УДК 631.171:621.365.084.2

М.А.Прищепов, кандидат технических наук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПОВЕРХНОСТНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОНАГРЕВАТЕЛЕЙ

Математическое моделирование процессов теплообмена поверхностно-распределенных электронагревателей (ПЭН) во многих случаях требует двумерного описания электротепловых процессов происходящих в них. Наиболее простая и широко распространенная электротепловая схема ПЭН, выполненная в виде тонколистовой пластины и используемая в напольных обогревателях молодняка животных и птицы, конвекторах, радиаторах [1,2] и т.д., при её питании от источника напряжения описывается следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &C\rho\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \lambda\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} - q_{кон} - q_{изл} + q_v; &(1)\\ &U = j_n\rho_n\left(L + (\alpha_\theta/\Pi)\int_0^L\int_0^\Pi \theta\,dx\,dy\right), &(2)\end{aligned}\right\}$$

где $q_{кон} = (K/\delta)(\theta - \theta_c)$ – конвективный тепловой поток;

$q_{изл} = (C_o\varepsilon/\delta)\left[((\theta+273)/100)^4 - ((\theta_c+273)/100)^4\right]$ – тепловой поток излучения;

$q_v = (j_n^2\rho_n/\delta)(1+\alpha_\theta\theta)$ – тепловой поток выделенный ПЭН;

$C\rho$ – эквивалентное произведение теплоемкости и плотности корпусно-изоляционных слоев ПЭН;

λ – эквивалентная теплопроводность корпусно-изоляционных слоев;

δ – общая толщина корпусно-изоляционных слоев;

j_n – поверхностная плотность тока;

α_θ – температурный коэффициент сопротивления ПЭН;

K – коэффициент теплопередачи;

U – напряжение питания ПЭН;

L – длина ПЭН;

x – текущая координата длины ПЭН;

Π – ширина ПЭН;

y – текущая координата ширины ПЭН;

θ – температура ПЭН;

θ_c – температура обрабатываемой среды;

C_o – коэффициент излучения абсолютно черного тела;

ε – интегральная степень черноты ПЭН;

τ - время нагрева;

ρ_n - удельное поверхностное сопротивление ПЭН.

Электротепловая схема ПЭН, выполненная в виде емкости-нагревателя и используемая во многих устройствах периодического действия различного технологического назначения (гальванических ваннах, установках для приготовления и литья полимерных материалов [3], пищеприготовительных приборах [4], индивидуальных поилках для с.-х. животных и птицы и др.), отличается тем, что температура обрабатываемой среды изменяется в процессе нагрева во времени. Тогда электротепловые процессы, происходящие в ней, описываются системой трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C\rho \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - q_{кон} + q_v; && (3) \\ C_p M \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} &= \int_0^L \int_0^n K(\theta - \theta_c)\,dx\,dy; && (4) \\ U &= j_n \rho_n \left(L + \frac{\alpha_0}{n} \int_0^L \int_0^n \theta\,dx\,dy\right), && (5) \end{aligned}\right\}$$

где C_p - удельная теплоемкость обрабатываемой среды;

M - масса обрабатываемой среды.

Решение приведенных систем дифференциально-интегральных уравнений второго порядка в частных производных, описывающих рассмотренные выше электротепловые схемы, находят соответственно в виде температурного поля ПЭН $\theta(x,y,\tau)$ и температуры обрабатываемой среды $\theta_c(\tau)$ при заданных исходных данных и заданных краевых условиях. При определении краевых условий исходят из реальных условий теплообмена на границах ПЭН в любой момент времени нагрева (граничные условия) и на всей поверхности ПЭН в его начальный момент (начальные условия).

Для приведенных электротепловых схем можно выделить два практически реально возможных случая теплообмена на границах ПЭН, определяющих выбор граничных условий:

- торцы границ теплоизолированы или теплообменом на них можно пренебречь по сравнению с теплообменом на контактной поверхности теплообмена;
- на торцах границ происходит теплообмен с окружающей средой.

В первом случае

при $x = 0$ $\quad \theta = \theta_{x=0}$; $\quad \left(\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$. (6)

при $X = L$ $\quad \theta = \theta_{x=L}$; $\quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=L} = 0$; (7)

при $y = 0$ $\quad \theta = \theta_{y=0}$; $\quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$; (8)

при $y = \Pi$ $\quad \theta = \theta_{y=\Pi}$; $\quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=\Pi} = 0$. (9)

Во втором случае

при $X = 0$ $\quad \alpha(\theta - \theta_c) = \lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=0}$; (10)

при $X = L$ $\quad \alpha(\theta - \theta_c) = \lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=L}$; (11)

при $y = 0$ $\quad \alpha(\theta - \theta_c) = \lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=0}$; (12)

при $y = \Pi$ $\quad \alpha(\theta - \theta_c) = \lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=\Pi}$. (13)

Начальные условия для обеих электротепловых схем будут следующими:

при $\tau = 0$ $\quad \theta = \theta_{c\,\tau=0}$. (14)

Очевидно, что дифференциально-интегральные системы уравнений второго порядка в частных производных, описывающие электротепловые процессы приведенных электротепловых схем, являются нелинейными и не имеют точных аналитических решений. В связи с этим особое значение для решения таких задач приобретают численные методы, с помощью которых можно получить числовую таблицу приближенных значений исходного решения. Наиболее распространенными и универсальными численными методами решения дифференциальных уравнений являются разностные методы. Они основаны на введении некоторой разностной сетки в рассматриваемой области. Значения производных, начальные и граничные условия выражаются через значения функции в узлах сетки, в результате чего получается система алгебраических уравнений, называемая разностной схемой. Решая эту систему уравнений, можно найти в узлах сетки значения сеточных функций, которые приближенно равны значениям искомых функций.

Одной из наиболее часто используемых на практике для решения задач при наличии двух пространственных переменных, является схема переменных направлений или продольно-поперечная схема [5]. Суть этой схемы состоит в том, что шаг по времени делится на два полушага. На первом из них вторая производная по одной из координат, например $\partial^2\theta/\partial x^2$, аппроксимируется на промежуточном слое $n+1/2$, т.е. используется неявная аппроксимация; в этом случае $\partial^2\theta/\partial y^2$ аппроксимируется на слое n, т.е. явно. На втором полушаге наоборот, неявная аппроксимация используется только по направлению y.

Соответствующая разностная схема для двумерных уравнений (1) и (3) с небольшим отличием на $q_{изл}$ имеет следующий вид:

$$C\rho\,\frac{\theta_{ij}^{n+1/2}-\theta_{ij}^{n}}{h_\tau/2}=\lambda\,\frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2}-2\theta_{ij}^{n+1/2}+\theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_x^2}+\lambda\,\frac{\theta_{i,j+1}^{n}-2\theta_{ij}^{n}+\theta_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}-q_{кон\,ij}^{n}-q_{изл.\,ij}^{n}+q_{v\,ij}^{n}; \tag{15}$$

$$C\rho\,\frac{\theta_{ij}^{n+1}-\theta_{ij}^{n+1/2}}{h_\tau/2}=\lambda\,\frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2}-2\theta_{ij}^{n+1/2}+\theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_x^2}+\lambda\,\frac{\theta_{i,j+1}^{n+1}-2\theta_{ij}^{n+1}+\theta_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}-q_{кон\,ij}^{n+1/2}-q_{изл.\,ij}^{n+1/2}+q_{v\,ij}^{n+1/2}, \tag{16}$$

где h_τ, h_x, h_y – шаг изменения, соответственно, времени, длины и ширины.

Полученные уравнения можно преобразовать к виду систем линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций соответственно в узлах $n+1/2$ и $n+1$ слоев:

$$\theta_{i-1,j}^{n+1/2}-2\left(\frac{C\rho h_x^2}{\lambda h_\tau}+1\right)\theta_{ij}^{n+1/2}+\theta_{i+1,j}^{n+1/2}=-\left(\left(\frac{h_x}{h_y}\right)^2\left(\theta_{i,j+1}^{n}+\theta_{i,j-1}^{n}\right)+2\left(\frac{C\rho h_x^2}{\lambda h_\tau}-\left(\frac{h_x}{h_y}\right)^2\right)\theta_{ij}^{n}+\left(\frac{h_x^2}{\lambda}\right)\left(-q_{кон.\,ij}^{n}-q_{изл.\,ij}^{n}+q_{v\,ij}^{n}\right)\right); \tag{17}$$

$$\theta_{i,j+1}^{n+1}-2\left(\frac{C\rho h_y^2}{\lambda h_\tau}+1\right)\theta_{ij}^{n+1}+\theta_{i,j+1}^{n+1}=-\left(\left(\frac{h_y}{h_x}\right)^2\left(\theta_{i+1,j}^{n+1/2}+\theta_{i-1,j}^{n+1/2}\right)+2\left(\frac{C\rho h_y^2}{\lambda h_\tau}-\left(\frac{h_y}{h_x}\right)^2\right)\theta_{ij}^{n+1/2}+\left(\frac{h_y^2}{\lambda}\right)\left(-q_{кон\,ij}^{n+1/2}-q_{изл\,ij}^{n+1/2}+q_{v\,ij}^{n+1/2}\right)\right), \tag{18}$$

где i=1,...,M, j=1,...,K и соответствует изменению направления по осям Y и X.

К этим системам уравнений необходимо добавить граничные и начальные условия (6),...,(14) в разностном виде:

Для первого случая:

при $x=0 \quad \theta_{i1}=\theta_{i2}; \quad \frac{\theta_{i2}-\theta_{i1}}{h_x}=0;$ (19)

при $x=L \quad \theta_{ik}=\theta_{i,k-1}; \quad \frac{\theta_{ik}-\theta_{ik-1}}{h_x}=0;$ (20)

при $y=0 \quad \theta_{1j}=\theta_{2j}; \quad \frac{\theta_{2j}-\theta_{1j}}{h_y}=0;$ (21)

при $y=\Pi \quad \theta_{Mj}=\theta_{M-1,j}; \quad \frac{\theta_{Mj}-\theta_{M-1,j}}{h_y}=0.$ (22)

Для второго случая:

при $x=0 \quad \lambda\frac{\theta_{i2}-\theta_{i1}}{h_x}=\alpha_{i1}(\theta_{i1}-\theta_c);$ (23)

при $x=L \quad \lambda\frac{\theta_{ik}-\theta_{i,k-1}}{h_x}=-\alpha_{ik}(\theta_{ik}-\theta_c);$ (24)

при $y=0 \quad \lambda\frac{\theta_{2j}-\theta_{1j}}{h_y}=\alpha_{1j}(\theta_{1j}-\theta_c);$ (25)

при $y=\Pi \quad \lambda\frac{\theta_{Mj}-\theta_{M-1,j}}{h_y}=-\alpha_{Mj}(\theta_{Mj}-\theta_c)$. (26)

и при $\tau=0 \quad \theta_{ij}^{0}=\theta_c^{0}$. (27)

Матрицы систем (17) и (18) трехдиагональные, поэтому для решения этих систем успешно может быть использован метод прогонки. При этом сначала решается система (17), из которой находятся значения сеточной функции $\theta_{ij}^{n+1/2}$. Эти значения используются затем для вычисления искомых значений θ_{ij}^{n+1} из системы (18).

Прогоночные коэффициенты на границах ПЭН, полученные из разностной аппроксимации (19),...,(22), будут равны соответственно:

при $x=0 \quad \mathcal{L}_{i1}=1; \quad \beta_{i1}=0;$ (28)

при $x=L \quad \mathcal{L}_{ik}=1; \quad \beta_{ik}=0;$ (29)

при $y=0 \quad \mathcal{L}_{1j}=1; \quad \beta_{1j}=0;$ (30)

при $y=\Pi \quad \mathcal{L}_{Mj}=1; \quad \beta_{Mj}=0.$ (31)

Из аппроксимации (23),...,(26)

при $x=0 \quad \mathcal{L}_{i1}=\frac{\lambda}{\alpha_{i1}h_x+\lambda}; \quad \beta_{i1}=\frac{\alpha_{i1}h_x}{\alpha_{i1}h_x+\lambda}\theta_c;$ (32)

при $x=L \quad \mathcal{L}_{ik}=\frac{\lambda}{\alpha_{ik}h_x+\lambda}; \quad \beta_{ik}=\frac{\alpha_{ik}h_x}{\alpha_{ik}h_x+\lambda}\theta_c;$ (33)

при $\quad y=0 \quad \mathcal{L}_{1j}=\dfrac{\lambda}{\alpha_{1j}h_y+\lambda}; \quad \beta_{1j}=\dfrac{\alpha_{1j}h_y}{\alpha_{1j}h_y+\lambda}\theta_c;$ (34)

при $\quad y=\Pi \quad \mathcal{L}_{Mj}=\dfrac{\lambda}{\alpha_{Mj}h_y+\lambda}; \quad \beta_{Mj}=\dfrac{\alpha_{Mj}h_y}{\alpha_{Mj}h_y+\lambda}\theta_c.$ (35)

Тогда прогоночные коэффициенты для внутренних точек ПЭН при расчете вдоль оси X определяются по формулам:

$$\mathcal{L}_{ij}=-\frac{1}{\mathcal{L}_{i,j-1}+\left(-2\left(\frac{c\rho h_x^2}{\lambda h_\tau}+1\right)\right)}; \tag{36}$$

$$\beta_{ij}=\mathcal{L}_{ij}\left(\beta_{i,j-1}+F_{ij}^{n}\right), \tag{37}$$

где $i=2,\ldots,M-1$, $j=2,\ldots,K-1$, а F_{ij}^{n} равно правой части уравнения (17) с обратным знаком.

Значения температуры в K-ом ряду разностной сетки ПЭН определяются по формуле:

$$\theta_{iK}^{n+1/2}=\frac{\mathcal{L}_{iK}\beta_{i,K-1}+\beta_{iK}}{1-\mathcal{L}_{iK}\mathcal{L}_{i,K-1}}, \tag{38}$$

где $i=1,\ldots,M$, а в оставшихся точках

$$\theta_{ij}^{n+1/2}=\mathcal{L}_{ij}\theta_{i,j+1}^{n+1/2}+\beta_{ij}, \tag{39}$$

где $i=1,\ldots,M$, $j=K-1,\ldots,1$.

Прогоночные коэффициенты для внутренних точек ПЭН при расчете вдоль оси Y определяются по формулам:

$$\mathcal{L}_{ij}=-\frac{1}{\mathcal{L}_{i-1,j}+\left(-2\left(\frac{c\rho h_y^2}{\lambda h_\tau}+1\right)\right)}; \tag{40}$$

$$\beta_{ij}=\mathcal{L}_{ij}\left(\beta_{i-1,j}+F_{ij}^{n+1/2}\right), \tag{41}$$

где $j=2,\ldots,K-1$, $i=2,\ldots,M-1$, а $F_{ij}^{n+1/2}$ равно правой части уравнения (18) с обратным знаком.

Значения температуры в M-ом ряду разностной сетки ПЭН определяютоя по формуле:

$$\theta_{Mj}^{n+1} = \frac{\mathcal{L}_{Mj}\beta_{M-1,j} + \beta_{Mj}}{1 - \mathcal{L}_{Mj}\mathcal{L}_{M-1,j}}, \tag{42}$$

где j=1,...,K, а в оставшихся точках

$$\theta_{ij}^{n+1} = \mathcal{L}_{ij}\theta_{i+1,j}^{n+1} + \beta_{ij}, \tag{43}$$

где j=1,...,K, i=M-1,...,1.

При моделировании процессов теплообмена в емкости-нагревателе на каждом полушаге по времени необходимо рассчитывать температуру обрабатываемой среды по формулам:

$$\theta_c^{n+1/2} = \frac{\int_0^L\int_0^\Pi K_{ij}^n \theta_{ij}^{n+1/2}\,dx\,dy + \frac{2C_pM}{h_\tau}\theta_c^n}{\frac{2C_pM}{h_\tau} + \int_0^L\int_0^\Pi K_{ij}^n\,dx\,dy}; \tag{44}$$

$$\theta_c^{n+1} = \frac{\int_0^L\int_0^\Pi K_{ij}^{n+1/2} \theta_{ij}^{n+1}\,dx\,dy + \frac{2C_pM}{h_\tau}\theta_c^{n+1/2}}{\frac{2C_pM}{h_\tau} + \int_0^L\int_0^\Pi K_{ij}^{n+1/2}\,dx\,dy}. \tag{45}$$

Практическая проверка предложенной математической модели подтвердила высокую её адекватность.

Литература.

1. А.с. 1179295 СССР, МКИ G05D23/19. Устройство для обогрева животноводческих помещений / Л.С.Герасимович, А.К.Кисель, В.В.Забродский, М.А. Прищепов.

2. А.с. 1240398 СССР, МКИ А01К1/015. Устройство для обогрева молодняка животных / Л.С.Герасимович, А.К.Кисель, М.А.Прищепов и др.

3. А.с. 1353524 СССР, МКИ В29С45/03. Установка для приготовления и литья полимерных материалов / Л.С.Герасимович, Э.П.Олешкевич, И.Н.Кононович, М.А.Прищепов.

4. А.с. 1277947 СССР, МКИ А47J37/00. Емкость для тепловой обработки пищевых продуктов / Л.С.Герасимович, М.А.Прищепов, В.А.Коротинский и др.

5. Турчак Л.И. Основы численных методов.- М.:Наука,1987.-320с.