Пример 7.7 Открытый чан имеет форму цилиндра. Объём чана равен v. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы его поверхность была наименьшей?

Решение. Поверхность открытого цилиндрического чана $S = \pi r^2 + 2\pi r H$, где r — радиус основания, H — высота цилиндра. Объём цилиндра $v = \pi r^2 H$, откуда $H = v/\pi r^2$. Это значит, что

$$S = \pi r^2 + 2v/r\ .$$

Найдем значение радиуса r, при котором функция S достигает минимума:

$$S' = 2\pi r - 2v/r^2,\ S' = 0,\ \pi r - v/r^2 = 0,\ r \neq 0,\ \pi r^3 - v = 0,\ r = \sqrt[3]{v/\pi}\ .$$

Так как $S'' = 2\pi + \dfrac{4v}{r^3} > 0$ при $r = \sqrt[3]{v/\pi}$, то функция $S(r)$ достигает при $r = \sqrt[3]{v/\pi}$ минимума. $H = \dfrac{v}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\dfrac{v}{\pi}}$.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Определение производной.
2. Основные правила дифференцирования.
3. Производная сложной и неявной функции.
4. Основные формулы дифференцирования.
5. Производные высших порядков.
6. Экономический смысл производной.
7. Понятие дифференциала функции и его свойства.
8. Правило Лопиталя и его использование для раскрытия неопределенностей.
9. Признаки возрастания и убывания функции.
10. Экстремумы функции. Необходимое и достаточное условия экстремума.
11. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точка перегиба.
12. Асимптоты графика функции.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 7.1 Найти производную функции $f\left(x\right)=2x^2+1$ в точке $x_0=1$.

Задача 7.2 Найти производную функции $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$.

Задача 7.3 Найти в точке $x=0$ производную функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3e^{4x}+5}}$ и дифференциал функции в этой точке.

Задача 7.4 Найти производную функции $y=\ln\arcsin 6x$.

Задача 7.5 Найти производную функции $y=\dfrac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}$.

Задача 7.6 Найти производную функции $y=3^{tgx}\cdot\sin 5x$.

Задача 7.7 Найти производную показательно-степенной функции $y=\left(\arccos x\right)^{arctgx}$.

Задача 7.8 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=\sqrt[3]{x}-1$ в точке с абсциссой $x_0=8$.

Задача 7.9 Для производственной функции $y=x\ln\left(x^3+1\right)$ определить предельную эффективность ресурса при $x=1$.

Задача 7.10 Для производственной функции $y=x\ln\left(x^3+1\right)$ найти эластичность $E_x\left(y\right)$ при $x=1$.

Задача 7.11 Найти темп роста объема выпуска для производственной функции $y=x\ln\left(x^3+1\right)$ при $x=1$.

Задача 7.12 Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $x^3y+y^4-x-7=0$ в точке $M_0\left(2;1\right)$.

Задача 7.13 Найти дифференциал функции $y=x\cos(3x)$.

Задача 7.14 Найти дифференциал функции $y=2arctg\sqrt{\sin x}$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

Задача 7.15 Для $f(x)=\sqrt{3x-2}$ найти вторую производную ($f''(x)$).

Задача 7.16 Точка движется прямолинейно по закону $S\left(t\right)=\dfrac{t^3}{3}-4t^2+5t-2$. В какой момент времени ускорение равно нулю?

Задача 7.17 Вычислить предел а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-1+\ln x}$. б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{2x}+1}{4e^{5x}-x}$.

Задача 7.18 Найти экстремумы функции $f(x)=3x-x^3$.

Задача 7.19 Найти экстремумы функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

Задача 7.20 С помощью производной первого порядка найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y=\dfrac{3}{4}x^4-x^3-9x^2+7.$

Задача 7.21 Найти наибольшее и наименьшее значения $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-3x^2$ на отрезке [1; 4].

Задача 7.22 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3+3x^2-120x+1$ на отрезке $[1;9]$.

Задача 7.23. Предприятие выпускает некий товар в объеме, превосходящем 1 экземпляр. Издержки производства (в у.е.) зависят от объема выпущенного товара (x) и определяются формулой $f(x)=4+15x$. Спрос (цена на товар) также зависит от объема производства и определяется формулой $g(x)=-x^2+20x+2$. Найти объем производства товара, при котором прибыль будет максимальна.

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Задание 1. В табл.1 приведены данные, характеризующие число деталей, необходимых для изготовления одного культиватора КПМ.

Таблица 1

Наименование детали	Культиватор 1-го типа	Культиватор 2-го типа	Культиватор 3-го типа	Культиватор 4-го типа	Культиватор 5-го типа
Зубья	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
Стойки	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
Отвалы	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
Навески	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}

Число культиваторов, которые нужно изготовить, равно соответственно K_1, K_2, K_3, K_4, K_5. Используя матричное исчисление, определите число деталей каждого наименования, необходимых для сборки культиваторов при полном удовлетворении заказа на них, если значения a_{ij} $(i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,5})$ и K_j $(j = \overline{1,5})$ приведены в табл. 2 и 2а.

Таблица 2

№ задачи / Значения показателей	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
a_{11}	2	3	4	5	6	5	6	3	3	4
a_{12}	5	7	3	3	4	6	3	2	2	2
a_{13}	4	8	6	6	3	7	5	4	3	7
a_{14}	8	2	0	7	5	4	3	5	4	8
a_{15}	5	8	2	8	6	3	4	2	2	0
a_{21}	7	4	5	8	5	5	4	1	3	3
a_{22}	12	11	7	13	6	6	5	14	11	3
a_{23}	11	3	5	15	4	7	3	11	3	9
a_{24}	4	12	3	6	3	5	6	3	2	19
a_{25}	12	8	8	7	3	3	0	4	3	5
a_{31}	5	4	0	4	3	3	3	11	13	4
a_{32}	3	3	5	2	5	5	4	3	2	3
a_{33}	7	7	4	4	6	6	5	4	3	13
a_{34}	4	8	6	6	7	6	6	5	4	4

Окончание табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_{35}	8	10	7	3	6	7	10	5	4	6
a_{41}	2	10	4	6	7	7	3	3	5	7
a_{42}	5	11	5	4	7	4	0	3	3	4
a_{43}	6	5	7	0	4	3	4	4	3	2
a_{44}	1	6	8	5	6	2	5	2	4	4
a_{45}	7	8	3	3	4	4	3	4	5	0
K_1	20	35	27	44	31	42	42	30	32	40
K_2	30	27	61	47	42	44	53	49	94	39
K_3	40	42	43	42	53	60	50	30	38	61
K_4	50	38	43	54	60	54	40	24	47	53
K_5	60	42	57	66	59	41	50	40	95	32

Таблица 2а

№ задачи / Значения показателей	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	“α”
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
a_{11}	4	4	2	3	2	4	5	3	4	6	1
a_{12}	8	8	4	6	4	8	9	7	8	12	2
a_{13}	3	8	4	4	5	2	6	4	3	7	1
a_{14}	3	3	4	2	3	4	5	4	3	2	2
a_{15}	2	3	2	5	6	7	4	3	2	8	3
a_{21}	8	12	6	9	4	8	10	6	8	12	4
a_{22}	16	16	3	2	8	16	18	14	12	24	6
a_{23}	8	8	6	3	8	12	14	15	10	7	4
a_{24}	6	10	2	4	5	4	3	4	4	10	8
a_{25}	10	10	8	5	4	5	7	9	6	12	10
a_{31}	12	5	4	8	6	7	9	10	4	8	1
a_{32}	5	6	8	0	4	2	4	7	5	6	3
a_{33}	10	4	7	6	10	12	8	6	9	12	3
a_{34}	7	4	3	3	6	7	8	9	4	5	4
a_{35}	10	10	12	4	6	10	12	14	8	8	6
a_{41}	3	0	2	3	0	1	0	2	1	1	0
a_{42}	1	1	3	5	2	1	1	2	0	2	1
a_{43}	2	2	0	2	1	2	1	1	0	2	1
a_{44}	2	0	1	7	2	2	3	3	1	2	2
a_{45}	2	2	3	2	2	1	2	1	1	2	3
K_1	72	22	78	11	64	53	65	70	94	20	10
K_2	94	56	46	45	45	33	75	49	52	29	25
K_3	102	46	33	23	75	53	70	60	78	40	24
K_4	105	65	45	53	70	54	40	74	57	69	28
K_5	98	46	53	86	69	64	50	78	65	76	30

Задание 2. Показать, что векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ образуют базис трёхмерного пространства R^3 и найти координаты вектора $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ в этом базисе, если координаты векторов указаны в табл. 3 и 3а.

Таблица 3

№ задачи / Значения координат	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
a_1	1	1	1	2	7	4	3	4	-2	1
a_2	7	-2	4	7	2	5	-5	3	3	3
a_3	3	3	3	3	1	2	2	1	5	5
b_1	3	4	6	3	4	3	4	5	1	0
b_2	4	7	8	1	3	0	5	0	-3	2
b_3	2	2	5	8	5	1	1	4	4	0
c_1	4	6	3	2	3	-1	-3	2	7	5
c_2	8	4	1	-7	4	4	0	1	8	7
c_3	5	2	4	4	-2	2	-4	2	-1	9
d_1	7	14	21	16	2	5	4	0	1	0
d_2	32	18	18	14	-5	7	5	12	20	4
d_3	14	6	33	27	-13	8	-16	-6	1	16

Таблица 3а

№ задачи / Значения координат	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	«α»
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_1	5	1	10	8	8	1	4	8	10	2	5
a_2	5	-1	13	3	4	2	7	2	3	4	7
a_3	1	1	7	-1	3	3	8	3	1	1	1
b_1	1	-1	1	4	7	-1	9	4	1	1	1
b_2	0	3	7	7	3	3	1	6	4	3	0
b_3	-8	-2	-3	-3	-1	2	3	10	2	6	-8
c_1	-2	-1	-3	-1	-7	7	2	3	3	5	-2
c_2	4	0	6	0	4	-3	-4	-2	9	3	4
c_3	3	4	-10	5	2	5	1	1	2	1	3
d_1	-12	7	4	6	3	6	1	7	19	24	-12
d_2	27	6	3	5	6	10	-13	4	30	20	27
d_3	72	5	-7	0	9	17	-13	11	7	6	72

Задание 3.

41. Требуется изготовить не менее 50 автомобилей типов «Джип» и «Кабриолет». Затраты на производство машины «Джип» равны \$10 000, «Кабриолет» — \$8 500. Общие затраты на производство автомобилей не должны превышать \$65 000. Автомобили «Джип» и «Кабриолет» продают соответственно по \$20 000 и \$19 000. Общий доход от продаж должен быть не меньше \$1 000 000. Построить на плоскости область допустимых планов выпуска автомобилей.

42 Требуется перевезти не более 18 изделий типа I и не менее 23 изделий типа II. Изделия типа I перевозятся на корабле с затратами на единицу перевозимого изделия 4,3 ден. ед., а изделия типа II перевозятся на самолёте с затратами на единицу изделия 4,9 ден. ед. Суммарные затраты не должны превышать 180 ден. ед. Построить на плоскости область всевозможных вариантов перевозки изделий.

43 Требуется изготовить не более 250 изделий. Прибыль от реализации изделия типа A равно 5 ден. ед., типа B — 4,5 ден. ед.

44 Затраты на производство товаров типов A и B равны 2,5 ден. ед., а общие затраты не должны превышать 450 ден. ед. Построить на плоскости область всевозможных объёмов производства изделий типов A и B при условии, что прибыль будет не менее 690 ден. ед.

45 Цеха завода могут работать не более 23 дней в месяц. Затраты на электроэнергию в первом цеху составляют 15000 ден. ед в день, во втором — 18 000 ден. ед. в день. Общие затраты на электроэнергию не должны превышать 700 000 ден. ед. Первый цех приносит ежедневную прибыль в 40 000 ден. ед., второй — 43 000. Общая прибыль должна быть больше либо равной 1 600 000 ден. ед. Построить на плоскости область допустимых вариантов рабочих дней цехов в месяц.

46 Владелец фирмы по прокату автомобилей хочет закупить автомобили двух моделей A и B. Предположим, что автомобиль модели A стоит \$300, автомобиль модели B \$500. Известно, что в гараже фирмы может поместиться не более 20 новых машин, а на закупку новых автомобилей ассигновано \$7 000. Ожидаемая прибыль от эксплуатации одной машины модели A равна \$100, а от эксплуатации машины модели В \$140. Построить на плоскости область допустимых вариантов покупки автомобилей А и В, если общая прибыль должна быть не меньше \$1500.

47 Цех выпускает трансформаторы видов А и Б. На один трансформатор вида А расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг трансформаторной проволоки, а на трансформатор Б — 3кг железа и 2 кг проволоки. От реализации трансформатора вида А прибыль составляет 12 ден. ед., вида Б — 10 ден. ед. Сменный фонд железа — 400 кг, проволоки — 300 кг. Записать в математической форме условия, которым должен удовлетворять план выпуска трансформаторов, если расход ресурсов не превышает выделенных фондов, а прибыль не менее 900 ден. ед. за смену. Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых планов выпуска трансформаторов.

48 Цех производит изделия А и Б. Сменный плановый выпуск составляет 90 изделий А и 70 изделий Б. За смену не может использоваться более 540 ед. оборудования, более 550 ед. сырья и более 405 ед. электроэнергии. Расход ресурсов на одно изделие указан в таблице. От реализации изделия А прибыль составляет 80 ден. ед., изделия Б — 70 ден. ед. Каким математическим условиям удовлетворяет выпуск сверхплановой продукции, при котором выполняются ограничения на общий расход ресурсов и обеспечивается не менее 2 800 ден. ед. прибыли?

Ресурсы	изделия	
	А	Б
Оборудование	2	3
Сырье	1	4
Электроэнергия	2	1,5

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых планов выпуска изделий сверх установленного задания.

49. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 36 ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади в 125 м^2. Предприятие может заказать машины типа А стоимостью 6 ден. ед., занимающие площадь (с учетом проходов) в 6 $м^2$ и выпускающее за смену 7 ед. продукции, и машины типа Б стоимостью 3 ден. ед., занимающие площадь в 18 $м^2$ и обеспечивающие выпуск 10 ед. продукции за смену. При этом следует учесть, что машин типа А можно заказать не более 5 штук. Записать в математической форме условия приобретения оборудования, учитывающие, что денежные затраты и производственная площадь, занимаемая купленным оборудованием, не превышает указанных значений, а сменный выпуск продукции новым участком — не менее 35 ед. Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых вариантов приобретения оборудования.

50. На предприятии для изготовления продукции А и Б используется оборудование 4 групп. Все данные приведены в таблице. Записать в математической форме условия выпуска продукции, учитывающие, что можно использовать не более того оборудования, что имеется на предприятии по каждой группе.

Группа оборудования	Количество оборудования, ед.		
	в группе	занято выпуском продукции	
		А	Б
I	12	2	2
II	8	1	2
III	16	4	-
IV	12	-	4

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых планов производства продукции.

51. Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки определенное количество питательных веществ $В_1$, $В_2$, $В_3$ и $В_4$. Для упрощения примем, что используется только два вида пищи: $П_1$ и $П_2$. Все необходимые данные приведены в таблице. Записать в математической форме условие содержания в суточном рационе из 2-*х* видов пищи указанных питательных веществ в количествах, не меньше минимальных норм потребления.

Питательное вещество		Содержание питательных веществ в 1кг пищи	
Вид	Минимальная норма	$П_1$	$П_2$
B_1	4	2	1
B_2	6	0	3
B_3	9	1	3
B_4	6	3	2

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых рационов.

52. Трикотажная фабрика производит свитеры и пуловеры. Все данные в таблице. Записать в математической форме ограничения, налагаемые на любой реальный план выпуска изделий и состоящий в том, что расход пряжи не превышает ее запаса.

Пряжа		Затраты на 10 изделий, кг.	
вид	запас, кг.	свитеры	пуловеры
шерсть	900	4	2
силон	400	2	1
нитрон	300	1	1

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых планов выпуска изделий.

53. В хозяйстве установлено, что откорм животных выгоден лишь тогда, когда они будут получать в суточном рационе не менее 8 ед. питательного вещества А, не менее 14 ед. вещества Б и не менее 3 ед. вещества В, которое содержится в кормах I и II. В таблице указано, сколько единиц каждого вещества содержится в 1 кг корма. Записать в математической форме условия, которым должен удовлетворять суточный рацион.

	Корма	
	I	II
А	1	1
Б	2	3
В	0	4

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых суточных рационов при откорме животных.

54. Со станции ежедневно можно отправлять пассажирские и скорые поезда. Данные приведены в таблице. Записать в математической форме условия, не позволяющие превысить парк вагонов при формировании пассажирских и скорых поездов, ежедневно отправляемых со станции.

Тип поезда	Количество вагонов в поезде		
	Плацкартных	Купейных	Мягких
Скорый	5	6	3
Пассажирский	8	4	1
Резерв вагонов	80	72	21

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых вариантов формирования поездов.

55. На судно грузоподъемностью 1000 тон и емкостью трюмов 2400 м^3 необходимо погрузить товары А и Б. Объемные коэффициенты товаров составляют соответственно 3 м^3/т и 1,2 м^3/т. На складе имеется 800 т товара Б и большое количество товара А. Записать в математической форме ограничения на количество погружаемых на судно товаров, не позволяющее превысить грузоподъемность судна, емкость его трюмов и запас товара Б.

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых вариантов загрузки трюма судна.

56. Предприятию задан план производства по времени и номенклатуре: не более чем за 6 часов необходимо выпустить ровно 30 ед. продукции вида I и ровно 96 ед. продукции вида II. Машина А за час производит либо 6 ед. продукции вида I, либо 24 ед. продукции II, а машина Б соответственно 13 и 13 ед. Записать в математической форме условия, которым должно удовлетворять время работы каждой машины по выпуску продукции при точном выполнении плана по отдельным ее видам.

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых вариантов использования времени работы машин для выполнения плана выпуска продукции.

57. В хозяйстве нужно организовать производство картофеля и ячменя. Для этого можно использовать не более 1 000 га пашни, не более 900 тракторо-смен механизированного и не более 8 000 человеко-дней ручного труда. Затраты труда на 1 га. указаны в таблице. Записать в математической форме условия, которым должны удовлетворять затраты ресурсов при выполнении задания.

Ресурсы	Картофель	Ячмень
Механизированный труд, Тракторо-смен.	2,1	0,6
Ручной труд, чел.-дн.	20	2,0

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых вариантов использования пашни для выращивания картофеля и ячменя.

58. В торговом зале необходимо поставить для продажи товары T_1 и T_2. Рабочее время продавцов не превышает 360 часов, а площадь торгового зала, которую можно занять, не превышает 120 м^2. Каждая реализованная единица товара приносит прибыль соответственно в 50 и 80 ден. ед. Нормы затрат ресурсов на ед. проданного товара приведены в таблице. Записать в математической форме условия, которым должна удовлетворять структура товарооборота, обеспечивающая прибыль не менее 40000 ден. ед.

Ресурсы	Товары	
	T_1	T_2
Рабочее время, ч.	0,4	0,6
Площадь, м^2	0,2	0,1

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых вариантов товарооборота.

59. При изготовлении изделий А и Б расходуются сталь и цветные металлы. Изделия обрабатываются на токарных и фрезерных станках. В таблице приведены необходимые данные. Записать в математической форме условия, которым должен удовлетворять план выпуска изделий, обеспечивающий прибыль не менее 60 000 ден. ед. при затратах ресурсов не превышающих запасы.

Ресурсы	Запасы	Удельные затраты на изделие	
		А	Б
Сталь, кг.	700	10	70
Цветные металлы, кг.	600	20	25
Время работы станков, ч:			
Токарных	5600	300	400
Фрезерных	3400	200	100
Прибыль, ден. ед.		8	10

Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых планов выпуска продукции.

60. Хозяйству требуется не более 20 трехтонных автомашин и не более 18 пятитонных. Цена первых за штуку 2 400 ден. ед., а вторых — 4 200 ден. ед.

Хозяйство может выделить для приобретения автомашин не более 100 000 ден. ед. Построить на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых закупок автомашин.

61. Для кормления коров используются концентрированные (x) и грубые (y) корма. Один килограмм концентрата содержит одну кормовую единицу и 0,08 единиц протеина. Один килограмм грубых кормов содержит 0,25 кормовых единиц и 0,04 единиц протеина. Суточный рацион одной коровы должен содержать не менее 10 кормовых единиц и не менее 1,2 единиц протеина. Один килограмм грубых кормов стоит 2 ден. ед., а один килограмм концентрата — 5 ден. ед. На плоскости $x0y$ изобразить все возможные варианты суточного рациона, при условии, что стоимость рациона не должна превышать 100 ден. ед.

“α”**.** Владелец фирмы по прокату автомобилей хочет закупить автомобили двух моделей M_1 и M_2. Автомобиль модели M_1 стоит 16 ден.ед., а модели M_2 — 12 ден.ед. Известно, что в гараже фирмы может разместиться не более 20 новых автомобилей, а на закупку автомобилей ассигновано 1750 ден.ед. Ожидаемая прибыль от эксплуатации одного автомобиля модели M_1 равна 6 ден.ед., а автомобиля M_2 — 8 ден.ед. Построить на плоскости область допустимых вариантов покупки автомобилей M_1 и M_2 при условии, что прибыль от проката автомобилей должна быть не менее 48 ден.ед., и указать одно из возможных значений количества закупаемых автомобилей M_1 и M_2.

Задание 4. Предположение о взаимозаменяемости ресурсов в производственной функции $y_j = f_j(x_j)$ означает, что один и тот же объём выпуска продукции y_j может быть получен при разных комбинациях ресурсов x_j, отличающихся тем, что затраты одних ресурсов больше, а других — меньше.

Для характеристики эффективности производственных ресурсов в заданных производственных функциях 4.1–4.20 вычислите следующие показатели:

1) предельную эффективность ресурса y';
2) эластичность выпуска $E_x(y) = \dfrac{x}{y} \cdot y'$ от затрат ресурса $x = x_0$.

4.1. *а*) $y = 5^{\sin 2x}$ *б*) $y = \ln^5(2x^4 - x \operatorname{arctg} 3x)$; *в*) $y = x + \dfrac{1}{x-2}$ $x_0=4$.

4.2. *а*) $y = \sqrt{x} \cdot \cos 5x$; *б*) $y = e^{\left(\arccos\sqrt{1-x^2} + \sin^2 3x\right)}$; *в*) $y = e^{\frac{1}{x+1}}$ $x_0=2$.

4.3. *а*) $y = \sqrt{x^5} + \dfrac{1}{x} - \ln x$; *б*) $y = 3^{(x^3 + \operatorname{ctg}^7 5x)^4}$; *в*) $y = x - 1 + e^{-x}$ $x_0=2$.

4.4. *а*) $y = \operatorname{tg} 3x \cdot \sqrt{x}$; *б*) $y = \ln^5(x^3 - x \operatorname{tg}^3 4x)$; *в*) $y = \dfrac{4x}{x^2 - 4}$ $x_0=1$.

4.5. а) $y=e^{5x^2+1}$; б) $y=\ln\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$ $x_0=2$.

4.6. а) $y=\sqrt[5]{x^2-2x+1}$; б) $y=\operatorname{tg}\ln e^{2\sqrt{x}}$; в) $y=x+\frac{3}{x-2}$ $x_0=4$.

4.7. а) $y=\frac{x^3-1}{x^3+1}$; б) $y=\left(3^{\operatorname{tg}^2 3x}+\ln\sin x\right)^4$; в) $y=\frac{1}{e^x-1}$ $x_0=2$.

4.8. а) $y=\cos^2 x$; б) $y=\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x+2}$; в) $y=\frac{3x^2}{x^2+1}$ $x_0=2$.

4.9. а) $y=\log_4\left(x^2+5\right)$; б) $y=2x\cdot e^{-x}$; в) $y=e^{-x^2}$ $x_0=2$.

4.10. а) $y=\frac{x^2}{3-x}$; б) $y=(5^{\sin^2 2x}-\cos^2 3x)^3$; в) $y=\frac{x^2}{x^2-4}$ $x_0=8$.

4.11. а) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ б) $y=3^{\sin x}$; в) $y=\frac{x-1}{x^2+1}$, $x_0=2$.

4.12. а) $y=\operatorname{tg}\ln\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ б) $y=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$; в) $y=e^{-3x}$, $x_0=4$.

4.13. а) $y=\ln(e^x+e^{-x}\sin x)$ б) $y=\operatorname{tg}\sqrt{2x+3}$; в) $y=5^{x^2+3}$, $x_0=1$.

4.14. а) $y=\frac{7^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sin^4 3x^2}$ б) $y=e^{2x^2}$; в) $y=\cos x\sin x$, $x_0=2$.

4.15. а) $y=(6^{\arcsin 3x}+\operatorname{arctg} x^3)^3$; б) $y=\log_5\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ в) $y=7^{\sqrt{x^3}}$ $x_0=3$.

4.16. а) $y=(4^{\operatorname{tg}^3 x^4}+\sqrt{x})^3$; б) $y=\frac{5x+3}{x^2+7}$; в) $y=x^2\cdot\cos x$, $x_0=1$.

4.17. а) $y=\sin\ln\frac{x^2-1}{2x}$; б) $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+3}}$; в) $y=e^{3x+4}$, $x_0=8$.

4.18. а) $y=\ln\sqrt{\frac{2-x^2}{x^3-6x}}$; б) $y=\arcsin x^2$; в) $y=\cos^2 x\cdot 2^x$, $x_0=1$.

4.19. а) $y=\sin\ln\frac{x^2-1}{2x}$; б) $y=\log_5 x^5$; в) $y=\frac{x+3}{x^2+3}$, $x_0=2$.

4.20. а) $y=\sin(3x^2+\sqrt{9x^4-1})$; б) $y=e^{-3x^2+4}$; в) $y=cos\left(3^x+3^{-x}\right)$, $x_0=3$.

“α”. $y=x\cdot\ln\left(x^3+1\right)$, $x_0=1$.

Задание 5. Провести полное исследование целевой функции потребления y от услуги x и построить её график:

81. $y=\frac{x^3}{(x-3)^2}$

82. $y=\frac{3x^3}{x^2-9}$

83. $y=\frac{1-x^2}{x^2}$

84. $y=\frac{8-x^3}{x^2}$

85. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

86. $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x - 2}{x^2}$

87. $y = \frac{x}{(1+x)^3}$

88. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

89. $y = \frac{x^2}{x - 1}$

90. $y = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$

91. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

92. $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x + 3}$

93. $y = \frac{4x}{x^2 - 4}$

94. $y = \frac{x^3}{2 - x^3}$

95. $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$

96. $y = \frac{3x^2}{x + 2}$

97. $y = \frac{x^2}{x - 4}$

98. $y = \frac{4x^3 + 1}{x}$

99. $y = \frac{4x^3}{1 - x^3}$

100. $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$

“α”. $y = \frac{(x-5)^3}{x^2 - 10x + 9}$

Решение варианта “α”

Задание 1. В табл. приведены данные, характеризующие число деталей, необходимых для изготовления одного культиватора.

Таблица

Наименование детали	Изделие 1-го типа	Изделие 2-го типа	Изделие 3-го типа	Изделие 4-го типа	Изделие 5-го типа
Зубья	1	2	1	2	3
Стойки	4	6	4	8	10
Отвалы	1	3	3	4	6
Навески	0	1	1	2	3

Число культиваторов, которые нужно изготовить для ряда хозяйств, равно соответственно 10, 25, 24, 28, 30. Используя матричное исчисление, определите число деталей каждого наименования, необходимых для сборки культиваторов при полном удовлетворении заказа на них.

Решение. Пользуясь условием задачи составим матрицу А, элементы которой характеризуют число деталей каждого наименования для сборки культиваторов 1–5:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 4 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

и матрицу B, характеризующую заказ на эти культиваторы:

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 24 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Тогда, воспользовавшись произведением матриц (матрицы A и B согласованные), получим матрицу-столбец, элементы которой определяют число деталей каждого наименования, необходимых для выполнения заказа:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 4 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 24 \\ 28 \\ 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 24 + 2 \cdot 28 + 3 \cdot 30 \\ 4 \cdot 10 + 6 \cdot 25 + 4 \cdot 24 + 8 \cdot 28 + 10 \cdot 30 \\ 1 \cdot 10 + 3 \cdot 25 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 28 + 6 \cdot 30 \\ 0 \cdot 10 + 1 \cdot 25 + 1 \cdot 24 + 2 \cdot 28 + 3 \cdot 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230 \\ 810 \\ 449 \\ 195 \end{pmatrix}$$

Ответ: Для выполнения заказа нужно 230 зубьев, 810 стоек, 449 отвалов и 195 навесок.

Задание 2. Показать, что векторы $\vec{a} = (3;4;3)$, $\vec{b} = (-2;3;1)$ и $\vec{c} = (4;-2;3)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d} = (-17;18;-7)$ в этом базисе.

Решение:

1. Составляем матрицу A из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. При помощи элементарных преобразований вычисляем ранг матрицы A:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 17 & 9 \\ 0 & -22 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & 147 \end{bmatrix}.$$

На главной диагонали последней матрицы три ненулевых элемента. Следовательно, ранг матрицы равен 3. Значит, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы и, так как они принадлежат трехмерному пространству, то они образуют базис.

3. Составляем векторное равенство:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \text{ или } \begin{bmatrix} -17 \\ 18 \\ -7 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

и равносильную ему систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta + 4\gamma = -17, \\ 4\alpha + 3\beta - 2\gamma = 18, \\ 3\alpha + \ \beta + 3\gamma = -7. \end{cases}$$

4. Решаем систему методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & -17 \\ 4 & 3 & -2 & 18 \\ 3 & 1 & 3 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & -17 \\ 0 & 17 & -22 & 122 \\ 0 & 9 & -3 & 30 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & -17 \\ 0 & 17 & -22 & 122 \\ 0 & 3 & -1 & 10 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 51 & 0 & 24 & -45 \\ 0 & 17 & -22 & 122 \\ 0 & 0 & 49 & -196 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 51 & 0 & 0 & 51 \\ 0 & 17 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right].$$

Из последней матрицы получаем решение системы: $\alpha = 1;\ \beta = 2;\ \gamma = -4.$

5. Записываем разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}\ ;\ \vec{d} = (1;2;-4).$$

Ответ: векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис; координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе — $(1;2;-4)$.

Задание 3. Владелец фирмы по прокату автомобилей хочет закупить автомобили двух моделей M_1 и M_2. Автомобиль модели M_1 стоит 16 ден.ед., а модели M_2 — 12 ден.ед. Известно, что в гараже фирмы может разместиться не более 20 новых автомобилей, а на закупку автомобилей ассигновано 1750 ден.ед. Ожидаемая прибыль от эксплуатации одного автомобиля модели M_1 равна 6 ден.ед., а автомобиля M_2 — 8 ден.ед. Построить на плоскости область допустимых вариантов покупки автомобилей M_1 и M_2 при условии, что прибыль от проката автомобилей должна быть не менее 48 ден.ед., и указать одно из возможных значений количества закупаемых автомобилей M_1 и M_2.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — количества автомобилей моделей M_1 и M_2 соответственно, которые хочет закупить владелец фирмы проката. По условию задачи составляем математическую модель в виде системы неравенств:

$$\begin{aligned} 16x_1 + 12x_2 &\le 1750, \\ x_1 + x_2 &\le 20, \\ 6x_1 + 8x_2 &\ge 48, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Первое неравенство — это ограничение по стоимости; второе — по количеству мест в гараже; третье — по прибыли. Строим на плоскости $x_1\,0\,x_2$ граничные прямые

$$\begin{aligned} 16x_1 + 12x_2 &= 1750, && (l_1):(0;145{,}8),(109{,}4;0); \\ x_1 + x_2 &= 20, && (l_2):(0;20),(20;0); \\ 6x_1 + 8x_2 &= 48, && (l_3):(0;6),(8;0); \\ x_1 = 0, \quad x_2 &= 0, \end{aligned}$$

соответствующие данным неравенствам. Каждая из них делит плоскость на две полуплоскости, одна из которых является решением соответствующего неравенства. Для выбора полуплоскости, являющейся решением неравенства, подставляем начало координат O(0,0) в каждое неравенство. Если получаем верное неравенство, то полуплоскость, содержащая начало координат, является решением неравенства, в противном случае — полуплоскость, не содержащая начала координат, является решением этого неравенства.

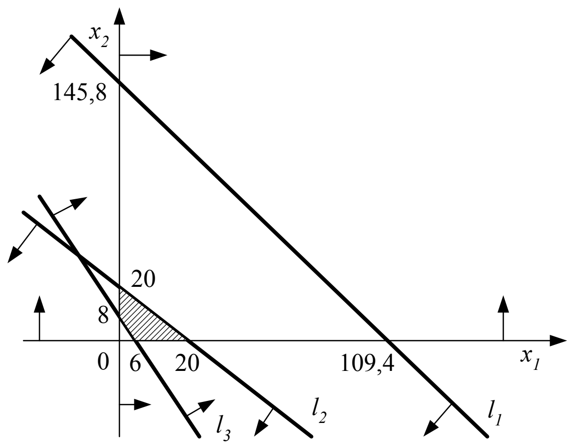


Рис 1.

Стрелки на прямых указывают полуплоскости, являющиеся областями решений данных неравенств. Пересечение отмеченных полуплоскостей — заштрихованный многоугольник на рис.1 одно из возможных значений количества закупаемых автомобилей моделей M_1 и M_2 равно: x_1= 10; x_2=5.

Задание 4. Предположение о взаимозаменяемости ресурсов в производственной функции $y_j = f_j(x_j)$ означает, что один и тот же объём выпуска продукции y_j может быть получен при разных комбинациях ресурсов x_j, отличающихся тем, что затраты одних ресурсов больше, а других — меньше.

Для характеристики эффективности производственного ресурса в заданной производственной функции $y = x \cdot \ln(x^3 + 1)$ вычислите следующие показатели:

1) предельную эффективность ресурса y';
2) эластичность выпуска $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$ от затрат ресурса x = 1.

Решение. 1). Предельная эффективность ресурса равна производной от производственной функции, которая является произведением *x* и сложной функции. Применив правило вычисления производной произведения и сложной функции, получим

$$y' = \ln\left(x^3 + 1\right) + \frac{x}{x^3 + 1} \cdot 3x^2 = \ln\left(x^3 + 1\right) + \frac{3x^3}{x^3 + 1};$$

$$y'(1) = \ln 2 + \frac{3}{2} \approx 2{,}19.$$

2). Для вычисления эластичности применим формулу:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y' \cdot$$

Подставив x = 1, вычислим значение эластичности:

$$E_1(y) = 1 + \frac{3}{2\ln 2} \approx 1 + \frac{3}{1{,}39} \approx 3{,}16 > 1.$$

Так как $E_1(y) > 1$, то производственная функция эластична. Это означает, что при увеличении ресурса на 1%, объём выпуска продукции возрастёт на 3,16%.

Ответ: 1) $y' = 2{,}19$; 2) $E_1(y) = 3{,}16$.

Задание 5. Провести полное исследование функции целевой функции потребления $y = \dfrac{(x-5)^3}{x^2 - 10x + 9}$ и построить ее график.

Решение:

1. Находим область определения функции:

$$D(y) = (-\infty;1) \cup (1;9) \cup (9;+\infty).$$

3. Проверим, является ли функция четной или нечетной. Вычислим

$$f(-x) = \frac{(-x-5)^3}{(-x)^2 - 10(-x) + 9} = \frac{-(x+5)^3}{x^2 + 10x + 9}.$$

Поскольку $f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не является периодической.

3. Находим точки пересечения графика с осями координат. Если $x = 0$, то $y = -13\frac{8}{9}$; значит $B\left(0;-13\frac{8}{9}\right)$ — точка пересечения графика с осью Oy. Если $y = 0$, то $x = 5$, поэтому $A(5;0)$ — точка пересечения графика с осью Ox.

4. Исследуем непрерывность функции. Поскольку данная функция является элементарной, она непрерывна на всей своей области определения $D(y)$. Точки $x = 1$ и $x = 9$ не принадлежат $D(y)$, а следовательно, являются точками разрыва.

Исследуем характер разрыва в указанных точках. Для этого вычислим односторонние пределы функции в точках $x=1$ и $x=9$. Имеем:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-5)^3}{(x-1)(x-9)}=\frac{-64}{(-0)(-8)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-5)^3}{(x-1)(x-9)}=\frac{-64}{(+0)(-8)}=+\infty.$$

Значит, $x=1$ — точка разрыва 2-го рода, а прямая $x=1$ — двусторонняя вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to 9-0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 9-0}\frac{(x-5)^3}{(x-1)(x-9)}=\frac{64}{8\cdot(-0)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 9+0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 9+0}\frac{(x-5)^3}{(x-1)(x-9)}=\frac{64}{8\cdot(+0)}=+\infty.$$

Следовательно, $x=9$ — точка разрыва 2-го рода, а прямая $x=9$ — двусторонняя вертикальная асимптота.

5. Находим наклонные асимптоты $y=kx+b$ графика функции. Для этого вычисляем следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-5)^3}{(x^2-10x+9)x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-15x^2+75x-125-x^3+10x^2-9x}{x^2-10x+9}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^2+66x-125}{x^2-10x+9}=-5.$$

Значит, прямая $y = x - 5$ является наклонной асимптотой графика функции при $x \to \pm\infty$.

6. Определяем промежутки монотонности и экстремумы данной функции. Находим первую производную функции

$$y' = \frac{3(x-5)^2\left(x^2-10x+9\right)-(2x-10)(x-5)^3}{\left(x^2-10x+9\right)^2} = \frac{(x-5)^2\cdot\left(x^2-10x-23\right)}{(x-1)^2\cdot(x-9)^2}.$$

Определяем стационарные точки функции, решая уравнение $y' = 0$. Это точки $x_1 = 5 - 4\sqrt{3}$, $x_2 = 5$, $x_3 = 5 + 4\sqrt{3}$.

Исследуем знак y' и находим интервалы монотонности и точки экстремума. Составляем таблицу:

x	$\left(-\infty; 5-4\sqrt{3}\right)$	$5-4\sqrt{3}$	$\left(5-4\sqrt{3};1\right)$	$(1;5)$
y'	+	0	–	-
y	возрастает	max	убывает	Убывает

x	5	$(5;9)$	$\left(9;5+4\sqrt{3}\right)$	$5+4\sqrt{3}$
y'	0	–	-	0
y	нет экстремума	убывает	убывает	min

Вычислим значения функции в точках экстремума $x = 5 \pm 4\sqrt{3}$. Получаем $y_{\max}\left(5-4\sqrt{3}\right) = -6\sqrt{3},$; $y_{\min}\left(5+4\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}$.

Таким образом, точка $C\left(5-4\sqrt{3}; -6\sqrt{3}\right)$ это точка локального максимума, а $D\left(5+4\sqrt{3}; 6\sqrt{3}\right)$ — локального минимума функции.

7. Определим промежутки выпуклости и точки перегиба. Находим вторую производную функции $y'' = \dfrac{32\cdot(x-5)\cdot\left(x^2-10x+73\right)}{(x-1)^3(x-9)^3}$.

Точки из области определения первой производной, в которых вторая производная обращается в нуль или не определена, являются точками возможного перегиба графика функции. В нашем случае это точка $x = 5.$ Исследуем знак второй производной. Поскольку $f''(x) > 0$ при $x \in (1;5) \cup (9;+\infty),$ то на этих интервалах график функции является выпуклым вниз. Аналогично, $f''(x) < 0$ при $x \in (-\infty;1) \cup (5;9),$ то на этих интервалах график функции является выпуклым вверх. Значит, точка $x = 5$ — это точка перегиба.

8. На основании всех полученных результатов строим график функции $y = \dfrac{(x-5)^3}{x^2 - 10x + 9}$ (рис.2):

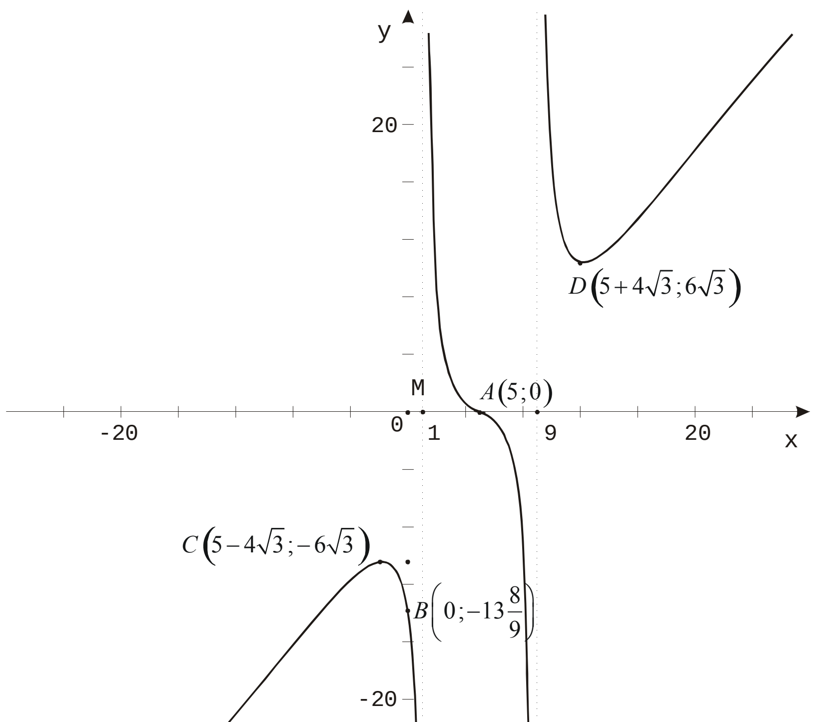


Рис. 2

ЧАСТЬ II

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Порядок выполнения контрольной работы №2

Рабочая программа курса "Высшей математики" 2-го семестра для экономических специальностей вузов состоит из следующих модулей (разделов):

1. *Функции нескольких переменных.*
2. *Неопределенный интеграл.*
3. *Определенный интеграл. Несобственный интеграл.*
4. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.*
5. *Ряды.*

К выполнению каждой контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующего теоретического материала курса по учебнику. Следует также внимательно разобрать решения тех задач, которые приводятся в данном пособии к каждой теме. При этом следует руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждую работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть указаны фамилия и инициалы студента, полный шифр зачетной книжки, номер контрольной работы и дата ее отправки в вуз. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. При необходимости следует делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении данной задачи. Все вычисления (в том числе и вспомогательные) необходимо делать полностью. Чертежи и графики должны быть выполнены (желательно па миллиметровой бумаге) аккуратно и четко с указанием единиц масштаба, координатных осей и других элементов чертежа. Объяснения к задачам должны соответствовать тем обозначениям, которые даны на чертеже.

2. После получения работы (как зачтенной, так и незачтенной) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом недостатки. В случае незачета студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

3. В период экзаменационной сессии студент обязан представить все прорецензированные и зачтенные контрольные работы. При необходимости (по требованию преподавателя) студент должен давать на экзамене устные пояснения ко всем или некоторым задачам, содержащимся в этих работах.

4. Студент выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 1, если же предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или нуль (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 2.

Таблица1

Номера вар-ов	**Номера задач контрольной работы №2**						
1	11	31	51	71	91	111	131
2	12	32	52	72	92	112	132
3	13	33	53	73	93	113	133
4	14	34	54	74	94	114	134
5	15	35	55	75	95	115	135
6	16	36	56	76	96	116	136
7	17	37	57	77	97	117	137
8	18	38	58	78	98	118	138
9	19	39	59	79	99	119	139
0	20	40	60	80	100	120	140

Таблица2

Номера вар-ов	**Номера задач контрольной работы №2**						
1	1	21	41	61	81	101	121
2	2	22	42	62	82	102	122
3	3	23	43	63	83	103	123
4	4	24	44	64	84	104	124
5	5	25	45	65	85	105	125
6	6	26	46	66	86	106	126
7	7	27	47	67	87	107	127

8	8	28	48	68	88	108	128
9	9	29	49	69	89	109	129
0	10	30	50	70	90	110	130

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Модуль 8
Функции нескольких переменных

1. Определение функций двух и большего числа переменных. Геометрическое толкование функции двух переменных как поверхности в трехмерном пространстве. Область определения функции нескольких переменных. [1] гл. 8, §1,2.
2. Предел функции двух переменных в точке. Непрерывность функции в точке и области. [1], гл. 8, §4.
3. Частные производные функции нескольких переменных. [1] гл. 8, §3,5,6.
4. Дифференцируемость функции нескольких переменных, полный дифференциал, его связь с частными производными. Достаточное условие дифференцируемости. [1] гл. 8, §7,8.
5. Производная от сложной функции. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. [1] гл. 8, §10.
6. Неявные функции. Производные неявной функции. [1] гл. 8, §11.
7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. [1] гл. 9, §6.
8. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования. [2] гл. 7, §2.
9. Экстремум функции двух переменных. Необходимое условие экстремума функции двух переменных. [2] гл. 7, §4.
10. Формулировка достаточного признака экстремума функции двух переменных. [2] гл. 7, §4.
11. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. [2] гл. 7, §4.
12. Производная функции многих переменных в заданном направлении. [1] гл. 8, §14.
13. Градиент функции и его свойства. [1] гл. 8, §15.
14. Функции многих переменных в экономических задачах. [4] гл. 8, §5, [7] тема 7, 8.

Модуль 9
Неопределенный интеграл

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Теорема о первообразной. [1] гл. 10, §1.
2. Основные свойства неопределенного интеграла. [1]гл. 10, §3.
3. Таблица основных интегралов. [1] гл. 10, §2.
4. .Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, интегрирование путем замены переменной (метод подстановки) и интегрирование по частям. [1] гл. 10, §4,6.
5. Интегрирование простейших рациональных дробей. [1] гл. 10, §7.
6. 6.Интегрирование дробно-рациональных функций. [1] гл. 10, §8, 9.
7. Нахождение интегралов вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. [1] гл. 10, §5.
8. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических. [1] гл. 10, §12.

Модуль 10, 11
Определённый интеграл. Несобственный интеграл

1. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл. [1] гл. 11, §1,2.
2. Основные свойства определенного интеграла. [1] гл. 11, §3.
3. Теорема о среднем значении определенного интеграла. [1] гл. 11, §3.
4. Теорема о производной определенного интеграла по верхнему пределу. [1] гл. 11, §4.
5. Формула Ньютона-Лейбница. [1] гл. 11, §4.
6. Замена переменной в определенном интеграле. [1] гл. 11, §5.
7. Вычисление определенных интегралов путем интегрирования по частям. [1] гл. 11, §6.
8. Вычисление с помощью определенных интегралов площадей плоских фигур, длины дуги кривых, объемов тел вращения. [1] гл. 12, §7.
9. Несобственные интегралы 1-го и 2-го. [1] гл. 11, §7.
10. Определённый интеграл в экономических задачах. [7] тема 10, [4], гл.7.

Модуль 12, 13
Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. 1.Обыкновенные дифференциальные уравнения, порядок уравнения. Общее и частное решения. Общий и частный интегралы. [1] гл. 13, § 1, 2.
2. Дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши. [1] гл. 13, § 3.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. [1] гл. 13, § 4.
4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. [1], гл. 13, § 5.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. [1], гл. 13, § 7.
6. Дифференциальные уравнения второго порядка. Задача Коши. [3], гл. 10, § 1.
7. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка. [3], гл. 10, § 2.
8. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. [1], гл. 13, § 1.
9. Дифференциальные уравнения первого и второго порядков в экономике. [3], гл. 11, § 1, 2.

Модуль 14
Ряды

1. Понятие числового ряда и его суммы. [1], гл. 16, § 1.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд. [1], гл. 16, § 2.
3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов: признак сравнения, признак Д'Аламбера, интегральный признак Коши. [1], гл. 16, § 3, 4, 6.
4. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. [1], гл. 16, § 7.
5. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. [1], гл. 16, § 8.
6. Степенной ряд. Теорема Абеля. [1], гл. 16, § 13.
7. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. [1],гл.16, § 13.

8. 8.Ряды Тейлора и Маклорена. Условия разложимости функций в степенной ряд. [1], гл. 16, § 16.
9. Степенные ряды функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = e^x$, $y = \ln(1+x)$. [1], гл. 16, § 17, 20.
10. Биномиальный ряд. [1], гл. 16, § 19.
11. Приложения рядов к приближенным вычислениям. [1], гл. 16, § 20, 21, 22.
12. Использование рядов в задачах экономики. [7], гл. 14, § 1.

МОДУЛЬ 8 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1 Определение функции нескольких переменных

Определение. Пусть в каждой точке $M(x_1,x_2,...x_n)$ из множества $D\subset E^n$ по какому-либо закону ставится в соответствие некоторое единственное число u. Тогда говорят, что на множестве D задана функция n переменных $u = f(M)$ или $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение. Переменная величина z называется функцией двух переменных величин x и y на множестве D, если каждой паре значений $(x, y) \in D$ соответствует единственное значение величины z.

Символически функция двух переменных обозначается так:

$$z = f(x, y),\ \ z = F(x, y),\ \ z = z(x, y) \text{ и т.д.}$$

Переменные x и y называются независимыми переменными или аргументами функции, а множество D — областью определения функции. Функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки $M(x, y)$ и записывать: $z = f(M)$.

§ 2 Некоторые многомерные функции, используемые в экономике

Многомерная функция полезности $u(X) = u(x_1, x_2, \dots x_n)$ — субъективная числовая оценка данным индивидом полезности u набора $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ товаров. Она неубывающая, т.е. $u(X_1) \le u(X_2)$, *если* $X_1 \le X_2$. Типичная функция полезности двух переменных $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$. $I(Y) = I(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – *функция издержек* зависимость издержек в стоимостной форме от объёмов $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ выпускаемой продукции. Она также неубывающая.

Многофакторная производственная функция $y = R(X) = R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — зависимость объёма или стоимости y выпускаемой продукции от объёма $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ перерабатываемых ресурсов. Она также неубывающая.

Функция Кобба-Дугла. Наиболее известной производственной функцией является функция Кобба-Дугласа $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, ãäå A, α, β — неотрицательные константы и $\alpha + \beta \le 1$, а K — объём фондов либо в стоимостном, либо в натуральном выражении (скажем, число станков); L — объём трудовых ресурсов — число рабочих, число человеко-дней и т.п. и, наконец, y — выпуск продукции в стоимостном или натуральном выражении.

Приведём ещё два примера функции многих переменных с экономическим содержанием.

Пример 8.1 Предприятие имеет участок производства и склад. Склад обеспечивает ритмичность работы — если продукцию не удаётся сбыть сразу, то её можно хранить на складе. Наличие склада приводит к издержкам хранения. В простейшем случае эти издержки за единицу времени пропорциональны числу изделий i, хранящихся на складе, т.е. они равны hi, где h — издержки хранения одного изделия в течение одной единицы времени. Издержки производства за единицу времени в простейшем случае также равны cu, где u — число произведённых за единицу времени изделий, а c — себестоимость производства одного изделия. К этим издержкам добавляются ещё накладные расходы K — это расходы в единицу времени на поддержание рабочего состояния предприятия, они практически не зависят от интенсивности работы и включают расходы на охрану, дежурных рабочих и т.д. Все издержки I за единицу времени получаются равными $I = K + cu + hi$.

Пример 8.2 Пусть M — это общее количество денег, V — скорость их обращения (сколько раз каждый рубль, доллар участвуют в расчётах в среднем за год), Y — национальный продукт или доход (*национальный продукт* — это все готовые товары и услуги, произведённые в экономической системе в стоимостном выражении; *национальный доход* — это все выплаты, получаемые домашними хозяйствами: заработная плата, рента, прибыль; национальный продукт и национальный доход численно равны). Пусть P — это уровень цен (среднее взвешенное значение цен готовых товаров и услуг, выраженное относительно базового показателя, принятого за единицу). Связывая все эти величины, получим уравнение денежного обращения — основное уравнение классической количественной теории денег, так называемое *уравнение обмена Фишера*: $MV = PY$. Любая из переменных M, V, P, Y может рассматриваться как функция трёх остальных.

Например, $P = MV/Y$ и видим, что если государство увеличит число денег M в обращении в 2 раза (т.е. просто деньги напечатают), то и цены возрастут в два раза (при условии, что остальные величины, т.е. V, Y, останутся неизменными). Такие действия чаще всего и есть причина инфляции.

§ 3 Частные производные функции нескольких переменных

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных. Дадим независимой переменной x приращение Δx, оставляя при этом переменную y неизменной. Тогда z получит приращение

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

которое называется ***частным приращением*** z ***по*** x.

Аналогично, если независимой переменной y дадим приращение Δy, оставляя при этом неизменной переменную x, то z получит приращение

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

называемое ***частным приращением*** z ***по*** y.

Определение. Частной производной по x от функции z называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Эта производная обозначается одним из символов

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ f'_x(x, y).$$

Таким образом по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная от функции $z = f(x, y)$ по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Она обозначается одним из символов

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ z'_y,\ \frac{\partial f}{\partial y},\ f'_y(x, y).$$

§ 4 Экономический смысл частных производных

Рассмотрим в качестве примера производственную функцию Кобба-Дугласа: $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ где A, α, β — неотрицательные константы и $\alpha + \beta \leq 1$; а K — объём фондов либо в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве, скажем число станков; L — объём трудовых ресурсов, например число рабочих; y — выпуск продукции в стоимостном выражении.

Величину $l = y / L$ естественно назвать *средней производительностью труда* — ведь это количество продукции (в стоимостном выражении), произведенное одним рабочим.

Величину $k = y / K$ естественно назвать *средней фондоотдачей* — ведь это количество продукции (в стоимостном выражении), приходящееся на один станок (на одну единицу фондов).

Величину $f = K / L$ естественно назвать *средней фондо-вооруженностью* или просто *фондовооруженностью* — ведь это стоимость фондов, приходящаяся в среднем на единицу трудовых ресурсов, например на одного рабочего.

Зафиксируем текущее состояние предприятия, т.е. объём фондов K и число рабочих L. Им соответствует выпуск продукции $y = y(K, L)$. Если нанять ещё одного рабочего, то приращение выпуска составит $\Delta_L y = y(K, L+1) - y(K, L)$. Это частное приращение и поэтому $\Delta_L y \approx y'_L(K, L) \cdot \Delta L$, а так как $\Delta L = 1$, то $\Delta_L y \approx y'_L(K, L)$.

Вывод: Частная производная от производственной функции по объёму трудовых ресурсов (кратко: производная выпуска по труду) приблизительно равна добавочной стоимости продукции, произведенной ещё одним дополнительным рабочим. По этой причине эта частная производная $y'_L = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}$ называется *предельной производительностью труда.*

Если же увеличить фонды ещё на единицу — купить ещё один станок, то добавочная стоимость продукции, произведенной на нём, окажется приблизительно равной частной производной от производственной функции по объёму фондов (кратко: производной выпуска по фондам). Эта частная производная $y'_K = \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}$ называется *предельной фондоотдачей.*

И предельная производительность труда, и предельная фондоотдача – это абсолютные величины. Но в экономике чрезвычайно удобно задавать такие вопросы: на сколько процентов изменится выпуск продукции, если число рабочих увеличится на 1%, или если фонды возрастут на 1% ? и т.д. Такие вопросы и ответы на них используют понятие *«эластичность функции по аргументу» или «относительная производная»*.

В случае функции одной переменной $y = f(x)$ *эластичностью функции* по аргументу называется величина

$$E_x^y = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y / y)/(\Delta x / x) = y'_x / (y / x).$$

Для функции многих переменных обычная производная заменяется частной производной.

Продолжим рассмотрение производственной функции Кобба-Дугласа. Найдём эластичность выпуска продукции по труду

$E_L^y = y'_L / (y / L)$. Подставляя найденную выше частную производную y'_L и выражение y через K, L, получим

$$E_L^y = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1} / (A K^{\alpha} L^{\beta} / L) = \beta.$$

Итак, параметр β имеет ясный экономический смысл — это *эластичность выпуска по труду*.

Аналогичный смысл имеет и параметр α — это ***эластичность*** *выпуска по фондам*, т.е $E_K^y = \alpha$.

Пример 8.3 Пусть производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 3%, надо увеличить фонды на 6% или численность рабочих на 9%. В 1997 г. один работник за месяц производил продукции на 1 млн руб., а всего работников 1000. Основные фонды оценивались в 10 млрд руб. Написать производственную функцию и величину средней фондоотдачи.

Решение. Видим, что эластичность выпуска по труду β = 1/3, а по фондам α = 1/2, следовательно, функция Кобба-Дугласа имеет вид: $y = AK^{1/2}L^{1/3}$. Подставляя остальные данные, получим: $10^6 \cdot 1000 = A(10^{10})^{1/2}(1000)^{1/3}$, т.е. A = 1000. Окончательно: функция Кобба-Дугласа есть $y = 1000K^{1/2}L^{1/3}$, а средняя фондоотдача равна $k = y/K = 10^6 \cdot 1000/10^{10} = 0{,}1$.

§ 5 Полный дифференциал функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx, а аргументу y приращение Δy. Тогда z получит приращение, $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, которое называется *полным приращением функции* z.

Предположим, что $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ имеет непрерывные частные производные.

Определение. Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, обозначается символом dz или df и вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{8.1}$$

Так как дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, то формулу (8.1) можно записать в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{8.2}$$

Пример 8.4 Найти полный дифференциал функции

$$z = e^{xy} + \frac{\sqrt{x}}{y}.$$

Решение. Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} y + \frac{1}{2\sqrt{x}y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} y - \frac{\sqrt{x}}{y^2}$$

Тогда полный дифференциал запишем в виде

$$dz = \left(e^{xy} y + \frac{1}{2\sqrt{x}y}\right)dx + \left(e^{xy} x - \frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)dy.$$

§ 6 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \ \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Эти производные в свою очередь являются функциями независимых переменных x и y. Будем называть $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ частными производными первого порядка.

Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются *частными производными второго порядка от функции* $f(x, y)$**.** Они обозначаются так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Определение. Частной производной *n*-ого порядка называется первая производная от производной (n – 1)-ого порядка.

Их обозначают $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$, $\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$ и т.д.

Частные производные любого порядка, взятые по различным переменным называются смешанными.

Теорема. *Если функция* $z = f(x, y)$ *и ее частные производные* f'_x, f'_y, f''_{xy} *и* f''_{yx} *определены и непрерывны в точке* $M(x, y)$ *и в некоторой ее окрестности, то*

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Пример 8.5. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 y^2 + \sin(xy+1)$.

Решение. Последовательно находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + y\cos(xy+1);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + x\cos(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[3x^2 y^2 + y\cos(xy+1)\right]'_x = 6xy^2 - y^2\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[3x^2 y^2 + y\cos(xy+1)\right]'_y = 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left[2x^3 y + x\cos(xy+1)\right]'_x = 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \left[2x^2 y + x\cos(xy+1)\right]'_y = 2x^3 - x^2\sin(xy+1).$$

§ 7 Функция полезности

Многомерная функция полезности $u(x_1,\ldots,x_n)$ — субъективная числовая оценка данным индивидом полезности u набора $X = (x_1,\ldots,x_n)$ товаров. Она неубывающая, т.е. $u(X_1) \le u(X_2)$, если $X_1 \le X_2$ и выпуклая. Кроме того, будем предполагать, что каждый товар желателен, т.е. если $X > Y$ *и* $x_i > y_i$ для какого-то $i = 1,2,\ldots,n$, то $u(X) > u(Y)$. Предположим также, что функция u дифференцируема и имеет необходимые производные 2-го порядка.

Частная производная $\partial u/\partial x_i$ называется *предельной полезностью i-го товара*. Свойство неубывания функции полезности и желательности каждого товара заменим более сильным требованием положительности всех частных производных.

Вектор, составленный из частных производных функции полезности $\partial u/\partial X = (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)$, естественно назвать *векторoм предельных полезностей*. Напомним, что такой вектор называется также *градиентом.* Он показывает направление наибольшего роста значений функции.

Использование предельных соотношений для анализа экономических закономерностей, для анализа поведения субъетов экономики является сущностью «маржинализма» — течения в экономической теории, зародившегося в середине XIX в. Одним из основоположников этого течения был немец К. Госсен. Он первый сформулировал основополагающее свойство функции полезности: ***с*** *увеличением потребления товара его полезность уменьшается* — это и есть так называемый *1-й закон Госсена.* То есть, если вы голодны, то первый гамбургер съедите с большой охотой, второй уже не так понравится и т.д.. На дифференциальном языке это означает, что предельные полезности убывают при возрастании аргументов — количеств потребляемых товаров, т.е. вторые частные производные должны быть отрицательны.

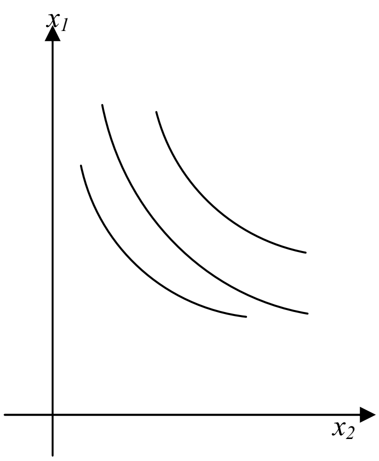


Рис. 8.1

Пример 8.6 Для функции полезности $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ начертить кривые безразличия (линии постоянства полезности).

Найти вектор предельных полезностей, проверить выполнение 1-го закона Госсена.

Решение. Построим кривые постоянства полезности $U_c = \{(x_1, x_2) : \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = c\}$

Найдем частные производные :

$\partial u/\partial x_1 = \sqrt{x_2}/(2\sqrt{x_1})$, $\partial u/\partial x_2 = \sqrt{x_1}/(2\sqrt{x_2})$.Следовательно, вектор предельных полезностей есть $\nabla u = (\sqrt{x_2}/(2\sqrt{x_1}), \sqrt{x_1}/(2\sqrt{x_2}))$. Для проверки 1-го закона Госсена находим вторые частные производные: $u''_{x_1x_1} = -(1/4)x_1^{-3/2}x_2^{1/2}$, $u''_{x_2x_2} = -(1/4)x_1^{1/2}x_2^{-3/2}$, они отрицательны, что и свидетельствует о выполнении 1-го закона Госсена.

К функциям полезности относятся, например: функция стоимости $u(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$; неоклассическая функция $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_1}$, где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$.

§ 8 Экстремум функции двух переменных

Определение. Функция $z = f(x, y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой имеет место неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой имеет место неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$.

Точки максимума и минимума называют точками *экстремума*, а значения функции в этих точках называются *экстремальными*.

Теорема. *(необходимые условия экстремума). Если дифференцируемая функция* $z = f(x, y)$ *имеет экстремум в точке* $M_0(x_0, y_0)$, *то ее частные производные в этой точке равны нулю, т.е.*

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0} = 0, \ \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0} = 0.$$

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются *стационарными* точками функции $z = f(x, y)$.

Теорема. *(достаточные условия экстремума). Пусть* $M_0(x_0, y_0)$ *является стационарной точкой функции* $z = f(x, y)$ *и пусть* $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{M_0} = A$, $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]_{M_0} = B$, $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{M_0} = C$. *Составим определитель* $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. *Тогда:*

1) *если* $\Delta < 0$*, то в стационарной точке* M_0 *нет экстремума;*

2) *если* $\Delta > 0$*, то в точке* M_0 *есть экстремум, причем максимум, если* $A < 0$*, минимум, если* $A > 0$*;*

3) *если* $\Delta = 0$*, то требуется дополнительное исследование.*

Пример 8.7 Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Находим частные производные первого порядка: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$ Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases},$$

получаем две стационарные точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Исследуем каждую стационарную точку.

1) В точке $M_1(0;0)$ имеем: $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$. Тогда $\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$. Так как $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума.

2) В точке $M_2(1;1)$ имеем: $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$. В этом случае $\Delta = 36 - 9 = 27 > 0$. Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в этой точке функция имеет минимум $z_{\min} = z(1;1) = 1 + 1 - 3 = -1$.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие функции нескольких переменных.

2. Область определения и множество значений функции нескольких переменных.

3. Понятие линии уровня.

4. Частные производные функции нескольких переменных.

5. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных.

6. Экономический смысл частных производных на примере функции Кобба-Дугласа.

7. Понятие дифференциала функции нескольких переменных.

8. Экстремум функции нескольких переменных.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 8.1 Найти частные производные функции:

а) $z = xy + 5y^2 + 6x^3$;

б) $z = x^2y^3 - 15y^2 - 26x$;

в) $z = \sqrt{x^3 + y^5} \cdot \left(x^2 - y^3\right)^2$;

г) $z = \dfrac{e^{x^3} + y}{x^8}$.

Задача 8.2 Найти полный дифференциал функции:

а) $z = \sin^3\left(x + 6y^2\right)$;

б) $z = \dfrac{xy^2 + 9}{x^2 + y}$.

Задача 8.3 Найти экстремумы функций:

а) $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 5x - 6y + 1$;

б) $z = 3x^2 - y^2 + 4x + 2y + 5$.

МОДУЛЬ 9 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1 Неопределенный интеграл и его свойства

Определение. Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т.е.

$$F'(x) = f(x).$$

Например, $\sin x$ есть первообразная функции $\cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$.

Определение. Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ подынтегральным выражением.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ или $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ или $\int df(x) = f(x) + C$,
3. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ (c =const),
4. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.
5. $\int f(u)du = F(u) + C,$ где $u = \varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция.

Таблица неопределенных интегралов

1.	$\int \mathrm{d}u = u + C$;	**2.**	$\int 0\,\mathrm{d}u = C$;
3.	$\int u^{\alpha}\mathrm{d}u = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$; $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$;	**4.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$, $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$;
5.	$\int a^u \mathrm{d}u = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$,$(a>0, a\neq 1)$	**6.**	$\int \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \mathrm{e}^u + C$;
7.	$\int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C$;	**8.**	$\int \cos u\mathrm{d}u = \sin u + C$;

9.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$;	**10.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;
11.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$;	**12.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u+a}{u-a}\right\| + C$;
13.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$;	**14.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;
15.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right\| + C$	**16.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right\| + C$
17.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u} = \ln\|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\| + C$;	**18.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$;
19.	$\int \operatorname{tg} u \mathrm{d}u = -\ln\|\cos u\| + C$;	**20.**	$\int \operatorname{ctg} u \mathrm{d}u = \ln\|\sin u\| + C$;

Пример 9.1 Найти $\int \left(x - \sqrt{x}\right)^2 dx$.

Решение. Возведя подынтегральную функцию в квадрат, получим

$$\int \left(x - \sqrt{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - 2x\sqrt{x} + x\right)dx = \int x^2 dx - 2\int x^{3/2}dx + \int x dx = \; = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^2}{2} + C.$$

Пример 9.2 Найти $I = \int \frac{dx}{x^2 + 3}$.

Решение. Имеем: $I = \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

Пример 9.3 Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x + x^2}}$.

Решение. Выделяем полный квадрат в знаменателе дроби

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2\cdot 1\cdot x + 1 + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{2}\,)^2}}$$

Преобразованный интеграл является табличным (№ 18). Тогда

$$\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{2}\,)^2}} = \ln\left|x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 2}\right| + C.$$

Пример 9.4 Найти $\int \frac{x-1}{x^2+5x}dx.$

Решение. Разбивая интеграл на сумму двух, имеем:

$$\int \frac{x-1}{x^2+5x}dx = \int \frac{x}{x^2+5x}dx - \int \frac{dx}{x^2+5x} = \int \frac{dx}{x+5} - \int \frac{dx}{x^2+5x} =$$
$$= \int \frac{dx}{x+5} - \int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}} = I;$$

Сводим полученные интегралы к табличным (№ 3 и № 12).

$$I = \int \frac{d(x+5)}{x+5} - \int \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \ln|x+5| - \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}}\right| + C =$$
$$= \ln|x+5| - \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right| + C.$$

§ 2 Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки)

При вычислении неопределенных интегралов методом замены переменной применяют два типа подстановок: либо $u=\phi(x)$, либо $x=\psi(t)$, где $\phi(x)$ и $\psi(t)$ — некоторые функции.

После подстановки полученный интеграл может оказаться проще исходного.

Частным случаем метода замены переменной является метод подведения под знак дифференциала, основанный на формуле

$$\phi'(x)dx = d\phi(x).$$

Например, $\frac{1}{x}dx = d\ln x$, $xdx = d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}dx^2$ и т.п.

Пример 9.5. Найти $\int \sin(2x+1)dx$.

Решение. Сделаем замену переменной

$$2x+1=u \Rightarrow x=\frac{u-1}{2},\ dx=\frac{1}{2}du.$$

Тогда

$$\int \sin(2x+1)dx = \int \sin u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int \sin u du = -\frac{1}{2}\cos u + C = = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

Можно этот интеграл находить иначе, предварительно преобразовав выражения под знаком дифференциала:

$$dx = \frac{1}{2}d(2x) = \frac{1}{2}d(2x+1),$$

так как для любого постоянного c выполняется $dc = 0$. Значит,

$$\int \sin(2x+1)dx = \int \sin(2x+1)\cdot\frac{1}{2}d(2x+1) = |2x+1 = u| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

Пример 9.6 Найти $I = \int \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение. $I = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = |\ln x = u| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$.

§ 3 Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива следующая формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{9.1}$$

Среди интегралов, берущихся по частям, выделяют три основных класса интегралов:

1. $\int x^n \sin ax dx$, $\int x^n \cos ax dx$, $\int x^n e^{ax} dx$.

Здесь полагают $u = x^n$.

2. $\int x^n \ln x dx$, $\int x^n \arcsin x dx$, $\int x^n \arccos x dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x dx$, $\int x^n \operatorname{arcctg} x dx$ и т.п.

Здесь полагают $dv = x^n dx.$

3. $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$ и т.п.

Полагают либо $u = e^{ax}$, либо $dv = e^{ax} dx$.

Замечание. Иногда формулу (9.1) применяют несколько раз подряд.

Пример 9.7 Найти $\int x^2 \cos 2x dx.$

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx,\ dv = \cos 2xdx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x .$$

Тогда

$$\int x^2 \cos 2xdx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot 2xdx = = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int x \sin 2xdx .$$

К последнему интегралу снова применим формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = x \Rightarrow du = dx,\ dv = \sin 2xdx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x .$$

Окончательно получаем

$$\int x^2 \cos 2xdx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x \right) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C .$$

§ 4 Интегрирование дробно-рациональных функций

Рациональной функцией называют дробь вида

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0},$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно.

Если $m \geq n$, то дробь называется неправильной, а если $m < n$ — правильной.

Если дробь неправильная, то выделяют целую часть. Для этого числитель делят «уголком» на знаменатель.

Например, дробь $\dfrac{2x^3+3}{x^2+x+1}$ является неправильной, так как в числителе стоит многочлен третьей степени, а в знаменателе — второй. Разделим числитель на знаменатель.

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} 2x^3+3 \\ \underline{2x^3+2x^2+2x} \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x+1 \\ \hline 2x-2 \end{array} \\
\qquad -\begin{array}{l} -2x^2-2x+3 \\ \underline{-2x^2-2x-2} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad 5 &
\end{array}
$$

При делении на каждом шаге мы знаменатель x^2+x+1 умножали на такую степень x, чтобы при вычитании полученного после этого многочлена старшие степени уничтожались (сначала мы умножили на $2x$, затем — на (-2)).

Следовательно, неправильную дробь можно представить в виде:

$$\frac{2x^3+3}{x^2+x+1}=2x-2+\frac{5}{x^2+x+1}.$$

Из алгебры известно, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших рациональных дробей вида:

$$\frac{A}{(x-a)^k};\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l},$$

где k, l натуральные числа, A, B, C, a, p, q — постоянные, причем $p^2-4q<0$ (квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней).

Интегрирование правильной рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ($m<n$) производят по следующей схеме:

1) Раскладывают знаменатель на неприводимые множители (линейные и квадратичные)

$$Q_n(x)=\ldots(x-a)^k\ldots(x^2+px+q)^l.$$

2)Представляют правильную рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами следующим образом

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{\ldots(x-a)^k\ldots(x^2+px+q)^l} = \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$
$$\ldots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots \frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}.$$

т.е. каждому линейному множителю $(x-a)^k$ в знаменателе соответствует k дробей вида $\frac{A_i}{(x-a)^i}$ ($i=1, 2, \ldots, k$), а каждому квадратичному множителю $(x^2+px+q)^l$ — сумма l дробей вида:

$$\frac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j}, \; (j=1, 2, \ldots, l).$$

3) Находят неопределенные коэффициенты разложения.

Для определения коэффициентов A_i ($i=1, 2, \ldots, k$), B_j, C_j ($j=1, 2, \ldots, l$) правую часть разложения приводят к общему знаменателю и приравнивают числитель к $P_m(x)$. Затем:

а) либо приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x (метод неопределенных коэффициентов);

б) либо придают x частные значения, в первую очередь значения корней знаменателя;

в) либо комбинируют оба указанных приема.

4) Вычисляют интегралы.

Пример 9.8 Найти $\int \frac{x^5-x^2-2}{x^2(x^2+1)}dx$.

Решение. Дробь $\frac{x^5-x^2-2}{x^2(x^2+1)}$ является неправильной. Выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l} x^5-x^2-2 & \underline{x^4+x^2} \\ \underline{x^5+x^3} & x \\ -x^3-x^2-2 & \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 - x^2 - 2}{x^2(x^2+1)}dx = \int\left(x - \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2(x^2+1)}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2(x^2+1)}dx.$$

Вычислим последний интеграл. Разложение на простейшие рациональные дроби будет иметь вид:

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, и приравнивая числители, получаем

$$x^3 + x^2 + 2 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx + D)x^2.$$

Применим метод неопределенных коэффициентов, т.е. будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^3:\ 1 = A + C$,

$x^2:\ 1 = B + D$,

$x\ \ :\ 0 = A$,

$x^0:\ 2 = B$,

откуда находим $A = 0$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -1$.

Значит,

$$\int \frac{x^5 - x^2 - 2}{x^2(x^2+1)}dx = \frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{2}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2\int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{xdx}{x^2+1} + \int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{-1}}{-1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.$$

§ 5 Интегрирование тригонометрических функций

I. Рассмотрим интегралы вида: $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

1. Если хотя бы одно из чисел m или n нечетное положительное, то от нечетной степени отделяем множитель в первой степени и вносим его под знак дифференциала. Оставшуюся четную степень выражаем через дополнительную функцию с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. Если m и n четные неотрицательные, то применяем формулы понижения степени $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

II. Для вычисления интегралов $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \cos bx dx$ применяют формулы

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right], \quad \cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right].$$

III. В общем случае интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R — рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональной функции новой переменной t с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, при этом $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Пример 9.9 Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{2+3\sin x + 2\cos x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(x/2) = t \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+3\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{6t+4} = \int \frac{dt}{3t+2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3t+2)}{3t+2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3t+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|3\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2\right| + C.$$

§ 6. Интегрирование иррациональных функций

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)dx,$$

где R — рациональная функция, $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots, m_s, n_s$ — целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$,

где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_s}{n_s}$.

Пример 9.10. Найти интеграл. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{2x+3}-1\right)\sqrt{2x+3}}$

Решение.

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{2x+3}-1\right)\sqrt{2x+3}} = \int \frac{dx}{\left((2x+3)^{1/4}-1\right)(2x+3)^{1/2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 2x+3 = t^4 \\ x = \dfrac{t^4-3}{2} \\ dx = 2t^3dt \end{array} \right| = \int \frac{2t^3dt}{(t-1)t^2} = 2\int \frac{tdt}{t-1} = 2\int \frac{(t-1)+1}{(t-1)}dt =$$

$$= 2\left(\int dt + \int \frac{d(t-1)}{t-1}\right) = 2\left(t + \ln|t-1|\right) + C = \; = 2\left(\sqrt[4]{2x+3} + \ln\left|\sqrt[4]{2x-3}-1\right|\right) + C.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие первообразной функции.
2. Понятие неопределенного интеграла.

3. Свойства неопределенного интеграла.

4. Таблица неопределенных интегралов.

5. Основные методы интегрирования (метод непосредственного интегрирования, интегрирование заменой переменной, интегрирование по частям).

6. Понятие правильной и неправильной рациональной дроби.

7. Интегрирование рациональных дробей, метод неопределенных коэффициентов.

8. Интегрирование простейших иррациональных и некоторых тригонометрических функций.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 9.1 Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\left(5x+\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x^6}\right)dx$; д) $\int\left(\sin 5x-e^{-3x}+\frac{1}{\cos^2 4x}\right)dx$;

б) $\int\frac{3dx}{4-5x}$; е) $\int\frac{5dx}{16+x^2}$;

в) $\frac{dx}{(3x+5)\ln^2(3x+5)}$; ж) $\int\frac{3x-4dx}{25-x^2}$;

г) $\int\frac{tg5x}{\cos^2 5x}dx$.

Задача 9.2 Найти неопределенные интегралы, применив метод интегрирования по частям:

а) $\int(2x+5)\cos xdx$; б) $\int(2-5x)e^{-x}dx$;

в) $\int\ln(x-1)dx$; г) $\int arctg2xdx$.

Задача 9.3 Найти неопределенные интегралы, применив метод разложения на простейшие дроби:

а) $\int\frac{x^3}{x^3-1}dx$; б) $\int\frac{x+2}{(x\ \ -1)x^2}dx$.

МОДУЛЬ 10 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x)$ – определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. На каждом из полученных элементарных отрезков длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ произвольным образом выберем
точку $\xi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ и составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

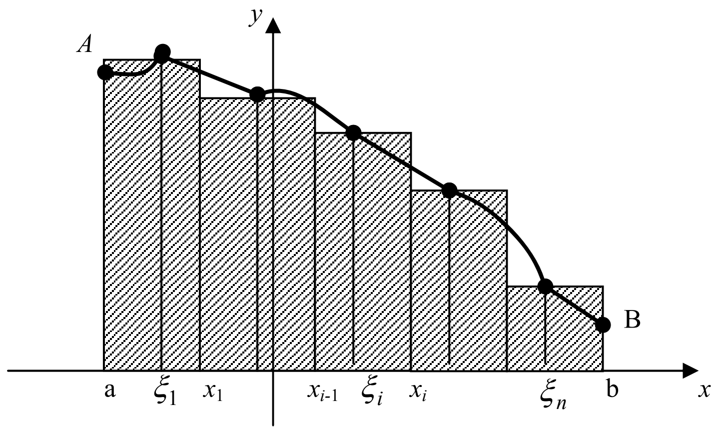


Рис. 10.1.

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при стремлении к нулю наибольшей из длин Δx_i, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i, то он называется *определенным интегралом от функции* $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Таким образом, $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$

Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Теорема. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке [a;b], то она интегрируема на [a;b], т. е. предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка [a;b] на частичные отрезки* Δx_i *и выбора на них точек* ξ_i.

Если $y = f(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$, то геометрически определенный интеграл выражает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$, $x = b$. Эта фигура называется *криволинейной трапецией.*

В общем случае, когда функция $y = f(x)$ на отрезке [a; b] принимает значения разных знаков, определенный интеграл выражает разность площадей криволинейных трапеций, расположенных над осью Ox и под ней, так как площадям криволинейных трапеций, расположенных под осью Ox, присваивается знак «-». Например, для функции, график которой изображен на рисунке 10.2, имеем

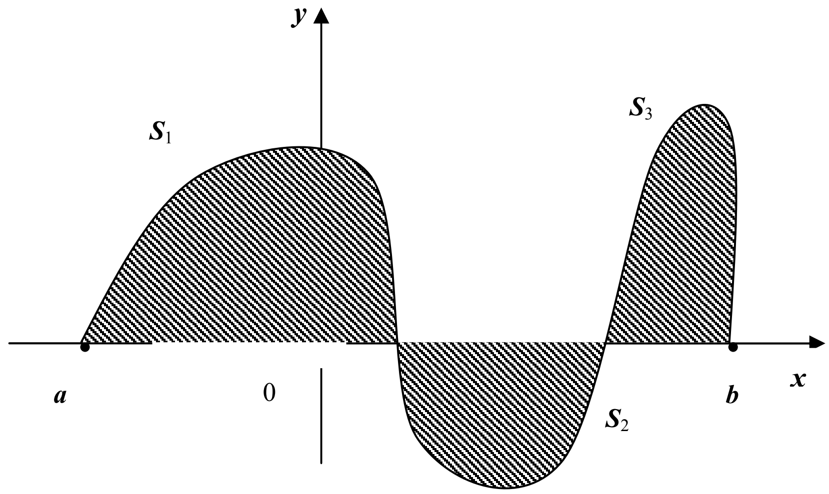


Рис. 10.2.

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$$

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

3. $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (c = const).

4. $\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$.

5. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ для любого действительного c.

6. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке [a, b], где $a<b$, и $f(x) \le \varphi(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx.$$

7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], тогда найдется хотя бы одна точка $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

§ 2. Методы вычисления определенного интеграла

Если $F(x)$ – одна из первообразных непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, то справедлива следующая *формула Ньютона-Лейбница:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t,$$

где $x = \phi(t)$ имеет непрерывную производную, $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$.

Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняется по формуле

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

Пример 10.1. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$.

Решение. Так как $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$,

то $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$

Пример 10.2. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x$**.**

Решение. Преобразуем выражение под знаком дифференциала

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 (3x+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\mathrm{d}(3x+1) = \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) =$$

$$= \frac{2}{9}(2^3 - 1) = \frac{14}{9}.$$

Пример10.3. Вычислить $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x dx$**.**

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, положив $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$, $dv = dx \Rightarrow v = x$.

Тогда

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x dx = x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\frac{dx}{x} = = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \ln 1 - x\Big|_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 0 - \mathrm{e} + 1 = 1.$$

§ 3. Приложения определенного интеграла к задачам геометрии.

Площадь плоской фигуры

1) Площадь криволинейной трапеции (см. рис. 10.3), ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, слева и справа соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx \qquad (10.1)$$

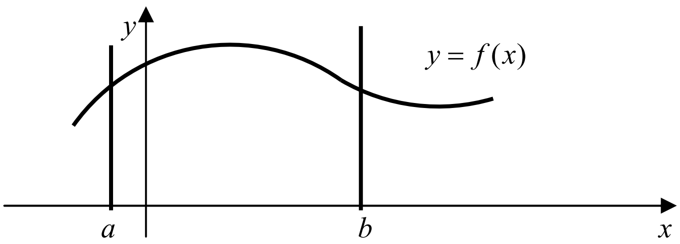


Рис. 10. 3

2) Площадь фигуры (см. рис. 10.4), ограниченной сверху и снизу соответственно кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, определяется формулой

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x \qquad (10.2)$$

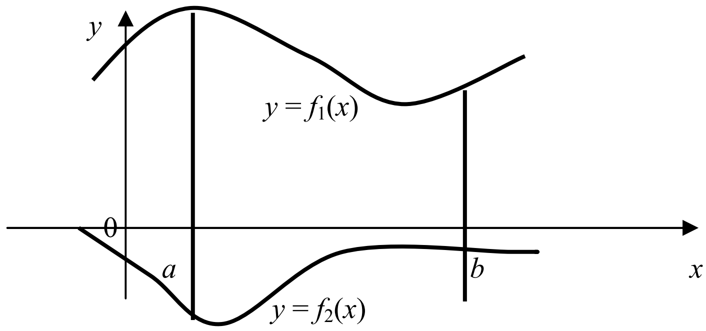


Рис. 10.4

3) Площадь криволинейной трапеции, в случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le x \le b$, $a = x(t_1), b = x(t_2)$, будет вычисляться по формуле

$$S = \int_{t_2}^{t_1} y(t)x'(t)\mathrm{d}t \qquad (10.3)$$

4) Площадь криволинейного сектора (см. рис. 10.5), ограниченного непрерывной кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \qquad (10.4)$$

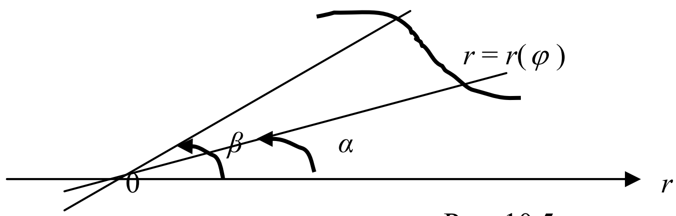


Рис. 10.5

Пример 10.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2$ и $x - y + 2 = 0$.

Решение. Данная фигура ограничена сверху прямой $y = x + 2$, а снизу – параболой $y = x^2$ (см. рис. 10.6).

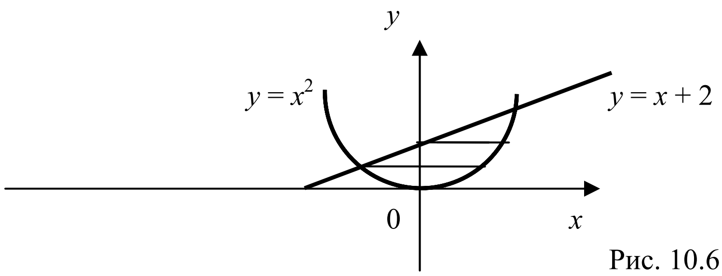


Рис. 10.6

Точки пересечения этих кривых найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x + 2 \quad \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой (10.2)

$$S = \int_{-1}^{2}((x+2) - x^2)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{2}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = = 2 - \frac{1}{2} + 4 + 2 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{9}{2}.$$

Длина дуги кривой

1) Длина дуги кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x. \tag{10.5}$$

2) Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\mathrm{d}t. \tag{10.6}$$

3) Если кривая задана уравнением в полярных координатах
$r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\mathrm{d}\varphi \tag{10.7}$$

Пример 10.5. Вычислить длину дуги полукубической параболы
$y^2 = x^3$ от начала координат до точки A (4, 8) (см. рис. 10.7).

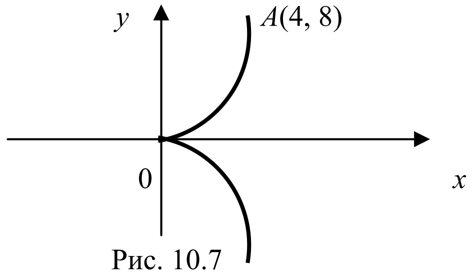


Рис. 10.7

Решение. Имеем $y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\int_0^4 \sqrt{(1 + \frac{9}{4}x)}\,\mathrm{d}(1 + \frac{9}{4}x) =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

Объем и площадь поверхности тел вращения

1) Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$.

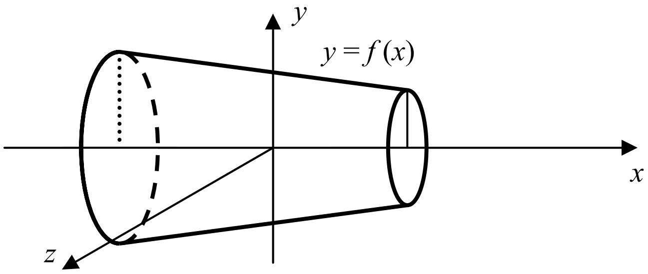


Рис. 10.8

(см. рис. 10.8), вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x\ . \tag{10.8}$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, вращается вокруг оси Oy, то

$$V_y = \pi\int_c^d x^2\mathrm{d}y. \tag{10.9}$$

2) Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$Q_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + (y'_x)^2}\mathrm{d}x\ . \tag{10.10}$$

Если дуга $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, вращается вокруг оси Oy, то

$$Q_y = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1 + (x'_y)^2}\mathrm{d}y \tag{10.11}$$

Пример 10.6. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$ (см. рис. 10.9).

Решение. Найдем точки пересечения кривых из системы

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = x^4 \quad \Leftrightarrow \quad x - x^4 = 0, \quad x(1 - x^3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

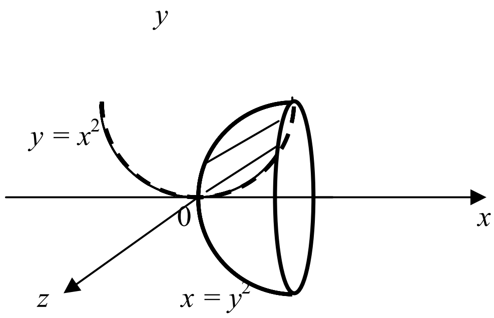


Рис. 10.9

Искомый объем есть разность двух объемов: объема V_1, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=\sqrt{x}$ $(0 \le x \le 1)$ и объема V_2, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ $(0 \le x \le 1)$.

Используя формулу (10.8), получаем

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 (\sqrt{x})^2\, dx - \pi\int_0^1 (x^2)^2\, dx = \pi\int_0^1 xdx - \pi\int_0^1 x^4 dx =$$

$$= \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\pi.$$

$$V_y = 2\pi\int_0^2 (4-y^2)^2 \mathrm{d}y = 2\pi\int_0^2 (16-8y^2+y^4)\mathrm{d}y = 2\pi\left(16y\Big|_0^2 - 8\frac{y^3}{3}\Big|_0^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{y^5}{5}\Big|_0^2\right) = 2\pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = 34\frac{2}{15}\pi.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие определенного интеграла, его геометрический и экономический смысл.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.
5. Геометрические и экономические приложения определенного интеграла.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 10.1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \left(5+x^2\right)dx$; б) $\int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$;

в) $\int_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx$; г) $\int_2^7 \frac{dx}{5+\sqrt{x+2}}$;

д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$; е) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 2xdx$.

Задача 10.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

а) $y = x^2$ и $y = 2x$; б) $y = 5x - x^2$ и $y = x$.

в) $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = 0$, x =1, x =3.

МОДУЛЬ 11 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq a$, то несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом определеяется по формуле

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (11.1)$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (11.1), то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Аналогично определяется интеграл с бесконечным нижним пределом и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{a\to+\infty}\int_c^b f(x)dx,$$

где c – любая точка из интервала $(-\infty;+\infty)$.

Пример11.1. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$.

Решение. По определению

$$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\ln|\ln x|\Big|_e^b =$$
$$\lim_{b\to+\infty}\ln|\ln b| - \ln|\ln e| = +\infty - 0 = +\infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

§ 2.Интегралы от неограниченных функций (II рода)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $a \leq x < b$ и неограничена в окрестности точки b, т.е. $f(b) = \infty$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (11.2)$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (11.2), то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае расходящимся.

Аналогично, если $f(a) = \infty$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, а $f(c) = \infty$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx .$$

Пример 11.2. Найти несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} .$$

Решение. Подынтегральная функция не определена в окрестности точки $x = 1$ и неограниченно возрастает при $x \to 1$. Следовательно,

$$\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^9 (x-1)^{-1/3} d(x-1) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big|_{1+\varepsilon}^9 = \frac{3}{2}\left(8^{1/3} - \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2/3}\right) = \frac{3}{2}\left(2^2 - 0\right) = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6 .$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие несобственного интеграла с бесконечными пределами.
2. Понятие несобственного интеграла от неограниченной функции.
3. Понятие сходимости, расходимости несобственного интеграла и его геометрический смысл.
4. Экономические приложения несобственных интегралов I рода.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 11.1. Вычислить несобственные интегралы 1-го рода:

а) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+2)\ln^2(x+2)}$

б) $\int_1^\infty \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

Задача 11.2. Вычислить несобственный интеграл 2-го рода:

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

МОДУЛЬ 12, 13 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1.Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (12.1)$$

где x – независимая переменная, y и y' – соответственно неизвестная функция и её производная, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Например, $(y')^3 \cdot y^2 + 2xy = 0, \quad \sqrt{x^2 + y'} - 3y = 2xy^3$ – дифференциальные уравнения первого порядка.

Если из уравнения (1) можно выразить y', то получаем уравнение вида:

$$y' = f(x, y) \qquad (12.2)$$

Уравнение (12.2) называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.*

Например, $y' = 2xy, \quad y' = x^2 + y^2$.

Определение. *Решением дифференциального уравнения* первого порядка называется функция $y = \varphi(x)$, определённая на некотором интервале (a, b), которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Определение. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Например, функция $y = x^2$ тождественно обращает в нуль левую часть уравнения $xy' - 2x^2 = 0$ и поэтому представляет собой решение этого уравнения.

В теории дифференциальных уравнений основной задачей является вопрос о существовании и единственности решения. Ответ на него даёт теорема Коши, которую мы приводим без доказательства.

Теорема *(Коши).* *Пусть дано дифференциальное уравнение (12.2). Если функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, то в некоторой окрестности любой внутренней точки (x_0, y_0) этой области существует единственное решение уравнения (12.2), удовлетворяющее условию $y = y_0$ при $x = x_0$.*

В области D содержится бесконечно много интегральных кривых. Теорема Коши гарантирует, что при соблюдении определённых условий через каждую внутреннюю точку области D проходит только одна интегральная кривая. Условия, которые задают значения функции y_0 в фиксированной точке x_0, называют *начальными условиями* (*условиями Коши*) и записывают в такой форме:

$$y(x_0) = y_0 \qquad (12.3)$$

Задача нахождения решения уравнения (12.2), удовлетворяющего условию (12.3), называется *задачей Коши* – из множества интегральных кривых выделяется та, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) области D.

В ряде случаев, когда условия теоремы Коши не выполнены, через некоторые точки плоскости Oxy либо не проходит ни одной интегральной кривой, либо проходит более одной интегральной кривой; эти точки называются *особыми точками* данного дифференциального уравнения.

Определение. *Общим решением* уравнения (12.2) называется функция $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая этому уравнению при произвольном значении постоянной C.

Определение. *Частным решением* уравнения (12.2) в области D называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, полученная при определённом значении постоянной $C = C_0$.

Общее решение $y = \varphi(x, C)$, описывает семейство интегральных кривых на плоскости Oxy. Условия Коши (12.3) фиксируют произвольную постоянную C и позволяют выбрать из семейства интегральных кривых уравнения (12.2) одну интегральную кривую $y = \varphi(x, C_0)$, проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

§ 2. Геометрический смысл уравнения первого порядка

Рассмотрим уравнение $y' = f(x, y)$. Пусть $y = \varphi(x)$ – его решение, график которого представляет собой непрерывную интегральную кривую, причём в каждой её точке существует касательная. Из дифференциального уравнения следует, что угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в каждой точке равен правой части этого уравнения. Следовательно, уравнение первого порядка задаёт угловой коэффициент y' касательной к интегральной кривой как функцию двух переменных. Если каждой точке (x, y) сопоставить отрезок, направленный под углом наклона $\alpha = \operatorname{arctg}(f(x, y))$ к оси Ox, то мы получим *поле направлений* данного уравнения. В этом и заключается геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка.

§ 3.Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

Определение. *Дифференциальным уравнением второго порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (12.4)$$

где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, y' и y'' – соответственно её первая и вторая производные.

Примеры дифференциальных уравнений второго порядка:

$$y'' + yy' - xy^3 - \cos x = 0;$$

$$y^2 y'' + xy' + x^2 \cos x = 0.$$

Будем рассматривать уравнения, которые можно записать в виде, разрешенном относительно второй производной:

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (12.5)$$

Как и в случае уравнения первого порядка, *решением уравнения* (12.4) называется функция $y = \varphi(x)$, определённая на некотором интервале (a, b), которая обращает это уравнение в тождество. График решения называется *интегральной кривой*. Имеет место теорема существования и единственности решения уравнения второго порядка.

Теорема *(Коши).* *Пусть функция $f(x, y, y')$ и её частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D пространства переменных (x, y, y'). Тогда для любой внутренней точки*

$M_0(x_0, y_0, y_0')$ *этой области существует единственное решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям:*

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y_0'. \qquad (12.6)$$

Геометрический смысл этой теоремы (её доказательство мы не приводим) заключается в том, что через заданную точку (x_0, y_0) на координатной плоскости *Oxy* проходит единственная интегральная кривая с заданным коэффициентом y_0' касательной (рис. 12.1).

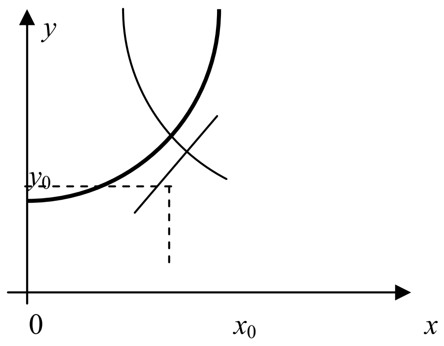


Рис. 12.1.

Условия (12.6) называются *начальными условиями,* а задачу отыскания решения уравнения (12.5) по заданным начальным условиям называют *задачей Коши*.

Определение. *Общим решением* уравнения (12.5) в некоторой области *D* называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, если она является решением этого уравнения при любых постоянных величинах C_1 и C_2, которые могут быть определены единственным образом при заданных начальных условиях (12.6).

Определение. *Частным решением* уравнения (12.5) называется общее решение этого уравнения при фиксированных значениях постоянных C_1 и C_2:

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0).$$

Пример 12.1. Рассмотрим уравнение $y'' = 0$. Его общее решение получается при двухкратном интегрировании этого уравнения:

$$y = C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Это решение представляет собой семейство прямых, проходящих в произвольных направлениях, причем через каждую точку плоскости *Oxy* проходит бесконечное число таких прямых. Поэтому для нахождения частного решения, проходящего через заданную точку (x_0, y_0), следует задать ещё и угловой коэффициент прямой, совпадающей в данном случае со своей касательной. Например, найдём частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

т.е. нужно найти прямую, проходящую через точку $M(1, 2)$, с угловым коэффициентом, равным единице. Подстановка начальных условий в общее решение уравнения приводит к системе двух линейных уравнений относительно постоянных C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 = 1, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Таким образом, искомое частное решение – это прямая $y = x + 1$.

§ 4. Интегрирование некоторых типов дифференциальных уравнений первого и второго порядков

Тип уравнения	Вид уравнения	Схема интегрирования	Общее решение (общий интеграл)
1	2	3	4
Простейшее дифференциальное уравнение первого порядка	$y' = f(x)$	Проинтегрировать обе части уравнения	$y = \int f(x)dx + C$
Дифференциальное уравнение с разделёнными переменными	$M(x)dx + N(y)dy = 0$	Почленно проинтегрировать обе части уравнения	$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$
Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными	$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$	«Разделить» переменные, разделив уравнение на $M_2(x)N_1(y)$ и проинтегрировать обе части полученного равенства	$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$
	$y' = M(x)N(y)$	Перейти к дифференциальной форме записи уравнения и разделить переменные	$\int \frac{dy}{N(y)} = \int M(x)dx + C$

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка	$y' = f(x,y)$, где $f(x,y)$ – однородная функция измерения ноль	Решается с помощью замены $y = ux$	
Линейное однородное дифференциалное уравнение 1-го порядка	$y' + p(x)y = q(x)$	Решение уравнения находится в виде произведения функций: $y = uv$ (Метод подстановки). Исходное уравнение сводится к последовательному решению двух диф. урав-й с разделяющимися переменными.	$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot$ $\cdot (C + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$
Уравнение Бернулли	$y' + p(x)y = q(x)y^n$ $n \neq 0, 1.$	Сводится к линейному уравнению заменой $z = y^{1-n}.$ Также можно применить подстановку $y = uv$	
Простейшее дифференциальное уравнение 2-го порядка (уравнения, допускающее понижение порядка)	а) $y'' = f(x)$ б) $y'' = f(x, y')$ в) $y'' = f(y, y')$	а) произвести двукратное интегрирование обоих частей уравнения б) решается заменой $y' = z$ в)применить замену $y' = p(y),$ $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$	а) $\int (\int f(x)dx)dx +$ $+ C_1 x + C_2$ б), в) приходим к одному из типов дифференциальных уравнений первого порядка.
Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами	$y'' + py' + qy = 0$	Составить характеристическое уравнение и найти его корни: $k^2 + pk + q = 0$ если:	
		1) $k_1 \neq k_2$ 2) $k_1 = k_2$ 3) $D = p^2 - 4q < 0$ случай комплексных корней: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$ $y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x +$ $+ C_2 \cos \beta x),$ $\alpha = -\dfrac{p}{2}, \beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2}$

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами	$y''+py'+qy=f(x)$	Найти общее решение $\widetilde{y}$ соответствующего линейного однородного дифференциального . уравнения. Если $f(x)=e^{\alpha x}R_n(x)$, то $y^*=x^s e^{\alpha x}u_n(x)$ где $S=\begin{cases}0, k_1\neq\alpha, k_2\neq\alpha\\ 1, k_1\neq k_2=\alpha;\\ 2, k_1=k_2=\alpha;\end{cases}$ $R_n(x), u_n(x)$ – многочлены от x n-ой степени, причем $R_n(x)$ – многочлен с известными коэффициентами; $u_n(x)$ – многочлен общего вида с неопределёнными коэффициентами	$y=\widetilde{y}+y^*$

Пример12.2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$.

Решение. Предложенное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Приведем исходное уравнение к дифференциальному уравнению с разделенными переменными. Для этого разделим обе части уравнения на $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}$.

После деления получим:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=0.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получим общий интеграл:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=C.$$

Отсюда: $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$ (C > 0, так как рассматривают только арифметические значения корня).

Пример12.3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\left(1+x^2\right)y'-xy=x\left(1+x^2\right)$.

Решение. Исходное уравнение является линейным неоднородным дифференциальное уравнение первого порядка. Разделив обе части уравнения на $1+x^2$, приведем его к виду

$$y'-\frac{x}{1+x^2}y=x.$$

Применим подстановку $y = uv$. Найдем производную

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставив эти значения y, y' в данное уравнение, получим:

$$u'v + uv' - \frac{x}{1+x^2}uv = x$$

или

$$u'v + u\left[v' - \frac{x}{1+x^2}v\right] = x \qquad (12.7)$$

Потребуем, чтобы функция $v(x)$ обращала в нуль выражение, стоящее в скобках уравнения (12.7). Такой функцией может быть любое частное решение уравнения

$$v' - \frac{x}{1+x^2}v = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим частное решение:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{1+x^2}v, \quad \frac{dv}{v} = \frac{x}{1+x^2}dx, \quad \ln v = \ln\sqrt{1+x^2}, \quad v = \sqrt{1+x^2}.$$

Подставляя в (12.7) полученное выражение v будем иметь:

$$\sqrt{1+x^2}u' = x.$$

Отсюда

$$du = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx; \quad \int du = \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}; \quad u = \sqrt{1+x^2} + C.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = uv = \left(\sqrt{1+x^2} + C\right)\sqrt{1+x^2}.$$

Пример12.4. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения с указанными начальными условиями.

$$y'' - 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 7.$$

Решение. Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k - 3 = 0.$$

Найдем его корни: $k_1 = -1$, $k_2 = 3$.

Так как корни вещественные и различные, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}. \qquad (12.8)$$

Чтобы найти решение, удовлетворяющее начальным условиям, найдем производную полученного общего решения:

$$y' = -C_1e^{-x} + 3C_2e^{3x}. \qquad (12.9)$$

В уравнения (12.8) и (12.9) подставим заданные начальные условия и получим для определения произвольных постоянных c_1, c_2 систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 + 3C_2 = 7, \end{cases}$$

из которой следует, что $C_1 = -1$, $C_2 = 2$. Подставляя эти значения в общее решение (12.8), находим решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = -e^{-x} + 2e^{3x}.$$

Пример12.5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - y' - 6y = (2x-1)e^{3x}.$$

Решение. Найдем общее решение y_0 однородного уравнения с теми же коэффициентами, что и в левой части заданного уравнения:

$$y'' - y' - 6y = 0$$

Так как корни его характеристического уравнения

$$k^2 - k + 6 = 0$$

действительны и различны (k_1 = -2, k_2 = 3), то общее решение однородного уравнения записывается в виде

$$y_0(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Подбираем теперь частное решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$y^*(x) = x(Ax + B)e^{3x} = (Ax^2 + Bx)e^{3x}.$$

Отсюда

$$y^{*\prime}(x) = (2Ax + B)e^{3x} + (Ax^2 + Bx)3e^{3x},$$

$$y^{*\prime\prime}(x) = 2Ae^{3x} + (2Ax + B)3e^{3x} + (2Ax + B)3e^{3x} +$$
$$+ (Ax^2 + Bx)9e^{2x}.$$

Подставляя y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение и сокращая все слагаемые на множитель $e^{3x} \neq 0$, получаем

$$2A + 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx) - (2Ax+B) - \quad - 3(Ax^2 + Bx) - 6(Ax^2 + Bx) = 2x - 1$$

или после упрощения

$$10Ax + 2A + 5B = 2x - 1.$$

Отсюда следуют равенства $10A = 2$, $2A + 5B = -1$, т.е. $A = 1/5$, $B = -7/25$.

Таким образом, общее решение заданного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = y_0(x) + y^*(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + (\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{25}x)e^{3x}.$$

§ 5. Применение дифференциальных уравнений в задачах экономики.

Эластичность и функция спроса.

Если известна эластичность спроса на некоторый товар, то можно найти функцию спроса.

Пример 12.6. Эластичность $\eta = -\frac{1}{3}$ для любых значений p. Найти функцию спроса.

Решение. Пользуясь определением эластичности

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp},$$

получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{3},$$

$$3\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{p}.$$

Интегрируем и получаем уравнение спроса:

$$3\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{dp}{p},$$

$$3\ln|x| = -\ln|p| + \ln C,$$

$$px^3 = C.$$

Примечание. Для определения C нужна дополнительная информация.

Уравнение снабжения.

Уравнением снабжения, или *логистики* называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dt} = py(m-y),$$

где p и m – постоянные.

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y(m-y)} = pdt,$$

$$-\frac{dy}{y^2 - my} = pdt.$$

Выделяем полный квадрат в знаменателе левой части равенства и интегрируем:

$$-\int\frac{dy}{(y-\frac{m}{2})^2 - \frac{m^2}{4}} = pdt,$$

$$\frac{1}{m}\ln\left|\frac{y-m}{y}\right| = -pt - C,$$

$$\frac{y-m}{y} = e^{-mpt}e^{-C}.$$

Из последнего равенства находим y:

$$y = \frac{m}{1 + e^{-mpt}e^{-C}}.$$

Если обозначить $k = mp$, $A = e^{-C}$, то получится функция, называемая *функцией снабжения* (*логистики*):

$$y = \frac{m}{1 + Ae^{-kt}},$$

где значение A определяется из начального условия.

Уравнение снабжения используется для моделирования ограниченного роста населения, размножения бактерий в ограниченной среде обитания, динамику эпидемий внутри ограниченной общности биологических организмов, рост выпуска продукции в условиях конкуренции и др. При $y = m$ имеем $\frac{dy}{dt} = 0$ и производная меняет знак с «+» на «–». Следовательно, $y = m$ – максимальное значение. Если $y << m$, то

$$\frac{dy}{dt} \approx pmy = ky.$$

Уравнение $\frac{dy}{dt} = ky$ имеет решение $y = e^{kt}$ и описывает неограниченный экспоненциальный рост населения, размножение бактерий, процесс радиактивного распада, модель естественного роста выпуска продукции.

Пример12.7. Известно, что рост количества бактерий в сосуде удовлетворяет уравнению логистики с постоянной $k = pm = 0{,}2$. Пусть в начальный момент времени количество бактерий составляло 1 % от максимально возможного значения m. За какое время количество бактерий достигнет 80 % от максимального?

Решение.

$$\frac{dy}{dt} = py(m - y) = \frac{0{,}2y}{m}(m - y),$$

$$\frac{mdy}{y(m - y)} = 0{,}2dt.$$

Интегрируем и, используя условие $y < m$, получаем

$$\ln\frac{m - y}{y} = -0{,}2t - C.$$

Пользуясь начальным условием $y = 0{,}01m$ при $t = 0$, находим значение C и подставляем его в решение:

$$\ln\frac{0{,}99}{0{,}01} = -C,$$

$$C = -\ln 99,$$

$$\ln\frac{m - y}{99y} = -0{,}2t,$$

$$\frac{m - y}{99y} = e^{-0{,}2t},$$

$$y = \frac{m}{1 + 99e^{-0{,}2t}}$$ – решение задачи.

Найдём теперь значение t, при котором $y = 0{,}8m$:

$$0{,}8 = \frac{1}{1 + 99e^{-0{,}2t}},$$

$$e^{-0{,}2t} = \frac{1}{396},$$

$$-0{,}2t = -\ln 396,$$

$$t = 5\ln 396 \approx 29{,}91.$$

Функции спроса и предложения.

В простейших случаях предполагается, что спрос и предложение на рынке зависят только от цены товара. В более сложных моделях учитывается их зависимость и от изменения цены, т.е. от производной. При этом для определения равновесной цены используется дифференциальное уравнение.

Пример 12.8. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют вид:

$$x = 19 + p + 4\frac{dp}{dt},$$

$$x = 28 - 2p + 3\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 20$.

Решение.

$$19 + p + 4\frac{dp}{dt} = 28 - 2p + 3\frac{dp}{dt},$$

$$\frac{dp}{dt} = 9 - 3p,$$

$$\frac{dp}{9-3p} = dt,$$

$$-\frac{1}{3}\ln|9-3p| = t + C,$$

$$9 - 3p = \mathrm{e}^{-3t-3C},$$

$$p = \frac{9 - \mathrm{e}^{-3t-3C}}{3}.$$

Подставляя начальные условие, находим С:

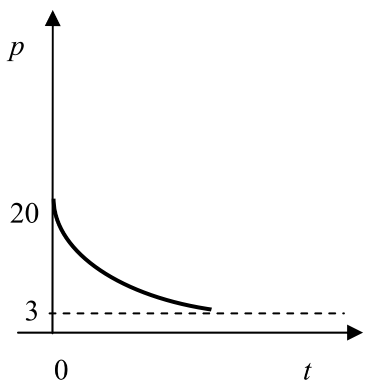


Рис. 12.2

$$20 = \frac{9 - \mathrm{e}^{-3C}}{3},$$

$$\mathrm{e}^{-3C} = -51,$$

$$p = \frac{9 + 51\mathrm{e}^{-3t}}{3} = 3 + 17\mathrm{e}^{-3t}$$ – решение задачи (рис.12.2)

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} p = 3$, имеет место устойчивость. Если $\lim\limits_{t\to\infty} p = \infty$, то равновесная цена растёт и имеет место инфляция.

Модель рынка с прогнозируемыми ценами.

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависящими от текущей цены на товар. Однако спрос и предложение в реальных ситуациях зависят ещё и от тенденции ценнообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены P и её производных:

$$\begin{aligned} D(t) &= 3P'' - P' - 2P + 18, \\ S(t) &= 4P'' + P' + 3P + 3. \end{aligned} \qquad (12.10)$$

Принятые в (12.10) зависимости вполне реальны: поясним это на слагаемых с производными функции цены.

1. Спрос «подогревается» темпом изменения цены: если темп растёт $(P'' > 0)$, то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус.

2. Предложение в ещё большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при P'' в функции $S(t)$, больше чем в $D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, поэтому слагаемое, содержащее P', входит в выражение для $S(t)$ со знаком плюс.

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D = S$, приравниваем правые части уравнений (12.10). После приведения подобных получаем

$$P'' + 2P' + 5P = 15. \qquad (12.11)$$

Соотношение (12.11) представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $P(t)$. Общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$P'' + 2P' + 5P = 0. \qquad (12.12)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Его корни – комплексно-сопряженные числа: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, и, следовательно, общее решение уравнения (12.12) даётся формулой

$$P(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t\right),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В качестве частного решения неоднородного уравнения (12.11) возьмем решение $P = P_{st}$ – постоянную величину как установившуюся цену. Подстановка в уравнение (12.11) даёт значение P_{st}:

$$P_{st} = 3.$$

Таким образом, общее решение уравнения (12.11) имеет вид

$$P(t) = 3 + \mathrm{e}^{-t}\left(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t\right). \qquad (12.13)$$

Нетрудно видеть, что $P(t) \to P_{st} = 3$ при $t \to \infty$, т.е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около неё. Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене P_{st} с колебаниями около неё, причём амплитуда этих колебаний затухает со временем. Если $P(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то отмечаем паническое состояние на рынке.

Решим задачу Коши. Пусть в начальный момент времени известна цена, а также тенденция её изменения:

$$t = 0; \quad P = 4, \quad P' = 1.$$

Подставляя первое условие в формулу (13), получаем $P(0) = C_1 + 3 = 4,$ откуда $C_1 = 1$, т.е. имеем

$$P(t) = 3 + \mathrm{e}^{-t}\left(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t\right). \qquad (12.14)$$

Дифференцируем, получаем

$$P'(t) = \mathrm{e}^{-t}\left[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t\right].$$

Теперь реализуем второе условие задачи Коши: $P'(0) = 2C_2 - 1 = 1$, откуда $C_2 = 1$. Окончательно, решение задачи Коши имеет вид

$$P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t),$$

или в более удобной форме:

$$P(t) = 3 + \sqrt{2}e^{-t}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (12.15)$$

Интегральная кривая, соответствующая решению (12.15) задачи Коши, изображена на рис. (12.3).

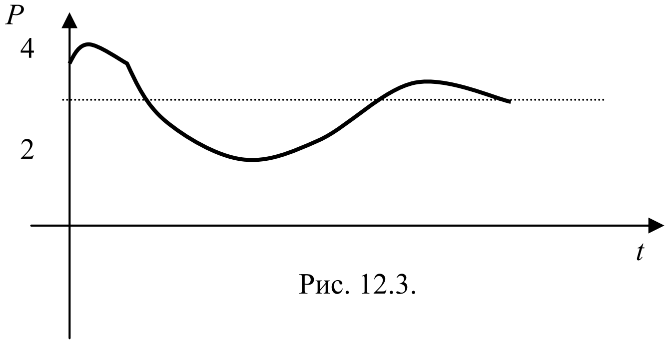


Рис. 12.3.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие дифференциального уравнения.
2. Общее и частное решения дифференциального уравнения.
3. Виды дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения, уравнения Бернулли) и методы их интегрирования.
4. Виды дифференциальных уравнений второго порядка (допускающие понижение порядка, линейные однородные и со специальной правой частью) и методы их интегрирования.
5. Экономические приложения дифференциальных уравнений.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 12.1. Найти общее решение дифференциальных уравнений а) $y' = x \cdot y$; д) $y' = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$;

б) $xy' = y^2$; е) $y' + xy = e^{\frac{-x^2}{2}}$;

в) $\frac{y'}{x} = y + 1$; ж) $y' - y\,ctg\,x = \frac{1}{\sin x}$;

г) $y' = \frac{x}{y} + 1$; з) $xy' = y + y\ln\frac{y}{x}$.

Задача 12.2. Найти частное решение дифференциальных уравнений

а) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.
б) $y'' + 10y' + 25y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$.
в) $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.
г) $y'' + 3y' - 4y - 13 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

МОДУЛЬ 14. РЯДЫ

§ 1. Основные понятия и определения

Определение. Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (14.1)$$

где $u_n \in R$, называется *числовым рядом*. Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются членами ряда, число u_n – *общим членом ряда*.

Суммы

$$S_1 = u_1, \;\; S_2 = u_1 + u_2, \ldots, \;\; S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

называются *частичными суммами*, а S_n – *n-й частичной суммой ряда* (14.1).

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и равен числу S, т.е. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (14.1) называется *сходящимся*, а S – его *суммой*. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (в частности, бесконечен), то ряд (14.1) называется *расходящимся*. Сумма

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$$

называется *n-м остатком ряда* (14.1).

Если ряд (14.1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$$

Пример 14.1. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Установить сходимость этого ряда и найти его сумму.

Решение. Запишем n-ю частичную сумму данного ряда и преобразуем её:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Поскольку $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, то данный ряд сходится и его сумма $S=1$.

Ряд вида:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \qquad (14.2)$$

представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем q. Известно, что при $|q|<1$ ряд (14.2) сходится и его сумма $S=\frac{a}{1-q}$. Если $|q|\geq 1$, то ряд (14.2) расходится.

Теорема *(необходимый признак сходимости ряда). Если числовой ряд (14.1) сходится , то* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0.$

Обратное утверждение неверно. Например, в *гармоническом ряде*

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

общий член стремится к нулю, однако ряд расходится.

Теорема *(достаточный признак расходимости ряда). Если* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a\neq 0$*, то ряд (14.1) расходится.*

Сходимость или расходимость числового ряда не нарушается, если в нём отбросить любое конечное число членов. Но его сумма, если она существует, при этом изменится.

Пример 14.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$.

Решение. Запишем общий член данного ряда:

$$u_n=\frac{n}{3n+1},$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty}\ u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}\neq 0,$$

т.е. ряд расходится.

§ 2. Достаточные признаки сходимости для рядов с положительными членами

Признак сравнения.

Если даны два ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (14.3)$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots, \qquad (14.4)$$

и для всех $n>>n_0$ выполняются неравенства $0<u_n\leq v_n$, то:

1) из сходимости ряда (14.4) следует сходимость ряда (14.3);
2) из расходимости ряда (14.3) следует расходимость ряда (14.4).

В качестве рядов для сравнения целесообразно выбирать ряд, представляющий сумму членов геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$, а также гармонический (расходящийся) ряд.

Признак сравнения в предельной форме.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k$, где $0<k<\infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Признак Д'Аламбера.

Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n>0$ (начиная с некоторого $n=n_0$) и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q.$$

Тогда:

1) при $q<1$ данный ряд сходится;
2) при $q>1$ ряд расходится.

При $q=1$ признак Д'Аламбера не даёт ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда: он может и сходиться, и расходиться. В этом случае сходимость ряда исследуют с помощью других признаков.

Радикальный признак Коши.

Если, начиная с некоторого $n=n_0$, $u_n>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то при $q<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а при $q>1$ расходится.

При $q=1$ радикальный признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Интегральный признак Коши.

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ монотонно убывают и функция $y=f(x)$, непрерывная при $x\geq a\geq 1$, такова, что $f(n)=u_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и интеграл $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Например, поскольку $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}dx \quad (\alpha\in R)$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$, то *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leq 1$.

Сходимость многих рядов можно исследовать путём сравнения их с соответствующим рядом Дирихле.

Пример 14.3. Исследовать числовой ряд с положительными членами на сходимость, используя один из достаточных признаков сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{2n-1}\right)^n.$$

Решение. Применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+5}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{2n-1}=\frac{3}{2}>1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{2n-1}\right)^n$ расходится.

§ 3. Знакочередующиеся ряды

Определение. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ , \qquad (14.5)$$

члены u_n которого после любого номера $N(n > N)$ имеют разные знаки, называется *знакопеременным*.

Если ряд

$$|\,u_1\,|+|\,u_2\,|+\ldots+|\,u_n\,|+\ldots \qquad (14.6)$$

сходится, то ряд (14.5) также сходится (это легко доказывается) и называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд (14.6) расходится, а ряд (14.5) сходится, то ряд (14.5) называется *условно (неабсолютно) сходящимся*.

При исследовании ряда на абсолютную сходимость используются признаки сходимости с положительными членами рядов.

Абсолютно сходящиеся ряды (в отличие от условно сходящихся) обладают свойствами сумм конечного числа слагаемых (например, от переменны мест слагаемых сумма не меняется).

Теорема. *Если числовой ряд сходится условно, то, задав любое число а, можно так переставить члены ряда, что его сумма окажется равной а. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, будет расходящимся.*

Определение. Ряд вида

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots, \qquad (14.7)$$

где $u_n \geq 0$, называется *знакочередующимся рядом*.

Теорема *(признак Лейбница). Если для знакочередующегося ряда (14.7)* $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$*, то ряд (14.7) сходится и его сумма* S *удовлетворяет условию* $0 < S < u_1$.

Следствие. Остаток r_n ряда (14.7) всегда удовлетворяет условию $|\,r_n\,| < u_{n+1}$.

Например, ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

сходится, так как выполнены условия признака Лейбница. Он сходится условно, так как ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ расходится.

Пример14.4. Исследовать числовой ряд с произвольными членами на сходимость (абсолютную и условную):

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n;\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n}{(3n+2)^n};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+1}}.$$

Решение. 1) Данный числовой ряд является знакоотрицательным. Проверим необходимый признак сходимости.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = -\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = -\mathrm{e} \neq 0.$$

Необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ расходится.

2) Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}5^n}{(3n+2)^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3n+2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Исследуем числовой ряд с положительными членами с помощью признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{3n+2} = 0 < 1.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n}{(3n+2)^n}$ сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

3) Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Для выяснения вопроса о его сходимости используем признак сравнения в предельной форме. В качестве эталонного ряда возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3+1}} = 1.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ расходится, как ряд Дирихле при

$\alpha = \frac{1}{2} < 1$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+1}}\right|$.

Исследуем теперь исходный ряд на сходимость. Поскольку он является знакочередующимся, применим признак Лейбница. Можно показать, что

$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} > a_{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^3 = 1}}$ для любого $n \in N$, так как

$$\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^3+1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1/n^2}} > \frac{1}{\sqrt{n+1+\frac{1}{(n+1)^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^2}}} = \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^3+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} = 0.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+1}}$ сходится. Таким образом, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+1}}$ сходится условно.

§ 4. Степенные ряды

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , \qquad (14.8)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \qquad (14.9)$$

членами которого являются степенные функции x^n или $(x-x_0)^n$, действительные числа c_n называются коэффициентами степенного ряда.

Для степенных рядов справедлива следующая теорема.

Теорема *(Абеля).* *Если степенной ряд (14.8) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в любой точке $x \in (-|x_0|, |x_0|)$. Если же этот ряд расходится в некоторой точке x_1, то он расходится во всех точках x вне интервала $(-|x_1|, |x_1|)$.*

Определение. Неотрицательное число R, такое, что степенной ряд (14.8) сходится абсолютно в интервале $(-R, R)$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ – *интервалом сходимости ряда.* Если ряд (14.8) сходится в единственной точке x_0, то для него $R = 0$. Если же он сходится на всей числовой оси, то $R = \infty$.

Радиус сходимости R можно вычислить по одной из следующих формул:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \qquad (14.10)$$

или

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n->\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \qquad (14.11)$$

Замечание. Для степенного ряда (14.9) формулы (14.10) и (14.11) сохраняются. Интервалом же сходимости ряда является интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ с центром в точке x_0.

Пример14.5. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{7^n n}.$$

Решение. Найдём радиус сходимости данного степенного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{7^n n}:\frac{3^{n+1}}{7^{n+1}(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\times 7^n\times 7\times(n+1)}{7^n\times n\times 3^n\times 3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7n+7}{3n}=\frac{7}{3}.$$

Из теоремы Абеля следует, что интервал абсолютной сходимости ряда: $\left(-\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Исследуем поведение данного степенного ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x=\pm\frac{7}{3}$.

а) полагая $x=-\frac{7}{3}$, получим числовой знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n n}\left(-\frac{7}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Общий член этого ряда, взятый по абсолютной величине, монотонно убывает и стремится к нулю при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \text{ а } a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1} \text{ для любого } n\in N.$$

По признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится. Так как ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, является гармоническим, то он расходится. Следовательно, в точке $x=-\frac{7}{3}$ исходный степенной ряд сходится условно;

б) при $x=\frac{7}{3}$ получим числовой положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n n}\left(\frac{7}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$

Это гармонический ряд, который, как известно, расходится.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является промежуток $\left[-\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$. В интервале $\left(-\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$ ряд сходится абсолютно, а в точке $x=-\frac{7}{3}$ – условно.

§ 5. Ряды Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет ограниченные производные любого порядка, то её можно разложить в ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (14.12)$$

(Считаем 0! = 1).

Если $x_0=0$, то функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (14.13)$$

Приведём разложения в ряд Тейлора (Маклорена) некоторых основных функций с указанием интервала сходимости.

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty);$ (14.14)

2. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$

$x\in(-\infty;+\infty);$ (14.15)

3. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,$

$x\in(-\infty;+\infty);$ (14.16)

4. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$

$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\qquad x\in(-1;1)$ (14.17)

5. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\qquad x\in(-1;1].$ (14.18)

Ряды Тейлора (Маклорена) применяются для приближенного вычисления определённых интегралов или значений функций в некоторых точках, решения дифференциальных уравнений.

Пример14.6. Вычислить $\sqrt[5]{34}$ с точностью до 10^{-4}.

Решение. Имеем $\sqrt[5]{34}=\sqrt[5]{32+2}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Воспользуемся теперь формулой (17) при $x = \dfrac{1}{16}, \alpha = \dfrac{1}{5}$. Сохранив те члены разложения, которые имеют значащие цифры до пятого знака после запятой, получим

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16} - \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{16^2} + \frac{6}{125}\cdot\frac{1}{16^3} - \ldots$$

Так как $\dfrac{6}{125}\cdot\dfrac{1}{16^3} << 10^{-5}$, то с указанной точностью

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1 + \frac{1}{80} - \frac{1}{32\,000} = 1{,}012\,2,$$

а $\sqrt[5]{34} \approx 2{,}024\,4$.

§ 6. Числовые ряды в задачах экономики.

В экономике бесконечные ряды и их суммы появляются в основном в теоретических исследованиях.

Пример 14.7. Рассмотрим частные суммы S_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами u_n. Предположим, что предприятие при «устоявшемся» способе производства за произведённую продукцию получило прибыль $S_1 = u_1$ денежных единиц. При реализации своей продукции при этом же способе производства предприятие получит некоторую добавку к прибыли u_2, т.е. его доход имеет вид: $S_2 = u_1 + u_2$.

Ясно, что при «устоявшемся» способе производства на *n*-ом этапе реализации продукции у данного предприятия получится прибыль

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Отсюда, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то предприятие получает максимальную прибыль S, если оно не изменит способ производства.

Пример 14.8. Предположим, рассматривается вопрос о рыночной цене бессрочной облигации номиналом \$1000 и 3%-ым купоном. Это значит, что владелец этой облигации будет каждый год получать \$30. Но как определить истинную цену всей этой бесконечной последовательности платежей? Как правило, любая валюта подвержена инфляции (до Первой мировой войны экономисты считали инфляцию явлением исключительно вредным, однако после этой войны почти все стали признавать полезность небольшой инфляции – 1-2% в год). Если инфляция составляет 2% в год, то \$30, которые получим через год, сейчас эквивалентны \$30/(1 + 0,02). А те же \$30, которые планируется получить через 2 года, сейчас эквивалентны $\$30/(1 + 0{,}02)^2$и т.д. Выходит, что бесконечный ряд платежей в \$30, которые будем получать каждый год в будущем, сейчас эквивалентны сумме ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 30/(1+0{,}02)^n$, т.е. сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Воспользовавшись формулой нахождения суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, находим, что эта сумма равна \$1500.

Такого рода дисконтирование, т.е. нахождение сегодняшних эквивалентов прошлых или будущих платежей, применяется и в других ситуациях. Пусть, например, рассматривается две стратегии действий фирмы в будущем. Для выяснения, какая из них лучше, приходится дисконтировать к сегодняшнему моменту будущие прибыли по каждой из этих стратегий. Сегодняшний эквивалент этих дисконтированных прибылей представляет сумму бесконечного ряда. Какая из этих сумм больше, ту стратегию, наверное, и нужно выбирать.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие числового ряда и его суммы.

2. Необходимый признак сходимости числового ряда.

3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов (признак сравнения, признак Д'Аламбера, радикальный и интегральный признаки Коши).

4. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.

5. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства.

6. Степенной ряд. Теорема Абеля.

7. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.

8. Ряды Тейлора и Маклорена.

9. Степенные ряды элементарных функций.

10. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 14.1. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{4n+2}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+5}{3n+7!},\right)^{n}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{n!}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3n+10}$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n}{(n+1)7^n}$, е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+10n+29}$.

Задача 14.2. Установить абсолютную или условную сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{6}{2+3n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{n(n+2)}$.

Задача 14.3. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+10}$, б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n4^n}{n!}$.

Задания контрольной работы № 2

Задание 1. Зависимость производства национального дохода z (конечного общественного продукта) от объемов использования рабочей силы x и объемов использования производственных доходов y выражается функцией $z = f(x, y)$. Исследовать данную функцию на экстремум.

1. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$;

2. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$;

3. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 1$;

4. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x + 7y + 5$;

5. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$;

6. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$;

7. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$;

8. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + x - y + 5$;

9. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y + 1$;

10. $z = 4 - 5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y$.

Задание 2. Изменение значения функции национального дохода $z = f(x, y)$ при малом изменении ее аргументов: x – объема использования рабочей силы, y – объёма использования производственных фондов приближенно выражается полным дифференциалом:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Найти dz функции.

11. $z = xy + \frac{x}{y}$ при $x = 1$, $y = 1$;

12. $z = e^{x/y}$ при $x = 2$, $y = 1$;

13. $z = \sqrt{3x^2 + 2y^3}$ при $x = 1$, $y = 2$;

14. $z = 5xy^3 + 3x^2y^5$ при $x = 2$, $y = 2$;

15. $z = 3x^y$ при $x = 3$, $y = 1$;

16. $z = xy^x$ при $x = 4$, $y = 2$;

17. $z = \frac{y}{x^2 + y^2}$ при $x = 1$, $y = 1$;

18. $z = \ln(x^2 - 2y^2)$ при $x = 2$, $y = 1$;

19. $z = \frac{x + y}{x - y}$ при $x = 3$, $y = 1$;

20. $z = e^{3x^2 - y}$ при $x = 2$, $y = 1$.

«α» $z = \dfrac{y}{x} + x^2 y^2$, $x = 1$, $y = 1$.

Задание 3. Найти неопределенные интегралы

21.	а) $\sqrt{\cos x}\sin x\,dx$	б) $\int \ln x\,dx$	в) $\int \dfrac{x}{x^3+1}dx$
22.	а) $\int (\ln x)^3 \dfrac{dx}{x}$	б) $\int (2x+1)\sin 3x\,dx$	в) $\int \dfrac{x+20}{x^3-8}dx$
23.	а) $\int \dfrac{arctg\,x}{1+x^2}dx$	б) $\int (x-1)e^{2x}dx$	в) $\int \dfrac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$
24.	а) $\int \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$	б) $\int arctg\,2x\,dx$	в) $\int \dfrac{2x+5}{x^3+2x}dx$
25.	а) $\int e^{-x^2}x\,dx$	б) $\int x\cos 2x\,dx$	в) $\int \dfrac{3x-1}{x^3+3x}dx$
26.	а) $\int \dfrac{x}{2+x^4}dx$	б) $\int (5x+1)\ln x\,dx$	в) $\int \dfrac{8x-1}{(x+1)(x^2+2)}dx$
27.	а) $\sqrt{\ln x}\cdot\dfrac{dx}{x}$	б) $\int (8x-2)\sin 5x\,dx$	в) $\int \dfrac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}dx$
28.	а) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$	б) $\int (x-3)e^{-2x}dx$	в) $\int \dfrac{5x-11}{x(x^2+4)}dx$
29.	а) $\int \dfrac{x}{2-x^4}dx$	б) $\int \sqrt{x}\ln 3x\,dx$	в) $\int \dfrac{3x}{(x+1)(x^2+3)}dx$
30.	а) $\int \dfrac{dx}{x\ln x}$	б) $\int (2x+8)e^{-7x}dx$	в) $\int \dfrac{2x}{x^3-1}dx$
31.	а) $\int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$	б) $\int x^3\ln x\,dx$	в) $\int \dfrac{3x-1}{x(x^2+3)}dx$
32.	а) $\int \dfrac{x^2}{2x^3+3}dx$	б) $\int (3x+7)\cos 5x\,dx$	в) $\int \dfrac{5x-1}{x^3+1}dx$
33.	а) $\int \sqrt{5x^4+3}\,x^3dx$	б) $\int (12x+2)\sin 3x\,dx$	в) $\int \dfrac{2x-1}{x^3-x}dx$
34.	а) $\int x^2e^{x^3+1}dx$	б) $\int \sqrt[3]{x}\ln 2x\,dx$	в) $\int \dfrac{2x+5}{x^3-4x}dx$
35.	а) $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{8x^4-1}}dx$	б) $\int \arcsin 2x\,dx$	в) $\int \dfrac{x}{(x+5)(x^2+3)}dx$
36.	а) $\int \dfrac{x}{2x^2+3}dx$	б) $\int \arccos x\,dx$	в) $\int \dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}dx$
37.	а) $\int \arcsin^2 x\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	б) $\int x\sin 8x\,dx$	в) $\int \dfrac{x}{(x-3)(x^2+10)}dx$
38.	а) $\int \dfrac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$	б) $\int (2x-1)\cos 3x\,dx$	в) $\int \dfrac{2x+5}{x(x^2+6)}dx$
39.	а) $\int \dfrac{\ln x+3}{x}dx$	б) $\int (8x-10)\sin 7x\,dx$	в) $\int \dfrac{x-3}{(x+2)(x^2+5)}dx$

40.	а) $\int \sqrt{1+2x^2}\ x dx$	б) $\int \ln 8x\, dx$	в) $\int \frac{x-2}{(x+2)(x^2+3)}dx$
«α»	а) $\int (\ln x)^8 \frac{dx}{x}$	б) $\int (2x+8)\cos 7x\, dx$	в) $\int \frac{x}{x^3-1}dx$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

41.	$y=\frac{1}{2}x^2-x+1$ и	$y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$;
42.	$y=\frac{1}{2}x^2+x+2$ и	$y=-\frac{1}{2}x^2-5x+7$;
43.	$y=\frac{1}{3}x^2-3x+2$ и	$y=-\frac{2}{3}x^2-2x+4$;
44.	$y=2x^2+6x-3$ и	$y=-x^2+x+5$;
45.	$y=3x^2-5x-1$ и	$y=-x^2+2x+1$;
46.	$y=x^2-3x-1$ и	$y=-x^2-2x+5$;
47.	а) $y=2x^2-6x-1$ и	$y=-x^2+x-1$;
48.	$y=\frac{1}{3}x^2-2x+4$ и	$y=-\frac{2}{3}x^2-x+2$;
49.	$y=x^2-5x-3$ и	$y=-3x^2+2x-1$;
50.	$y=x^2-x+1$ и	$y=-x^2-x+1$;
51.	$y=\frac{1}{4}x^2-2x-5$ и	$y=-\frac{3}{4}x^2-x+1$;
52.	$y=\frac{1}{2}x^2+3x-2$ и	$y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$;
53.	$y=2x^2-6x+3$ и	$y=-2x^2+x+5$;
54.	$y=x^2-3x-4$ и	$y=-x^2-x+8$;
55.	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-1$ и	$y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$;
56.	$y=2x^2+4x-7$ и	$y=-x^2-x+1$;
57.	$y=2x^2+3x+1$ и	$y=-x^2-2x+9$;
58.	$y=2x^2-6x-2$ и	$y=-x^2+x-4$;
59.	$y=x^2-2x-4$ и	$y=-x^2-x+2$;
60.	$y=\frac{1}{2}x^2-3x-2$ и	$y=-\frac{1}{2}x^2-7x+3$;
«α»	$y=2x^2-x-2$ и	$y=x^2+x-1$.

Задание 5. Общую сумму S текущих издержек обращения капиталовложений, сводимых к текущим затратам, вычисляют по формуле

$$S=\int_0^{+\infty} f(t)dt\,.$$

Определить значение S в зависимости от вида функции *f(t)* .

61.	$f(t)=\dfrac{1}{t^2+6t+10}$	**71.**	$f(t)=\dfrac{1}{(t+1)\ln^3(t+1)}$
62.	$f(t)=te^{-t^2}$	**72.**	$f(t)=t^2e^{-t^3}$
63.	$f(t)=\dfrac{1}{t^2+4}$	**73.**	$f(t)=\dfrac{1}{t^2+9}$
64.	$f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{(t^2+3)^3}}$	**74.**	$f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{(t^2+5)^5}}$
65.	$f(t)=\dfrac{1}{(t+4)^2}$	**75.**	$f(t)=\dfrac{3}{(t+2)^4}$
66.	$f(t)=\dfrac{1}{t^2+2t+5}$	**76.**	$f(t)=\dfrac{1}{t^2+4t+5}$
67.	$f(t)=\dfrac{6}{(t+3)^3}$	**77.**	$f(t)=\dfrac{1}{(t+8)\ln^4(t+8)}$
68.	$f(t)=\dfrac{2}{t^2+6t+15}$	**78.**	$f(t)=\dfrac{1}{(t+7)\ln^2(t+7)}$
69.	$f(t)=\dfrac{1}{(t+2)\ln^2(t+2)}$	**79.**	$f(t)=\dfrac{1}{(t+8)^5}$
70.	$f(t)=\dfrac{1}{t^2-2t+5}$	**80.**	$f(t)=\dfrac{5}{(t+6)^2}$
« α»	$f(t)=\dfrac{y}{(2t+3)^2}$		

Задание 6.

Дифференциальное уравнение вида $y = ky' + p$ описывает простейшую модель воспроизводства национального дохода, где $y = y(t)$ – национальный доход, $p = p(t)$ – потребление, k – коэффициент капиталоёмкости, y' – прирост производственного накопления. Определить функцию y, описывающую динамику национального дохода.

№ задачи	$p(t)$	k
81.	e^{3t}	1/3
82.	t	1/2
83.	$t-2$	1/3
84.	$t\,e^{2t}$	1/2
85.	$2t+5$	1/3
86.	$t+1$	1/2
87.	$t\,e^{4t}$	1/5
88.	$2-t$	1/2
89.	e^{2t}	1/3
90.	$(t+2)e^{t}$	1/7
91.	e^{3t-7}	1/2
92.	$t+2$	1/5
93.	$(t+1)e^{t}$	1/5
94.	e^{5t}	1/7
95.	$9-4t$	1/4
96.	$2t\,e^{t}$	1/6
97.	$10-2t$	1/6
98.	$2e^{t+5}$	1/9

99.	e^{3t}	1/2
100.	$3t-1$	1/2
«α»	$-\dfrac{(t+1)^4}{2}$	$\dfrac{t+1}{2}$

Задание 7.

Найти динамику цены p на товар, если прогноз спроса $D(p)$ и предложения $S(p)$ описывается следующими соотношениями:

№ задачи	$D(p)$	$S(p)$
101.	$D(p) = p'' - 2p' - 2p + 10$	$S(p) = 2p'' + 2p' + 4p + 4$
102.	$D(p) = p'' - 2p' - 6p + 36$	$S(p) = 2p'' + 4p' + 4p + 6$
103.	$D(p) = p'' + 4p' + 2p + 8$	$S(p) = 2p'' + 2p' + 3p + 6$
104.	$D(p) = 3p'' + p' + p + 15$	$S(p) = 12p'' + 7p' + 2p + 5$
105.	$D(p) = p'' + 13p' - 10p + 14$	$S(p) = 2p'' + 3p' + 15p + 4$
106.	$D(p) = 2p'' + 2p' + p + 13$	$S(p) = 3p'' + 5p' + 3p + 3$
107.	$D(p) = 4p'' + 2p' + 3p + 12$	$S(p) = 5p'' + p' + p + 2$
108.	$D(p) = 3p'' + 2p' + p + 8$	$S(p) = 4p'' + 6p' + 5p + 1$
109.	$D(p) = 4p'' - p' + 3p + 20$	$S(p) = 5p'' + p' + 20p + 10$
110.	$D(p) = 4p'' + 16p' + 2p + 18$	$S(p) = 8p'' + 8p' + 5p + 9$
111.	$D(p) = p'' - 2p' + p + 16$	$S(p) = 5p'' + 2p' + 2p + 8$
112.	$D(p) = p'' - p' + 6p + 14$	$S(p) = 10p'' + 2p' + 4p + 7$
113.	$D(p) = p'' - 2p' + 6p + 12$	$S(p) = 5p'' + 6p' + p + 6$
114.	$D(p) = 2p'' + 6p' + 2p + 34$	$S(p) = 6p'' + 2p' + 3p + 17$
115.	$D(p) = 2p'' - 2p' + 4p + 32$	$S(p) = 4p'' + p' + 5p + 16$
116.	$D(p) = 5p'' + 10p' - 4p + 30$	$S(p) = 6p'' + 6p' + p + 15$
117.	$D(p) = 2p'' + 7p' + p + 24$	$S(p) = 11p'' + p' + 2p + 14$
118.	$D(p) = 2p'' + 5p' + p + 27$	$S(p) = 3p'' + p' + 21p + 13$
119.	$D(p) = p'' - 3p' + 5p + 32$	$S(p) = 7p'' + 4p' + 2p + 12$
120.	$D(p) = 6p'' + 3p' + 13p + 33$	$S(p) = 7p'' + 2p' + p + 11$
«α»	$D(p) = p'' + 2p' - 3p + 5$	$S(p) = 2p'' - 2p' + 3p + 4$

Задание 8. Для нахождения текущей величины бесконечной последовательности денежных платежей $p_n(x)$ используется формула $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n p_n(x)$, где d_n – коэффициент дисконтирования, показывающий, какую сумму надо вложить в инвестиционный проект, чтобы получить одну денежную единицу в конце n-ого периода, x – некоторый параметр. По данным таблицы исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n p_n(x)$.

№ задания	d_n	$p_n(x)$	№ задания	d_n	$p_n(x)$
121.	$\dfrac{n}{3^n(n+1)}$	x^n	**131.**	$\dfrac{n+2}{4^n(n+1)}$	$(x-1)^n$

122.	$\frac{n}{5n+2}$	$(x-3)^n$	**132.**	$\frac{6^n}{\sqrt{n+1}}$	$(x+4)^n$
123.	$\frac{1}{n\cdot 5^n}$	x^n	**133.**	$\frac{1}{3^n\cdot n}$	$(x-2)^n$
124.	$\frac{10^n}{\sqrt{n}}$	$(x+1)^n$	**134.**	$\frac{3}{n+2}$	$(x-1)^n$
125.	$\frac{3^n}{4^n\sqrt[5]{n}}$	x^n	**135.**	$\frac{2^n}{5^n\sqrt[3]{n}}$	x^n
126.	$\frac{5^n}{2^n\sqrt[4]{n}}$	x^n	**136.**	$\frac{4^n}{n(n+2)}$	x^n
127.	$\frac{3^n}{\sqrt{n}}$	$(x+4)^n$	**137.**	$\frac{1}{n\cdot 3^n}$	$(x+1)^n$
128.	$\frac{n+1}{n^2+1}$	$(x+2)^n$	**138.**	$\frac{n+1}{n(n+4)}$	x^n
129.	$\frac{n}{3n+1}$	$(x-2)^n$	**139.**	$\frac{4^n}{7^n\sqrt{n}}$	x^n
130.	$\frac{n+2}{n(n+1)}$	x^n	**140.**	$\frac{5n}{6n-3}$	$(x-1)^n$
«α»	$\frac{1}{(n+1)7^n}$	x^n			

Решение варианта «α»

Задание 2. Изменение значения функции национального дохода $z = f(x, y)$ при малом изменении ее аргументов: x – объема использования рабочей силы, y – объёма использования производственных фондов приближенно выражается полным дифференциалом:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy .$$

Найти dz ункции $z = \frac{y}{x} + x^2y^2$ при $x = 1, \quad y = 1$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + 2xy^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} + 2x^2y.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = -1 + 2 = 1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1 + 2 = 3.$$

$dz = 1 \cdot dx + 3dy$.

Задание 3. Найти неопределенные интегралы

а) $\int (\ln x)^8 \dfrac{dx}{x}.$

Решение. Применим подстановку $t = \ln x.$ Тогда $dt = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \int (\ln x)^8 \dfrac{dx}{x} = \dfrac{1}{9} t^9 + C = \dfrac{1}{9} \ln^9 x + C$.

б) $\int e^{2x^3+3} x^2 dx$.

Решение. Применим подстановку $t = 2x^3 + 3.$ Тогда $dt = 6x^2 dx; \dfrac{1}{6} dt = x^2 dx$, откуда

$$\int e^{2x^2+3} x^2 dx = \int e^t \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6} e^t + C = \frac{1}{6} e^{2x^2+3} + C.$$

в) $\int (2x+8)\cos 7x\, dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v\, du.$$

Положим $u = 2x + 8,\qquad dv = \cos 7x.$ Тогда $du = 2dx,\quad v = \int \cos 7x\ dx = \dfrac{1}{7} \sin 7x$. Следовательно,

$$\int (2x+8)\cos 7x\ dx = \frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x - \frac{2}{7}\int \sin 7x\ dx$$

$$= \frac{1}{7}(2x+8)\sin 7x + \frac{2}{49}\cos 7x + C.$$

г) $\int arctg\, 3x\ dx$

Решение. Положим $u = arctg\ 3x,\quad dv = dx.$ Тогда $du = \dfrac{3}{1+9x^2} dx,\ v = x.$ Отсюда

$$\int arctg\, 3x\ dx = x\ arctg\, 3x - 3\int \frac{x\, dx}{1+9x^2}.$$

Применяя в последнем интеграле подстановку $t = 1 + 9x^2$, получаем $dt = 18x\ dx$, следовательно,

$$3\int \frac{x\ dx}{1-9x^2} = \frac{3}{18}\int \frac{dt}{t} = \frac{3}{18} \ln|t| = \frac{3}{18} \ln(1+9x^2) + C.$$

Отсюда

$$\int arctg\ 3x\ dx = x\ arctg\ 3x - \frac{3}{18} \ln(1+9x^2) + C.$$

д) $\int \dfrac{x}{x^3 - 1} dx$

Решение. Разложим знаменатель на множители

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Тогда

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

Теперь приравниваем коэффициенты при одинаковых ступенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A + B; \quad A = -B; \\ x^1 & \quad 1 = A - B + C; \\ x^0 & 0 = A - C; \quad A = C. \end{array}$$

Из второго уравнения получаем

$$1 = A + A + A = 3A; \quad A = \frac{1}{3}.$$

Отсюда $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$.

Следовательно

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x - 1} dx + \frac{\frac{-1}{3} x + \frac{1}{3}}{x^2 + x + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x - 1| + \frac{1}{3} \int \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Воспользуемся равенством

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}.$$

После замены переменной $t = x + \frac{1}{2}$, $dt = dx$, $x = t - \frac{1}{2}$ и

$$\frac{1}{3} \int \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{-x + 1}{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{-t + \frac{1}{2} + 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = -\frac{1}{3} \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{6} \ln\left(t^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

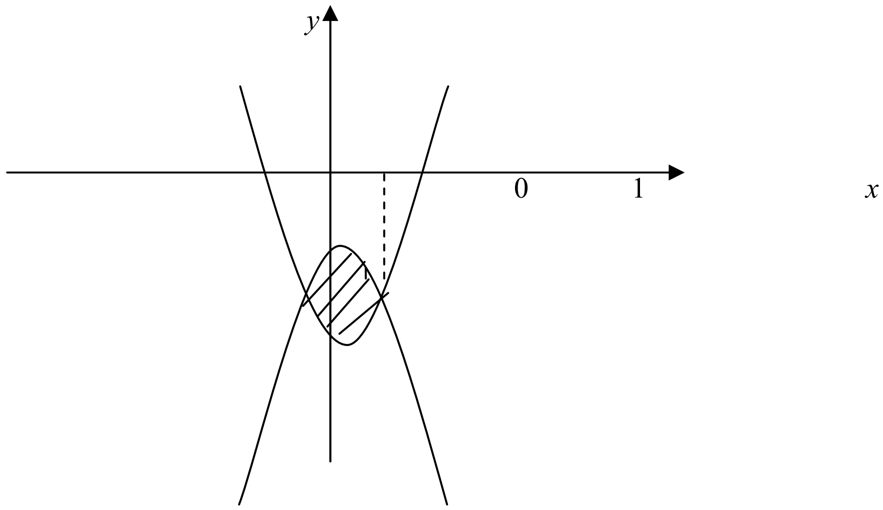
$$= -\frac{1}{6} \ln\left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\frac{1}{6} \ln\left[x^2 + x + 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ответ:

$$\frac{1}{3} \ln[x - 1] - \frac{1}{6} \ln\left[x^2 + x + 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Задание 4. Вычислить площадь ограниченную параболами см рис. $y = 2x^2 - x - 2;$ $y = -x^2 + x - 1.$



Решение.

Для построения чертежа находим точки пересечения парабол.

Приравняем правые части их уравнений:

$$2x^2 - x - 2 = -x^2 + x - 1.$$

Отсюда $\qquad 3x^2 - 2x - 1 = 0,\ D = 4 + 4 \cdot 3 = 16,$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1,\ x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Вычисления площади осуществляем по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx,$$

где $f_1(x),\ f_2(x)$ - кривые, ограничивающие фигуру $(f_2(x) \geq f_1(x))$.

В нашем случае a = -1/3 и b = 1

$$S = \int_a^b \left[\left(-x^2 + x - 1\right) - \left(2x^2 - x - 2\right)\right]dx =$$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left[-3x^2 + 2x + 1\right]dx = \left(-3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \frac{34}{27}.$$

Задание 5. Общую сумму S текущих издержек обращения капиталовложений, сводимых к текущим затратам, вычисляют по формуле

$$S = \int_0^{+\infty} f(t)dt\,.$$

Определить значение S, если $f(t) = \dfrac{7}{(2t+3)^2}$.

Решение.

$$S = \int_0^{\infty} \frac{7}{(2t+3)^2}dt = 7\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^a \frac{d(2t+3)}{(2t+3)^2} = \frac{7}{2}\lim_{a\to\infty} -\frac{1}{2t+3}\Bigg|_0^a =$$

$$\frac{7}{2}\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{2a+3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}.$$

Задание 6.

Дифференциальное уравнение вида $y = ky' + p$ описывает простейшую модель воспроизводства национального дохода, где $y = y(t)$ – национальный доход, $p = p(t)$ – потребление, k – коэффициент капиталоёмкости, y' – прирост производственного накопления. Определить функцию y, описывающую динамику национального дохода, если $k = \dfrac{t+1}{2}$, а $p(t) = -\dfrac{(t+1)^4}{2}$.

Решение.

Составляем дифференциальное уравнение $y = \dfrac{t+1}{2}y' - \dfrac{(t+1)^4}{2}$. Перепишем уравнение в виде $y' - \dfrac{2}{t+1}y = (t+1)^3$.

Заданное дифференциальное уравнение является линейным. Полагаем $y = uv$, где u, v - неизвестные функции от t, $\Rightarrow$ $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, будем иметь

$$u'v + uv' - \frac{2}{t+1}uv = (t+1)^3,$$

$$u'v + u\left[v' - \frac{2}{t+1}v\right] = (t+1)^3.$$

Подберем функцию $v = v(t)$ так, чтобы выражение, содержащееся в квадратной скобке, обращалось в нуль. Для определения $v(t)$ имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{2}{t+1}v = 0$, откуда $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{2}{t+1}dt$. После интегрирования получаем $\ln v = 2\ln(t+1)$, т.е.

$$v = (t+1)^2.$$

Для определения функции $u(t)$ имеем

$$u'v = (t+1)^3$$

или

$$u' = t+1$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $u(t)$. Разделяя переменные, будем иметь

$$du = (t+1)dx.$$

Интегрируя обе части равенства, получаем

$$u = \int (t+1)dt + C.$$

откуда

$$u = \frac{1}{2}(t+1)^2 + C.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = (t+1)^2\left(\frac{1}{2}(t+1)^2 + C\right).$$

Задание 7. Найти динамику цены p на товар, если прогноз спроса $D(p)$ и предложения $S(p)$ описывается следующими соотношениями:

$D(p) = p'' + 2p' - 3p + 5$ $\qquad$ $S(p) = 2p'' - 2p' + 3p + 4$

Решение. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D = S$, приравниваем правые части уравнений. После приведения подобных получаем

$$p'' - 4p' + 6p = 1. \qquad (1)$$

Соотношение (1) представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $p(t)$. Общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$p'' - 4p' + 6p = 0 \qquad (2)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 4k + 6 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 6 = -8$$

Его корни – комплексно-сопряженные числа: $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}i$, и, следовательно, общее решение уравнения (2) имеет вид

$$p(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t\right),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В качестве частного решения неоднородного уравнения (1) возьмем решение $p = p_{st}$ – постоянную величину как *установившуюся* цену. Подстановка в уравнение (1) даёт значение p_{st}:

$$p_{st} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1) имеет вид

$$p(t) = \frac{1}{6} + \mathrm{e}^{2t}\left(C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t\right).$$

Задание 8. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)7^n} x^n.$$

Определить характер сходимости ряда на концах интервала сходимости.

Решение. Запишем заданный ряд следующим образом:

$$\frac{1}{2 \cdot 7} x + \frac{1}{3 \cdot 7^2} x^2 + \ldots + \frac{1}{(n+1)7^n} x^n + \frac{1}{(n+2)7^{n+1}} + \ldots$$

Общий член ряда $u_n = \dfrac{1}{(n+1)7^n} x^n$.

Для исследования ряда на абсолютную сходимость применим признак Д'Аламбера:

$$d = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1} 7^n}{7^{n+1}(n+2)x^n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{7} \frac{n+1}{n+2}|x| = \frac{1}{7}|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{7}|x|.$$

Таким образом, при $\frac{1}{7}|x| < 1$, т.е. при $-7 < x < 7$ исходный ряд сходится абсолютно.

Выясним вопрос о сходимости ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = -7, x = 7$. При $x = -7$ заданный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)7^n}(-7)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)7^n}(-1)^n 7^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Это числовой знакочередующийся ряд. Его общий член по абсолютной величине монотонно убывает и стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, оба условия признака Лейбница выполнены и ряд сходится (условно), т.е. точка $x = -7$ принадлежит области сходимости заданного ряда.

При $x = 7$ исходный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)7^n} \cdot 7^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

Это числовой знакоположительный ряд, который, очевидно, расходится (сравните его с гармоническим рядом). Следовательно, точка $x = 7$ не принадлежит области сходимости заданного степенного ряда.

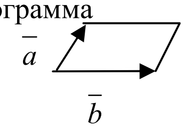
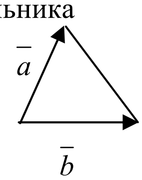
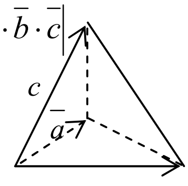
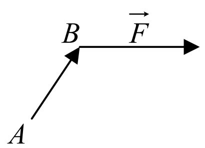
Таким образом, область сходимости исходного степенного ряда - $[-7;\, 7)$. Вне этого интервала ряд расходится.

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

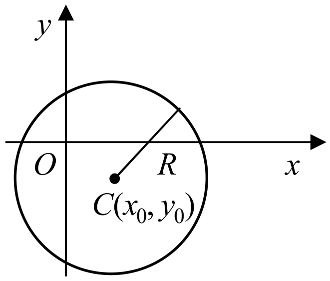
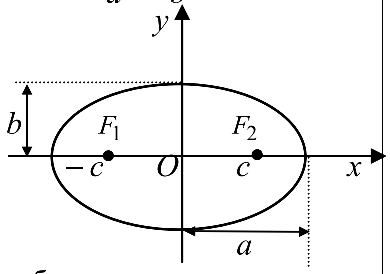
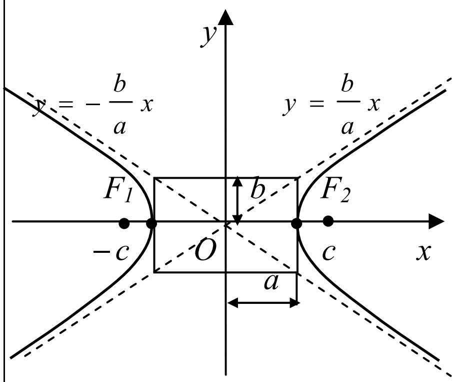
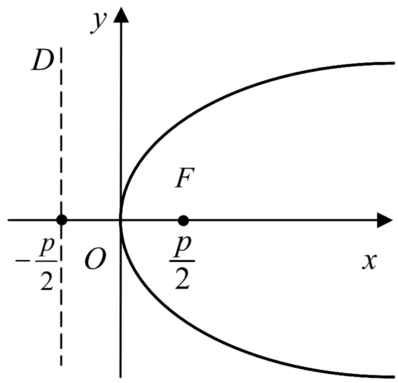
Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

		Скалярное произведение
1.	Определение	Число $\bar{a} \cdot \bar{b} = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert \cos\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$
2.	Основное геометрическое свойство	Признак ортогональности векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$
3.	Формула для вычисления через координаты сомножителей, где $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$	$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

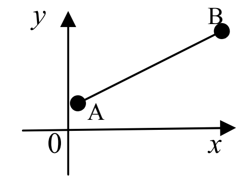
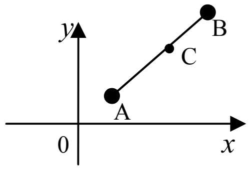
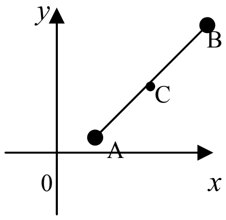
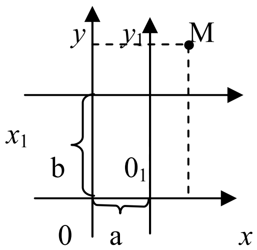
4.	Приложение к задачам геометрии	Угол между векторами $\cos\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert}$ Проекция вектора на вектор $np_{\overline{b}}\vec{a}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\lvert\overline{b}\rvert}$
5.	Приложения к задачам механики	Работа силы $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$

Векторное произведение	Смешанное произведение
Вектор $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ 1) $\lvert\overline{c}\rvert=\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert\sin\left(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}\right)$, 2) $\overline{c}\perp\overline{a},\ \overline{c}\perp\overline{b}$, 3) $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – правая тройка	Число $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$
Признак коллинеарности векторов $\overline{a}\times\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\parallel\overline{b}$	Признак компланарности векторов $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=0\Leftrightarrow\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ - компланарны
$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$	$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$
Площадь параллелограмма $S=\lvert\overline{a}\times\overline{b}\rvert$  Площадь треугольника $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\lvert\overline{a}\times\overline{b}\rvert$ 	Объем параллелепипеда $V=\lvert\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\rvert$ Объем пирамиды $V=\dfrac{1}{6}\lvert\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\rvert$ 
Момент силы $\overrightarrow{M}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{F}$ 	

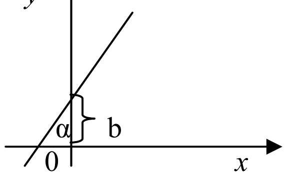
Некоторые кривые второго порядка

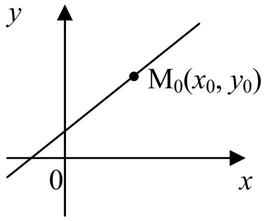
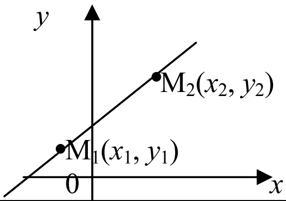
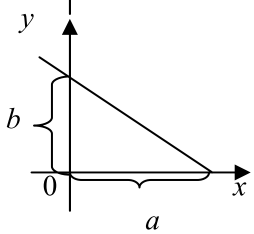
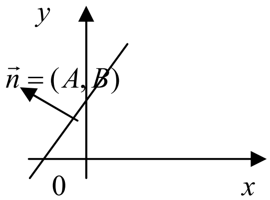
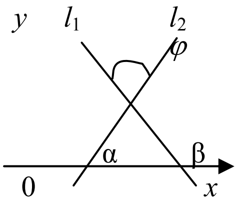
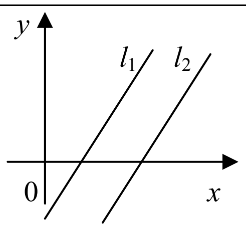
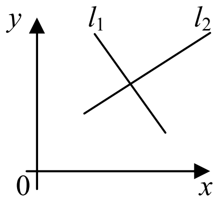
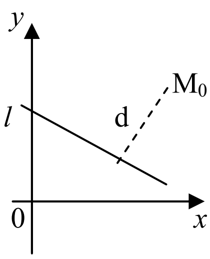
Окружность $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 	**Эллипс** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$  a - большая полуось b - малая полуось $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ - фокусы $c^2=a^2-b^2$
Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$  a - действительная полуось b - мнимая полуось $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ - фокусы $c^2=a^2+b^2$	**Парабола** $y^2=2px\ (p>0)$  $D: x=-\frac{p}{2}$ - директриса $F(\frac{p}{2},0)$ - фокус

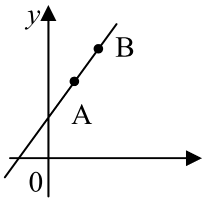
Простейшие формулы аналитической геометрии.

№ п/п	**Схематический чертеж**	Формулы	Комментарии
1.		$\mid AB\mid = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	Расстояние между двумя точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$
2.		$x_C = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}$, $y_C = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}$	Деление отрезка в заданном отношении (λ = AC/CB)
3.		$x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$	Деление отрезка пополам ($\lambda = 1$)
4.		$x = x_1 + a$ $y = y_1 + b$	Преобразования координат при параллельном переносе

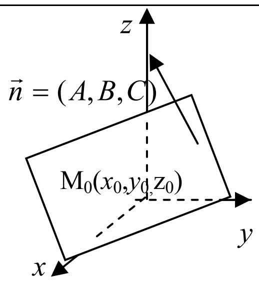
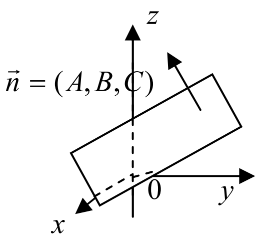
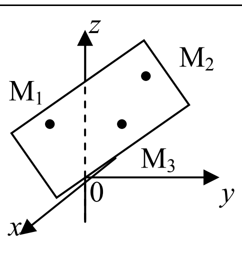
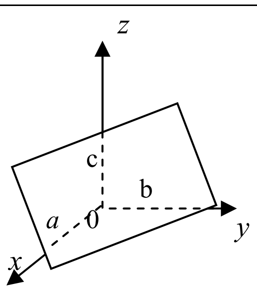
Прямая на плоскости

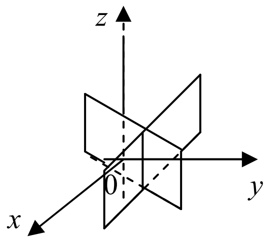
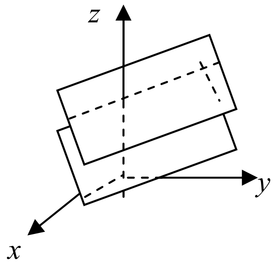
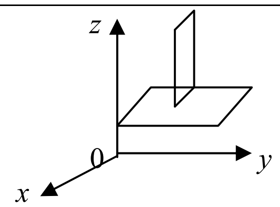
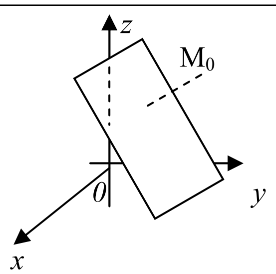
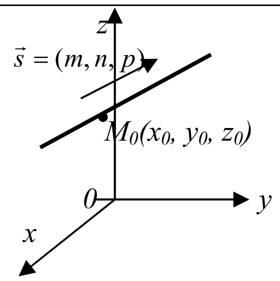
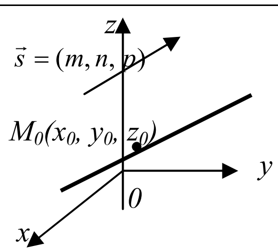
№ п/п	**Схематический чертеж**	Формулы	Комментарии
1	**2**	3	4
1		$y = kx + b$ $(k = \mathrm{tg}\,\alpha)$	Уравнение прямой с угловым коэффициентом (k)

2		$y - y_0 = k(x - x_0)$	Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ в заданном направлении (k)
3		$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки M_1 и M_2.
4		$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	Уравнение прямой в отрезках на осях
5		$Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$	Общее уравнение прямой
6		$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$	Угол между двумя прямыми l_1: $y = k_1 x + b_1$, l_2: $y = k_2 x + b_2$.
7		$k_1 = k_2$	Условие параллельности двух прямых
8		$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$	Условие перпендикулярности двух прямых
9		$d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$

10		$k=\text{tg}\alpha$ $k=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$	Угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)

Плоскость и прямая в пространстве

№ п/п	**Схематический чертеж**	Формулы и комментарии
1	**2**	3
1		Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – перпендикулярно вектору нормали $\vec{n}=(A,B,C)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
2		Общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$
3		Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
4		Уравнение плоскости в отрезках $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, где *a, b, c* – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях

5		Угол между двумя плоскостями $P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + +D_1 = 0,$ $P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + +D_2 = 0$ $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
6		Условие параллельности двух плоскостей $P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$
7		Условие перпендикулярности двух плоскостей $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
8		Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ $d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
9		Канонические уравнения прямой в пространстве: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p},$ где $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой
10		Параметрические уравнения прямой в пространстве: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad t\text{– параметр} \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$

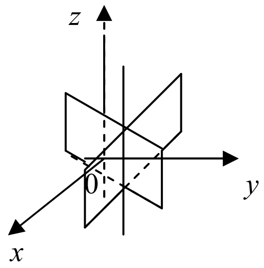
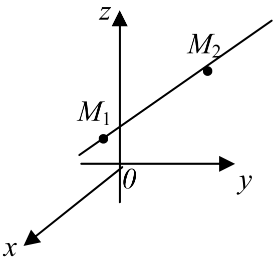
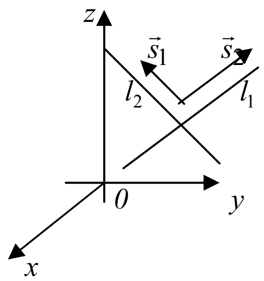
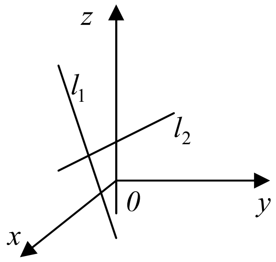
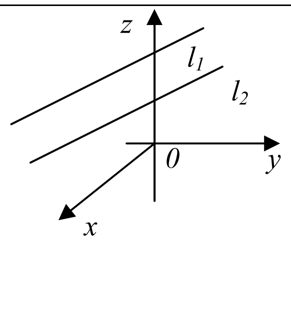
11		Общие уравнения прямой в пространстве $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$ $$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$
12		Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$ $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$
13		Угол между двумя прямыми $$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$ $$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$ $$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$
14		Условие перпендикулярности двух прямых $$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \quad m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$
15		Условие параллельности двух прямых $$l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Таблица производных

№ п/п	Производные элементарных функций	Производные сложных функций
1.	$c' = 0$; $x' = 1$;	
2.	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$;	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$;
3.	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$;
4.	$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$;	$\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a u'$;
5.	$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;	$\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$;
6.	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$;	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u\ln a}u'$;
7.	$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$;	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}u'$;
8.	$\left(\sin x\right)' = \cos x$;	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;
9.	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$;	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;
10.	$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;	$\left(tgu\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
11.	$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;	$\left(ctgu\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12.	$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
13.	$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
14.	$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$;	$\left(arctgu\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
15.	$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$;	$\left(arcctgu\right)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Таблица неопределенных интегралов

1.	$\int \mathrm{d}u = u + C$;	**2.**	$\int 0\, \mathrm{d}u = C$;
3.	$\int u^{\alpha}\mathrm{d}u = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$;	**4.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$, $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$;
5.	$\int a^{u}\mathrm{d}u = \frac{a^{u}}{\ln a} + C, (a>0, a\neq 1)$	**6.**	$\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{u} + C$;
7.	$\int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C$;	**8.**	$\int \cos u\mathrm{d}u = \sin u + C$;
9.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$;	**10.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$;

11.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$;	**12.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u+a}{u-a}\right\| + C$;
13.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$;	**14.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;
15.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left\|u+\sqrt{u^2+a^2}\right\| + C$	**16.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left\|u+\sqrt{u^2-a^2}\right\| + C$
17.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u} = \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\| + C$;	**18.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$;
19.	$\int \operatorname{tg} u\,\mathrm{d}u = -\ln\left\|\cos u\right\| + C$;	**20.**	$\int \operatorname{ctg} u\,\mathrm{d}u = \ln\left\|\sin u\right\| + C$;

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

Ряд Маклорена функции	**Интервал сходимости ряда**
$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$;	$x \in (-\infty;+\infty)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$x \in (-\infty;+\infty)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$	$x \in (-\infty;+\infty)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$ $+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$	$x \in (-1;1)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$	$x \in (-1;1]$
$sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$	$(\|x\| < \infty)$
$ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$(\|x\| < \infty)$

СОДЕРЖАНИЕ