УДК 511.36

Морозова И.М.

О соотношении меры и диаметра множеств комплексных чисел, на которых многочлен принимает малые значения.

При доказательстве В.Г.Спринджуком (I) комплексного случая гипотезы К.Малера (2) существенную роль играла лемма 2I (I).

Пусть

$$P(z)=a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

полином от комплексной переменной z и $H=H(P)=\max\limits_{1\le i\le n}|a_i|$ - высота многочлена $P(z)$. Если $P(z)$ неприводим, то множество $G(P)$ всех w, удовлетворяющих неравенству

$$|P(w)|<H^{-w_0}, \quad w_0>0,$$

распадается на попарно, непересекающиеся односвязные области $G_i(P)$. Обозначим через μA - меру Лебега множества А на комплексной плоскости и d_i - диаметр множества $G_i(P)$.

Лемма. При $w_0>\frac{n-2}{2}$ имеем $\mu G_i(P)>c(n)d_i^2$, где постоянная $c(n)$ зависит только от n и не зависит от высоты полинома $P(z)$.

Различного рода обобщения результата В.Г.Спринджука потребовали обобщения леммы 2I в двух направлениях.

Первое из них состоит в том, что вместо неравенства

$$|P(w)|<H^{-w_0}, \quad w_0>\frac{n-2}{2} \qquad (*)$$

необходимо рассмотреть неравенство (*) с произвольным $w_0>0$. Это приводит к тому, что области $G_i(P)$ могут уже содержать не 2, а произвольное число корней многочлена $P(z)$.

Вторым направлением обобщения является явный вид постоянной $c(n)$ в лемме 2I. В данной работе мы приводим доказательство неравенства

$$\mu G_i(P)>c(n)d_i^2$$

для произвольного w_0 в (*) и с явной оценкой сверху $c(n)$ в зависимости от n.

Теорема. Для любого $w_0>0$ существует $c_0=c(n)$ такое, что при $c<c_0$ справедливо неравенство

$$\mu G_i(P)>c d_i^2.$$

Для доказательства область $G_i(P)$ разобьем на части, состоящие из точек, принадлежащих $S(x_j)$, $j=1,\ldots,n$, где $S(x_j)$ - множество комплексных чисел, удаленных от x_j не более, чем от других корней $x_1,\ldots,x_n$. Рассмотрим две соседние области $S(x_1)$ и $S(x_2)$. Они получаются в результате рассечения $G_i(P)$ некоторой прямой L. Граница области разбивается на части τ и λ. Положим

$m_1 = \max\limits_{\omega\in\tau} |\omega - x_1| = m(\tau)$, $\quad \mu_1 = \min\limits_{\omega\in\tau} |\omega - x_1| = \mu(\tau)$,

$m_2 = \max\limits_{\omega\in\lambda} |\omega - x_2| = m(\lambda)$, $\quad \mu_2 = \min\limits_{\omega\in\lambda} |\omega - x_2| = \mu(\lambda)$.

Для каждой части τ, λ справедливы неравенства

$$m(\tau) < c(n)\mu(\tau), \quad m(\lambda) < c(n)\mu(\lambda).$$

Для точки смежности частей τ и λ выполняется неравенство

$$m_1 < c_1\mu_1 \le c_1|\omega_0 - x_1| = c_1|\omega_0 - x_2| \le c_1 m_2 < c_1 c_2 \mu_2.$$

Поэтому $\max\limits_{\tau,\lambda}(m(\tau), m(\lambda)) < c(n)\min\limits_{\tau,\lambda}(\mu(\tau), \mu(\lambda))$.

Пусть теперь α, β - пара точек границы $\sigma_i(P)$ с условием $|\alpha-\beta| = d_i$. Если обе точки α, β лежат в части τ, то $|\alpha-\beta| \le |\alpha - x_1| + |\beta - x_1| \le 2m(\tau)$, или в части λ, то $|\alpha - \beta| \le 2m(\lambda)$.

Если же, например, $\alpha\in\tau$, $\beta\in\lambda$, то

$$|\alpha-\beta| \le |\alpha - x_1| + |\beta - x_2| + |x_1 - x_2|.$$

Пусть ω_0 - точка на границе $\sigma_i(P)$, одинаково удаленная от x_1, x_2. Тогда $\quad |x_1 - x_2| \le |x_1 - \omega_0| + |x_2 - \omega_0| = 2|x_1 - \omega_0| = 2|x_2 - \omega_0| \le$

$\le 2\min(\max\limits_{(\tau)} m(\tau), \max\limits_{(\lambda)} m(\lambda))$. Следовательно,

$$|\alpha - \beta| \le m(\tau) + m(\lambda) + 2\min(\max\limits_{(\tau)} m(\tau), \max\limits_{(\lambda)} m(\lambda)).$$

$$d_i \le 4\max\limits_{(\tau,\lambda)}(m(\tau), m(\lambda)) < c(n)\mu, \quad \mu = \min\limits_{\lambda,\tau}(\mu(\tau), \mu(\lambda)).$$

Далее рассмотрим области $S(x_1)$ и $S(x_j)$, $j = 3, \dots, n$, все приведенные выше рассуждения справедливы и для них. В силу того, что $\sigma_i(P)$ есть объединение $S(x_j)$, то можно указать круг с центром в x_1, и радиуса $\mu_0 = \min\limits_{(\tau)} \mu(\tau)$. Его площадь

$\pi\mu_0^2 \ge \pi\mu^2 > \pi(c(n))^2 d_i^2$, где $c(n)$ - константа в лемме 21, что и доказывает теорему.

Литература.

1. В.Г.Спринджук. Проблема Малера в метрической теории чисел. Мн. 1967.
2. К.Малер. An analogy to Minkowski's geometry of numbers in a field of series. Ann. of Math, №42 1941