

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра сопротивления материалов  
и деталей машин**

# **Механика материалов**

*Учебно-методическое пособие  
и задания к расчетно-графическим работам  
для студентов дневной формы обучения*

**Минск  
2008**

УДК 539.3/.6(07)  
ББК 30.121я7  
М 55

Рекомендовано научно-методическим советом факультета «Технический сервис в АПК» БГАТУ

Протокол № 3 от 26 марта 2008 г.

Составители: канд. техн. наук, доц. *О.И. Мисуно* (разделы 1, 2);  
канд. техн. наук, доц. *Д.Н. Колоско* (раздел 3);  
ст. преподаватель *С.А. Легенький* (раздел 4)

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. сопротивления материалов машиностроительного профиля БНТУ *Ю.В. Василевич*;  
д-р техн. наук, зав. каф. теоретической механики и ТММ БГАТУ *А.Н. Орда*

**Механика материалов** : учеб.-метод. пособие и задания к расчетно-графическим работам для студентов дневной формы обучения / сост. О.И. Мисуно, Д.Н. Колоско, С.А. Легенький. – Минск : БГАТУ, 2008. – 112 с. – ISBN 978-985-519-036-4.

УДК 539.3/.6(07)  
ББК 30.121я7

## ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов — наука о прочности, жесткости и устойчивости типовых, наиболее часто встречающихся элементов инженерных конструкций. Цель дисциплины — теоретическая и практическая подготовка для проведения расчетов на прочность, жесткость, устойчивость и изучения последующих дисциплин, развитие инженерного мышления.

Основные понятия механики материалов опираются на законы и теоремы теоретической механики и в первую очередь на законы статики и динамики, без знания которых изучение данного предмета становится практически невозможным. Механика материалов, отличие от теоретической механики, рассматривает задачи, где наиболее существенными являются свойства деформируемых тел. Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в ряде случаев прибегать к упрощающим гипотезам — предположениям, которые оправдываются в дальнейшем путем сопоставления расчетных данных с экспериментом.

Механика материалов принадлежит к прикладным наукам, изучение которых невозможно без систематического решения задач, способствующих пониманию и закреплению теоретического материала. Неправильный расчет на прочность, жесткость и устойчивость самого незначительного, на первый взгляд, элемента конструкции может повлечь за собой очень тяжелые последствия — привести к разрушению конструкции в целом. При проведении подобных расчетов необходимо стремиться к сочетанию надежности работы конструкции с ее экономичностью, добиваться требуемой прочности, жесткости и устойчивости при наименьшем расходе материала (наименьшей стоимости).

В процессе изучения курса «Механика материалов» студенты выполняют расчетно-графические работы (РГР). Количество выполняемых РГР зависит от специальности и количества часов, отведенных в учебном плане на изучение курса. Данное учебно-методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении РГР. В нем приводятся краткие теоретические сведения и основные формулы, необходимые для решения задач, объясняются смысл и порядок решения задач, задания к РГР.

Задание по каждой РГР выдается преподавателем индивидуально каждому студенту и регистрируется в журнале.

При выполнении и оформлении РГР необходимо руководствоваться общими указаниями:

1 Приступать к выполнению РГР следует только после изучения соответствующего раздела курса и решения рекомендованных на практических занятиях задач.

2 РГР оформляется на стандартных листах писчей бумаги формата А4 (210x297) чернилами (не красными), четким почерком с одной стороны листа.

3 Первый лист РГР — это титульный лист, форма и содержание которого приведены в приложении. На втором листе представляется основная надпись для текстовых конструкторских документов по ГОСТ 2.104–68 (первый или заглавный лист), а на третьем листе и дальше — основная надпись для всех конструкторских документов (последующие листы).

4 Перед решением каждой задачи требуется выписать полностью ее условие с числовыми данными.

5 Исходная расчетная схема, а также все схемы, полученные в результате расчета, вычерчиваются карандашом в удобном для восприятия масштабе с указанием на них в числах с единицами измерения всех величин, необходимых для расчета и полученных в результате расчета.

6 Решение задачи должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращения слов объяснениями. Результаты всех вычислений должны иметь единицы измерения.

7 Листы РГР должны быть скреплены (сшиты).

## 1 ИЗГИБ

Литература: [1, с. 9–32, с. 133–169], [2, с. 4–45, с. 286–360], [3, 7, задачи № 6.1, 6.5, 6.29, 6.30, 6.33, 6.35, 6.48, 7.5, 7.6].

Виды изгибов. Поперечная сила и изгибающий момент, их определение, правило знаков. Соотношения между внешними нагрузками, поперечной силой и изгибающим моментом. Выводы, вытекающие из соотношений между внешними нагрузками, поперечной силой  $Q$  и изгибающим моментом  $M$ , их использование при проверке эпюр  $Q$  и  $M$ . Напряжения в поперечных сечениях балки при изгибе. Касательные напряжения при поперечном изгибе, фор-

мула Журавского, эпюра касательных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения. Расчет балок на прочность при изгибе, условие прочности. Осевые моменты сопротивления сечений простой формы (прямоугольник, круг, кольцо). Осевые моменты сопротивления сечений стандартных прокатных профилей. Рациональные формы поперечных сечений и материалы для балок. Перемещения при изгибе. Дифференциальное уравнение упругой линии балки и его интегрирование. Метод начальных параметров, универсальное уравнение упругой линии балки.

## 1.1 Виды изгибов

Изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении элемента конструкции действует изгибающий момент.

В поперечных сечениях элемента конструкции в общем случае нагружения могут действовать другие внутренние силовые факторы и поэтому в зависимости от их наличия различают следующие виды изгибов:

*чистый* – действует только один изгибающий момент  $M$ ;

*поперечный* – одновременно с изгибающим моментом  $M$  действует и поперечная сила  $Q$  (крутящий момент  $T$  и нормальная сила  $N$  могут действовать и могут быть равными нулю);

*продольный* и *продольно-поперечный* – одновременно с нормальной  $N$  и поперечной  $Q$  силами действует изгибающий момент  $M$ .

Каждый вид изгиба может быть прямым и косым.

Элемент конструкции (брус), работающий в основном на изгиб, называется балкой. Конструкция, состоящая из двух и более балок, называется рамой.

## 1.2 Внутренние силовые факторы – поперечная сила $Q_y$ и изгибающий момент $M_z$

Рассмотрим балку, нагруженную внешними силами, лежащими в плоскости  $uox$  (рисунок 1.1). Применяя метод сечений, проведем секущую плоскость и, воспользовавшись уравнениями равновесия для оставшейся (левой) части балки, получим соотношения для определения  $Q_y$  и  $M_z$ :

$$Q_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad (1.1)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n m_z(F_i). \quad (1.2)$$

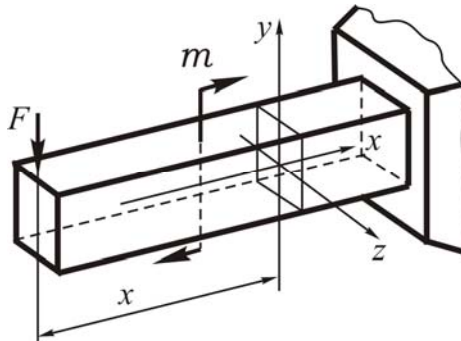


Рисунок 1.1 – Схема нагружения балки

Поперечная сила  $Q_y$  в поперечном сечении бруса (балки) равна алгебраической сумме проекций на ось  $y$  всех внешних сил, действующих на его оставшуюся часть.

При определении поперечной силы  $Q_y$  используют правило знаков: если внешняя сила стремится вращать оставшуюся часть бруса (балки) по направлению хода часовой стрелки, то она вызывает в рассматриваемом сечении положительную поперечную силу, против хода часовой стрелки — отрицательную поперечную силу (рисунок 1.2).

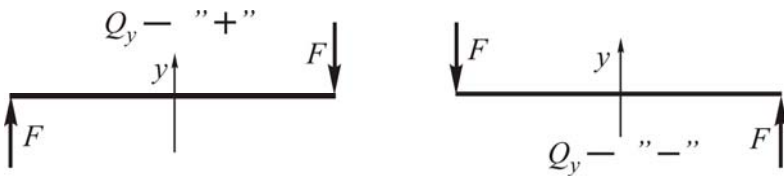


Рисунок 1.2 – Схема правила знаков для  $Q_y$

Изгибающий момент  $M_z$  в поперечном сечении бруса (балки) равен алгебраической сумме моментов относительно оси  $z$  всех внешних сил, действующих на его оставшуюся часть.

При определении изгибающего момента  $M_z$  используют правило знаков: если внешний момент сжимает верхние волокна бруса

(балки), то он вызывает в рассматриваемом сечении положительный изгибающий момент, если сжимает нижние волокна — отрицательный изгибающий момент (рисунок 1.3).

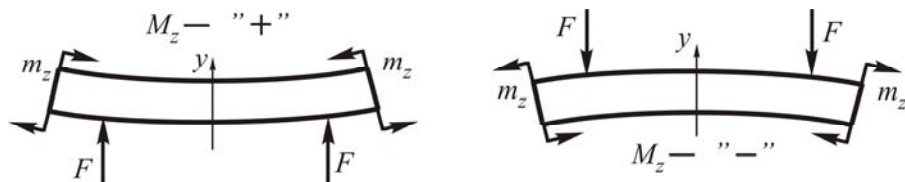


Рисунок 1.3 – Схема правила знаков для  $M_z$

По найденным значениям  $Q_y$  и  $M_z$  на каждом расчетном участке строятся их эпюры для всей конструкции. При построении эпюр внутренних силовых факторов будем исходить из того, что:

1 Ординаты эпюр откладываются в принятом масштабе перпендикулярно геометрической оси бруса.

2 Положительные ординаты эпюр поперечных сил и изгибающих моментов откладываются вверх от оси балки, отрицательные – вниз; у рам положительные ординаты эпюр откладываются с наружной стороны, отрицательные – с внутренней стороны элементов рамы.

3 Для стержней, расположенных внутри рамы, ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются со стороны сжатых волокон, при этом знаки на эпюре не ставятся; положительные ординаты эпюры поперечных сил откладываются с левой стороны, а отрицательные – с правой стороны стержней. Таким образом, эпюра изгибающих моментов всегда строится со стороны сжатых волокон.

4 Ординаты эпюры продольных сил откладываются симметрично по обе стороны от оси бруса с указанием знака.

Внешняя нагрузка, поперечная сила и изгибающий момент связаны между собой следующими дифференциальными соотношениями:

$$\frac{dQ}{dx} = p, \quad (1.3)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.3) и (1.4) показывают, что производная от поперечной силы по длине бруса равна интенсивности распределенной

нагрузки, а производная от изгибающего момента по длине бруса равна поперечной силе. Из этих соотношений вытекают следствия, используемые для контроля правильности построения эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  для балок и прямолинейных элементов рам:

1 На участках, где отсутствует распределенная нагрузка, эпюра поперечных сил ограничена линией параллельной оси, а эпюра изгибающих моментов — наклонной прямой.

2 На участках, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой постоянной интенсивности, эпюра поперечных сил ограничена наклонной прямой линией, а эпюра изгибающих моментов — параболой.

3 На участках, где поперечная сила отсутствует, эпюра изгибающих моментов ограничена линией параллельной оси.

4 При перемещении вдоль оси сечения слева направо на участках, имеющих положительную поперечную силу, изгибающий момент алгебраически возрастает, а на участках, имеющих отрицательную поперечную силу, изгибающий момент алгебраически убывает.

5 Если в пределах расчетного участка эпюра поперечных сил пересекает нулевую линию, то в сечении где  $Q = 0$  изгибающий момент будет иметь экстремальное значение.

Для контроля правильности построения эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  для балок и прямолинейных элементов рам используются также следствия, вытекающие из метода сечений:

1 В сечении, где приложена сосредоточенная сила перпендикулярная к оси, на эпюре поперечных сил возникает скачок, равный по величине приложенной силе, а на эпюре изгибающих моментов получается излом.

2 В сечении, где приложена внешняя пара сил (сосредоточенный момент) на эпюре изгибающих моментов возникает скачок, равный по величине моменту приложенной пары.

3 Для рам обязательна статическая проверка, заключающаяся в проверке равновесия каждого узла, вырезанного из нагруженной рамы.

### **1.3 Напряжения в поперечных сечениях балки при чистом изгибе**

При рассмотрении данного вопроса примем балку, имеющую продольную плоскость симметрии, в которой действуют все внешние силы. В этом случае балка будет работать в условиях плоского изгиба, т.е. без коробления или скручивания. Представим наиболее



простой случай изгиба – чистый изгиб (рисунок 1.4). В поперечных сечениях балки действует только изгибающий момент, причем одинаковой величины, равной  $m$ .

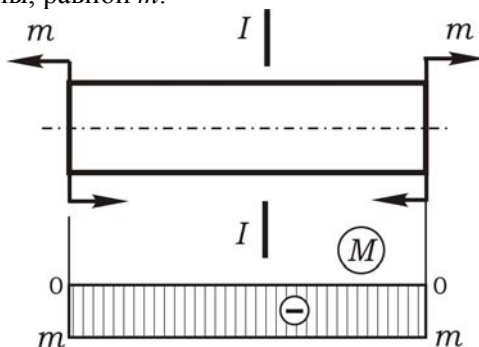


Рисунок 1.4 – Чистый изгиб бруса

Воспользуемся методом сечений, проведем секущую плоскость  $I-I$  и представим оставшуюся левую часть балки (рисунок 1.5). Проведем в правом торцевом сечении координатные оси:  $y$  – в продольной плоскости симметрии балки;  $x$  – вдоль нейтрального слоя в продольной плоскости симметрии балки (слой продольных волокон, который не изменяет своей длины при нагружении, называется нейтральным слоем);  $z$  – совпадает с нейтральной линией (линия, образованная от пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением). При чистом изгибе оси  $y$  и  $z$  являются главными центральными осями инерции поперечного сечения. В окрестности произвольной точки  $B$  с координатами  $z$  и  $y$  выделим элементарную площадку  $dA$ , в пределах которой действует сила равная  $dN = \sigma dA$ .

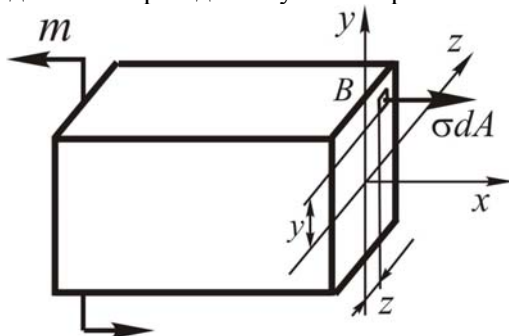


Рисунок 1.5 – Оставшаяся левая часть балки

При чистом изгибе нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения бруса, расположенной на расстоянии  $y$  от нейтральной оси определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (1.5)$$

где  $M_z$  — изгибающий момент в поперечном сечении бруса относительно оси  $z$ ;

$I_z$  — момент инерции сечения относительно оси  $z$ .

Анализ формулы (1.5) показывает:

— напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки прямо пропорционально расстоянию от нейтральной оси до этой точки;

— напряжения, изменяясь по высоте сечения, остаются постоянными по его ширине.

Эпюра нормальных напряжений, возникающих в поперечном сечении балки при чистом изгибе, представлена на рисунке 1.6, из которого видно, что максимальные напряжения при изгибе возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной оси :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\max}. \quad (1.6)$$

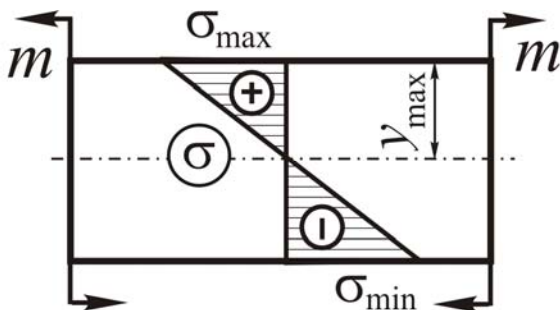


Рисунок 1.6 – Эпюра нормальных напряжений

Таким образом, наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в поперечном сечении балки возникают в наиболее удаленных от нейтральной оси точках.

При чистом изгибе ось балки искривляется в продольной плоскости симметрии, перпендикулярной нейтральному слою. Зависимость кривизны оси балки от изгибающего момента представляется формулой:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (1.7)$$

Произведение  $E I_z$  называется *жесткостью поперечного сечения балки при изгибе*. При  $E I_z = \text{const}$  и  $M_z = \text{const}$  ось балки искривляется по дуге окружности радиусом  $\rho$ . Как видно из формулы (1.7) кривизна оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту  $M_z$  и обратно пропорциональна жесткости поперечного сечения балки  $E I_z$ .

Примечание. Формулы нормальных напряжений (1.5) и кривизны оси (1.7) для чистого изгиба балки будут давать точные значения и при поперечном изгибе. Если поперечная сила изменяется вдоль оси бруса, то формула (1.3) для нормальных напряжений дает незначительную погрешность, величина которой имеет порядок  $h/l$  по сравнению с 1 (где  $h$  – высота поперечного сечения,  $l$  – длина бруса).

#### 1.4 Касательные напряжения при поперечном изгибе

Представим консольно закрепленную балку, испытывающую поперечный изгиб (рисунок 1.7). Рассмотрим некоторое сечение  $A$  —  $A$ . Полное касательное напряжение  $\tau$  вблизи контура направлено по касательной к контуру сечения. Касательное напряжение в каждой точке сечения можно разложить на две составляющие  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ . Методами теории упругости доказывается, что в большинстве случаев составляющие  $\tau_{xz}$  оказывают на прочность значительно меньшее влияние, чем  $\tau_{xy}$ . Определим касательные напряжения при поперечном изгибе положив, что  $\tau \approx \tau_{xy}$ . Вычислить эти напряжения проще через парные им касательные напряжения, возникающие в продольных сечениях бруса.

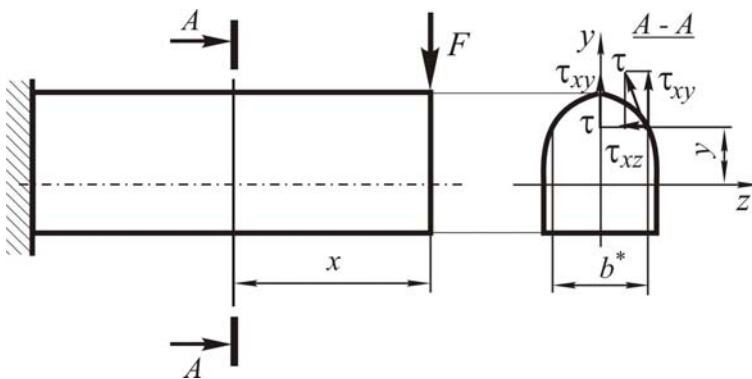


Рисунок 1.7 – Поперечный изгиб балки

Принимая в первом приближении равномерное распределение касательных напряжений по ширине сечения, представим формулу для их вычисления:

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{I_z b^*}, \quad (1.8)$$

где  $S_z^*$  — статический момент относительно оси  $z$  части площади поперечного сечения бруса, расположенной выше или ниже уровня  $y$ , в точках которого вычисляются касательные напряжения;

$I_z$  — момент инерции относительно оси  $z$  площади всего поперечного сечения бруса;

$b^*$  — ширина поперечного сечения бруса на уровне  $y$ , в точках которого вычисляются касательные напряжения.

Формула для определения касательных напряжений (1.8) была выведена русским ученым и инженером Д.И. Журавским и носит его имя, который первым провел исследование касательных напряжений при поперечном изгибе.

Используя формулу Журавского (1.8), получаем формулу для вычисления касательных напряжений в балке прямоугольного поперечного сечения (1.9) в точках, расположенных на расстоянии  $y$  от нейтральной оси, т.е. от оси  $z$  (рисунок 1.8).

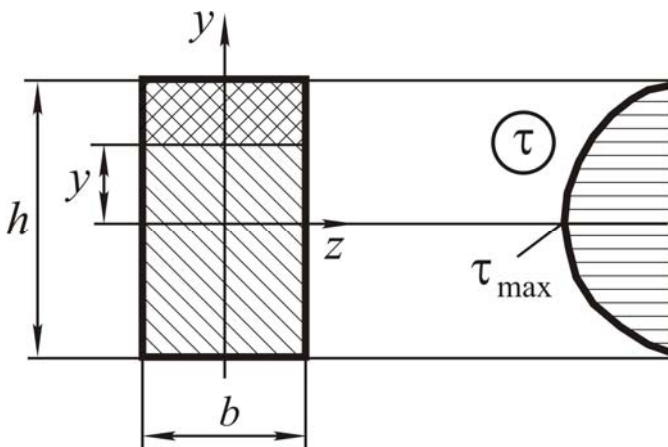


Рисунок 1.8 – Поперечное сечение балки и эпюра касательных напряжений

$$\tau = \frac{6 Q_y}{b h^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (1.9)$$

По формуле (1.9) построена эпюра касательных напряжений (рисунок 1.8), из которой видно, что в точках наиболее удаленных от нейтральной оси ( $y = \frac{h}{2}$ ) касательное напряжение равно нулю, а в точках на нейтральной оси ( $y = 0$ ) касательное напряжение имеет максимальное значение равное

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{b h}. \quad (1.10)$$

### 1.5 Расчет балок на прочность при изгибе

При поперечном изгибе максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении бруса существенно превышают максимальные касательные напряжения ( $\sigma_{\max}$  относится к  $\tau_{\max}$  примерно как длина бруса к высоте поперечного сечения). Также известно, что в точках поперечного сечения бруса наиболее удаленных от нейтральной оси  $\sigma = \sigma_{\max}$ ,  $\tau = 0$ , а на нейтральной оси  $\tau = \tau_{\max}$ ,

$\sigma = 0$ . В этой связи, расчет нетонкостенных балок на прочность при поперечном изгибе производится по нормальным напряжениям. При выполнении этого расчета принимается во внимание, что опасными точками являются точки наиболее удаленные от нейтральной оси и находятся они в сечении балки, в котором действует максимальный изгибающий момент. Тогда условие прочности при изгибе имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_{\max} \leq [\sigma]. \quad (1.11)$$

Отношение  $\frac{I_z}{y_{\max}}$  обозначается через  $W_z$  и называется осевым моментом сопротивления. Если поперечное сечение симметрично относительно оси  $z$ , то условие прочности при изгибе представляется соотношением

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (1.12)$$

Осевой момент сопротивления  $W_z$  для некоторых симметричных сечений определяется по формулам, представленным в таблице 1.1.

Значения осевых моментов сопротивления для стандартных прокатных профилей принимаются из соответствующих таблиц сортамента.

При использовании для балок хрупкого материала, который, как известно, при сжатию сопротивляется лучше, чем при растяжении ( $[\sigma_c] > [\sigma_p]$ ), поперечное сечение должно быть несимметричным относительно нейтральной оси, причем большая часть его площади располагается в растянутой зоне (рисунок 1.9). Условие прочности в данном случае представится двумя соотношениями:

$$\sigma_{\min} = \sigma_{(1)} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_1 \leq [\sigma_c], \quad (1.13)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(2)} = \frac{M_{\max}}{I_z} \cdot y_2 \leq [\sigma_p], \quad (1.14)$$

где  $\sigma_{(1)}$  и  $\sigma_{(2)}$  — нормальные напряжения в точках, соответственно, 1 и 2;

$[\sigma_p]$  и  $[\sigma_c]$  — допускаемое напряжение, соответственно, на растяжение и на сжатие.

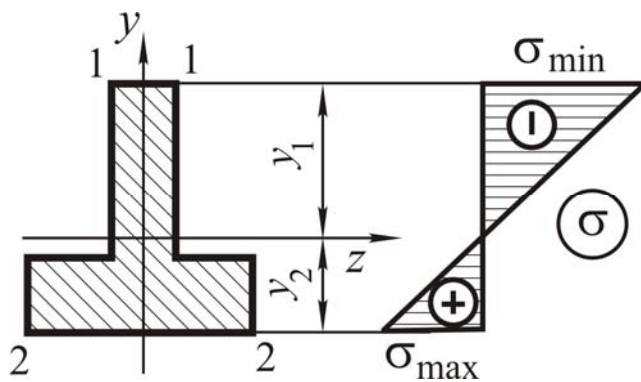
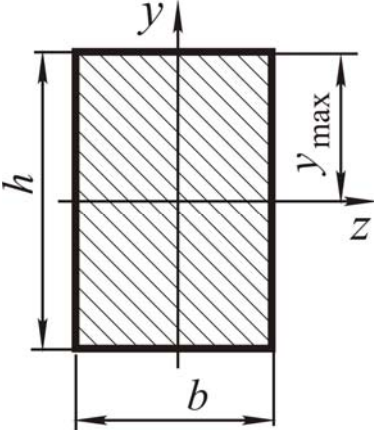
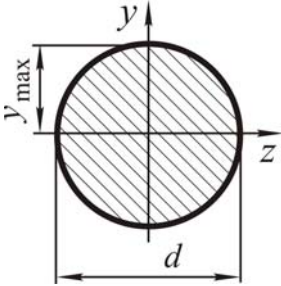
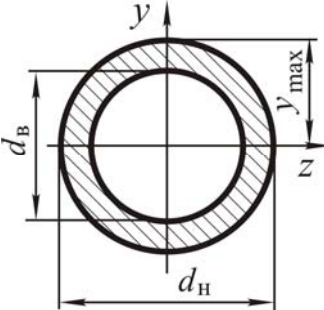


Рисунок 1.9 – Несимметричное поперечное сечение бруса

Таблица 1.1 – Некоторые геометрические характеристики сечений

Форма и размеры поперечного сечения	Геометрические характеристики сечения
	$I_z = \frac{b h^3}{12}, \quad y_{\max} = \frac{h}{2},$ $W_z = \frac{b h^2}{6}.$

Форма и размеры поперечного сечения	Геометрические характеристики сечения
 <p>The diagram shows a solid circular cross-section with diameter <math>d</math>. The vertical axis is labeled <math>y</math> and the horizontal axis is labeled <math>z</math>. The maximum height from the <math>z</math>-axis to the top of the circle is labeled <math>y_{\max}</math>.</p>	$I_z = \frac{\pi d^4}{64}, \quad y_{\max} = \frac{d}{2},$ $W_z = \frac{\pi d^3}{32}.$
 <p>The diagram shows a hollow circular cross-section with an outer diameter <math>d_{\text{н}}</math> and an inner diameter <math>d_{\text{в}}</math>. The vertical axis is labeled <math>y</math> and the horizontal axis is labeled <math>z</math>. The maximum height from the <math>z</math>-axis to the top of the outer ring is labeled <math>y_{\max}</math>.</p>	$I_z = \frac{\pi d_i^4}{64} (1 - \tilde{n}^4), \quad \tilde{n} = \frac{d_{\text{в}}}{d_i},$ $y_{\max} = \frac{d_i}{2},$ $W_z = \frac{\pi d_i^3}{32} (1 - \tilde{n}^4).$

### 1.6 Метод начальных параметров

Для определения перемещений в балках существует метод, не требующий непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси, который называется *методом Коши–Крылова* или методом начальных параметров. Под действием внешних сил, расположенных в продольной плоскости симметрии прямой балки, ее ось искривляется в этой же плоскости; при этом точки оси балки перемещаются. Под перемещением сечения или прогибом сечения ( $y$ ) понимается перемещение его центра тяжести по направлению перпендикулярному к оси балки в ненагруженном состоянии, а под углом поворота сечения ( $\theta$ ) — угол, на который поворачивается сечение по отношению к своему положению в не-



нагруженном состоянии. Прогиб считается положительным, если перемещение центра тяжести поперечного сечения при нагружении балки происходит вверх, отрицательным — если вниз. Угол поворота сечения считается положительным, если поперечное сечение поворачивается при нагружении балки против хода часовой стрелки, отрицательным — если по ходу часовой стрелки.

Представим левую часть балки длиной  $x$ , к которой приложены пара сил с моментом  $m$ , сосредоточенная сила  $F$  и распределенная нагрузка постоянной интенсивности  $p$  (рисунок 1.10). Выберем начало координат  $O$  в крайнем левом сечении балки, ось  $y$  направим вверх, ось  $x$  вправо. Тогда прогиб и угол поворота сечения балки вначале координат будут обозначены соответственно  $y_0$  и  $\theta_0$ , а определяемые прогиб и угол поворота сечения на расстоянии  $x$  от начала координат — соответственно  $y_x$  и  $\theta_x$ .

В сечении балки на расстоянии  $x$  от начала координат действует изгибающий момент равный

$$M_{(x)} = m + F(x-b) + p \frac{(x-c)^2}{2}. \quad (1.15)$$

Тогда дифференциальное уравнение упругой линии балки представится в следующем виде

$$EI_z \frac{d^2 y_x}{dx^2} = m + F(x-b) + p \frac{(x-c)^2}{2}. \quad (1.16)$$

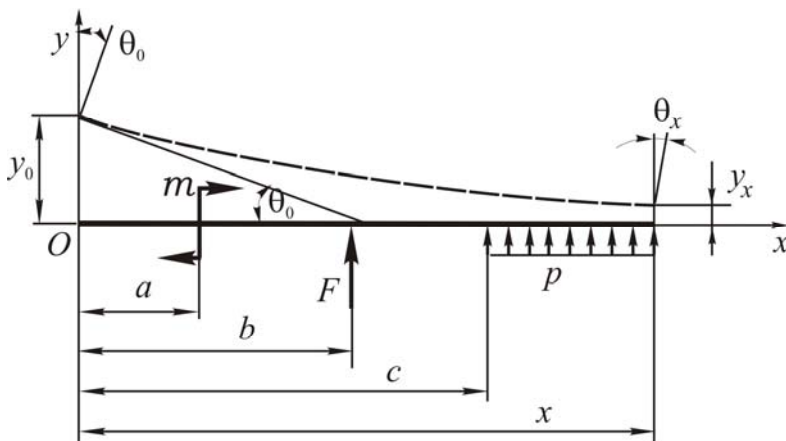


Рисунок 1.10 – Схема нагружения балки

Последовательно интегрируя уравнение (1.16) два раза и подставляя пределы интегрирования, получаем формулы для определения угла поворота (1.17) и прогиба (1.18) сечения балки, расположенного на расстоянии  $x$  от начала координат.

$$EI_z \theta_x = EI_z \theta_0 + m(x-a) + F \frac{(x-b)^2}{2} + p \frac{(x-c)^3}{6}. \quad (1.17)$$

$$EI_z y_x = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x + m \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + p \frac{(x-c)^4}{24}. \quad (1.18)$$

Если к балке слева от сечения, где определяется перемещение, приложено число  $n_i$  пар сил с моментами  $m_i$ , число  $n_j$  сосредоточенных сил  $F_j$  и число  $n_k$  распределенных нагрузок постоянной интенсивности  $q_k$ , то формулы для определения углов поворота  $\theta_x$  и прогибов  $y_x$  сечений балки, расположенных на расстоянии  $x$  от начала координат соответственно можно записать в виде:

$$EI_z \theta_x = EI_z \theta_0 + \sum_{i=1}^{n_i} m_i (x-a_i) + \sum_{j=1}^{n_j} F_j \frac{(x-b_j)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_k} p_k \frac{(x-c_k)^3}{6}. \quad (1.19)$$

$$EI_z y_x = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x + \sum_{i=1}^{n_i} m_i \frac{(x-a_i)^2}{2} + \sum_{j=1}^{n_j} F_j \frac{(x-b_j)^3}{6} + \sum_{k=1}^{n_k} p_k \frac{(x-c_k)^4}{24}, \quad (1.20)$$

где  $y_0, \theta_0$  – соответственно прогиб и угол поворота сечения в начале координат или начальные параметры;

$a_i, b_j, c_k$  – расстояние от начала координат до, соответственно, пары сил с моментом  $m_i$ , сосредоточенной силы  $F_j$ , начала распределенной нагрузки интенсивностью  $p_k$ .

При нахождении перемещений с помощью метода начальных параметров, в котором используются формулы (1.19–1.20), нужно иметь ввиду следующие обстоятельства:

— в формулы (1.19–1.20) подставляются значения внешних нагрузок, расположенных только слева от сечения, в котором определяются перемещения;

— если распределенная нагрузка не доходит до сечения, в котором определяется перемещение (рисунок 1.11, а), то ее необходимо про-

длить вправо до сечения и ввести компенсирующую распределенную нагрузку той же интенсивности, но противоположно направленную (рисунок 1.11, б).

— в правой части формул (1.19, 1.20) знак перед каждым слагаемым, содержащим внешнюю нагрузку ( $m$ ,  $F$ ,  $p$ ), ставится таким же, как и знак изгибающего момента от соответствующей внешней нагрузки;

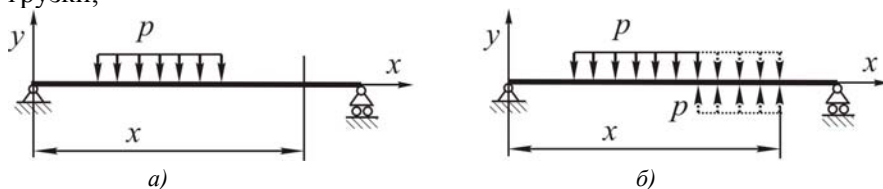


Рисунок 1.11 – Учет распределенной нагрузки

Начальные параметры  $y_0$  и  $\theta_0$  определяются из граничных условий, вытекающих из схемы закрепления балки, которую можно свести к одному из следующих случаев:

1) Балка жестко закреплена одним концом:

— жесткая заделка слева (рисунок 1.12) –  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ ;

— жесткая заделка справа (рисунок 1.13) –  $y_0 \neq 0$  и  $\theta_0 \neq 0$ . Если балку зеркально отобразить относительно жесткой заделки (рисунок 1.14), то окажется, что  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ .

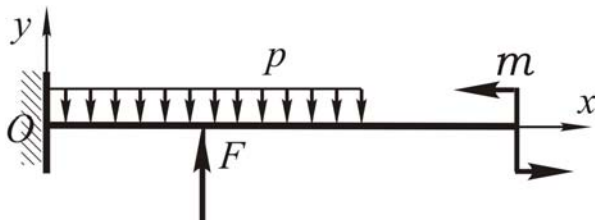


Рисунок 1.12 – Жесткая заделка слева

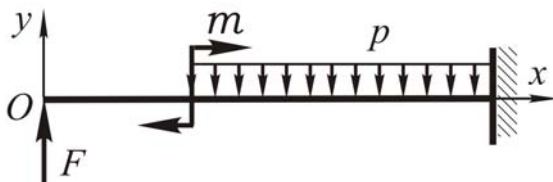


Рисунок 1.13 – Жесткая заделка справа

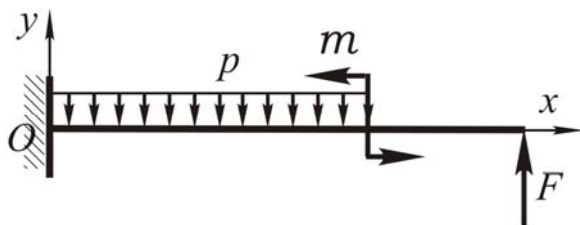


Рисунок 1.14 – Зеркальное отображение балки

2) Балка закреплена с помощью неподвижного и подвижного шарниров.

а) Один из шарниров приходится на крайнее левое сечение балки (рисунок 1.15) –  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 \neq 0$ .

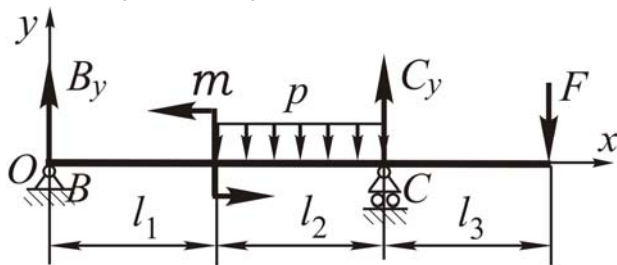


Рисунок 1.15 – Шарнир в крайнем левом сечении балки

Для определения начального параметра  $\theta_0$  используем граничное условие, вытекающее из расчетной схемы балки (рисунок 1.15) – прогиб в сечении C равен нулю ( $y_C = 0$ ). Составляем уравнение прогиба для сечения C в виде

$$EI_z y_C = EI_z \theta_0 x_C - m \frac{(x_C - l_1)^2}{2} + B_y \frac{(x_C)^3}{6} - p \frac{(x_C - l_1)^4}{24} = 0. \quad (1.21)$$

Подставляя в уравнение (1.21)  $x_C = l_1 + l_2$ , находим величину  $EI_z \theta_0$  и начальный параметр  $\theta_0$ .

б) Балка справа и слева имеет консоль (рисунок 1.16) –  $y_0 \neq 0$  и  $\theta_0 \neq 0$ .

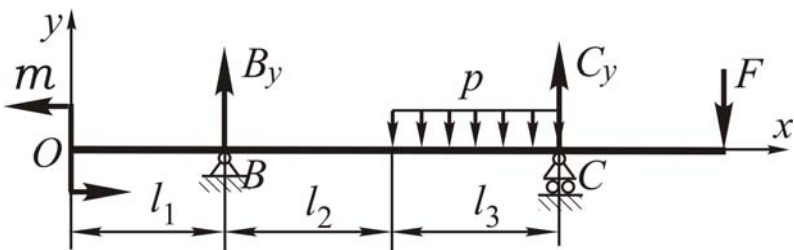


Рисунок 1.16 – Балка с консолями слева и справа

Для определения начальных параметров  $y_0$  и  $\theta_0$  используем граничные условия, вытекающее из расчетной схемы балки (рисунок 1.16) – прогибы в сечениях  $B$  и  $C$  равны нулю ( $y_B = 0$ ;  $y_C = 0$ ). Составим уравнения прогибов для сечений  $B$  и  $C$  в виде:

$$EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_B - m \frac{x_B^2}{2} = 0, \quad (1.22)$$

$$EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_C - m \frac{x_C^2}{2} + B_y \frac{(x_C - l_1)^3}{6} - p \frac{(x_C - l_1 - l_2)^4}{24} = 0. \quad (1.23)$$

Подставляя  $x_B = l_1$  и  $x_C = (l_1 + l_2 + l_3)$  и решая систему уравнений (1.22), (1.23), находим величины  $EI_z y_0$  и  $EI_z \theta_0$ , а затем, если нужно — начальные параметры  $y_0$  и  $\theta_0$ .

### 1.7 Пример решения задачи (балка)

Для заданной балки (рисунок 1.17) требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать номер профиля стального двутавра при  $[\sigma] = 160$  МПа. Используя метод начальных параметров, определить прогибы в сечениях, приходящихся на границы расчетных участков, и углы поворота сечений, приходящихся на опоры, построить приближенную изогнутую ось (упругую линию) балки. Весом балки пренебречь.

*Решение.* Проводим координатные оси. При этом ось  $x$  совмещаем с осью балки, ось  $y$  проводим перпендикулярно оси  $x$  в точке  $B$ . Рассматриваем равновесие балки, для чего наложенные связи со стороны опор заменяем реакциями. Опора  $B$  — шарнирно-неподвижная. Реакцию опоры представляем составляющими  $B_y$  и  $B_x$ , проходящими через ось шарнира. Опора  $C$  — шарнирно-

подвижная. Реакция такой опоры проходит через ось шарнира и направлена перпендикулярно оси балки.

Таким образом, на балку действует уравновешенная плоская система сил. Для нахождения неизвестных  $B_y, B_x$  и  $C_y$ , составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma m_c (F_i) = -B_y \times 3 + F \times 4 + m \times p \times 2 \times 2 - p \times 1 \times 0,5 = 0;$$

$$\Sigma m_B (F_i) = -C_y \times 3 - m \times p \times 2 \times 1 - F \times 1 + p \times 1 \times 3,5 = 0;$$

$$\Sigma F_x = B_x = 0.$$

Последнее уравнение необходимо для определения составляющей  $B_x$ , которая в данной задаче равна нулю, поскольку к балке не приложены силы, которые проектируются на ось  $x$ .

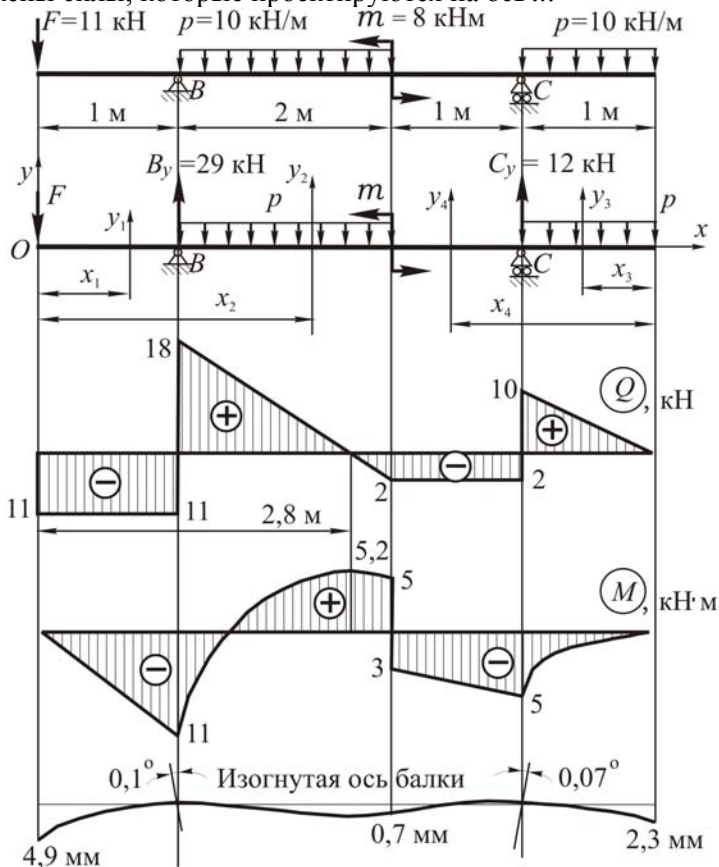


Рисунок 1.17 – Расчетные схемы, эпюры поперечных сил, изгибающих моментов в сечениях балки и изогнутая ось балки

Решаем уравнения равновесия и находим реакции опор

$$B_y = \frac{F \times 4 + m + p \times 2 \times 2 - p \times 0,5}{3} = \frac{11 \times 4 + 8 + 10 \times 2 \times 2 - 10 \times 0,5}{3} = 29 \text{ кН},$$

$$C_y = \frac{-m + p \times 2 \times 1 - F \times 1 + p \times 1 \times 3,5}{3} = \frac{-8 + 10 \times 2 - 11 + 10 \times 3,5}{3} = 12 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим не использованное в этой задаче уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось  $y$  и подставим их значения:

$$\Sigma F_y = B_y - p \times 2 - F + C_y - p \times 1 = 29 - 20 - 11 + 12 - 10 = 0.$$

В результате расчета получили  $\Sigma F_y = 0$ , что указывает на правильность определения реакций опор.

Разбиваем балку на четыре расчетных участка, принимая за их границы сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы, момент, а также начало и конец распределенной нагрузки.

В пределах первого участка проводим произвольное поперечное сечение на расстоянии  $x_1$  от начала координат (точки  $O$ ). Мысленно отбрасываем правую часть балки и, учитывая правила знаков, составляем уравнения для  $Q_{x_1}$  и  $M_{x_1}$  на первом участке.

I участок:  $0 \leq x_1 \leq 1$  м.

$$Q_{x_1} = -F;$$

$$M_{x_1} = -F x_1.$$

Из уравнений следует, что на первом участке поперечная сила постоянная, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Задавая  $x_1$  значения, соответствующие границам участка, находим  $Q_{x_1}$  и  $M_{x_1}$ .

$$Q_{x_1} = \text{const} = -11 \text{ кН};$$

$$x_1 = 0: M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1 \text{ м}: M_{x_1} = -11 \times 1 = -11 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры для первого участка, отмечая на них найденные значения  $Q_{x_1}$  и  $M_{x_1}$  (рисунок 1.17).

Подобным образом проводим произвольное поперечное сечение в пределах второго расчетного участка на расстоянии  $x_2$  от крайней левой точки  $O$ . Отбрасывая мысленно правую часть балки и рассматривая силы, действующие на оставшуюся часть, составляем уравнения  $Q_{x_2}$  и  $M_{x_2}$  для второго участка.

II участок:  $1 \text{ м} \leq x_2 \leq 3 \text{ м}$ .

$$Q_{x_2} = -F + B_y - p(x_2 - 1);$$

$$M_{x_2} = -F x_2 + B_y(x_2 - 1) - p \frac{(x_2 - 1)^2}{2}.$$

На втором участке поперечная сила представляет линейную функцию, а изгибающий момент изменяется по квадратичной функции. Задавая  $x_2$  значения, соответствующие границам участка, находим  $Q_{x_2}$  и  $M_{x_2}$ .

$$x_2 = 1 \text{ м}: Q_{x_2} = -11 + 29 = 18 \text{ кН};$$

$$x_2 = 3 \text{ м}: Q_{x_2} = -11 + 29 - 10 \times 2 = -2 \text{ кН};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}: M_{x_2} = -11 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 3 \text{ м}: M_{x_2} = -11 \times 3 + 29 \times 2 - 10 \frac{(3-1)^2}{2} = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Так как на втором участке поперечная сила  $Q_{x_2}$  непрерывно убывает и происходит смена ее знака, то в сечении, где  $Q_{x_2} = 0$ , эпюра моментов  $M_{x_2}$  примет экстремальное значение, при вычислении которого воспользуемся дифференциальной зависимостью между  $Q_{x_2}$  и  $M_{x_2}$ . Приравнявая к нулю выражение поперечной силы  $Q_{x_2}$ , находим расстояние  $x_2$  до сечения с экстремальным значением изгибающего момента.

$$Q_{x_2} = -F + B_y - p(x_2 - 1) = 0,$$

$$x_2 = \frac{-F + B_y + p}{q} = \frac{-11 + 29 + 10}{10} = 2,8 \text{ м}.$$

Подставив полученное значение  $x_2$  в уравнение моментов  $M_{x_2}$ , находим величину экстремального изгибающего момента

$$x_2 = 2,8 \text{ м}: M_{x_2} = -11 \times 2,8 + 29(2,8 - 1) - 10 \frac{(2,8-1)^2}{2} = 5,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры для второго участка и отмечаем на них найденные значения  $Q_{x_2}$  и  $M_{x_2}$  (рисунок 1.17).

Проводим сечение в пределах третьего расчетного участка на расстоянии  $x_3$  от крайней правой точки балки. Рассматривая силы, действующие на правую часть балки, составляем уравнения  $Q_{x_3}$  и  $M_{x_3}$  для третьего участка:



III участок:  $0 \leq x_3 \leq 1$  м.

$$Q_{x_3} = p x_3;$$

$$M_{x_3} = -p \frac{x_3^2}{2}.$$

На третьем участке поперечная сила представляет линейную функцию, а изгибающий момент изменяется по квадратичной функции. Задавая  $x_3$  значения, соответствующие границам участка, находим  $Q_{x_3}$  и  $M_{x_3}$ .

$$x_3 = 0: \quad Q_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1 \text{ м:} \quad Q_{x_3} = 10 \text{ кН};$$

$$x_3 = 0: \quad M_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1 \text{ м:} \quad M_{x_3} = -10 \frac{1^2}{2} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюры  $Q_{x_3}$  и  $M_{x_3}$  на третьем участке (рисунок 1.17). Поскольку эпюра поперечных сил на этом участке не изменяет знак, то изгибающий момент не будет принимать экстремального значения.

Проводим сечение в пределах четвертого расчетного участка на расстоянии  $x_4$  от крайней правой точки балки. Рассматривая силы, действующие на правую часть балки, составляем уравнения  $Q_{x_4}$  и  $M_{x_4}$  для четвертого участка.

IV участок:  $1 \text{ м} \leq x_4 \leq 2 \text{ м}$ .

$$Q_{x_4} = -C_y + p \times 1;$$

$$M_{x_4} = C_y (x_4 - 1) - p \times 1 (x_4 - 0,5).$$

Из уравнений следует, что на четвертом участке поперечная сила постоянная, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Подставляя числовые значения  $x_4$  на границах участка, находим  $Q_{x_4}$  и  $M_{x_4}$ .

$$Q_{x_4} = \text{const} = -12 + 10 = -2 \text{ кН};$$

$$x_4 = 1 \text{ м:} \quad M_{x_4} = -10 (1 - 0,5) = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_4 = 2 \text{ м:} \quad M_{x_4} = 12 \times 1 - 10 (2 - 0,5) = -3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным данным  $Q_{x_4}$  и  $M_{x_4}$  строим эпюры на четвертом участке (рисунок 1.17).

Контроль правильности построения эпюр с использованием общих выводов, вытекающих из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, сущности метода сечений, показывает, что эпюры  $Q$  и  $M$  построены верно.

Подбираем поперечное сечение для заданной балки в виде двутавра (рисунок 1.18). Для этого из условия прочности при изги-

бе (1.12) находим величину требуемого осевого момента сопротивления поперечного сечения.

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{11 \times 10^3}{160 \times 10^6} = 6,88 \times 10^{-5} \text{ м}^3 = 68,8 \text{ см}^3.$$

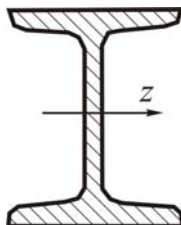


Рисунок 1.18 – Поперечное сечение балки — двутавр

По сортаменту прокатной стали (сталь горячекатаная балки двутавровые ГОСТ 8239-89) и  $W_z = 68,8 \text{ см}^3$  выбираем двутавр № 14, у которого  $W_z = 81,7 \text{ см}^3$ ,  $I_z = 572 \text{ см}^4$ .

Определяем перемещения, возникающие в сечениях балки. Для этого используем метод начальных параметров. Выберем начало координат  $O$  в крайнем левом сечении балки, ось  $y$  направим вверх, ось  $x$  вправо (рисунок 1.17). Для определения начальных параметров  $y_0$  и  $\theta_0$  используем граничные условия, вытекающее из расчетной схемы балки (рисунок 1.17), прогибы в сечениях  $B$  и  $C$  равны нулю ( $y_A = 0$ ;  $y_C = 0$ ). Принимая во внимание формулу (1.20), составим уравнения прогибов для сечений  $B$  и  $C$  в виде:

$$\begin{aligned} EI_z y_B &= EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_B - F \frac{x_B^3}{6} = 0, \\ EI_z y_C &= EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_C - m \frac{(x_C - 3)^2}{2} - F \frac{x_C^3}{6} + B_y \frac{(x_C - 1)^3}{6} - \\ &\quad - p \frac{(x_C - 1)^4}{24} + p \frac{(x_C - 3)^4}{24} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнения прогибов для сечений  $B$  и  $C$   $x_B = 1 \text{ м}$ ,  $x_C = 4 \text{ м}$  и значения внешних нагрузок, получаем

$$EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \times 1 - 11 \frac{1^3}{6} = 0,$$

$$EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \times 4 - 8 \frac{(4-3)^2}{2} - 11 \frac{4^3}{6} + 29 \frac{(4-1)^3}{6} -$$

$$- 10 \frac{(4-1)^4}{24} + 10 \frac{(4-3)^4}{24} = 0 .$$

После вычислений имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} EI_z y_B = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 - 1,183 = 0, \\ EI_z y_C = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \times 4 - 24,166 = 0 . \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим величины  $EI_z y_0$ ,  $EI_z \theta_0$ , а затем и начальные параметры  $y_0$  и  $\theta_0$ .

$$EI_z y_0 = -5,611 \text{ кН}\cdot\text{м}^3, \quad EI_z \theta_0 = 7,444 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

$$y_0 = \frac{-5,611 \times 10^3}{2 \times 10^{11} \times 572 \times 10^{-8}} = -0,0049 \text{ м} = -4,9 \text{ мм} ,$$

$$\theta_0 = \frac{7,444 \times 10^3}{2 \times 10^{11} \times 572 \times 10^{-8}} = 0,0065 \text{ рад} = 0,37^\circ .$$

Находим прогиб сечения балки на границе второго и третьего участков, когда  $x_D = 3 \text{ м}$ .

$$EI_z y_D = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_D - F \frac{x_D^3}{6} + B_y \frac{(x_D-1)^3}{6} - p \frac{(x_D-1)^4}{24} .$$

$$EI_z y_D = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \times 3 - 11 \frac{3^3}{6} + 29 \frac{(3-1)^3}{6} - 10 \frac{(3-1)^4}{24} = -0,779$$

$$\text{кН}\cdot\text{м}^3 .$$

$$y_D = \frac{-0,779 \times 10^3}{2 \times 10^{11} \times 572 \times 10^{-8}} = -0,0007 \text{ м} = -0,7 \text{ мм} .$$

Находим прогиб правого концевое сечения балки, для которого  $x_K = 5 \text{ м}$ .

$$EI_z y_K = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x_K - m \frac{(x_K-2)^2}{2} - F \frac{x_K^3}{6} + B_y \frac{(x_K-1)^3}{6} +$$

$$+ C_y \frac{(x_K-4)^3}{6} - p \frac{(x_K-1)^4}{24} + p \frac{(x_K-3)^4}{24} .$$

$$EI_z y_K = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \times 5 - 8 \frac{(5-3)^2}{2} - 11 \frac{5^3}{6} + 29 \frac{(5-1)^3}{6} + 12 \frac{(5-4)^3}{6} -$$

$$- 10 \frac{(5-1)^4}{24} + 10 \frac{(5-3)^4}{24} = -2,642 \text{ éí } \cdot \text{í}^3.$$

$$y_K = \frac{-2,642 \times 10^3}{2 \times 10^{11} \times 572 \times 10^{-8}} = -0,0023 \text{ í } = -2,3 \text{ ì }.$$

Используя формулу (1.21), определяем углы поворота сечений балки, проходящихся на опоры, для которых  $x_B = 1$  м и  $x_C = 4$  м.

$$EI_z \theta_B = EI_z \theta_0 - F \frac{x_B^2}{2} = 7,444 - 11 \frac{1^2}{2} = 1,944 \text{ éí } \cdot \text{í}^2.$$

$$\theta_B = \frac{1,944 \times 10^3}{2 \times 10^{11} \times 572 \times 10^{-8}} = 0,0017 \text{ ðäã } = 0,1^\circ.$$

$$EI_z \theta_C = EI_z \theta_0 - m(x_C - 3) - F \frac{x_C^2}{2} + B_y \frac{(x_C - 1)^2}{2} -$$

$$- p \frac{(x_C - 1)^3}{6} + p \frac{(x_C - 3)^3}{6}.$$

$$EI_z \theta_C = 7,444 - 8(4-3) - 11 \frac{4^2}{2} + 29 \frac{(4-1)^2}{2} -$$

$$- 10 \frac{(4-1)^3}{6} + 10 \frac{(4-3)^3}{6} = -1,389 \text{ éí } \cdot \text{í}^2.$$

$$\theta_{\tilde{N}} = \frac{-1,389 \times 10^3}{2 \times 10^{11} \times 572 \times 10^{-8}} = -0,0012 \text{ ðäã } = -0,07^\circ.$$

Принимая во внимание найденные прогибы и углы поворота сечений, строим приближенную упругую линию балки (рисунок 1.17).

## 1.8 Пример решения задачи (рама)

Построить эпюры внутренних силовых факторов для рамы, показанной на рисунке 1.19. Подобрать размеры поперечного сечения элементов рамы, если оно имеет форму кольца (отношение внутреннего диаметра к наружному равно 0,8). Допускаемое напряжение принять равным  $[\sigma] = 160$  МПа. Собственным весом рамы пренебречь.

*Решение.* Определяем реакции жесткой заделки, представленные на рисунке 1.19, составляющими  $B_y$  и  $B_x$ ,  $m_B$ . На раму действует уравновешенная плоская система сил. Найдем неизвестные силовые факторы  $B_y$ ,  $B_x$ ,  $m_B$ , составляя уравнения равновесия в виде суммы проекций сил на горизонтальную ось  $x$ , на вертикальную ось  $y$  и суммы моментов относительно точки  $B$

$$\Sigma F_x = F - B_x = 0;$$

$$\Sigma F_y = B_y - p \times 2 = 0;$$

$$\Sigma m_B (F_i) = -m_B + p \times 2 \times 3 - m - F \times 1,5 = 0.$$

Откуда

$$B_x = F = 20 \text{ кН};$$

$$B_y = p \times 2 = 20 \text{ кН};$$

$$m_B = p \times 6 - m - F \times 1,5 = 60 - 15 - 18 = 27 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для проверки правильности вычисления реакций заделки  $B$  составляем уравнение равновесия в виде суммы моментов относительно точки  $C$  и подставим их значения:

$$\begin{aligned} \Sigma m_c (F_i) &= B_y \times 2 + B_x \times 0,5 - m_B - m - F \times 2 + p \times 2 \times 1 = \\ &= 20 \times 2 + 12 \times 0,5 - 27 - 15 - 12 \times 2 + 10 \times 2 \times 1 = 0. \end{aligned}$$

В результате расчета получили  $\Sigma m_c (F_i) = 0$ , что указывает на правильность определения реакций заделки  $B$ .

Рама имеет четыре расчетных участка. На каждом расчетном участке проводим сечение и, рассматривая силы, действующие на оставшуюся часть, составляем уравнения для поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил, соблюдая соответствующие правила знаков.

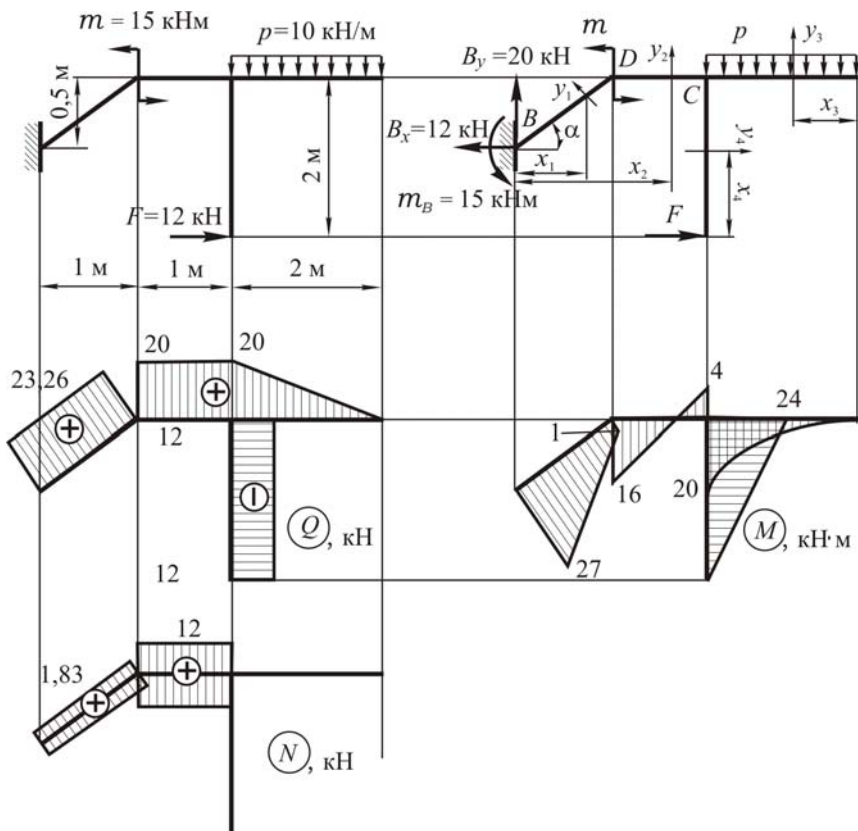


Рисунок 1.19 – Расчетная схема и эпюры внутренних силовых факторов рамы

Проводим сечение на первом участке на расстоянии  $x_1$  от жесткой заделки  $B$  и составляем уравнения для  $Q_{x_1}$ ,  $M_{x_1}$ ,  $N_{x_1}$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{I участок: } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м.} \\
 & Q_{x_1} = B_y \cos \alpha + B_x \sin \alpha ; \\
 & M_{x_1} = -m_B + B_y x_1 + B_x x_1 \operatorname{tg} \alpha ; \\
 & N_{x_1} = -B_y \sin \alpha + B_x \cos \alpha ,
 \end{aligned}$$

где  $\alpha$  — угол, который составляет ось элемента с горизонтальной осью, величина которого равна  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{0,5}{1} = 26,6^\circ$ . Из уравнений

следует, что на первом участке поперечная и продольная силы постоянные, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Подставляя числовые значения  $x_1$  на границах участка, получаем:

$$Q_{x_1} = \text{const} = 20 \cos 26,6^\circ + 12 \sin 26,6^\circ = 23,26 \text{ кН};$$

$$x_1 = 0: \quad M_{x_1} = -27 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_1 = 1 \text{ м}: \quad M_{x_1} = -27 + 20 \times 1 + 12 \times 1 \times \text{tg } 26,6^\circ = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$N_{x_1} = \text{const} = -20 \sin 26,6^\circ + 12 \cos 26,6^\circ = 1,83 \text{ кН};$$

Строим эпюры для первого участка, отмечая на них найденные значения  $Q_{x_1}$  и  $M_{x_1}$ ,  $N_{x_1}$  (рисунок 1.19).

Проводим сечение на втором участке на расстоянии  $x_2$  от жесткой заделки  $B$  и составляем уравнения для  $Q_{x_2}$ ,  $M_{x_2}$ ,  $N_{x_2}$ .

II участок:  $1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$ .

$$Q_{x_2} = B_y;$$

$$M_{x_2} = -m_B - m + B_y x_2 + B_x \times 0,5;$$

$$N_{x_2} = B_x.$$

Из уравнений следует, что на втором участке поперечная и продольная силы постоянные, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Подставляя числовые значения  $x_2$  на границах участка, получаем

$$Q_{x_2} = \text{const} = 20 \text{ кН};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}: \quad M_{x_2} = -27 - 15 + 20 \times 1 + 12 \times 0,5 = -16 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 2 \text{ м}: \quad M_{x_2} = -27 - 15 + 20 \times 2 + 12 \times 0,5 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$N_{x_2} = \text{const} = 12 \text{ кН};$$

Строим эпюры для второго участка, отмечая на них найденные значения  $Q_{x_2}$  и  $M_{x_2}$ ,  $N_{x_2}$  (рисунок 1.19).

Проводим сечение на третьем участке на расстоянии  $x_3$  от крайнего правого сечения и составляем уравнения для  $Q_{x_3}$ ,  $M_{x_3}$ ,  $N_{x_3}$ .

III участок:  $0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$ .

$$Q_{x_3} = p x_3;$$

$$M_{x_3} = -p \frac{x_3^2}{2};$$

$$N_{x_3} = 0$$

Из уравнений следует, что на третьем участке поперечная сила представляет линейную функцию, изгибающий момент изменяется по квадратичной функции, а продольная сила равна нулю. Подстав-

для числовые значения  $x_3$  на границах участка, получаем

$$x_3 = 0: \quad Q_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 2 \text{ м}: \quad Q_{x_3} = 10 \times 2 = 20 \text{ кН};$$

$$x_3 = 0: \quad M_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 2 \text{ м}: \quad M_{x_3} = -10 \frac{2^2}{2} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$N_{x_3} = 0.$$

Строим эпюры для третьего участка, отмечая на них найденные значения  $Q_{x_3}$  и  $M_{x_3}$ ,  $N_{x_3}$  (рисунок 1.19).

Проводим сечение на четвертом участке на расстоянии  $x_4$  от крайнего нижнего сечения и составляем уравнения для  $Q_{x_4}$ ,  $M_{x_4}$ ,  $N_{x_4}$ .

IV участок:  $0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м}$ .

$$Q_{x_4} = -F;$$

$$M_{x_4} = F x_4;$$

$$N_{x_4} = 0$$

Из уравнений следует, что на четвертом участке поперечная сила постоянная, изгибающий момент изменяется по линейному закону, а продольная сила равна нулю. Подставляя числовые значения  $x_4$  на границах участка, получаем

$$Q_{x_4} = \text{const} = -12 \text{ кН};$$

$$x_2 = 0: \quad M_{x_4} = 0;$$

$$x_2 = 2 \text{ м}: \quad M_{x_4} = 12 \times 2 = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$N_{x_4} = 0.$$

Строим эпюры для четвертого участка, отмечая на них найденные значения  $Q_{x_4}$  и  $M_{x_4}$ ,  $N_{x_4}$  (рисунок 1.19).

Контроль правильности построения эпюр с использованием общих выводов, вытекающих из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, сущности метода сечений, показывает, что эпюры  $Q$  и  $M$  построены верно. Для рам является обязательной проверка равновесия узлов. Составляем уравнения равновесия для узла  $C$  (рисунок 1.20):

$$\Sigma F_x = -20 + 20 = 0;$$

$$\Sigma F_y = 20 - 20 = 0;$$

$$\Sigma m_C(F_i) = 4 + 20 - 24 = 0.$$



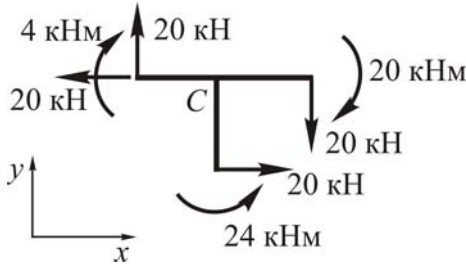


Рисунок 1.20 – Узел рамы C

Составляем уравнения равновесия для узла D (рисунок 1.21):

$$\Sigma F_x = -23,26 \sin 26,6^\circ - 1,83 \cos 26,6^\circ + 12 = 0;$$

$$\Sigma F_y = 23,26 \cos 26,6^\circ - 1,83 \sin 26,6^\circ - 20 = 0;$$

$$\Sigma m_D(F_i) = -1 - 15 + 16 = 0.$$

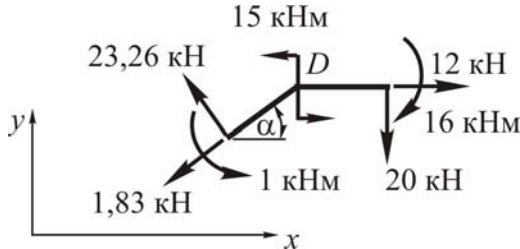


Рисунок 1.21 – Узел рамы D

Уравнения равновесия для узлов C и D удовлетворяются. Выполненные проверки позволяют заключить, что все эпюры построены верно.

Подбираем одинаковое поперечное сечение в виде кольца для всех элементов рамы. Для этого из условия прочности при изгибе (1.12), находим величину требуемого осевого момента сопротивления поперечного сечения.

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{27 \times 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,69 \times 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Находим размеры поперечного сечения элементов рамы, имеющего форму кольца (рисунок 1.22).

$$d_i = \sqrt[3]{\frac{32 W_z}{\pi(1-c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 169 \times 10^{-4}}{3,14(1-0,8^4)}} = 0,079 \text{ м};$$

$$d_{\hat{a}} = d_i c = 0,079 \times 0,8 = 0,063 \text{ м}.$$

В соответствии с нормальными линейными размерами (ГОСТ 6636-69 в ред. 1990 г.) принимаем  $d_i = 80$  мм,  $d_{\hat{a}} = 63$  мм.

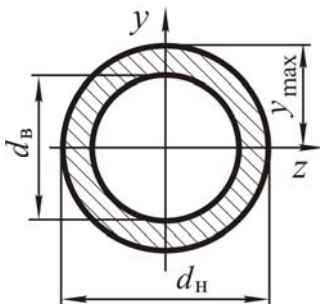


Рисунок 1.22 Поперечное сечение элементов рамы — кольцо

### 1.9 Расчетно-графическая работа (РГР) «Прямой поперечный изгиб»

Для заданных схем балок и рам требуется:

- 1 Построить эпюры внутренних силовых факторов;
  - 2 Подобрать размеры поперечного сечения, приняв форму для схем:
    - № 1 — круг (материал — дерево,  $[\sigma] = 10$  МПа,  $E = 1 \times 10^4$  МПа);
    - № 2 — два рядом стоящих швеллера (ГОСТ 8240–89, материал — сталь Ст3,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \times 10^5$  МПа);
    - № 3 — двутавр (ГОСТ 8239–89, материал — сталь Ст3,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \times 10^5$  МПа);
    - № 4 — кольцо с заданным соотношением внутреннего диаметра к наружному  $\tilde{n} = \frac{d_{\hat{a}}}{d_i}$  (материал — сталь Ст3,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \times 10^5$  МПа);
    - № 5 — прямоугольник с заданным соотношением высоты поперечного сечения к ширине  $\frac{h}{b}$  (материал — сталь Ст3,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \times 10^5$  МПа);
  - 3 Для схем № 1 и № 3 определить прогибы на границах расчетных участков и построить приближенную изогнутую ось (упругую линию), для схемы № 3 определить углы поворота сечений на опорах.
- Исходные данные для выполнения РГР «Прямой поперечный изгиб» принять из рисунка 1.23 и таблицы 1.2.

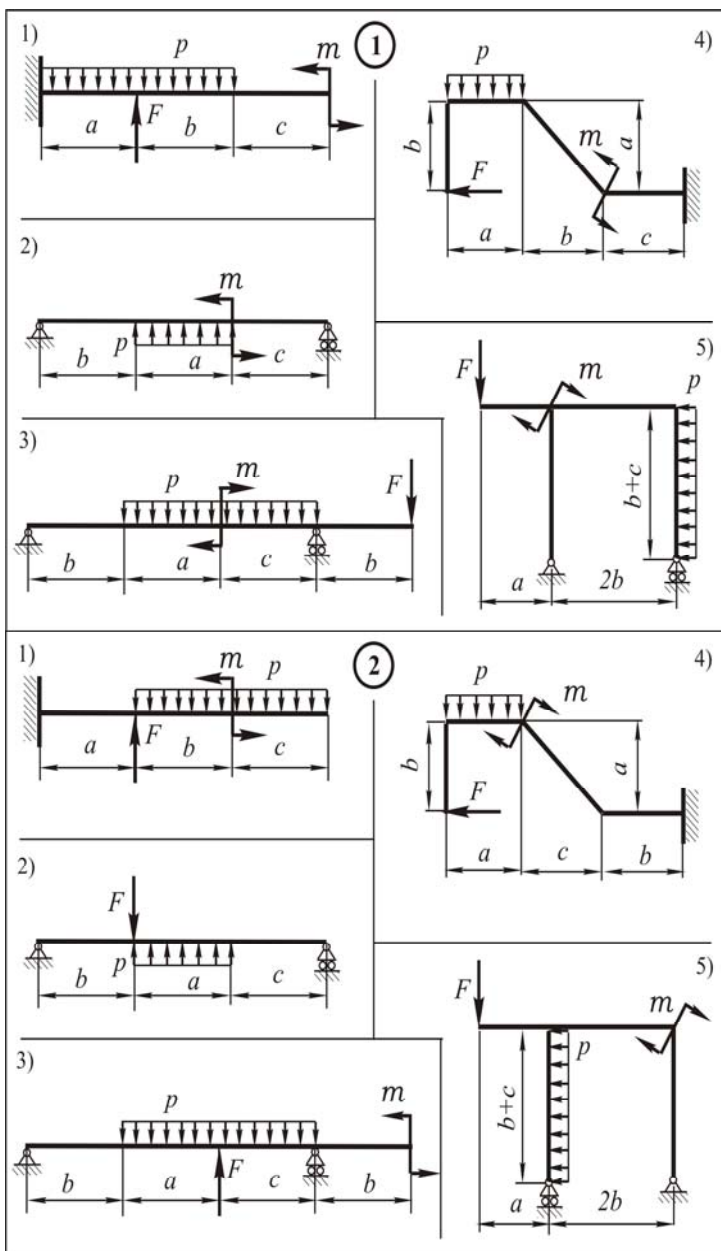
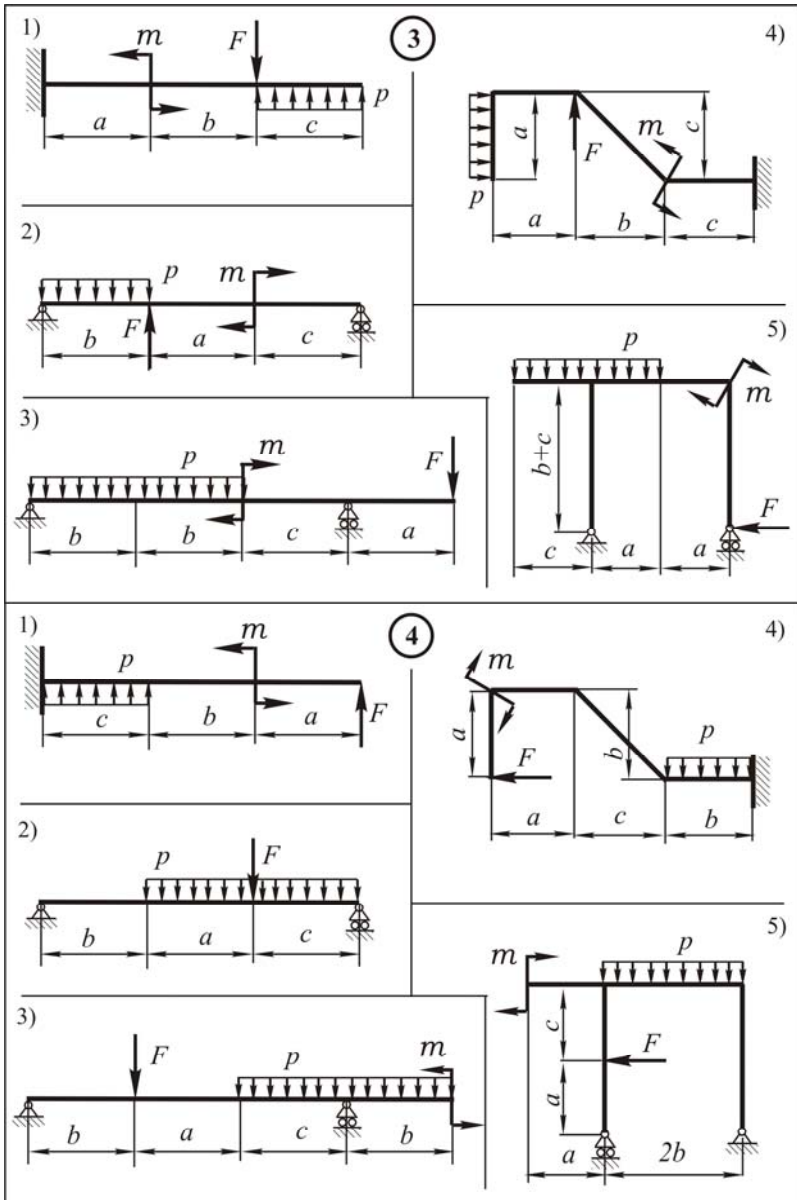
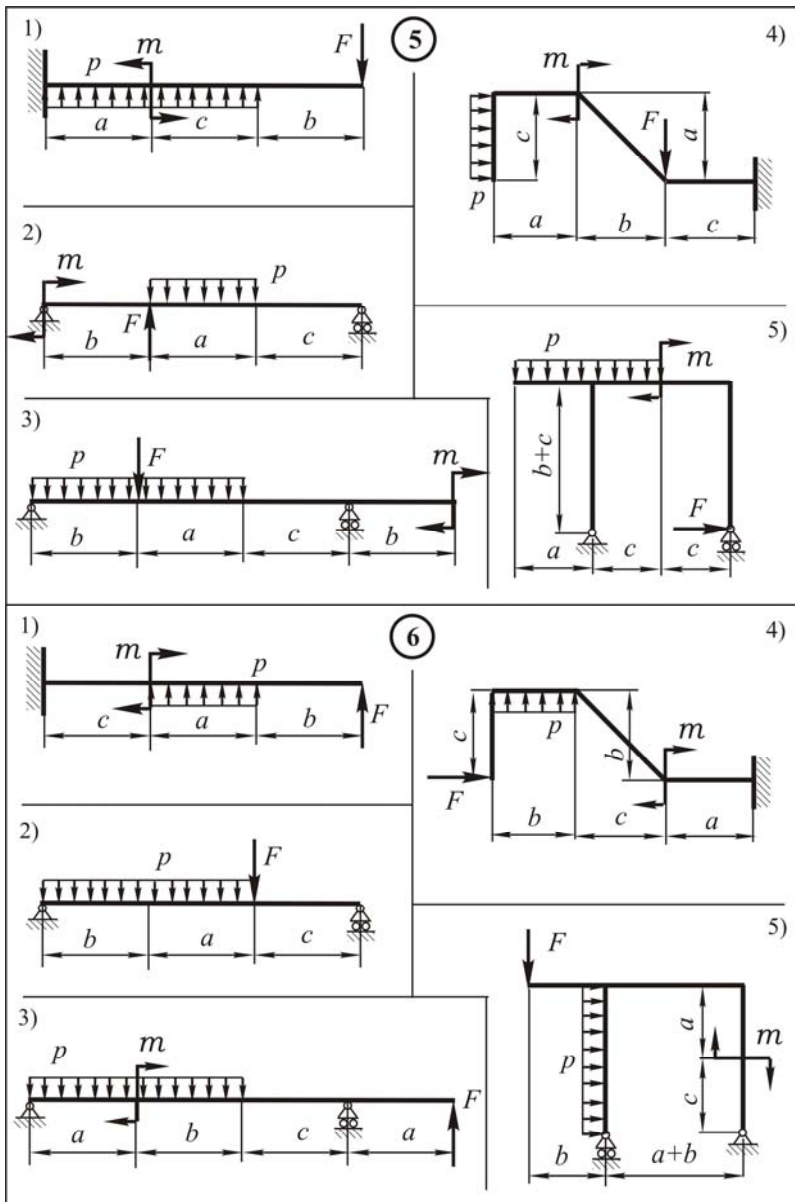


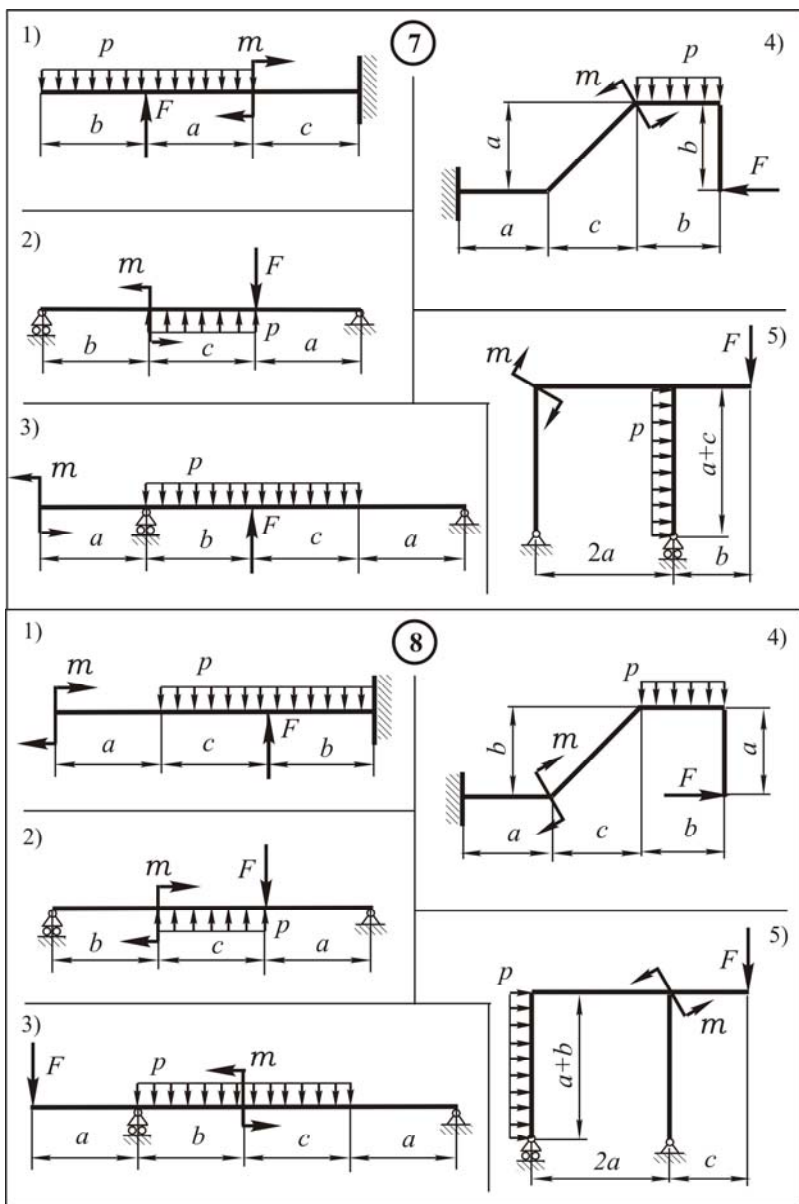
Рисунок 1.23 – Схемы к РГР «Прямой поперечный изгиб»



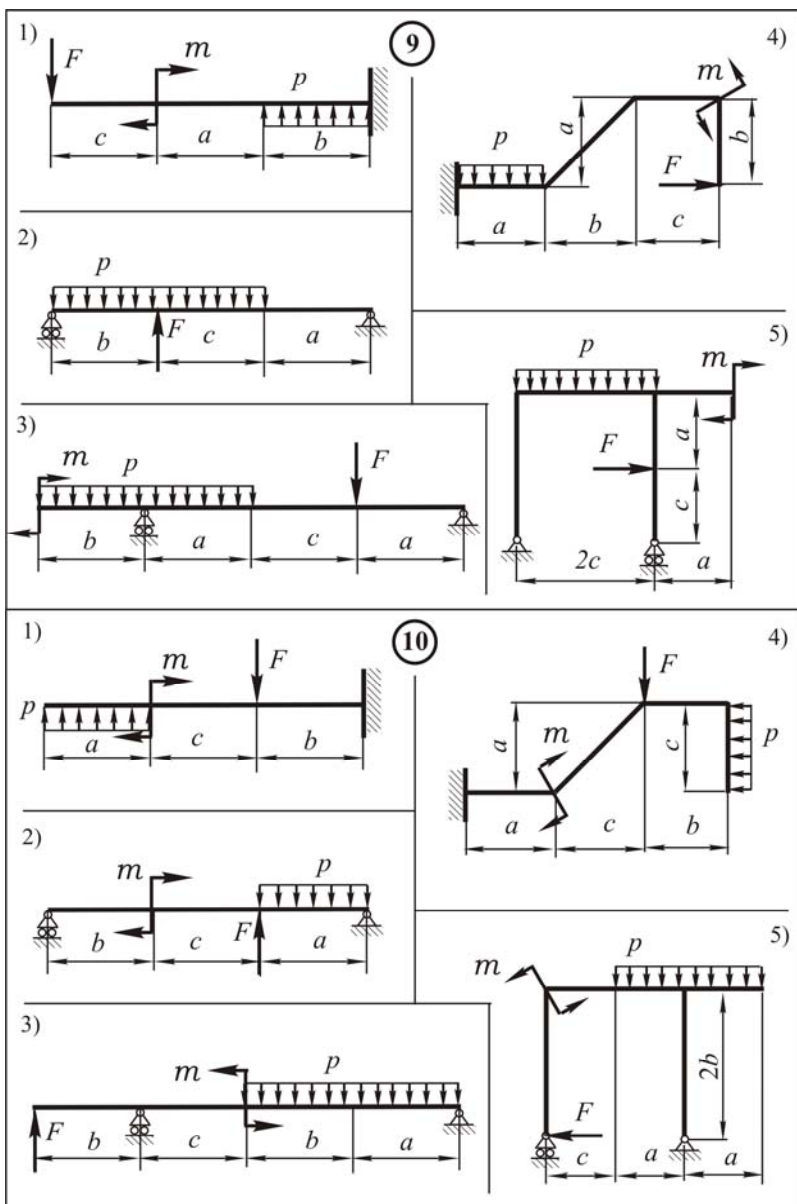
Продолжение рисунка 1.23



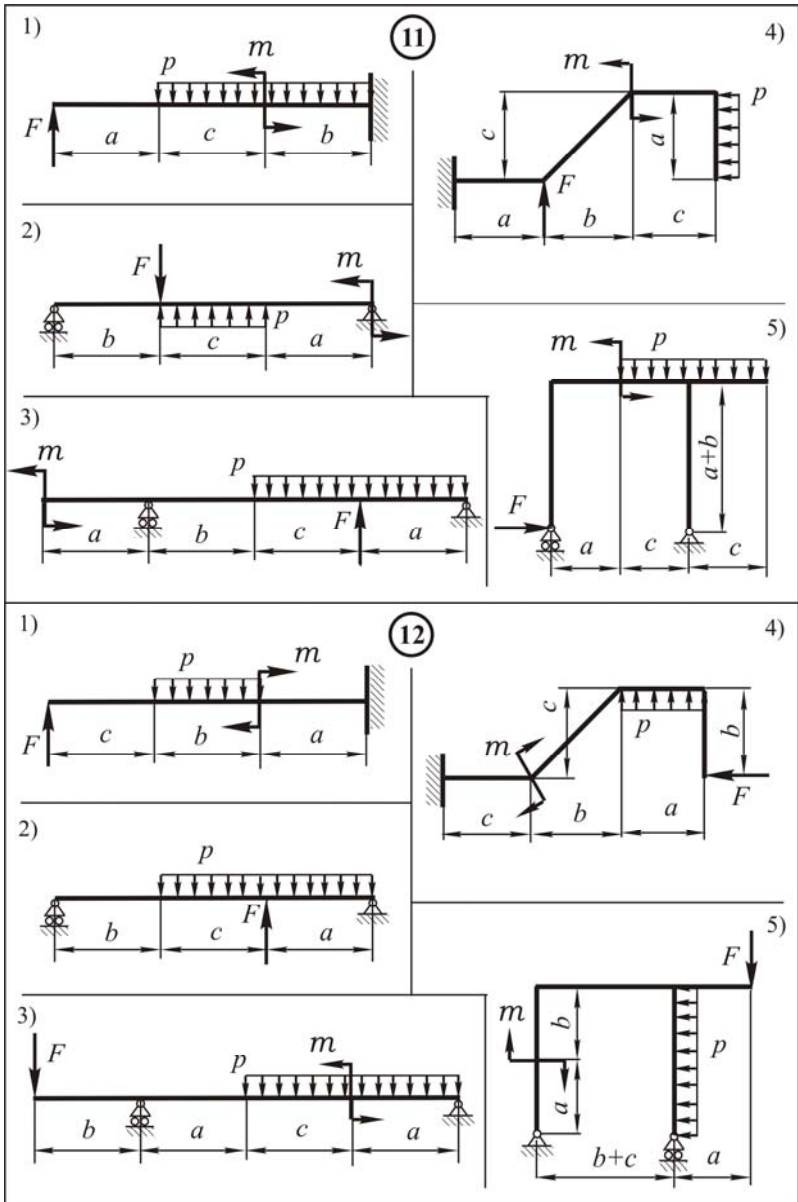
Продолжение рисунка 1.23



Продолжение рисунка 1.23

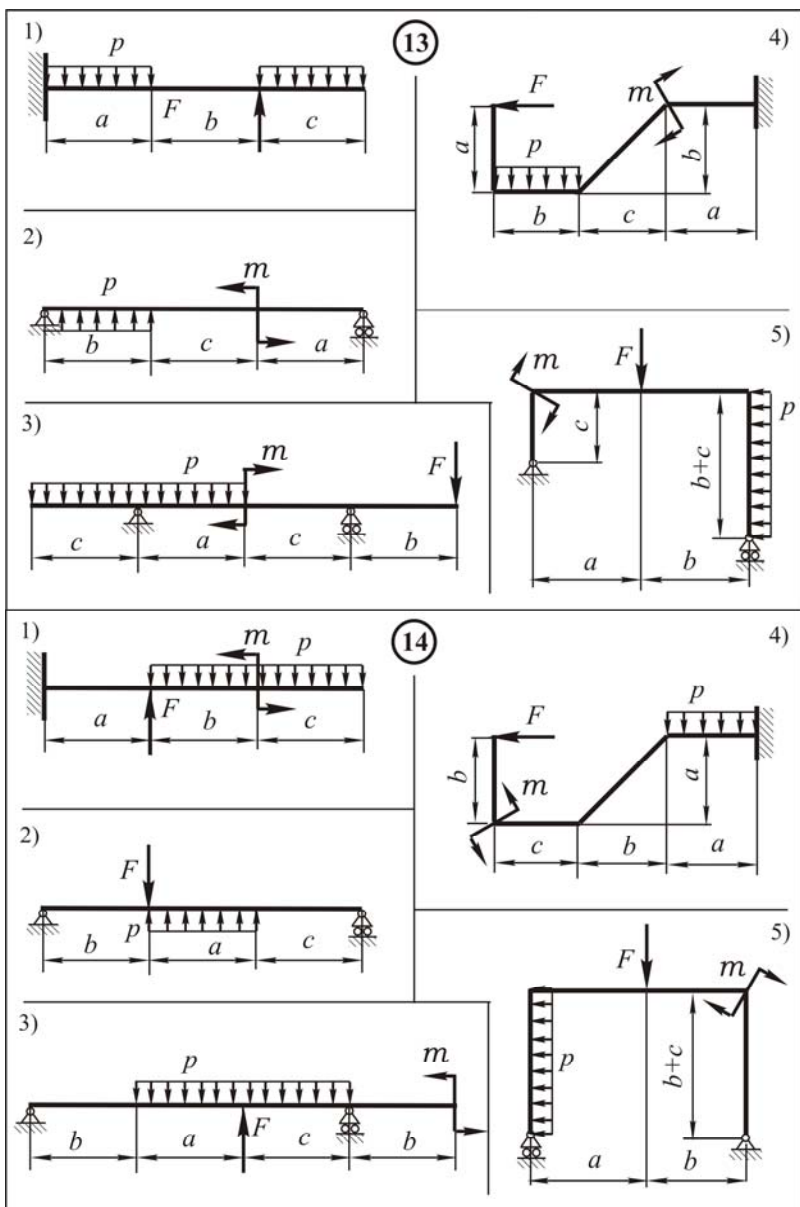


Продолжение рисунка 1.23

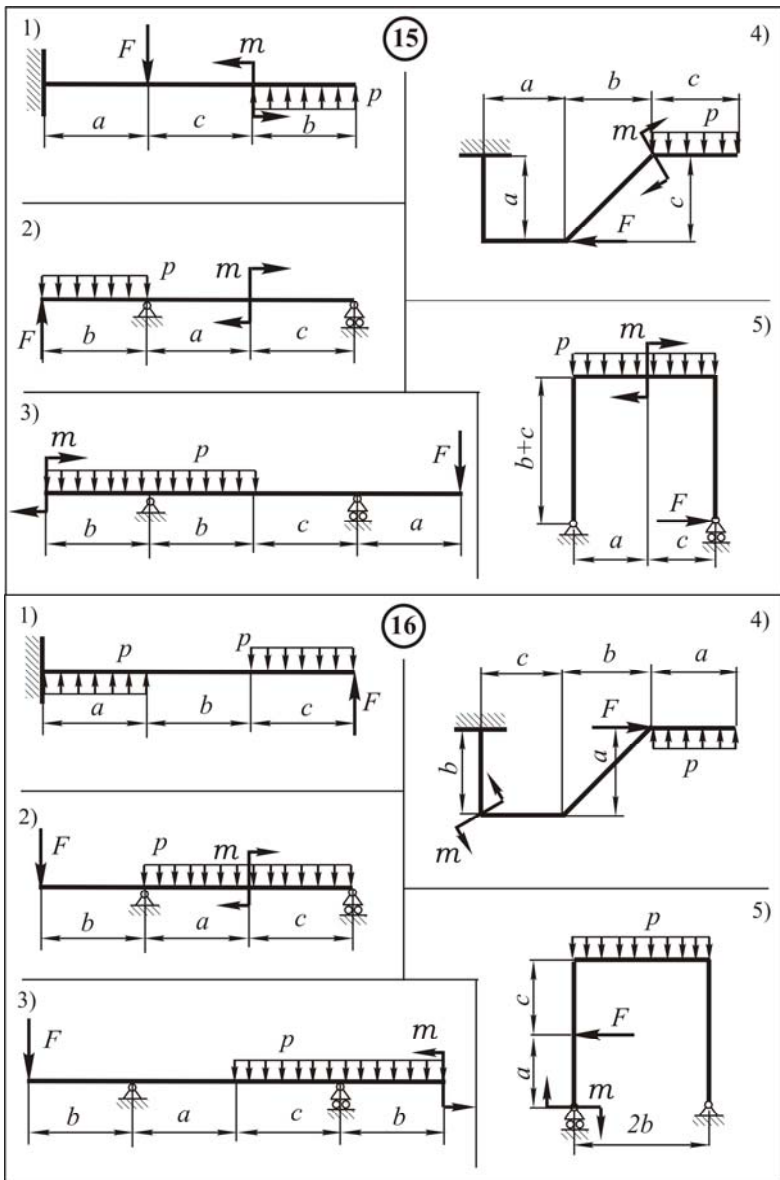


Продолжение рисунка 1.23

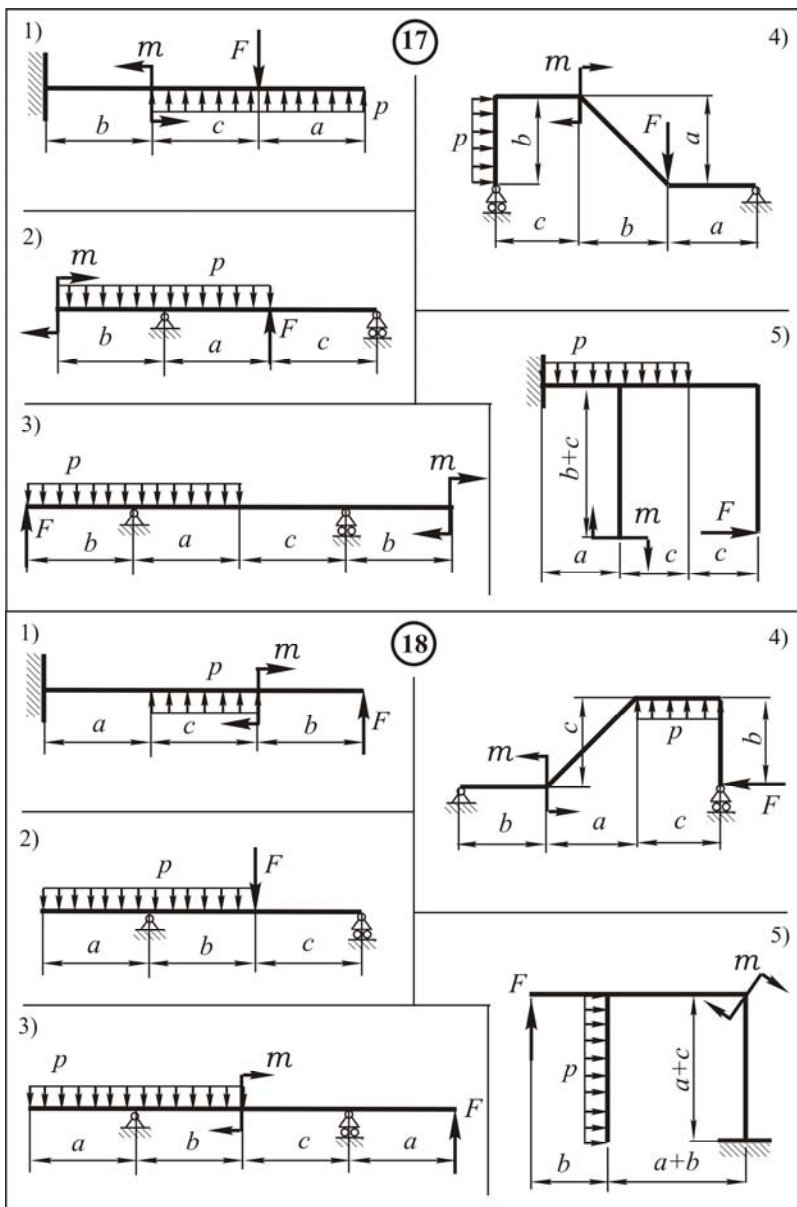




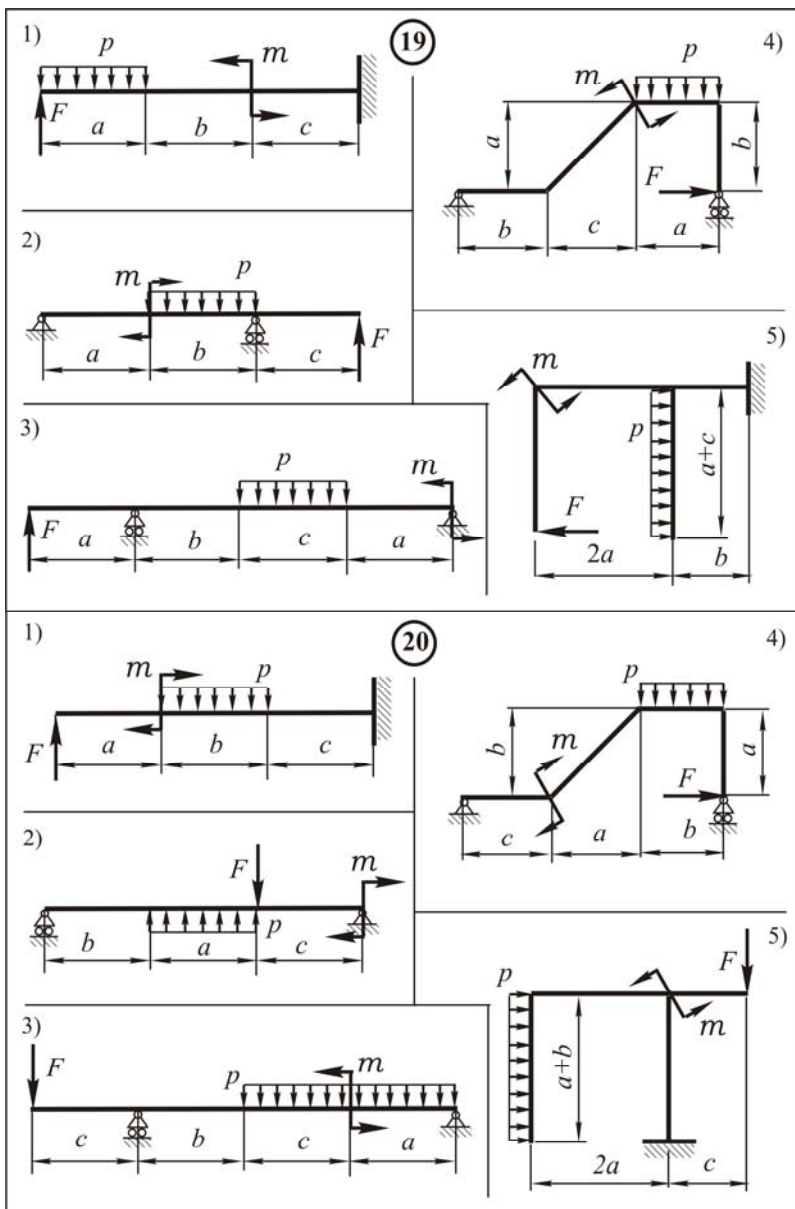
Продолжение рисунка 1.23



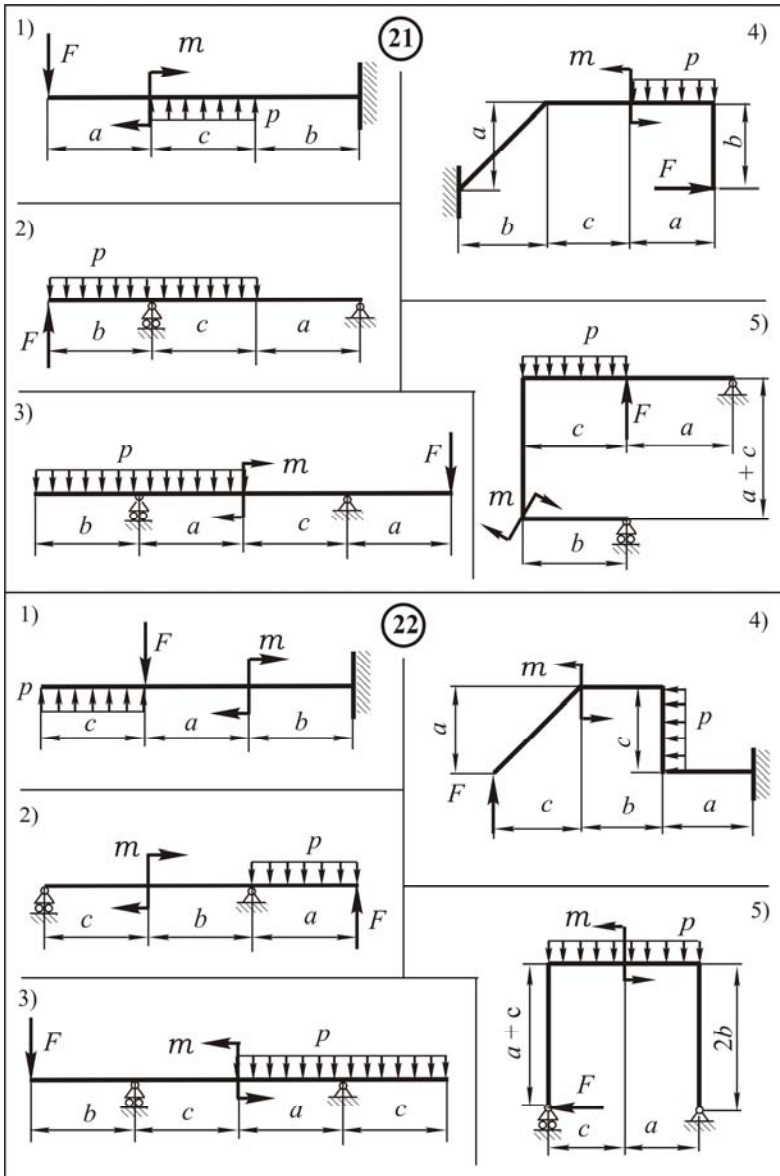
Продолжение рисунка 1.23



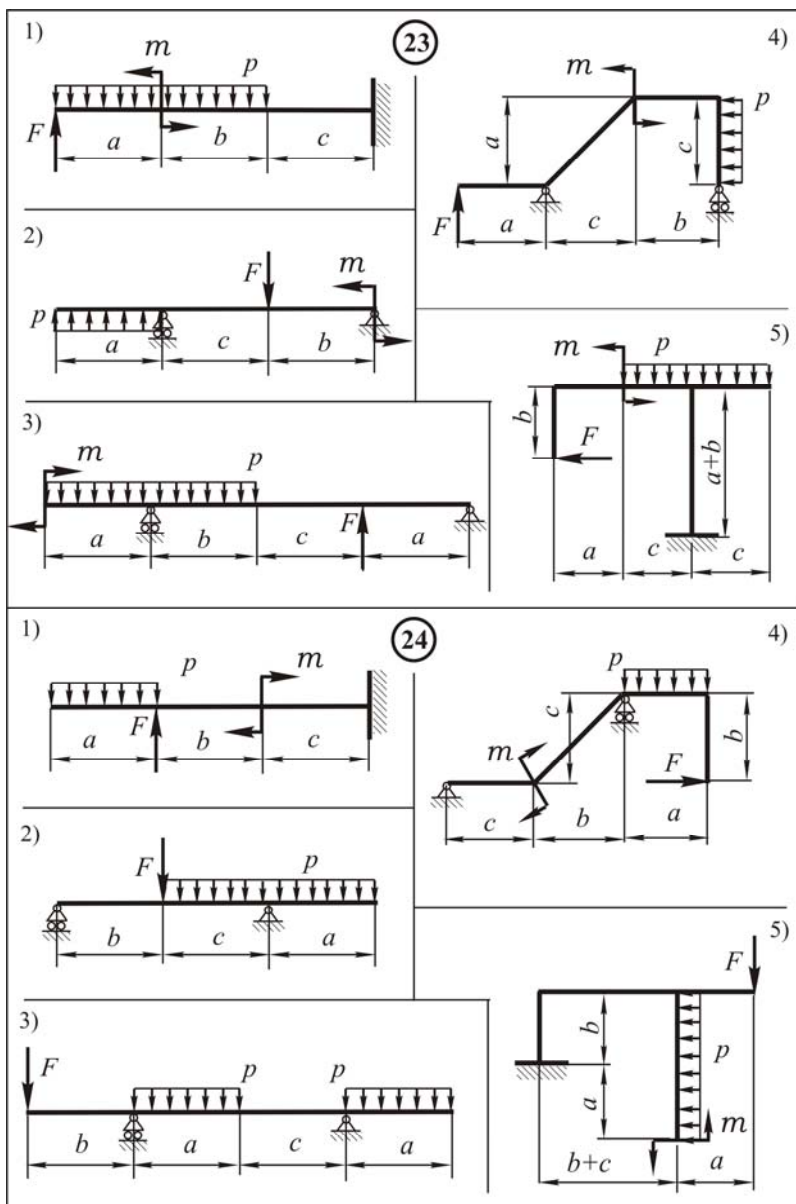
Продолжение рисунка 1.23



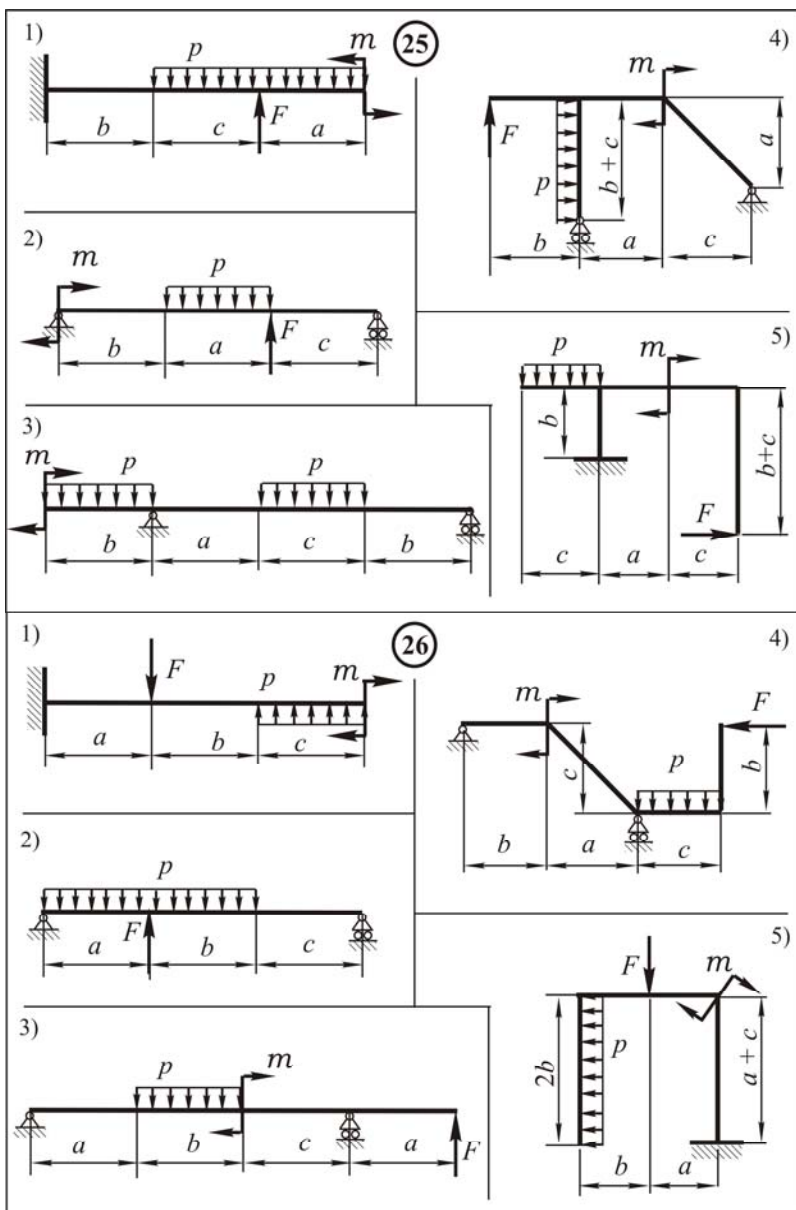
Продолжение рисунка 1.23



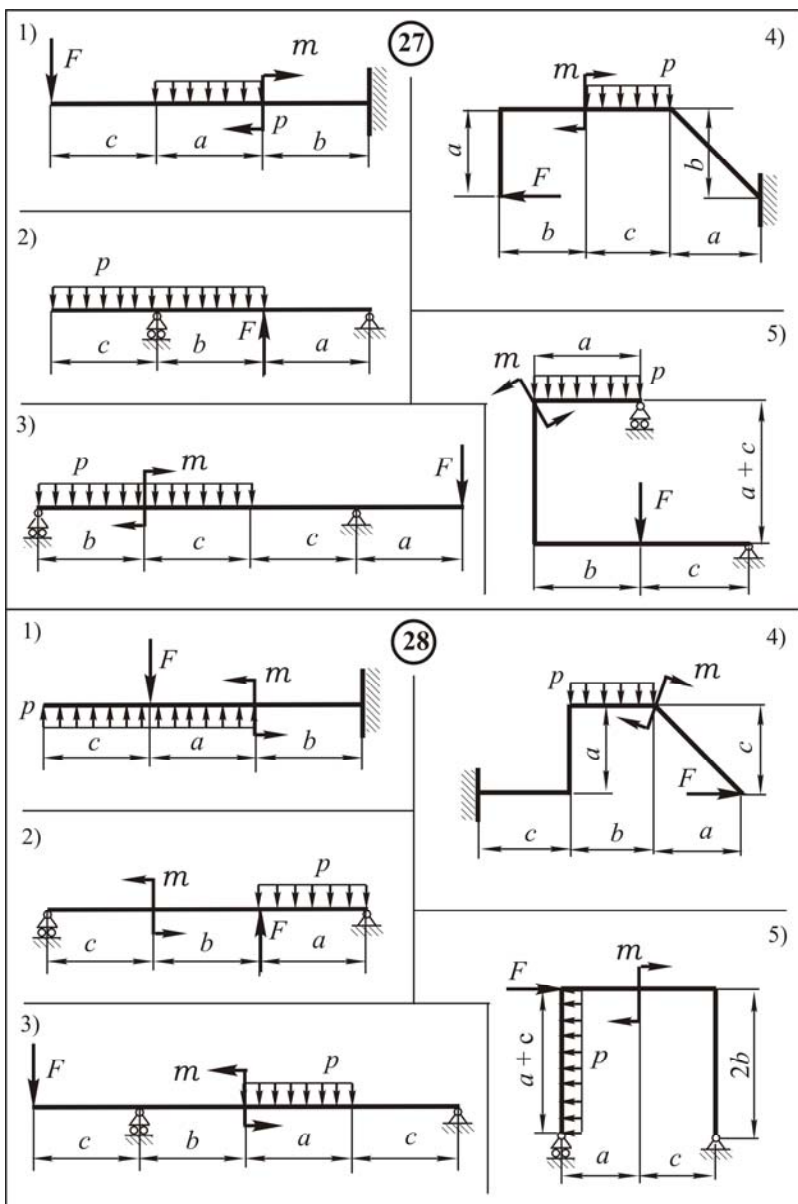
Продолжение рисунка 1.23



Продолжение рисунка 1.23

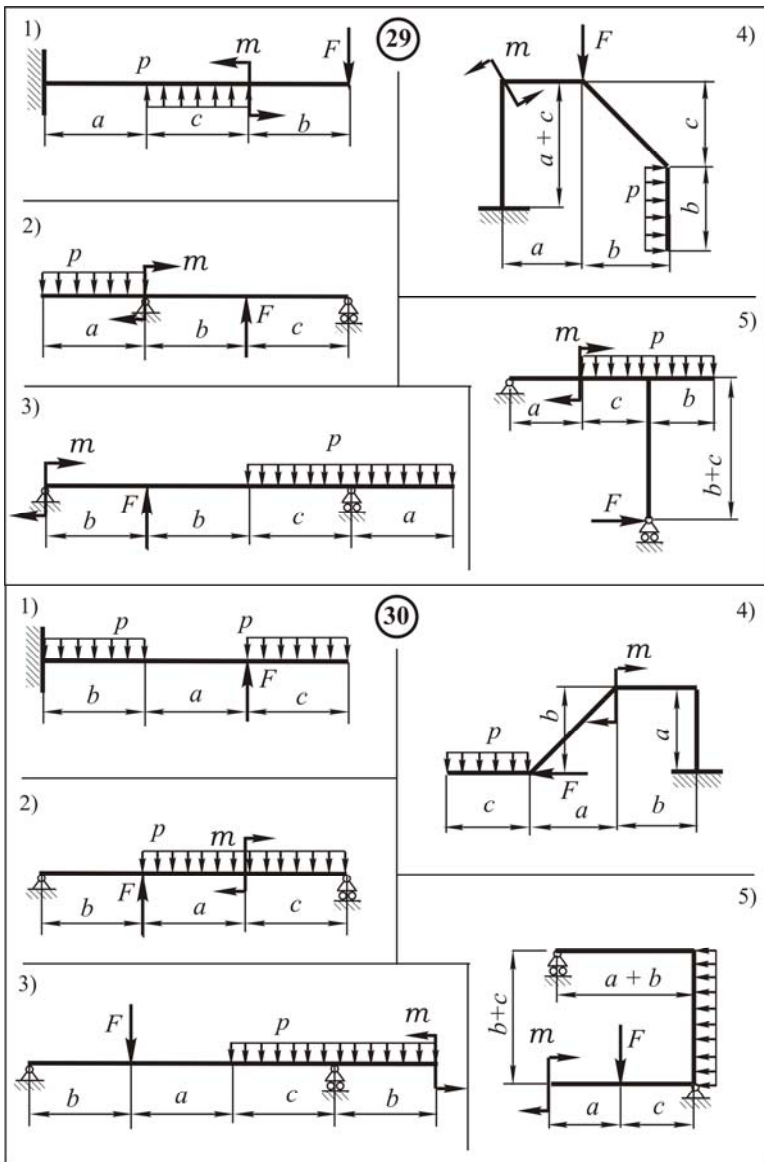


Продолжение рисунка 1.23



Продолжение рисунка 1.23





Окончание рисунка 1.23

Таблица 1.2 – Числовые данные к РГР «Прямой поперечный изгиб»

№ строки	Размеры			Нагрузки			Соотношение размеров сечения	
	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$m$ , кН·м	$F$ , кН	$p$ , кН/м	Кольцо, $\tilde{\eta} = \frac{d_{\hat{a}}}{d_i}$	Прямо- угольник, $\frac{h}{b}$
1	2	1,2	0,8	10	22	18	0,9	2,0
2	1,6	1,4	1	11	18	16	0,7	2,2
3	1,2	2	0,8	12	20	15	0,5	2,4
4	1,8	1,2	1	13	21	14	0,8	2,6
5	1,5	1,1	1,4	14	22	13	0,6	2,8
6	1,4	1,5	1,1	15	23	12	0,7	3,0
7	1,3	1,5	1,2	10	24	11	0,8	2,1
8	1,2	1,4	1,4	11	23	10	0,9	2,3
9	1,3	1,7	1	12	22	11	0,7	2,5
10	1,4	1,5	1,1	13	21	12	0,6	2,7
11	1,5	1,3	1,2	14	20	13	0,8	2,9
12	1,6	1,1	1,3	15	19	14	0,5	2,0
13	1,7	1,2	1,1	16	18	15	0,9	2,2
14	1,8	1,3	0,9	18	15	16	0,8	2,4
15	1,9	1,1	1	19	12	17	0,6	2,6
16	2	0,9	1,1	20	11	18	0,5	2,8
17	1,9	1	1,1	10	14	19	0,7	3,0
18	1,8	1,2	1	12	13	20	0,9	2,1
19	1,7	1,4	0,9	14	12	18	0,5	2,3
20	1,6	1,3	1,1	16	11	17	0,8	2,5
21	1,5	1,2	1,3	18	10	16	0,6	2,7
22	1,4	1,6	1	20	12	15	0,7	2,9
23	1,3	1,8	0,9	22	11	14	0,9	2,0
24	1,2	2	0,8	24	14	12	0,5	2,4
25	1,1	1,8	1,1	21	13	10	0,8	2,6
26	1	1,7	1,3	19	16	11	0,7	2,8
27	1,2	1,4	1,4	17	15	12	0,9	3,0
28	1,4	1,6	1	15	18	13	0,6	2,1
29	1,6	1,1	1,3	13	17	14	0,5	2,3
30	1,8	1	1,2	11	19	15	0,7	2,5

## 1.10 Методические указания для выполнения РГР «Прямой поперечный изгиб»

1 Вычертить в масштабе схему балки (рамы), оставляя под ней место для эпюр внутренних силовых факторов.

2 Показать реакции опор и обозначить их.

3 Используя уравнения равновесия для балки (рамы), как плоской системы, определить величину реакций опор, а также выполнить проверку правильности их нахождения.

4 Установить количество расчетных участков. Расчетным участком называется часть длины балки, в пределах которой внутренний силовой фактор изменяется по одному и тому же закону. Тогда границами участков будут являться сечения, в которых изменяется характер действующей нагрузки.

5 Последовательно, для каждого расчетного участка схемы:

— провести перпендикулярно оси  $x$  секущую плоскость, разделяющую балку (раму) на две части. Расстояние до поперечного сечения, совпадающего с секущей плоскостью, отсчитывается от крайнего левого или правого сечения балки (для рамы это расстояние также может отсчитываться от крайнего верхнего или нижнего сечения) и обозначается  $x_i$  ( $i$  — порядковый номер расчетного участка);

— составить уравнение поперечной силы, произвести ее расчет и построить эпюру поперечных сил  $Q$ ;

— составить уравнение изгибающего момента, произвести его расчет и построить эпюру изгибающих моментов  $M$ ;

— составить уравнение продольной силы, произвести ее расчет и построить эпюру продольных сил  $N$ .

6 Проверить правильность построения эпюр  $Q$  и  $M$ , используя следствия, вытекающие из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, сущности метода сечений. Для рам также проверить равновесие всех узлов.

7 Используя условие прочности при изгибе, подобрать размеры поперечного сечения балки (элементов рамы).

8 Применяя метод начальных параметров, определить прогибы и углы поворота в требуемых сечениях балок.

## 2 КОСОЙ ИЗГИБ

Литература: [1, С. 173–76], [2, С. 404–423], [3, 7, задачи № 10.5, 10.6, 10.7, 10.16, 10.21].

Косой изгиб, основные понятия. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса. Нахождение опасного сечения. Положение нейтральной оси и опасных точек в поперечном сечении. Условие прочности. Определение размеров поперечного сечения бруса. Перемещения при косом изгибе.

### 2.1 Основные понятия. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса. Условие прочности

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором след плоскости изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения.

Косой изгиб может быть плоским и пространственным. При плоском косом изгибе все внешние силы располагаются в одной плоскости, которая проходит через ось бруса. В этом случае след плоскости изгибающего момента (силовой плоскости) образует по всей длине бруса постоянный угол  $\alpha$  с его главной центральной плоскостью (рисунок 2.1), а упругая линия бруса будет представлять плоскую кривую линию.



Рисунок 2.1 – Плоский косой изгиб

При пространственном косом изгибе внешние силы располагаются в разных плоскостях ( $\alpha_p$ ,  $\alpha_F$ ,  $\alpha_m$ ), проходящих через ось бруса (рисунок 2.2). В этом случае след плоскости изгибающего момента (силовой плоскости) в каждом поперечном сечении бруса образует с его главной центральной осью свой угол  $\alpha$ , а упругая линия бруса будет представлять пространственную кривую линию.

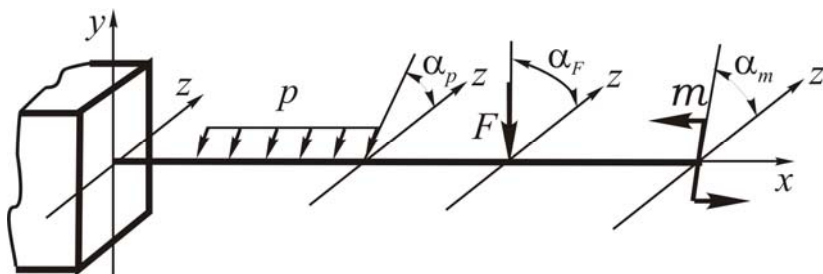


Рисунок 2.2 – Пространственный кривой изгиб

При расчетах на прочность и жесткость как плоский, так и пространственный кривой изгиб приводится к двум изгибам в главных центральных плоскостях инерции бруса.

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, нагруженную силой  $F$ , линия действия которой составляет с главной центральной осью  $z$  угол  $\alpha_F$  (рисунок 2.3). Пусть на поперечном сечении балки на расстоянии  $x$  от крайнего левого сечения действует изгибающий момент равный

$$M = -F x . \quad (2.1)$$

Спроектируем все действующие на балку внешние силы в главную центральную плоскость  $yoх$  и составляем расчетную схему (рисунок 2.3).

$$F_y = F \sin \alpha_F . \quad (2.2)$$

В поперечном сечении балки на расстоянии  $x$  от крайнего левого сечения действует изгибающий момент относительно оси  $z$  равный

$$M_z = -F_y x = -F \sin \alpha_F x = M \sin \alpha , \quad (2.3)$$

где  $\alpha$  – угол, который составляет след силовой плоскости (плоскости действия полного изгибающего момента  $M$ ) с главной центральной осью инерции  $z$ .

В рассматриваемом случае плоского кривой изгиба угол  $\alpha$  равен углу  $\alpha_F$ .

Используя уравнение (2.3), строится эпюра  $M_z$  (рисунок 2.3).

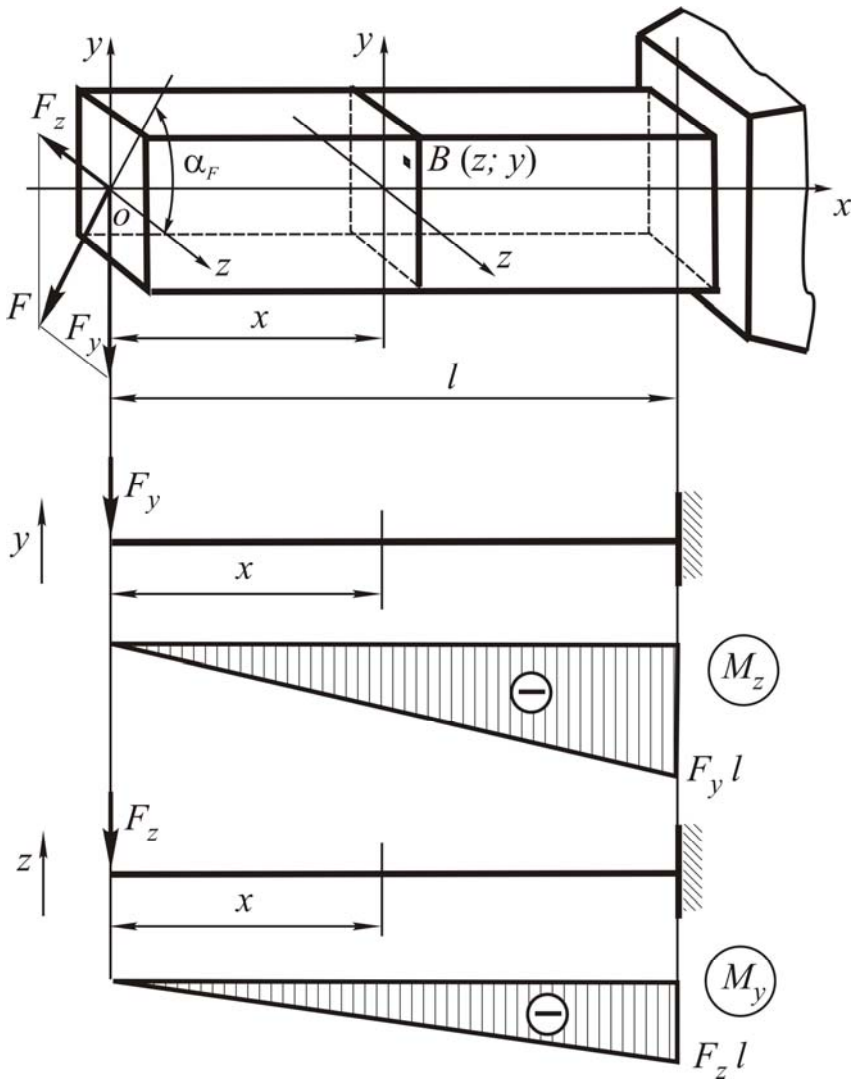


Рисунок 2.3 – Общий вид, расчетные схемы балки и эпюры изгибающих моментов

Спроектируем все действующие на балку внешние силы в главную центральную плоскость  $zox$  и составляем расчетную схему (рисунок 2.3).

$$F_z = F \cos \alpha_F. \quad (2.4)$$

В поперечном сечении балки на расстоянии  $x$  от крайнего левого сечения действует изгибающий момент относительно оси  $y$  равный

$$M_y = -F_z x = -F \cos \alpha_F x = M \cos \alpha. \quad (2.5)$$

В рассматриваемом случае плоского косоугольного изгиба угол  $\alpha$  равен углу  $\alpha_F$ .

Используя уравнение (2.5), строится эпюра  $M_y$  (рисунок 2.3).

Разделив уравнение (2.5) на (2.3), получим угол, который составляет след плоскости действия полного изгибающего момента  $M$  с главной центральной осью инерции  $z$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{M_y}{M_z}. \quad (2.6)$$

При расчетах на прочность элементов конструкций, испытывающих косоугольный изгиб рассматривают только нормальные напряжения, а влиянием касательных напряжений, как и при прямом изгибе, пренебрегают.

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки согласно принципу независимости действия сил определяется как алгебраическая сумма напряжений от изгибающих моментов относительно главных центральных осей инерции  $M_z$  и  $M_y$ .

$$\begin{aligned} \sigma &= \pm \sigma_{M_z} \pm \sigma_{M_y}. \\ \sigma &= \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

При расчете нормальных напряжений все величины подставляются в правую часть выражения (2.7) по модулю, а знаки перед каждым из двух слагаемых ставятся с учетом растяжения или сжатия в рассматриваемой точке (растяжение — «+», сжатие — «-»), обусловленного соответствующим изгибающим моментом. Так, для показанной на рисунке 2.3 схемы нагружения бруса, продольные волокна, расположенные выше оси  $z$ , как видно из эпюры  $M_z$ , испытывают сжатие, ниже оси  $z$  — растяжение, а продольные волокна, расположенные справа от оси  $y$ , как видно из эпюры  $M_y$ , испытывают сжатие, слева от оси  $y$  — растяжение. Тогда напряжение в

точке  $B(z; y)$ , принадлежащей первому квадранту поперечного сечения балки, можно найти по формуле (2.7), поставив перед каждым слагаемым в правой части знак «+»:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \quad (2.8)$$

Из формулы (2.7) видно, что нормальные напряжения в некоторых точках поперечного сечения балки, испытывающей кривой изгиб, равны нулю. Эти точки располагаются на прямой линии, проходящей через начало координат (центр тяжести), называемой нейтральной осью. Приравняв выражение (2.8) к нулю, получаем уравнение нейтральной оси в виде

$$y = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} z. \quad (2.9)$$

Поскольку нейтральная ось проходит через начало координат, то ее уравнение часто бывает удобным представлять следующим выражением

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y}, \quad (2.10)$$

где  $\beta$  — угол, который составляет нейтральная ось с главной центральной осью инерции  $z$  (рисунок 2.4).



Рисунок 2.4 – След действия  $M$  и нейтральная ось в поперечном сечении бруса

Из анализа уравнений (2.9) и (2.10) следует, что положение нейтральной оси вдоль оси бруса постоянного поперечного сечения: — при плоском кривом изгибе остается постоянным так как



$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{M_y}{M_z} = \operatorname{const};$$

— при пространственном косом изгибе изменяется в соответствии с изменением отношения изгибающих моментов  $\frac{M_y}{M_z}$ .

Нейтральная ось в поперечном сечении бруса при косом изгибе не перпендикулярна следу полного изгибающего момента. Она отклоняется от перпендикуляра к следу полного изгибающего момента к главной центральной оси инерции сечения, относительно которой момент инерции минимальный. По мере удаления точки от нейтральной оси нормальное напряжение в ней линейно возрастает (рисунок 2.5). Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной оси по разные от нее стороны. Причем в одной опасной точке возникает наибольшее растягивающее напряжение  $\sigma_{\max}$ , а в другой – наибольшее сжимающее напряжение  $\sigma_{\min}$ .

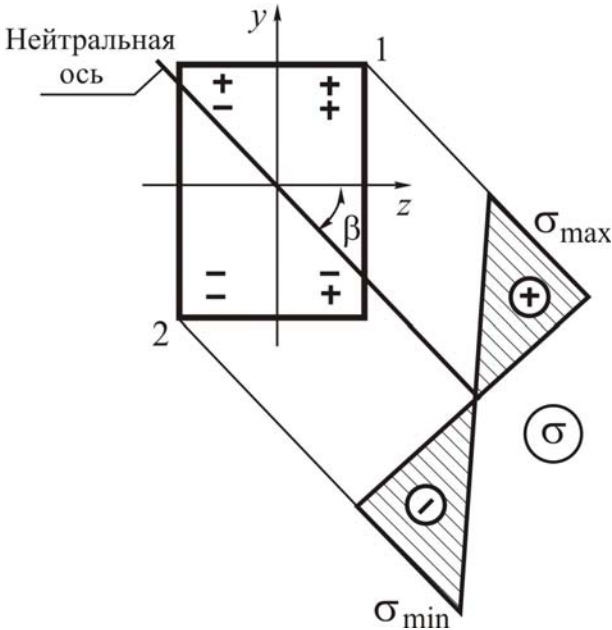


Рисунок 2.5 – Эпюра нормальных напряжений

При косом изгибе напряженное состояние в опасной точке принимается линейным, и расчет на прочность производится по нормальным напряжениям, возникающим в поперечном сечении бруса, где изгибающие моменты имеют наибольшие значения. Если  $M_{z \max}$  и  $M_{y \max}$  действуют в разных сечениях бруса, то расчет на прочность проводится для двух предположительно опасных сечений, в одном из которых действуют  $M_{z \max}$  и  $M_y$ , а в другом —  $M_z$  и  $M_{y \max}$ .

Условия прочности при косом изгибе для заданной схемы нагружения бруса можно записать в виде следующих соотношений:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(1)} = \frac{M_z}{I_z} y_1 + \frac{M_y}{I_y} z_1 \leq [\sigma_p]; \quad (2.11)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{(2)} = \left| -\frac{M_z}{I_z} y_2 - \frac{M_y}{I_y} z_2 \right| \leq [\sigma_c]. \quad (2.12)$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то при оценке прочности достаточно обеспечить выполнение одного условия, в котором будет использовано наибольшее по абсолютной величине напряжение. Для сечений с двумя осями симметрии и выступающими угловыми точками условие прочности можно записать в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_p]. \quad (2.13)$$

Направление полного прогиба сечения бруса, испытывающего косою изгиб, не совпадает со следом действия полного изгибающего момента  $M$  и перпендикулярно нейтральной оси.

## 2.2 Пример решения задачи

Балка прямоугольного поперечного сечения ( $h \times b = 0,3 \times 0,2$  м) нагружена сосредоточенной силой  $F$ , равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $P$  и моментом в виде пары сил  $m$  (рисунок 2.6). Определить положение опасного сечения балки, провести в нем нейтральную ось, найти нормальные напряжения в опасных точках, а также в выступающих угловых точках опасного сечения и построить эпюры нормальных напряжений по сторонам этого сечения.

*Решение.* Проведем для поперечных сечений балки главные центральные оси инерции  $y, z$ , а ось  $x$  совместим с осью балки (рисунок 2.6). Спроектируем силы, действующие на балку, в главную центральную плоскость инерции  $uox$ .

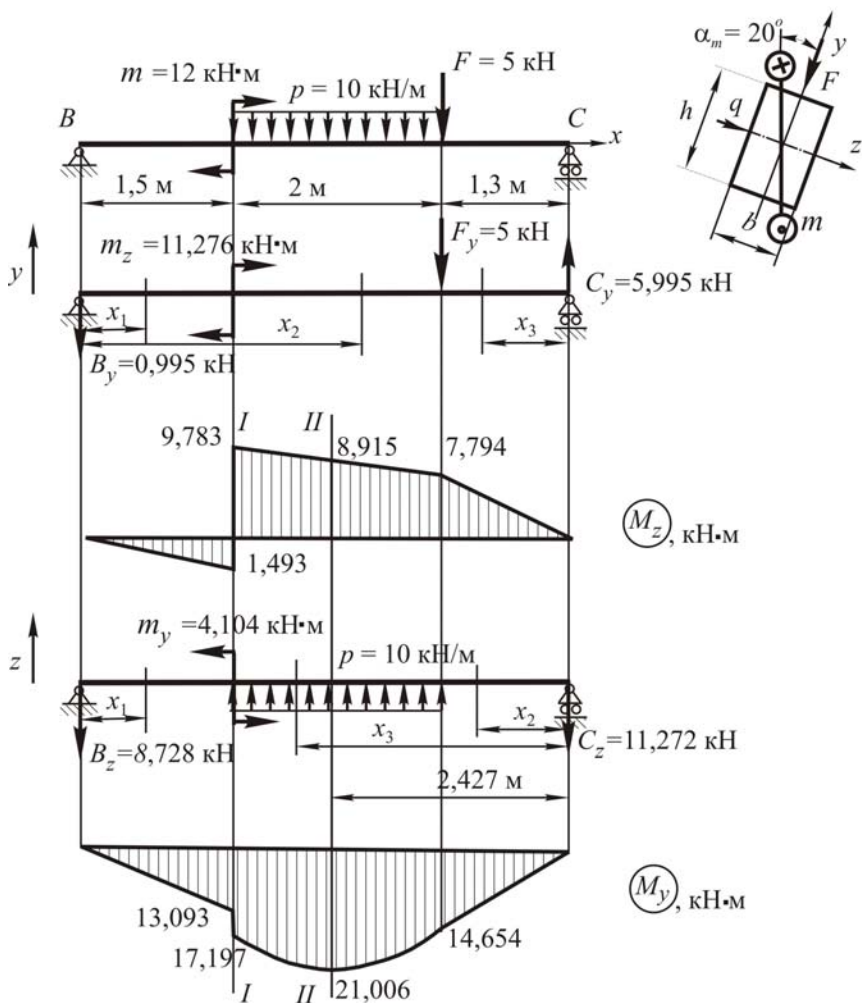


Рисунок 2.6 – Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов балки

$$F_y = F = 5 \text{ кН};$$

$$m_z = m \cos \alpha_m = 12 \cos 20^\circ = 11,276 \text{ ё́í · ì }.$$

Составляем расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в плоскости  $uox$  и соответственно изгибающими ее относительно оси  $z$  (рисунок 2.6). Для нахождения неизвестных реакций опор  $B_y$  и  $C_y$  используем уравнения равновесия. Реакции опоры  $B_x$  равны нулю, так как все силы, действующие на балку, перпендикулярны оси  $x$ .

$$\Sigma m_c (F_i) = -B_y \times 4,8 + m_z - F_y \times 1,3 = 0;$$

$$\Sigma m_B (F_i) = -C_y \times 4,8 + m_z + F_y \times 3,5 = 0;$$

Решая уравнения равновесия, находим реакции опор

$$B_y = \frac{m_z - F_y \times 1,3}{4,8} = \frac{11,276 - 5 \times 1,3}{4,8} = 0,995 \text{ кН},$$

$$C_y = \frac{m_z + F_y \times 3,5}{4,8} = \frac{11,276 + 5 \times 3,5}{4,8} = 5,995 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим не использованное в этой задаче уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось  $y$  и подставим их значения:

$$\Sigma F_y = -B_y + C_y - F_y = -0,995 + 5,995 - 5 = 0.$$

В результате расчета получили  $\Sigma F_y = 0$ , что указывает на правильность определения реакций опор.

Разбиваем балку на три расчетных участка и находим значения изгибающего момента  $M_z$ .

I участок:  $0 \leq x_1 \leq 1,5 \text{ м}$ .

$$M_{x_1} = -B_y x_1;$$

$$x_1 = 0: \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,5 \text{ м}: \quad M_{x_1} = -0,995 \times 1,5 = -1,493 \text{ кН·м}.$$

II участок:  $1,5 \text{ м} \leq x_2 \leq 3,5 \text{ м}$ .

$$M_{x_2} = -B_y x_2 + m;$$

$$x_2 = 1,5 \text{ м}: \quad M_{x_2} = -0,995 \times 1,5 + 11,276 = 9,783 \text{ кН·м};$$

$$x_2 = 3,5 \text{ м}: \quad = -0,995 \times 3,5 + 11,276 = 7,794 \text{ кН·м}.$$

III участок:  $0 \leq x_3 \leq 1,3$  м.

$$M_{x_3} = C_y x_3 ;$$

$$x_3 = 0: M_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1,3 \text{ м: } M_{x_3} = 5,995 \times 1,3 = 7,794 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям изгибающего момента строим эпюру  $M_z$  (рисунок 2.6).

Спроектируем силы, действующие на балку, в главную центральную плоскость инерции  $zox$ .

$$m_y = m \sin \alpha_m = 12 \times \sin 20^\circ = 4,104 \text{ ёí } \cdot \text{í} .$$

Составляем расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в плоскости  $zox$  и соответственно изгибающими ее относительно оси  $y$  (рисунок 2.6). Для нахождения неизвестных реакций опор  $B_z$  и  $C_z$  составим уравнения равновесия. Составляющая реакции опоры в шарнире  $B$  равна нулю, так как силы, действующие на балку, перпендикулярны оси  $x$ .

$$\Sigma m_c (F_i) = -B_z \times 4,8 - m_y + p \times 2 \times 2,3 = 0;$$

$$\Sigma m_B (F_i) = -C_z \times 4,8 + m_y + p \times 2 \times 2,5 = 0.$$

Решая уравнения равновесия, находим реакции опор

$$B_z = \frac{-m_y + p \times 2 \times 2,3}{4,8} = \frac{-4,104 + 10 \times 2 \times 2,3}{4,8} = 8,728 \text{ кН},$$

$$C_z = \frac{m_y + p \times 2 \times 2,5}{4,8} = \frac{4,104 + 10 \times 2 \times 2,5}{4,8} = 11,272 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим не использованное в этой задаче уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось  $z$  и подставим их значения:

$$\Sigma F_z = -B_z + p \times 2 - C_z = -8,728 + 20 - 11,272 = 0.$$

В результате расчета получили  $\Sigma F_z = 0$ , что указывает на правильность определения реакций опор.

Разбиваем балку на три расчетных участка и находим значения изгибающего момента относительно оси  $y$   $M_y$ .

I участок:  $0 \leq x_1 \leq 1,5$  м.

$$M_{x_1} = -B_z x_1 ;$$

$$x_1 = 0: M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,5 \text{ м: } M_{x_1} = -8,728 \times 1,5 = -13,093 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

II участок:  $0 \leq x_2 \leq 1,3$  м.

$$M_{x_2} = -C_z x_2;$$

$$x_2 = 0: M_{x_2} = 0;$$

$$x_2 = 1,3 \text{ м: } M_{x_2} = -11,272 \times 1,3 = 14,654 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

III участок:  $1,3 \text{ м} \leq x_3 \leq 3,3$  м.

$$M_{x_3} = -C_z x_3 + p \frac{(x_3 - 1,3)^2}{2};$$

$$x_3 = 1,3 \text{ м: } M_{x_3} = -11,272 \times 1,3 = 14,654 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 3,3 \text{ м: } M_{x_3} = -11,272 \times 3,3 + 10 \frac{(3,3 - 1,3)^2}{2} = 17,197 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На третьем расчетном участке изгибающий момент  $M_y$  имеет экстремальное значение. Для его определения составим и приравняем к нулю выражение поперечной силы  $Q_{x_3}$ , а также найдем расстояние  $x_3$  до сечения с экстремальным значением изгибающего момента.

$$Q_{x_3} = C_z - p(x_3 - 1,3) = 0,$$

откуда

$$x_3 = \frac{11,272 + 1,3 \times 10}{10} = 2,427 \text{ м}.$$

Подставив полученное значение  $x_3$  в уравнение моментов  $M_{x_3}$ , найдем величину искомого экстремального момента

$$M_{x_3} = -11,272 \times 2,427 + 10 \frac{(2,427 - 1,3)^2}{2} = -21,006 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям изгибающего момента строим эпюру  $M_y$  (рисунок 2.6).

Находим положение опасного сечения балки. Как показывают эпюры изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ , опасное сечение может располагаться на расстоянии 1,5 м от точки  $B$  ( $M_{z \max} = 9,783$  кН·м;  $M_y = 17,197$  кН·м) или на расстоянии 2,427 м от точки  $C$  ( $M_z = 5,995 \times 2,427 - 5(2,427 - 1,3) = 8,915$  кН·м;  $M_{y \max} = 21,006$  кН·м). Определяем величину максимального напряжения в этих сечениях по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y},$$

где  $W_z$  и  $W_y$  — момент сопротивления поперечного сечения относительно, соответственно, осей  $z$  и  $y$ .

$$W_z = \frac{b h^2}{6} = \frac{0,2 \times 0,3^2}{6} = 0,003 \text{ м}^3;$$

$$W_y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{0,3 \times 0,2^2}{6} = 0,002 \text{ м}^3.$$

Тогда

$$\sigma_{\max}^I = \frac{9,783 \times 10^3}{0,003} + \frac{17,197 \times 10^3}{0,002} = 119 \times 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 11,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{II} = \frac{8,915 \times 10^3}{0,003} + \frac{21,006 \times 10^3}{0,002} = 135 \times 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 13,5 \text{ МПа}.$$

Значит, опасным сечением является сечение II, так как  $\sigma_{\max}^{II} > \sigma_{\max}^I$ .

Определяем в опасном сечении балки положение нейтральной оси

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} = -\frac{M_y}{M_z} \frac{12 b h^3}{12 h b^3} = -\frac{21,006}{8,915} \times \frac{0,3^2}{0,2^2} = 5,302.$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} 5,302 = 79,3^\circ.$$

Откладываем от оси  $z$  против хода часовой стрелки угол  $\beta$  и проводим нейтральную ось (рисунок 2.7). Опасными точками будут точки опасного поперечного сечения, наиболее удаленные от нейтральной оси, т.е. точки 1 и 3.

Исходя из растяжения или сжатия, обусловленных изгибающими моментами  $M_z$  и  $M_y$ , расставляем для каждого квадранта опасного поперечного сечения знаки напряжений (рисунок 2.7), где верхние знаки — для напряжений от  $M_z$ , нижние знаки — для напряжений от  $M_y$ . Находим нормальные напряжения в опасных точках, а также в выступающих угловых точках опасного сечения по формуле:

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

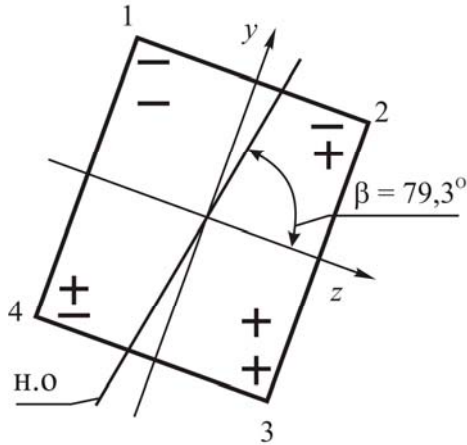


Рисунок 2.7 – Нейтральная ось и знаки напряжений в опасном сечении балки

При выполнении расчетов величины изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$  принимаем по модулю.

$$\sigma_{(1)} = -\frac{8,915 \times 10^3}{0,003} - \frac{21,006 \times 10^3}{0,002} = -135 \times 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -13,5 \text{ МПа} \quad ;$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{8,915 \times 10^3}{0,003} + \frac{21,006 \times 10^3}{0,002} = 135 \times 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 13,5 \text{ МПа} \quad ;$$

$$\sigma_{(2)} = -\frac{8,915 \times 10^3}{0,003} + \frac{21,006 \times 10^3}{0,002} = 75,3 \times 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 7,53 \text{ МПа} \quad ;$$

$$\sigma_{(4)} = \frac{8,915 \times 10^3}{0,003} - \frac{21,006 \times 10^3}{0,002} = -75,3 \times 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -7,53 \text{ МПа} \quad .$$

По найденным значениям строим эпюры нормальных напряжений по сторонам опасного сечения балки (рисунок 2.8).



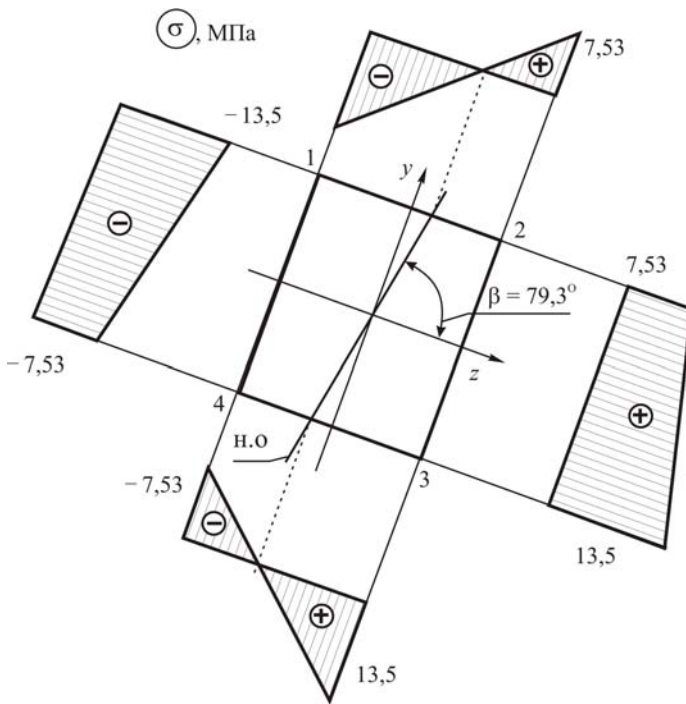


Рисунок 2.8 – Эпюры нормальных напряжений по сторонам опасного сечения балки

Из эпюр, показанных на рисунке 2.8, видно, что в точках, в которых нейтральная ось пересекает контур сечения, нормальные напряжения равны нулю.

### 2.3 Расчетно-графическая работа (РГР) «Косой изгиб»

Для заданной балки, нагруженной сосредоточенной силой  $F$ , равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $P$  и моментом в виде пары сил  $m$ , как показано на рисунке 2.9, требуется:

- 1 Определить положение опасного сечения балки;
- 2 Провести в опасном сечении балки нейтральную ось и найти опасные точки;
- 3 Определить нормальные напряжения в опасных точках, а также в выступающих угловых точках опасного сечения и построить

эпюры нормальных напряжений по сторонам этого сечения.

Исходные данные для выполнения РГР «Косой изгиб» принять из рисунка 2.9 и таблицы 2.1 (двухавр ГОСТ 8239-89, швеллер ГОСТ 8240-89).

## **2.4 Методические указания для выполнения РГР «Косой изгиб»**

1 Вычертить в масштабе схему балки, оставляя под ней место для других схем и эпюр внутренних силовых факторов.

2 Провести и обозначить в поперечном сечении балки главные центральные оси инерции  $z$  и  $y$ , ось  $x$  совместить с осью балки.

3 Составить расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в главной центральной плоскости  $yoх$ .

4 Построить эпюру изгибающих моментов относительно оси  $z$  ( $M_z$ ).

5 Составить расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в главной центральной плоскости  $zox$ .

6 Построить эпюру изгибающих моментов относительно оси  $y$  ( $M_y$ ).

7 Определить положение опасного сечения балки (опасное сечение – поперечное сечение, в котором находится опасная точка балки, т.е. точка, в которой действует максимальное нормальное напряжение  $\sigma_{\max}$ ).

8 В опасном сечении балки провести нейтральную ось и установить положение опасных точек.

9 Определить нормальные напряжения в опасных точках.

10 Определить нормальные напряжения в выступающих угловых точках опасного сечения балки.

11 Построить эпюры нормальных напряжений по сторонам опасного сечения балки.

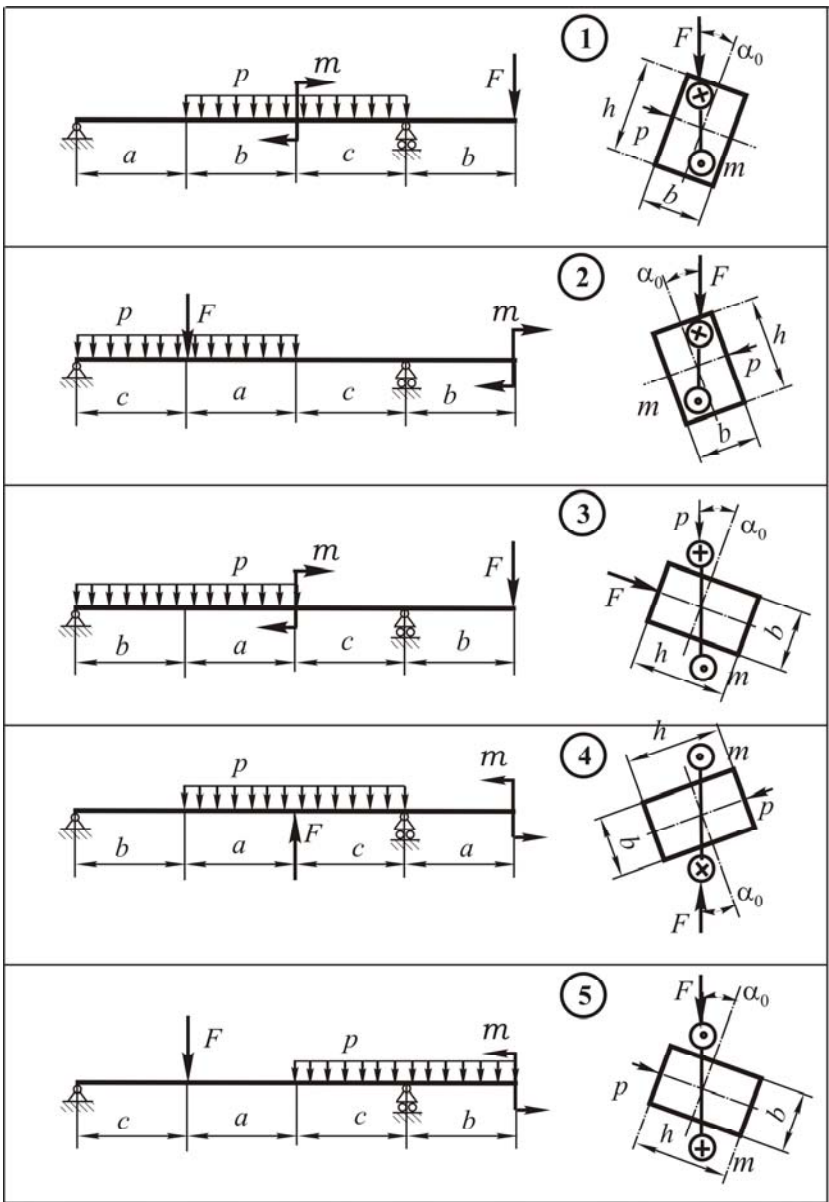
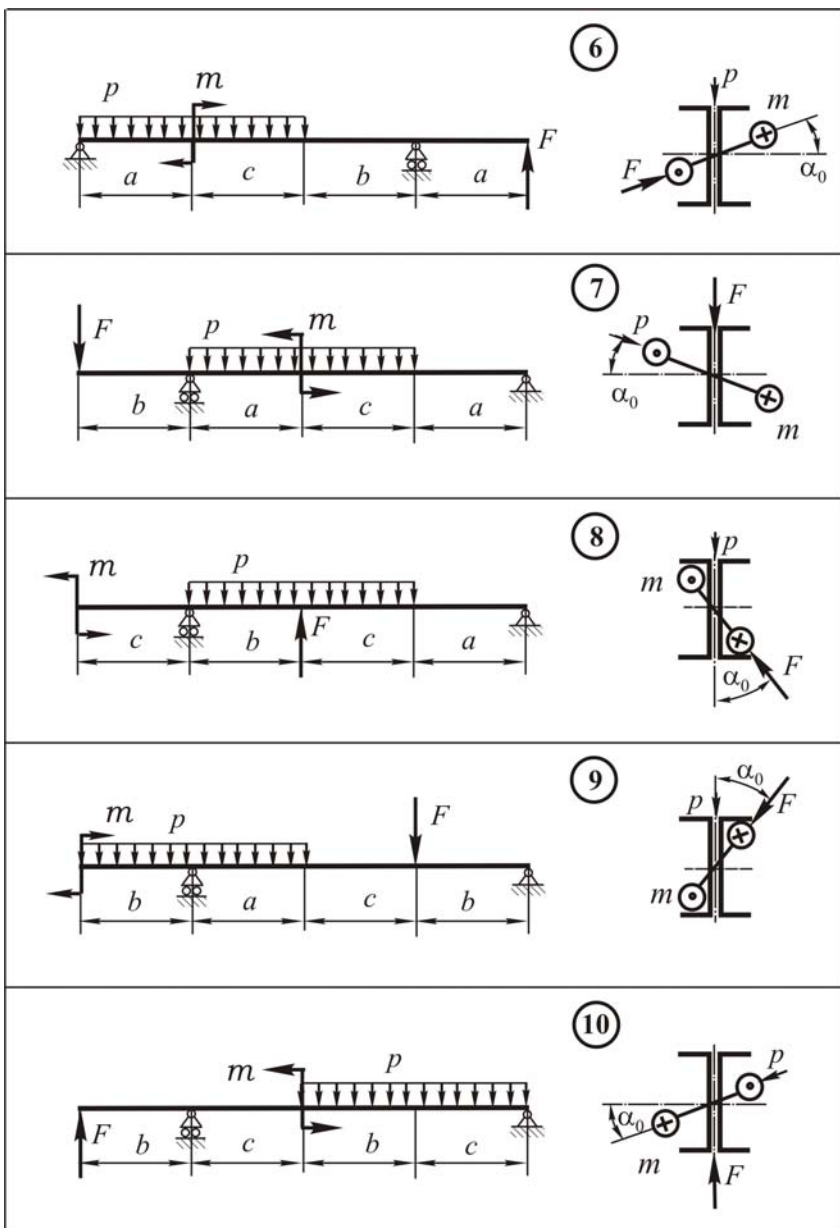
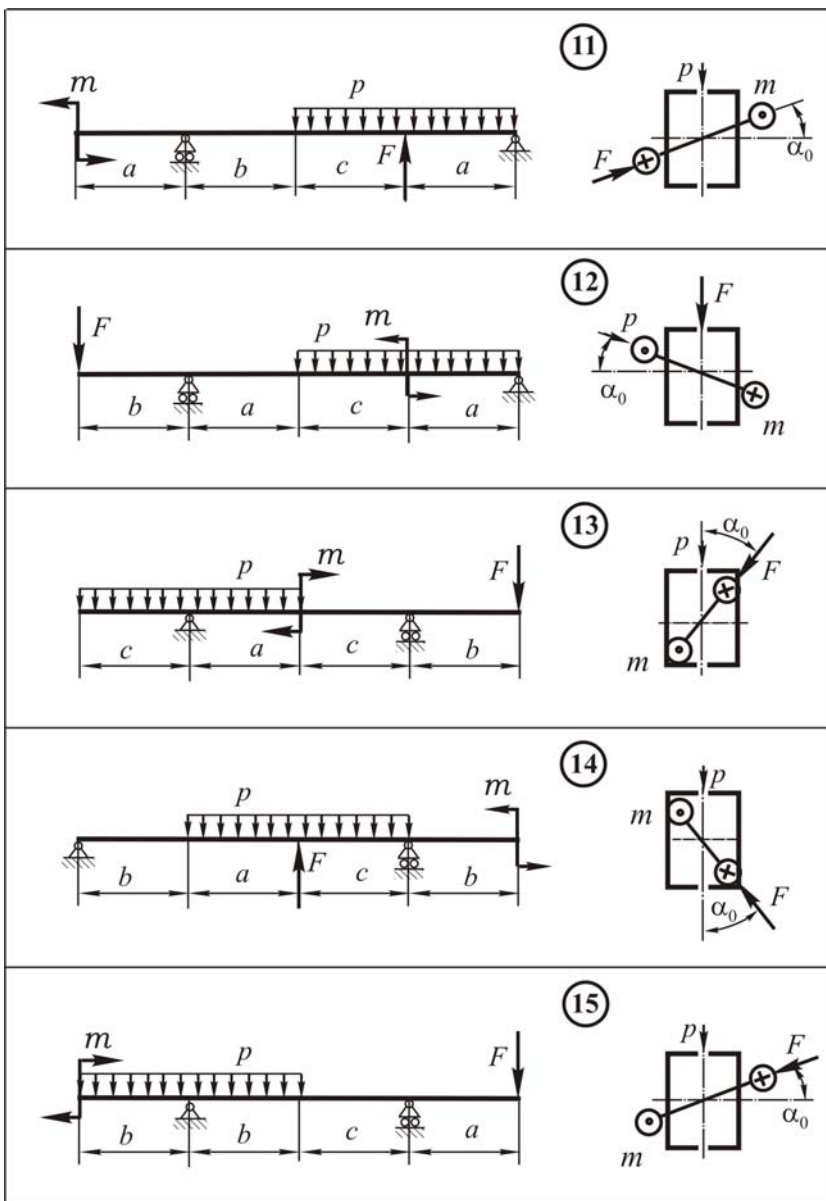


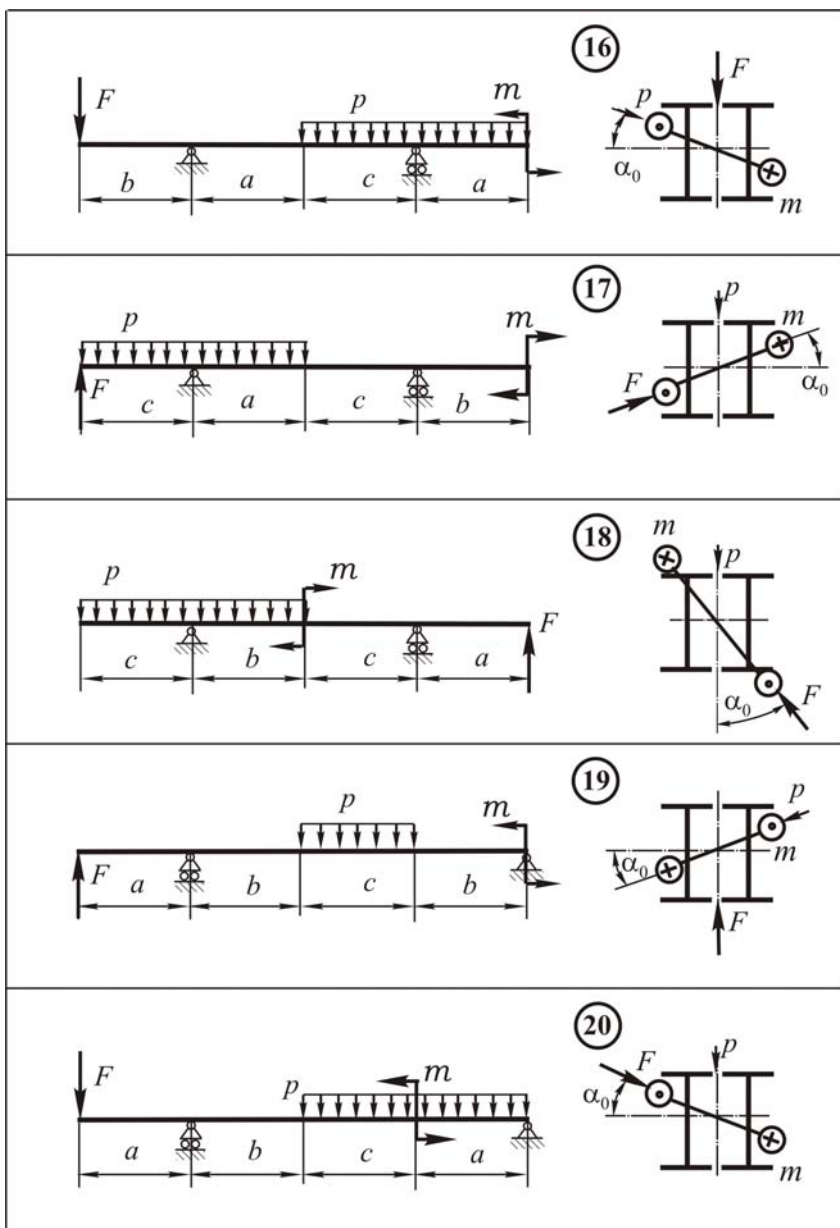
Рисунок 2.9 – Схемы к РГР «Косой изгиб»



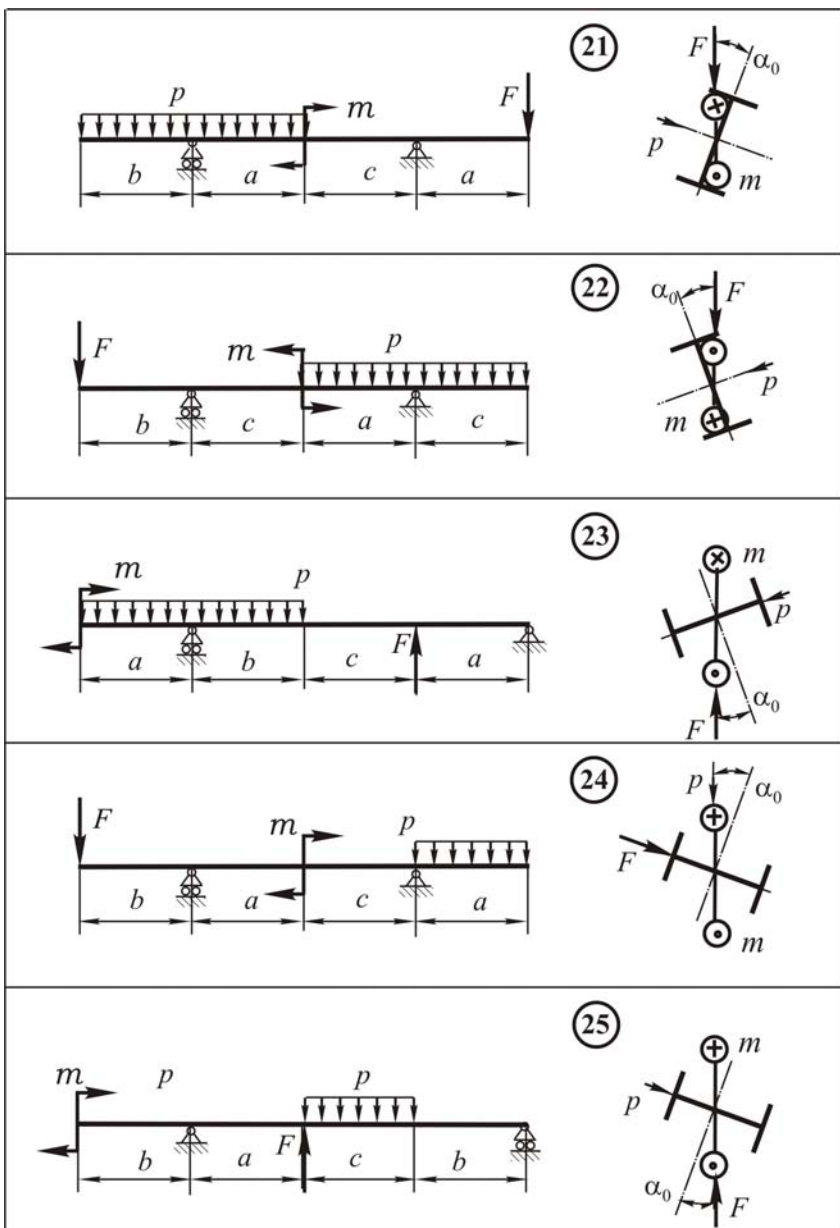
Продолжение рисунка 2.9



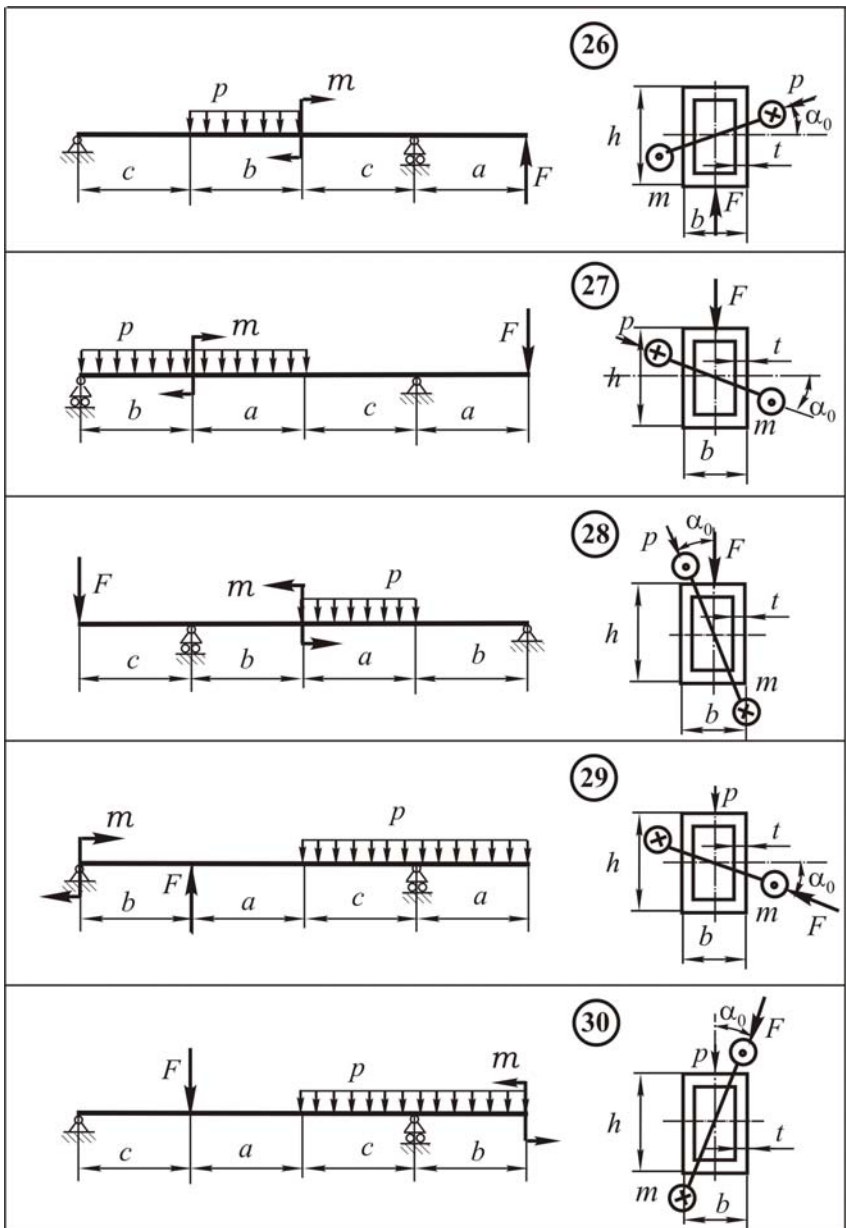
Продолжение рисунка 2.9



Продолжение рисунка 2.9



Продолжение рисунка 2.9



Окончание рисунка 2.9

Таблица 2.1 – Числовые данные к РГР «Косой изгиб»



№ строки	Размеры			Нагрузки			Форма и размеры поперечного сечения						
	a, м	b, м	c, м	m, кН·м	F, кН	P, кН/м	Прямо-угольник		Дву-тавр	Швел-лер	Труба прямоугольная		
							h, м	b, м	№ проф	№ проф	h, м	b, м	t, м
1	1	1,7	1,3	17	14	10	0,30	0,14	30а	33	0,32	0,16	0,02
2	1,2	1,4	1,4	15	13	11	0,28	0,15	30	30	0,31	0,15	0,02
3	1,4	1,6	1	13	16	12	0,26	0,16	27а	27	0,30	0,14	0,02
4	1,6	1,1	1,3	11	15	13	0,24	0,17	27	24а	0,29	0,15	0,02
5	1,8	1	1,2	9	17	14	0,22	0,16	24а	24	0,28	0,16	0,02
6	1,4	1,5	1,1	13	21	12	0,20	0,16	24	22а	0,27	0,17	0,02
7	1,3	1,5	1,2	8	18	11	0,22	0,18	22а	22	0,26	0,18	0,02
8	1,2	1,4	1,4	9	21	10	0,24	0,16	22	20а	0,25	0,18	0,02
9	1,3	1,7	1	10	20	11	0,26	0,18	20а	20	0,24	0,19	0,02
10	1,4	1,5	1,1	11	19	12	0,28	0,20	20	27	0,23	0,20	0,02
11	2	0,9	1,1	15	10	16	0,30	0,18	27а	24а	0,34	0,14	0,01
12	1,9	1	1,1	8	12	17	0,29	0,16	27	24	0,33	0,15	0,01
13	1,8	1,2	1	10	11	15	0,27	0,22	24а	22а	0,32	0,16	0,01
14	1,7	1,4	0,9	12	10	16	0,25	0,18	24	22	0,31	0,17	0,01
15	1,6	1,3	1,1	14	13	15	0,23	0,16	22а	20а	0,30	0,18	0,01
16	1,5	1,2	1,3	16	10	14	0,21	0,16	22	20	0,29	0,19	0,01
17	1,4	1,6	1	15	12	13	0,22	0,17	30	33	0,28	0,20	0,01
18	1,3	1,8	0,9	20	11	14	0,24	0,18	27а	30	0,27	0,21	0,01
19	1,2	2	0,8	18	12	11	0,26	0,17	27	27	0,26	0,22	0,01
20	1,1	1,8	1,1	19	13	10	0,28	0,15	24а	24а	0,25	0,20	0,01
21	2	1,2	0,8	10	17	16	0,30	0,19	24	24	0,28	0,14	0,03
22	1,6	1,4	1	11	16	14	0,30	0,21	22а	33	0,27	0,15	0,03
23	1,2	2	0,8	12	18	12	0,29	0,16	30а	30	0,26	0,16	0,03
24	1,8	1,2	1	13	19	13	0,28	0,15	30	27	0,25	0,17	0,03
25	1,5	1,1	1,4	12	20	12	0,27	0,18	27а	24а	0,24	0,18	0,03
26	1,5	1,3	1,2	13	18	11	0,26	0,15	27	24	0,23	0,17	0,03
27	1,6	1,1	1,3	14	17	14	0,25	0,14	24а	22а	0,22	0,16	0,03
28	1,7	1,2	1,1	15	16	12	0,24	0,16	22а	22	0,21	0,15	0,03
29	1,8	1,3	0,9	16	15	11	0,22	0,14	22	20а	0,20	0,16	0,03
30	1,9	1,1	1	17	12	13	0,26	0,16	30	20	0,24	0,26	0,03

## 3 РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Литература: [1], [2, С. 474–517], [3, 9.37, 9.43].

Статически неопределимые системы, основные понятия. Степень статической неопределимости, внутренние связи, внешние связи. Метод сил, основная система, эквивалентная система. Канонические уравнения метода сил, коэффициенты канонических уравнений. Статическая проверка, деформационная проверка. Определение размеров поперечного сечения.

### 3.1 Основные понятия

Системы, в которых опорные реакции и внутренние силовые факторы не могут быть определены с помощью уравнений статики и метода сечений, называются *статически неопределимыми*. Для прочностного расчета таких систем необходимо составить дополнительные уравнения, которые называются *уравнениями перемещений*.

Статически неопределимые системы позволяют за счет более рационального распределения усилий по элементам конструкции достигать значительной экономии материала. Дополнительные связи увеличивают жесткость конструкции и при нарушении любой связи предохраняют ее от разрушения.

Степенью статической неопределимости системы называется разность между числом наложенных связей и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы.

Для определения числа дополнительных связей с помощью кинематического анализа необходимо вычесть из общего числа степеней свободы системы число внешних опорных и внутренних связей, налагаемых на движение элементов системы.

Число степеней свободы для плоской системы равно:

$$H = 3D - C_o - C_B, \quad (3.1)$$

где  $D$  – число стержней, образующих систему;

$C_B$  – число внутренних связей;

$C_o$  – число внешних, опорных связей.

Возможны три варианта:

- 1)  $H > 0$  – система кинематически изменяема и не применяется в качестве инженерного сооружения;
- 2)  $H = 0$  – система статически определима;

3)  $H < 0$  – система статически неопределима, имеет дополнительные (лишние) связи.

При расчете  $C_e$  следует учитывать, что каждый шарнир, соединяющий два элемента, накладывает две внутренние связи. Добавление стержня в шарнирный узел увеличивает число внутренних связей на две (рисунок 3.1).

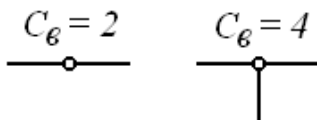


Рисунок 3.1 – Шарнирное соединение стержней

Неподвижное соединение двух элементов в узле эквивалентно трем внутренним связям (рисунок 3.2).

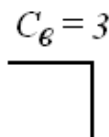


Рисунок 3.2 – неподвижное соединение стержней

Между стержнями-элементами связей нет (рисунок 3.3).

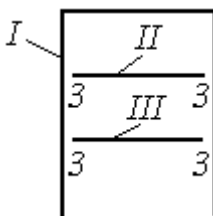


Рисунок 3.3 – Деление конструкции на элементы

В данном случае система разделяется на три элемента. Первый элемент представляет собой изогнутый стержень. Число внутренних связей равно 12.

В плоской системе шарнирно-подвижная опора налагает одну внешнюю связь, шарнирно-неподвижная опора – две внешние связи, заделка – три.

Суть метода сил заключается в том, что статически неопределимая система путем освобождения от дополнительных (лишних) связей превращается в статически определимую, геометрически неизменяемую. Действие отброшенных связей заменяется неизвестными силами и моментами. Их величины подбираются так, чтобы перемещения в системе оставались такими же, что и при наличии дополнительных связей. Таким образом, неизвестными при этом способе являются силы. Откуда и происходит название «метод сил».

Расчет начинается с выбора основной системы. Основной системой является статически определимая, кинематически неизменяемая система, получаемая из заданной в результате освобождения ее от дополнительных связей. Основная система, к которой приложены все внешние нагрузки и неизвестные силы, заменяющие отброшенные связи, называется *эквивалентной*.

При рассмотрении перемещений в эквивалентной системе составляются уравнения перемещений, которые называются *каноническими уравнениями метода сил*. При  $H = -2$  они имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} \tilde{O}_1 + \delta_{12} \tilde{O}_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{1F} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Канонические уравнения выражают условия равенства нулю суммарных перемещений по направлению каждой из отброшенных связей. Их можно составить столько, сколько раз статически неопределима система.

Коэффициенты при неизвестных силах представляют собой перемещения в основной системе, вызванные единичными силами, заменяющими неизвестные силы. Перемещения с одинаковыми индексами  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$  называются *главными коэффициентами канонических уравнений*. Они всегда положительны и не равны нулю. Перемещения с разными индексами называются *побочными коэффициентами канонических уравнений* и могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Чем больше этих коэффициентов равно нулю, тем рациональнее выбрана основная система. Согласно теореме о взаимности перемещений эти коэффициенты попарно равны, т.е.  $\delta_{12} = \delta_{21}$ .

Свободные члены уравнений, обозначенные буквой  $\Delta$ , представляют перемещения в основной системе под действием заданных внешних сил.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений определяются с помощью интегралов Максвелла-Мора или способа Верещагина путем перемножения эпюр. Индексы указывают, какие эпюры

должны быть перемножены. После их определения решается система канонических уравнений, и определяются неизвестные силы.

К основной системе с учетом знаков прикладываются найденные силы и заданные нагрузки. Обычным способом (как для статически определимой рамы), строятся суммарные эпюры внутренних силовых факторов  $M, Q, N$ .

После построения суммарной эпюры изгибающих моментов проводятся проверки:

1) статическая, которая заключается в проверке равновесия каждого вырезанного из рамы узла под действием внешних сил и внутренних силовых факторов.

2) деформационная, которая заключается в определении перемещений в системе по направлению лишних связей. Так как в эквивалентной системе перемещение по направлению лишней связи должно отсутствовать, то произведение окончательной эпюры изгибающих моментов на каждую из единичных эпюр должно равняться нулю.

Для определения погрешности вычислений необходимо найти суммы положительных и отрицательных членов. Разность этих сумм в процентах от меньшей из них не должна превышать 2%.

По наибольшему значению изгибающего момента на эпюре находится опасное сечение. Для него по условию прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \Rightarrow W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \quad (3.3)$$

подбираются размеры поперечного сечения или номер прокатного профиля.

В рамах в поперечном сечении кроме изгибающего момента действует продольная сила, которая вызывает в сечении нормальные напряжения. Поэтому необходимо выполнить проверку с учетом продольной силы:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (3.4)$$

где  $N$  – продольная сила в опасном сечении.

Если  $\sigma_{\max}$  отличается от  $[\sigma]$  не более чем на 5%, расчет считается законченным.

### 3.2 Пример решения задачи

Для заданной рамы (рисунок 3.4) построить эпюры внутренних силовых факторов и подобрать размеры поперечного сечения прямоугольника, если отношение высоты к ширине равно 2. Принять  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ,  $b = 1 \text{ м}$ ,  $c = 1,8 \text{ м}$ ,  $F = 15 \text{ кН}$ ,  $q = 10 \text{ кН/м}$ .

*Решение.* Вычерчиваем в масштабе схему рамы и прикладываем к ней внешние нагрузки (рисунок 3.5, а).

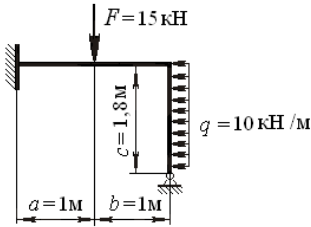


Рисунок 3.4 – Расчетная схема рамы

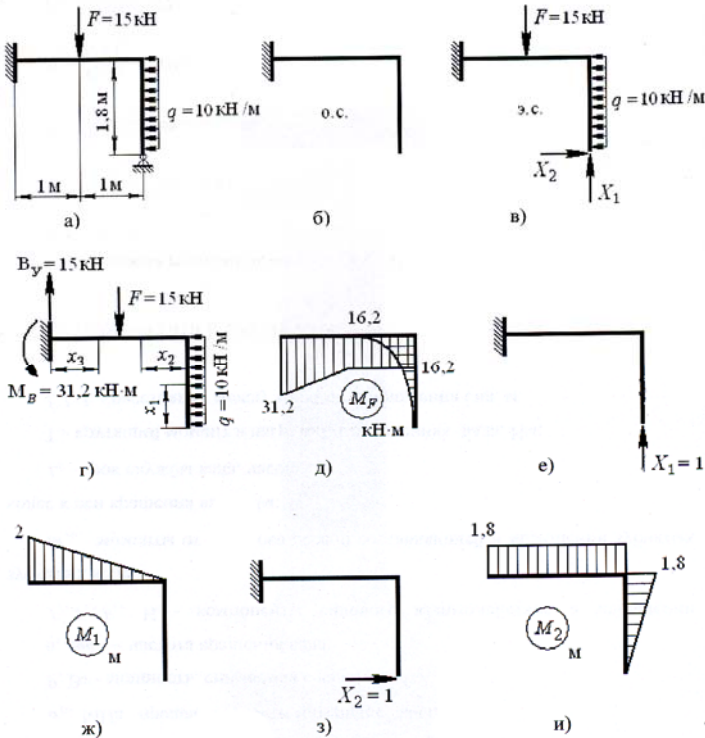


Рисунок 3.5 – Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов:

а – заданная схема; б – основная система; в – эквивалентная система; г – схема для построения грузовой эпюры; д – грузовая эпюра; е – схема для построения единичной эпюры  $M_1$ ; ж – единичная эпюра  $M_1$ ; з – схема для построения единичной эпюры  $M_2$ ; и – единичная эпюра  $M_2$

Система состоит из одного элемента – изогнутого стержня, поэтому внутренние связи отсутствуют. В заделке возникают три опорные реакции, в шарнирно-неподвижной опоре – две.

Определяем степень статической неопределимости:

$$H = 3D - C_i - C_{\hat{A}} = 3 \times 1 - 5 - 0 = -2.$$

Следовательно, система дважды статически неопределимая. В ней можно отбросить две дополнительные связи, обозначив их  $X_1$  и  $X_2$ . Для нее можно составить два канонических уравнения, построить две единичные эпюры.

Выбираем основную и эквивалентную системы (рисунок 3.5, б, в).

Составляем канонические уравнения метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \tilde{O}_1 + \delta_{12} \tilde{O}_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Прикладываем к основной системе заданные нагрузки (рисунок 3.5, г) и определяем опорные реакции с помощью уравнений статики:

$$\sum F_x = 0; \quad B_x - q \times 1,8 = 0; \quad B_x = 18 \text{ кН.}$$

$$\sum F_y = 0; \quad B_y - F = 0; \quad B_y = 15 \text{ кН.}$$

$$\sum \dot{I}_B = 0; \quad M_B - F \times 1 - q \times 1,8 \times 0,9 = 0;$$

$$M_B = 15 + 10 \times 1,8 \times 0,9 = 31,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Разбиваем раму на участки и записываем уравнения изгибающих моментов на каждом из них:

I участок:  $0 \leq x_1 \leq 1,8 \text{ м.}$

$$M_{X_1} = -\frac{qx^2}{2};$$

$$x_1 = 0; \quad M_{X_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,8 \text{ м}; \quad M_{X_1} = -\frac{10 \times 1,8^2}{2} = -16,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

II участок:  $0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м.}$

$$M_{X_2} = -q \times 1,8 \times 0,9 = -16,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

III участок:  $0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м.}$

$$M_{X_3} = -M_B + B_y \cdot x_3;$$

$$x_3 = 0; \quad M_{X_3} = -31,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 1 \text{ м}; \quad M_{X_3} = -31,2 + 15 \times 1 = -16,2 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

По найденным значениям изгибающих моментов строим грузовую эпюру  $M_F$  (рисунок 3.5, *д*).

Прикладываем к основной системе силу  $\tilde{O}_1 = 1$  (рисунок 3.5, *е*) и строим единичную эпюру  $M_1$  (рисунок 3.5, *ж*).

Прикладываем к основной системе силу  $\tilde{O}_2 = 1$  (рисунок 3.5, *з*) и строим единичную эпюру  $M_2$  (рисунок 3.5, *и*).

Определяем коэффициенты канонических уравнений путем перемножения эпюр способом Верещагина. Численные значения определяем с точностью три знака после запятой:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_Z} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \times 2 \times \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{8}{3EI_Z} = \frac{2,667}{EI_Z};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_Z} \left( \frac{1}{2} \cdot 1,8 \times 1,8 \times \frac{2}{3} \cdot 1,8 + 1,8 \times 2 \times 1,8 \right) = \frac{1,944 + 6,48}{EI_Z} = \frac{8,424}{EI_Z};$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI_Z} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \times 2 \times 1,8 \right) = \frac{3,6}{EI_Z};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_Z} \left( -16,2 \times 2 \times \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 15 \times 1 \times \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right) = \frac{-32,4 - 12,5}{EI_Z} = -\frac{44,9}{EI_Z};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI_Z} \left( -\frac{1}{2} \cdot 1,8 \times 16,2 \times \frac{2}{3} \cdot 1,8 + \frac{10 \times 1,8^3}{12} \times \frac{1}{2} \cdot 1,8 - 16,2 \times 2 \times 1,8 - \frac{1}{2} \cdot 15 \times 1 \times 1,8 \right) =$$

$$= \frac{-17,496 + 4,374 - 58,32 - 13,5}{EI_Z} = -\frac{84,942}{EI_Z}.$$

Можно провести проверку правильности вычисления коэффициентов канонических уравнений. Для этого нужно построить в основной системе суммарную единичную эпюру моментов  $M_S$  (рисунок 3.6, *а*) и умножить ее саму на себя:

$$\delta_{SS} = \frac{1}{EI_Z} \left( \frac{1}{2} \cdot 1,8 \times 1,8 \times \frac{2}{3} \cdot 1,8 + 1,8 \times 2 \times \frac{(3,8 + 1,8)}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \times 2 \times \left( \frac{2}{3} \cdot 3,8 + \frac{1}{3} \cdot 1,8 \right) \right) =$$

$$= \frac{1,944 + 10,08 + 6,267}{EI_Z} = \frac{18,291}{EI_Z}.$$



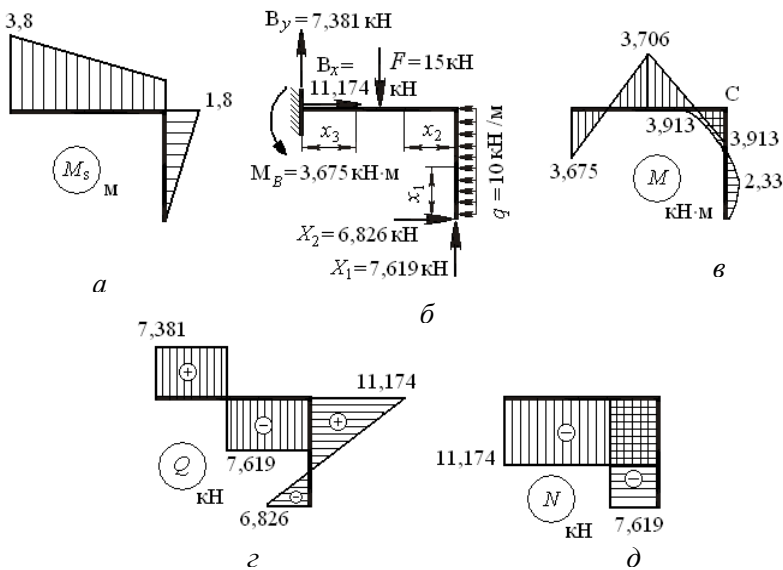


Рисунок 3.6 – Расчетная схема и эпюры внутренних силовых факторов: а – суммарная единичная эпюра  $M_s$ ; б – схема для построения эпюр внутренних силовых факторов; в – суммарная эпюра изгибающих моментов  $M$ ; г – эпюра поперечных сил  $Q$ ; д – эпюра продольных сил  $N$

Результат перемножения должен быть равен сумме коэффициентов при неизвестных всех членах в канонических уравнениях. Просуммировав коэффициенты всех членов уравнений, получим ту же величину:

$$\delta_{\Sigma} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \delta_{11} + 2 \times \delta_{12} + \delta_{22} = \frac{2,667}{EI_Z} + 2 \cdot \frac{3,6}{EI_Z} + \frac{8,424}{EI_Z} = \frac{18,291}{EI_Z}.$$

Перемножая грузовую эпюру на суммарную единичную, должны получить сумму свободных членов уравнений:

$$\Delta_{SF} = \frac{1}{EI_Z} \left( -\frac{1}{2} 16,2 \times 1,8 \times \frac{2}{3} 1,8 + \frac{10 \times 1,8^3}{12} \times \frac{1}{2} 1,8 - 16,2 \times 2 \times \frac{(3,8 + 1,8)}{2} - \left( -\frac{1}{2} 15 \times 1 \times \left( \frac{2}{3} 3,8 + \frac{1}{3} \times \left( \frac{3,8 + 1,8}{2} \right) \right) \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{EI_Z} (-17,496 + 4,374 - 90,72 - 25,998) = -\frac{129,843}{EI_Z};$$

$$\Delta_{\Sigma} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = -\frac{44,9}{EI_Z} - \frac{84,942}{EI_Z} = -\frac{129,842}{EI_Z}.$$

129,843 - 129,842 = 0,001. Погрешность 0,001 допустима.

Подставляем полученные значения коэффициентов в канонические уравнения и находим неизвестные  $X_1$  и  $X_2$ .

$$\begin{cases} \frac{2,667}{EI_Z} X_1 + \frac{3,6}{EI_Z} X_2 - \frac{44,9}{EI_Z} = 0 \\ \frac{3,6}{EI_Z} X_1 + \frac{8,424}{EI_Z} X_2 - 84,942 = 0. \end{cases}$$

После упрощения уравнений:

$$\begin{cases} 2,667X_1 + 3,6X_2 - 44,9 = 0 \\ 3,6X_1 + 8,424X_2 - 84,942 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим,  $X_1 = 7,619$  кН и  $X_2 = 6,826$  кН. Положительные значения сил показывают, что их направления совпадают с направлениями единичных сил. Прикладываем найденные и рассматриваем их как внешние силы, приложенные к основной системе (рисунок 3.6, б).

Определяем опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad B_x + X_2 - q \times 1,8 = 0; \quad B_x = 11,174 \text{ кН.} \\ \sum F_y = 0; \quad B_y - F + X_1 = 0; \quad B_y = 7,381 \text{ кН.} \\ \sum \dot{I}_B = 0; \quad M_B - F \times 1 - p \times 1,8 \times 0,9 + X_1 \times 2 + X_2 \times 1,8 = 0; \\ M_B = 3,675 \text{ кН}\cdot\text{м.} \end{aligned}$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рисунок 3.6, в):

I участок:  $0 \leq x_1 \leq 1,8$  м.

$$M_{X_1} = X_2 x_1 - \frac{q x_1^2}{2};$$

$$x_1 = 0; \quad M_{X_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,8 \text{ м}; \quad M_{X_1} = 6,826 \times 1,8 - \frac{10 \times 1,8^2}{2} = -3,913 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Проверяем наличие экстремума:

$$Q_{\delta_1} = \frac{dM_{\delta_1}}{dx_1} = X_2 - q x_1 = 0; \quad x_1 = \frac{X_2}{q} = \frac{6,826}{10} = 0,683 \text{ м};$$

$$x_1 = 0,683 \text{ м}; \quad M_{X_1} = 6,826 \times 0,683 - \frac{10 \times 0,683^2}{2} = 2,332 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

II участок:  $0 \leq x_2 \leq 1$  м.

$$M_{X_2} = X_1 x_2 - q \times 1,8 \times 0,9;$$

$$x_2 = 0; M_{X_2} = -3,913 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 1 \text{ м}; M_{X_2} = 3,706 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

III участок:  $0 \leq x_3 \leq 1$  м.

$$M_{X_3} = -M_B + B_y x_3;$$

$$x_3 = 0; M_{X_3} = -3,675 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 1 \text{ м}; M_{X_3} = -3,675 + 7,381 \times 1 = 3,706 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Выполняем проверку:

1) статическую – проверяем равновесие вырезанного из рамы узла *C* под действием внешних сил и внутренних силовых факторов (рисунок 3.7).

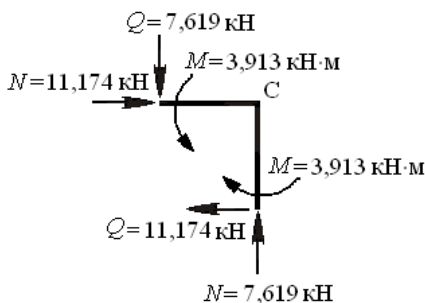


Рисунок 3.7 – Статическая проверка равновесия узла рамы

2) деформационную – определяем перемещения в системе по направлению лишних связей, перемножая поочередно суммарную эпюру изгибающих моментов на единичные эпюры:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{EI_Z} \left( \frac{1}{2} 3,706 \times 1 \times \frac{2}{3} 1 - \frac{1}{2} 3,913 \times 1 \times \frac{1}{3} 1 + \frac{1}{2} 3,706 \times \left( 1 + \frac{1}{3} 1 \right) - \frac{1}{2} 3,675 \times 1 \times \left( 1 + \frac{2}{3} 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1,235 - 0,652 + 2,471 - 3,0625}{EI_Z} = \frac{3,706 - 3,7145}{EI_Z} = -\frac{0,0085}{EI_Z}. \end{aligned}$$

Определяем погрешность вычислений:  $\frac{0,0085}{3,706} \cdot 100\% = 0,23\% < [2\%]$ .

$$\Delta_2 = \frac{1}{EI_Z} \left( \frac{10 \times 1,8^3}{12} \times \frac{1}{2} \cdot 1,8 - \frac{1}{2} \cdot 3,913 \times 1,8 \times \frac{2}{3} \cdot 1,8 + \frac{1}{2} \cdot 3,706 \times 1 \times 1,8 - \frac{1}{2} \cdot 3,913 \times 1 \times 1,8 + \frac{1}{2} \cdot 3,706 \times 1 \times 1,8 - \frac{1}{2} \cdot 3,675 \times 1 \times 1,8 \right) =$$

$$= \frac{4,374 - 4,226 + 3,335 - 3,522 + 3,335 - 3,307}{EI_Z} = \frac{11,045 - 11,056}{EI_Z} = -\frac{0,011}{EI_Z}.$$

Определяем погрешность вычислений:  $\frac{0,011}{11,045} \cdot 100\% = 0,09\% < [2\%]$ .

Следовательно, неизвестные силы определены верно, и эпюра  $M$  построена правильно.

Строим эпюру поперечных сил (рисунок 3.6, з):

I участок:  $0 \leq x_1 \leq 1,8$  м.

$$Q_{X_1} = -X_2 + qx_1;$$

$$x_1 = 0; Q_{X_1} = -6,826 \text{ кН};$$

$$x_1 = 1,8 \text{ м}; Q_{X_1} = -6,826 + 10 \times 1,8 = 11,174 \text{ кН}.$$

II участок:  $0 \leq x_2 \leq 1$  м.

$$Q_{X_2} = -X_1 = -7,619 \text{ кН}.$$

III участок:  $0 \leq x_3 \leq 1$  м.

$$Q_{X_3} = B_y = 7,381 \text{ кН}.$$

Строим эпюру продольных сил (рисунок 3.6, д):

I участок:  $0 \leq x_1 \leq 1,8$  м.

$$N_{X_1} = -X_1 = -7,619 \text{ кН}.$$

II участок:  $0 \leq x_2 \leq 1$  м.

$$N_{X_2} = X_2 - q \cdot 1,8 = 6,826 - 18 = -11,174 \text{ кН}.$$

III участок:  $0 \leq x_3 \leq 1$  м.

$$N_{X_3} = -B_x = -11,174 \text{ кН}.$$

Подбираем поперечное сечение. Из эпюры изгибающих моментов следует, что  $M_{\max} = 3,913 \text{ кН} \cdot \text{м}$  в узле С. В этом же сечении возникает продольная сила  $N = -11,174 \text{ кН}$ . Определяем размеры поперечного сечения по условию прочности при изгибе без учета продольной силы:

$$W_Z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3M_{\max}}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 3,913 \times 10^6}{2 \times 160}} = 100 \sqrt[3]{0,0367} = 33,5 \text{ мм.}$$

Принимаем  $b = 33,5$  мм и  $h = 67$  мм.

Производим проверку прочности выбранного сечения с учетом продольной силы:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_Z} \right| = \left| \frac{11,174 \times 10^3}{33,5 \times 67} - \frac{3,913 \times 10^6}{\frac{33,5 \times 67^2}{6}} \right| = 4,98 + 156,13 = 161,11 \text{ МПа.}$$

Процент перегрузки  $\frac{161,11 - 160}{160} 100 = 0,7\% < [5\%]$ , что допустимо.

### **3.3 Расчетно-графическая работа (РГР) «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»**

Для заданной плоской статически неопределимой рамы, показанной на рисунке 3.8, требуется:

- 1 Построить эпюры внутренних силовых факторов;
- 2 Определить положение опасного сечения;
- 3 Подобрать при  $[\sigma] = 160$  МПа размеры поперечного сечения в виде:

для схем 1–10 – кольца, если отношение меньшего диаметра к большему 0,7;

для схем 11–20 – прямоугольника, если отношение высоты к ширине 1,5;

для схем 21–30 – трубчатого квадратного, если отношение меньшего размера к большему 0,8.

Исходные данные для выполнения РГР «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил» принять из рисунка 3.8 и таблицы 3.1.

### 3.4 Методические указания для выполнения РГР «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

- 1 Вычертить в масштабе схему рамы, приложить внешние нагрузки, оставить на этой странице место для схем и эпюр.
- 2 Определить степень статической неопределимости системы.
- 3 Выбрать основную и эквивалентную системы.
- 4 Составить канонические уравнения метода сил.
- 5 Построить в основной системе эпюры изгибающих моментов от действия заданной нагрузки  $M_F$ .
- 6 Построить в основной системе эпюры изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  от действия единичных сил, заменяющих неизвестные силы.
- 7 Определить коэффициенты канонических уравнений путем перемножения эпюр способом Верещагина.
- 8 Полученные значения коэффициентов подставить в канонические уравнения и определить неизвестные силы.
- 9 Найденные значения сил приложить к основной системе, и построить суммарную эпюру изгибающих моментов.
- 10 Выполнить статическую и деформационную проверки.
- 11 Построить эпюры поперечных и продольных сил.
- 12 Определить положение опасного сечения.
- 13 Подобрать размеры поперечного сечения.

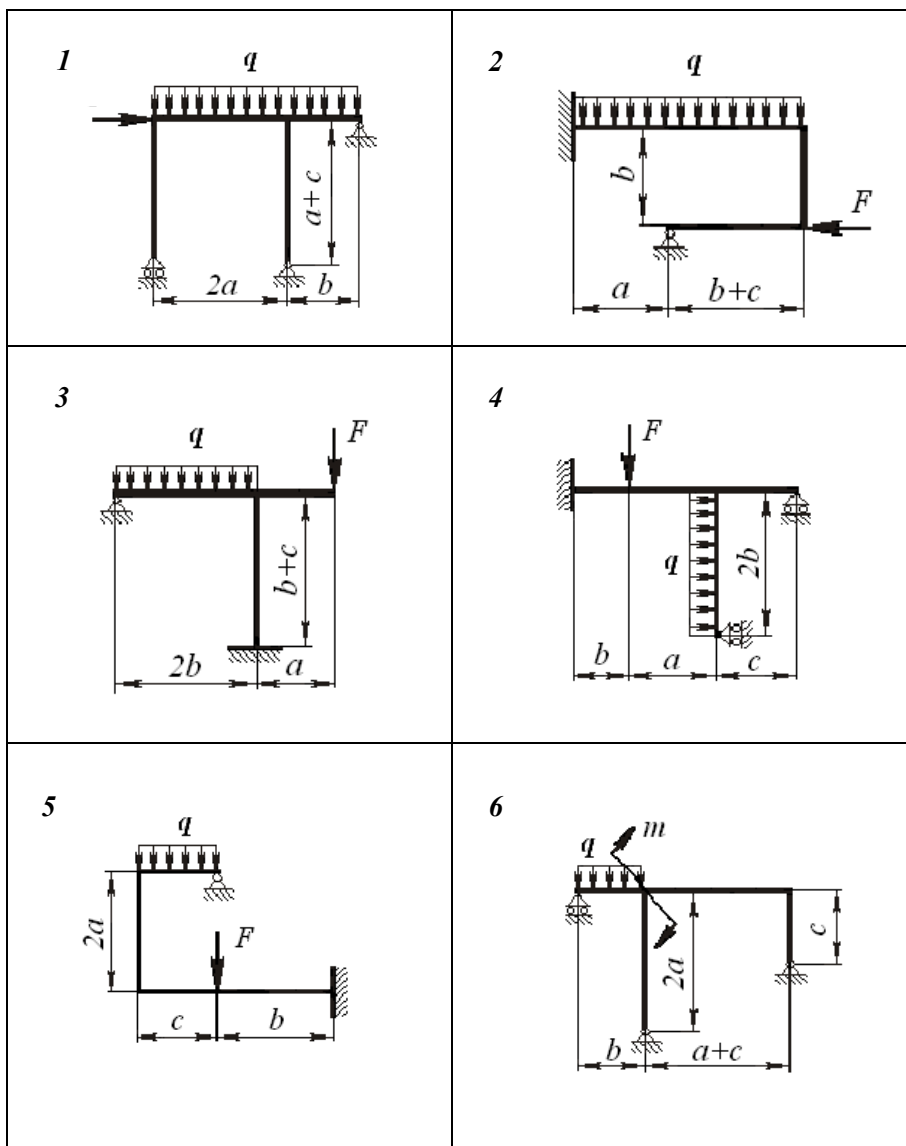
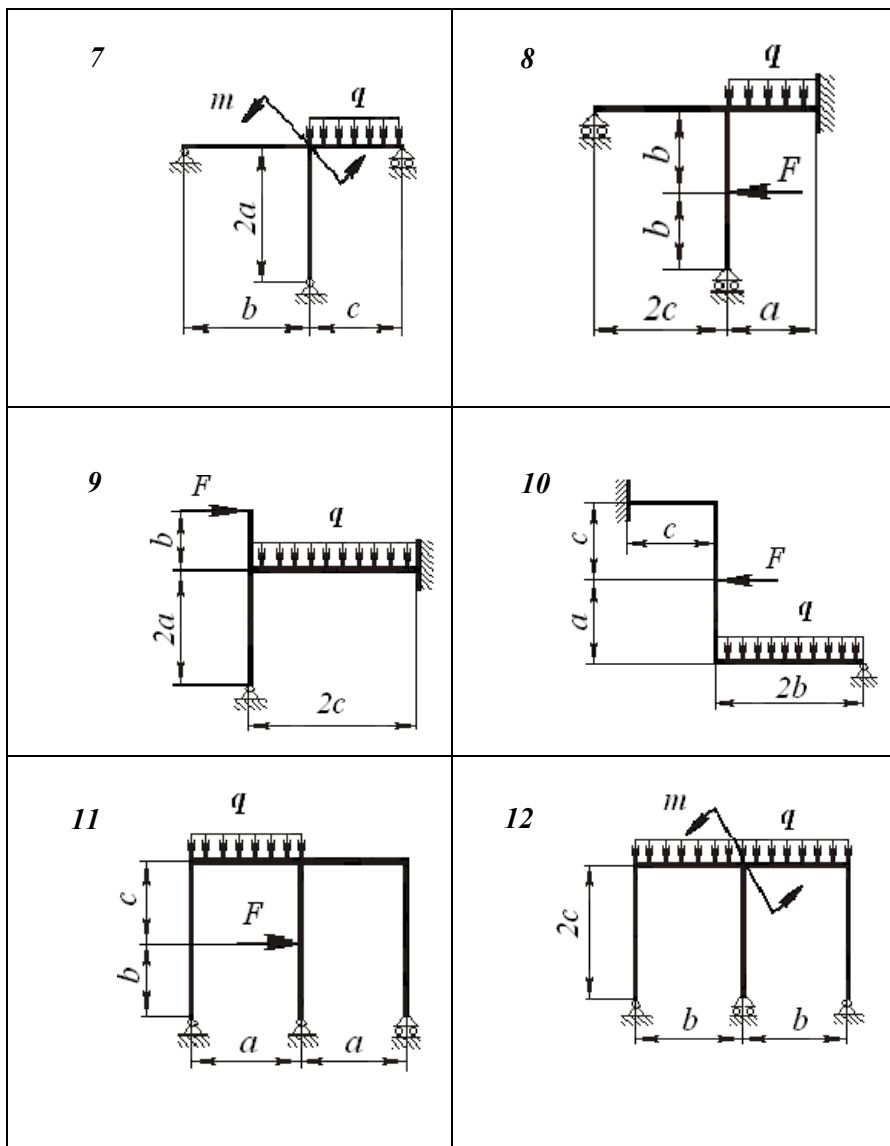
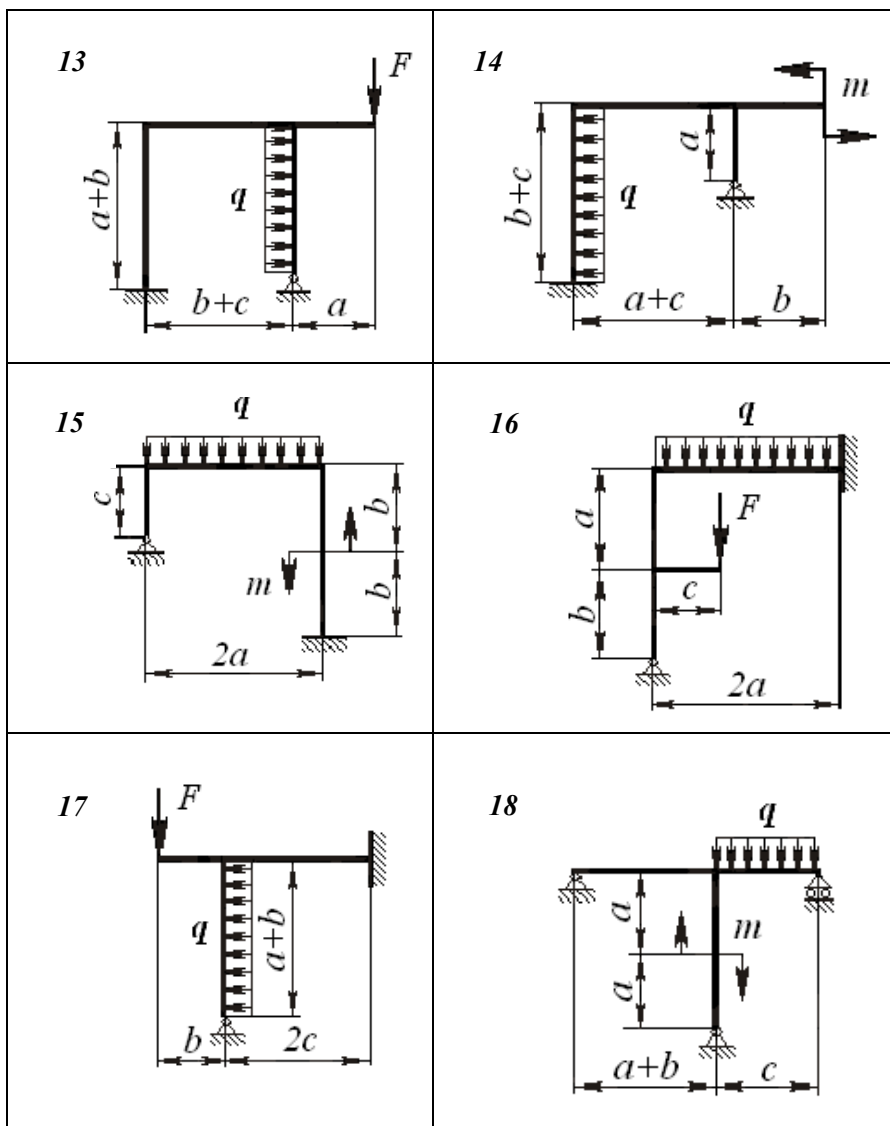


Рисунок 3.8 – Схемы к РГР «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

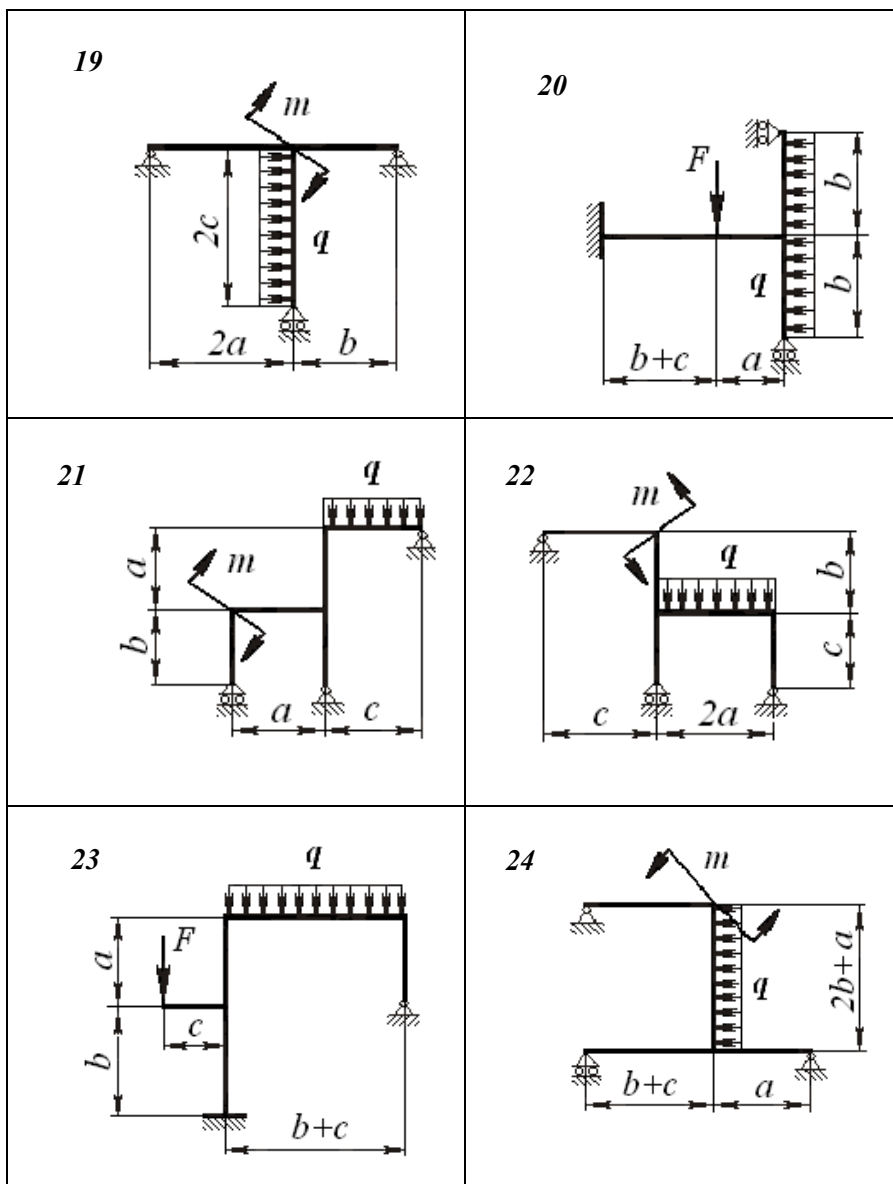


Продолжение рисунка 3.8

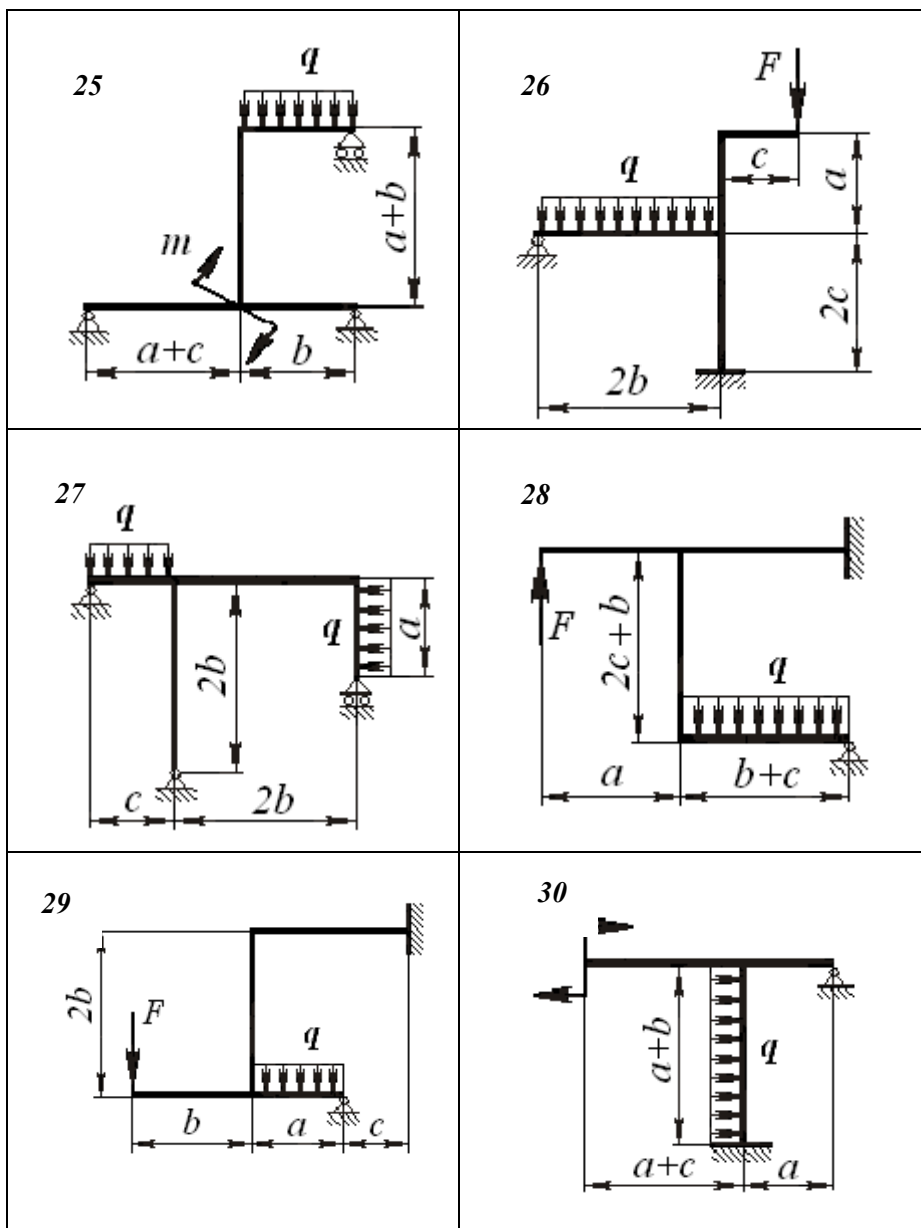




Продолжение рисунка 3.8



Продолжение рисунка 3.8



Окончание рисунка 3.8  
Таблица 3.1 – Числовые данные к РГР

«Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил»

№ строки	Размеры, м			Нагрузки		
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>m</i> , кН·м	<i>F</i> , кН	<i>p</i> , кН/м
1	1	1,4	0,8	8	12	10
2	1,2	1,5	1	10	6	8
3	1,5	1,2	1	12	4	10
4	1	0,8	1,5	14	10	16
5	1,6	1,2	1	15	8	10
6	1,4	1	1,2	6	9	8
7	1,2	1,4	0,8	12	15	10
8	1	1,2	1,4	10	8	12
9	1,2	1	1,2	8	10	14
10	1,6	0,9	1,4	15	9	10
11	1,5	1,2	0,8	10	6	12
12	1	1,4	1	6	4	10
13	1,8	0,9	1,4	5	14	8
14	1	1,6	1,2	12	10	14
15	1,5	1,2	1,4	8	16	10
16	1,4	1	1,5	10	5	15
17	1	1,5	1	14	7	12
18	1,6	1	1,4	12	9	10
19	1,5	1	1,2	10	8	14
20	1,8	1	1,5	8	12	12
21	1,7	1,5	0,7	5	8	16
22	1,5	1	0,8	12	10	8
23	1	1,7	1,4	6	5	12
24	1,6	1,5	1	10	14	6
25	1,7	1	1,5	8	6	10
26	1,8	1,2	1	14	12	7
27	1,5	1,5	1,2	5	10	14
28	1	1,6	0,8	12	14	10
29	1,7	1,2	1	10	12	8
30	1,8	1	1,2	6	10	12

## 4 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Литература: [1, С. 173–176], [2, С. 598–621], [3, 7, задачи № 12.5, 12.6, 12.8, 12.10, 12.17].

Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия упругих тел. Устойчивость прямолинейной формы сжатых стержней. Критическая сила. Формула Эйлера. Влияние закрепления концов стержня на величину критической силы. Пределы применимости формулы Эйлера. Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности, формула Ясинского. Расчет на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемых напряжений. Условие устойчивости сжатых стержней. Практические расчеты стержней на устойчивость. Выбор материалов и рациональной формы поперечных сечений для сжатых стержней.

### 4.1 Основные понятия

До сих пор мы рассматривали методы определения напряжений и перемещений, возникающих в стержнях, и, соответственно, занимались оценкой их прочности и жесткости. Однако оказывается, что соблюдение условий прочности и жесткости еще не гарантирует способности конструкций выполнять предназначенные им функции в эксплуатационных режимах. Наряду с выполнением условий прочности и жесткости, необходимо обеспечить и *устойчивость конструкций*.

При неизменной схеме нагружения под устойчивостью понимается способность системы сохранять свое первоначальное равновесное состояние. Если рассматриваемая система таким свойством не обладает, то она называется *неустойчивой*, а ее равновесное состояние – *неустойчивым состоянием*.

При неизменной схеме нагружения в процессе роста интенсивности нагрузок явление перехода системы от одного равновесного состояния к другому равновесному состоянию называется *потерей устойчивости системы*. Значения внешних сил, при которых происходит потеря устойчивости, называются *критическими*.

В некоторых случаях при потере устойчивости система, переходя в новое устойчивое равновесное состояние, продолжает выполнять свои функции. Однако в большинстве случаев потеря устойчивости системы сопровождается возникновением больших перемещений, пластических деформаций или ее полным разрушением. Поэтому сохранение исходного (расчетного) равновесного состоя-

ния системы является важной задачей и одной из основных проблем сопротивления материалов.

Основная задача теории устойчивости заключается в определении критического значения внешних сил и ограничение их величин таким образом, чтобы исключить возможность потери устойчивости заданной системы в эксплуатационных режимах.

Пусть вертикальный стержень закреплен нижним концом, а на свободном верхнем конце центрально приложена продольная сила (рисунок 4.1). На начальном этапе нагружения равновесное состояние системы определяется как простое продольное сжатие, так как на данном этапе нагружения в поперечных сечениях стержня, за исключением продольной силы, остальные силовые факторы равны нулю. При дальнейшем росте внешней силы  $F$ , обнаруживается, что при некотором ее значении  $F = F_K$ , стержень изогнется. Так как явление изгиба тесно связано с действием изгибающих моментов, возникающих в поперечных сечениях стержня, можем утверждать, что при  $F = F_K$  происходила смена формы равновесного состояния системы. Если на начальном этапе нагружения  $F < F_K$ , равновесное состояние вертикального стержня определялось как простое сжатие, то при  $F > F_K$  сжатие сопровождается изгибом. Это означает, что при  $F = F_K$  происходила потеря устойчивости системы.

Следует отметить, что в данном случае смена формы равновесного состояния сопровождается и сменой формы деформирования: в докритическом – прямолинейная форма деформирования, в закритическом – криволинейная, а в критическом – смешанная.

Заметим также, что для гибких стержней потеря устойчивости может наступить при напряжениях, значительно меньших предела прочности материалов. Поэтому расчет стержней должен выполняться при условии, что сжимающие напряжения не превышают критического значения с точки зрения потери их устойчивости.

Наиболее типичным примером является работа стержня, сжатого силами  $F$ . При проверке на прочность мы имели условие

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]. \quad (4.1)$$

Это условие предполагает, что стержень все время, вплоть до разрушения, работает только на осевое сжатие. Простейшие опыты показывают, что далеко не всегда возможно разрушить стержень путем доведения напряжений сжатия до предела текучести или до предела прочности материала.

Для центрального сжатого длинного стержня возможны две формы равновесия (рисунок 4.1): прямолинейная, когда  $F < F_k$ , и криволинейная, когда  $F \geq F_k$ . Сила  $F_k$  называется *критической*. Критическая — это такая наименьшая сила, при которой прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой. Критическая сила (при потере устойчивости в упругой стадии) вычисляется по формуле Эйлера:

$$F_{\text{ê}} = \frac{\pi^2 E I_{\text{min}}}{(\mu l)^2}, \quad (4.2)$$

где  $I_{\text{min}}$  — минимальный момент инерции поперечного сечения стержня;

$l$  — длина стержня;

$\mu$  — коэффициент приведения длины, величина которого зависит от способов закрепления концов стержня.

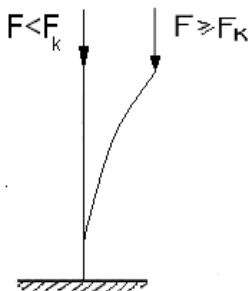


Рисунок 4.1 – Формы равновесия сжатого стержня

Для четырех, наиболее часто встречающихся случаев закрепления концов стержня коэффициент  $\mu$  имеет следующие значения (таблица 4.1).

Напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня при  $F = F_k$ , называются *критическими* и определяются по формуле:

$$\sigma_{\text{ê}} = \frac{F_{\text{ê}}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\text{min}}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (4.3)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения стержня;





$E$  — модуль продольной упругости материала стержня;

$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}}$  — гибкость стержня;

$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  — минимальный радиус инерции сечения.

Формула Эйлера применима, когда критические напряжения в материале стержня  $\sigma_k$  не превышают предела пропорциональности  $\sigma_n$  ( $\sigma_k \leq \sigma_n$ ).

Таблица 4.1– Зависимость коэффициента приведения длины от способа закрепления

Способ закрепления стержня по концам	Схема закрепления стержня	Коэффициент приведения длины $\mu$	Критическая сила $F_k$
Оба конца шарнирно закреплены		1	$\frac{\pi^2 E I_{\min}}{l^2}$
Один конец жестко защемлен, другой – свободен		2	$\frac{\pi^2 E I_{\min}}{4 l^2}$
Оба конца защемлены		0,5	$\frac{4 \pi^2 E I_{\min}}{l^2}$
Один конец защемлен, другой — шарнирно закреплен		0,7	$\approx \frac{2 \pi^2 E I_{\min}}{l^2}$



$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{г}} . \quad (4.4)$$

Обычно условие применимости (4.4) формулы Эйлера выражают через гибкость стержня, т.е. формула Эйлера применима, когда гибкость стержня больше предельной, где

$$\lambda \geq \lambda_{\text{гпред}} , \quad (4.5)$$

$$\lambda_{\text{гпред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 A}{\sigma_{\text{г}}}} . \quad (4.6)$$

Предельная гибкость стержня зависит от материала. Примерные значения предельной гибкости: для стали Ст2 и Ст3  $\lambda_{\text{гпред}} \approx 100$ , для стали Ст5  $\lambda_{\text{гпред}} \approx 90$ , для чугуна  $\lambda_{\text{гпред}} \approx 80$ , для дерева (сосны)  $\lambda_{\text{гпред}} \approx 70$ , для некоторых марок легированной стали  $\lambda_{\text{гпред}} \approx 60 \div 70$ .

Для стержней, имеющих жесткость, меньшую предельной, т.е. у которых напряжения превышают предел пропорциональности и потеря устойчивости наступает в пластической стадии, критические напряжения определяются по эмпирической формуле Ясинского:

$$\sigma_{\text{к}} = a - b\lambda - c\lambda^2 , \quad (4.7)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – опытные коэффициенты, зависящие от свойств материала и имеющие размерность напряжения.

Для стержней, изготовленных из пластичных материалов, формула Ясинского применима при гибкостях

$$\lambda_{\text{г}} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{гпред}} , \quad (4.8)$$

где  $\lambda_{\text{г}}$  – значение гибкости, при которой критическое напряжение равно пределу текучести ( $\sigma_{\text{т}}$ ) материала стержня.

При гибкости стержня  $\lambda < \lambda_{\text{г}}$  критическое напряжение принимается постоянным и равным пределу текучести материала, т.е.  $\sigma_{\text{к}} = \sigma_{\text{г}}$ .

Критическая сила в этом случае вычисляется по формуле

$$F_{\text{к}} = \sigma_{\text{к}} A_{\text{брутто}} , \quad (4.9)$$

где  $A_{\text{брутто}}$  – площадь поперечного сечения стержня без учета местных ослаблений.

Допускаемая величина сжимающей силы определяется по формуле:

$$[F] = \frac{F_{\text{к}}}{[n_{\text{г}}]} , \quad (4.10)$$

где  $[n_{\text{г}}]$  – требуемый (допускаемый) коэффициент безопасности на устойчивость.

Коэффициент безопасности на устойчивость всегда принимается несколько больше коэффициента безопасности на прочность. Это делается потому, что для центрально сжатых стержней ряд обстоятельств почти неизбежен на практике: эксцентриситет приложения, неоднородность материала, способствуют продольному изгибу, в то время как при других видах нагружения эти обстоятельства почти не влияют на прочность. Коэффициент безопасности на устойчивость принимают в пределах: для сталей  $[n_y] = 1,8 \div 3,0$ ; для чугуна  $[n_y] = 5,0 \div 5,5$ ; для дерева  $[n_y] = 2,8 \div 3,2$ .

На практике, в основном при расчете элементов строительных конструкций и стальных конструкций подъемно-транспортных машин, применяется так называемый практический метод расчета на продольный изгиб. Расчет на устойчивость по этому методу производится на простое сжатие, но со сниженным допускаемым напряжением.

Расчетная формула (условие устойчивости)

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{доп}}} \leq [\sigma_y], \quad (4.11)$$

где  $[\sigma_y]$  — допускаемое напряжение на устойчивость, равное  $[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c]$ ;

$\varphi$  — коэффициент снижения допускаемого напряжения или коэффициент продольного изгиба;

$[\sigma_c]$  — допускаемое напряжение на сжатие для материала стержня.

Следует отметить, что сжатые стержни должны удовлетворять и условию прочности

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma_{\text{п}}], \quad (4.12)$$

где  $A_{\text{нетто}}$  — площадь поперечного сечения стержня с учетом местных ослаблений.

Таблица 4.2 – Коэффициент  $\varphi$  снижения допускаемых напряжений

Гибкость стержня $\lambda$	Сталь Ст 4,3, 2	Сталь Ст 5	Бетон		Дюралюминий Д16Т	Чугун СЧ 15-30 СЧ 15-18 СЧ 15-36 СЧ 21-40	Дерево (сосна)
			тяжелый	легкий			
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	1,00	1,00	0,999	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,96	0,96	0,998	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,90	0,86	0,835	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,84	0,73	0,700	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,76	0,68	0,568	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,70	0,59	0,455	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,63	0,52	0,353	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,57	0,46	0,269	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,51	-	0,212	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,45	-	0,172	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	-	0,142	-	0,25
120	0,45	0,36	-	-	0,119	-	0,22
130	0,40	0,33	-	-	0,101	-	0,18
140	0,36	0,29	-	-	0,087	-	0,16
150	0,32	0,26	-	-	0,076	-	0,14
160	0,29	0,24	-	-	-	-	0,12
170	0,26	0,21	-	-	-	-	0,11
180	0,23	0,19	-	-	-	-	0,10
190	0,21	0,17	-	-	-	-	0,09
200	0,19	0,16	-	-	-	-	0,08

## 4.2 Примеры решения задач

**Пример 4.1** Определить размеры поперечного сечения деревянной стойки длиной  $l=2,5\text{ м}$  нагруженной силой  $F=22\text{ кН}$  (рисунок 4.2).

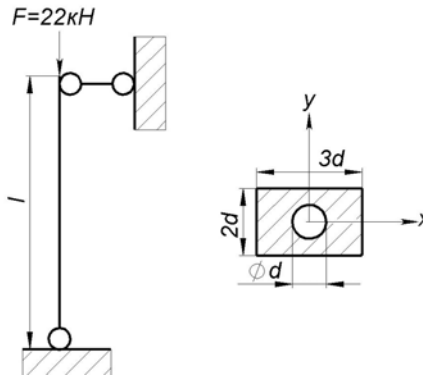


Рисунок 4.2

Решение:

Условие устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A_{\dot{a}\delta}} \leq \varphi[\sigma].$$

Отсюда

$$A_{\dot{a}\delta} = \frac{F}{\varphi[\sigma]}.$$

Площадь поперечного сечения исходя из размеров

$$A_{\dot{a}\delta} = 3d \cdot 2d - \frac{\pi d^2}{4} = 5,215d^2.$$

Отсюда

$$d = \sqrt{\frac{A_{\dot{a}\delta}}{5,215}}.$$

Минимальный осевой момент инерции будет относительно оси X и равен

$$I_{\min} = I_x = \frac{3d \cdot (2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 1,95d^4.$$

Минимальный радиус инерции равен

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}}} = \sqrt{\frac{1,95d^4}{5,215d^2}} = 0,612d.$$

Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \times 2500}{0,612d} = \frac{4085}{d}.$$

В первом приближении задаем  $\varphi_0 = 0,5$ .

Тогда площадь

$$A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}} = \frac{22000}{0,5 \times 8} = 5500 \text{ и } d = \sqrt{\frac{5500}{5,215}} = 32 \text{ и } \lambda = \frac{4085}{32} = 127$$

По таблице 4.2 для гибкости  $\lambda = 120$   $\varphi = 0,22$ , для  $\lambda = 130$   $\varphi = 0,18$ .

Интерполируя для  $\lambda = 127$ ,  $\varphi_1 = 0,22 - \frac{0,22 - 0,18}{130 - 120}(127 - 120) = 0,19$ .

Т.к.  $\varphi_1 = 0,19 < \varphi_0 = 0,5$  необходимо выполнить второе приближение.

Задаем коэффициент  $\varphi_2 = \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} = \frac{0,5 + 0,19}{2} = 0,35$ .

И производим вновь вычисления

$$A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}} = \frac{22000}{0,35 \cdot 8} = 7857 \text{ и } d = \sqrt{\frac{7857}{5,215}} = 39 \text{ и } \lambda = \frac{4085}{39} = 105.$$

По таблице 4.2 для  $\lambda = 100$   $\varphi = 0,31$ , для  $\lambda = 110$ ,  $\varphi = 0,25$

Интерполируя для  $\lambda = 105$ ,  $\varphi_3 = 0,31 - \frac{0,31 - 0,25}{110 - 100}(105 - 100) = 0,28$ .

Т.к.  $\varphi_3 = 0,28 < \varphi_2 = 0,35$ , необходимо выполнить третье приближение.

Задаем коэффициент  $\varphi_4 = \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} = \frac{0,35 + 0,28}{2} = 0,32$ .

И производим вновь вычисления:

$$A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}} = \frac{22000}{0,32 \cdot 8} = 8594 \text{ и } d = \sqrt{\frac{8594}{5,215}} = 41 \text{ и } \lambda = \frac{4085}{41} = 100.$$

По таблице 4.2 для  $\lambda = 100$   $\varphi_5 = 0,31$ .

Т.к.  $\varphi_4 = 0,32 \approx \varphi_5 = 0,31$  приближение заканчиваем и принимаем  $d = 41 \text{ мм}$ ,  $A = 8594 \text{ мм}^2$ ,  $I_{\min} = 1,95d^4 = 1,95 \times 41^4 = 5,5 \times 10^6 \text{ мм}^4$ ,  $\varphi_3 = 0,31$ .

Определяем напряжение в материале стойки

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{22000}{8594} = 2,56 \text{ МПа}$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_{\delta}] = \varphi \cdot [\sigma] = 0,31 \cdot 8 = 2,48 \text{ МПа}$$

Перегрузка

$$\frac{\sigma - [\sigma_{\delta}]}{[\sigma_{\delta}]} \cdot 100\% = \frac{2,56 - 2,48}{2,48} \cdot 100\% = 3,2\% < [5\%].$$

Т.к. фактическая гибкость  $\lambda = 100 > \lambda_{\text{крит}} = 70$  критическую силу определяем по формуле Эйлера

$$F_{\text{крит}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 0,8 \times 10^4 \times 5,5 \times 10^6}{(1 \times 2500)^2} = 69412 \text{ Н} \approx 69 \text{ кН}$$

Коэффициент запаса по устойчивости

$$n_y = \frac{F_{\text{крит}}}{F} = \frac{69412}{22000} = 3,2$$

**Пример 4.2** Подобрать двутавровое сечение стойки, изготовленной из стали Ст3 с одним защемленным концом, второй конец свободен и сжатой силой  $F = 400 \text{ кН}$ ; длина стойки  $l = 1,5 \text{ м}$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$  (рисунок 4.3).



Рисунок 4.3 – Расчетная схема сжатой стойки

Так как в условии устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}} \leq \varphi[\sigma]$$

неизвестно ни  $A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}$ , ни  $\varphi$ , одной из этих величин необходимо задаться. Примем для первого приближения  $\varphi_0 = 0,5$ . В этом случае необходимая площадь поперечного сечения стержня будет равна

$$A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}} = \frac{F}{\varphi_0[\sigma]},$$

или

$$A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}} = \frac{400000}{0,5 \times 160} = 5000 \text{ мм}^2.$$

По таблице сортамента выбираем двутавр №24а с площадью поперечного сечения  $A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}} = 52,6 \text{ см}^2$ .

$$\text{Наименьший радиус инерции сечения } i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}}} = 2,38 \text{ см}.$$

Соответствующая гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \times 150}{2,38} = 126.$$

По таблице 4.3 для  $\lambda = 120$   $\varphi = 0,45$ ; для  $\lambda = 130$   $\varphi = 0,40$ .

Коэффициент  $\varphi$  по интерполяции между значениями его из таблицы для  $\lambda = 120$  и  $\lambda = 130$  равен  $\varphi = 0,43$ . Расчетным напряжением будет:

$$\sigma_{\delta} = \frac{F}{\varphi F} = \frac{400000}{0,43 \times 52,6 \times 10^2} = 177 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет  $\frac{177 - 160}{160} \times 100 = 10,7\%$ . Подбираем двутавр № 27а.  $A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}} = 54,6 \text{ см}^2$ ;  $i_{\min} = 2,51 \text{ см}$ ; наибольшая его гибкость  $\lambda = \frac{2 \times 150}{2,51} = 120$ . Так как коэффициент  $\varphi = 0,45$ , то расчетное напряжение

$$\sigma = \frac{F}{A_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}} = \frac{400000}{0,45 \times 54,6} = 162,5 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{162,5 - 160}{160} \cdot 100\% = 1,5\% < [5\%], \text{ что допустимо.}$$

**Пример 4.3** Определим предельную гибкость для стержней, изготовленных из перечисленных материалов:

Сталь Ст3  $\sigma_i = 200 \text{ МПа}$  ,  $A = 2 \times 10^5 \text{ мм}^4$  ,

Сталь Ст5  $\sigma_i = 240 \text{ МПа}$  ,  $A = 2 \times 10^5 \text{ мм}^4$  ,

Дюралюминий Д16Т  $\sigma_i = 177 \text{ МПа}$  ,  $A = 0,7 \times 10^5 \text{ мм}^4$  ,

Дерево (сосна)  $\sigma_i = 20 \text{ МПа}$  ,  $A = 10^4 \text{ мм}^4$  ,

Чугун  $\sigma_i = 150 \text{ МПа}$  ,  $A = 10^5 \text{ мм}^4$  .

Решение:

Предельную гибкость определяем по формуле:

$$\lambda_{i\text{д}\ddot{a}\ddot{a}} = \sqrt{\frac{\pi^2 A}{\sigma_i}} .$$

Для стали Ст3  $\lambda_{i\text{д}\ddot{a}\ddot{a}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 2 \times 10^5}{200}} = 99,3 .$

Для стали Ст5  $\lambda_{i\text{д}\ddot{a}\ddot{a}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 2 \times 10^5}{240}} = 91 .$

Для дюралюминия Д16Т  $\lambda_{i\text{д}\ddot{a}\ddot{a}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 0,7 \times 10^5}{177}} \approx 62 .$

Для дерева (сосна)  $\lambda_{i\text{д}\ddot{a}\ddot{a}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 1,1 \times 10^4}{20}} \approx 70 .$

Для чугуна  $\lambda_{i\text{д}\ddot{a}\ddot{a}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 10^5}{150}} = 81 .$

### 4.3 Расчетно-графическая работа (РГР) «Устойчивость сжатых стержней»

Для заданного стержня, нагруженного сосредоточенной силой  $F$ , как показано на рисунке 4.4, требуется:

- 1 Определить размеры поперечного сечения;
- 2 Определить критическую силу для заданной стойки и вычислить коэффициент безопасности на устойчивость.



Исходные данные для выполнения РГР «Устойчивость сжатых стержней» принять из рисунка 4.4 и таблицы 4.2 (двутавр ГОСТ 8239-89, швеллер ГОСТ 8240-89, уголок неравнополочный ГОСТ 8510-72). При расчетах использовать двутавр ГОСТ 8239-89, швеллер ГОСТ 8240-89, уголок неравнополочный ГОСТ 8510-72.

#### 4.4 Методические указания для выполнения РГР «Устойчивость сжатых стержней»

- 1 Вычертить в масштабе схему и поперечное сечение стойки.
- 2 В поперечном сечении стойки провести главные центральные оси. Найти ось, относительно которой осевой момент инерции минимальный ( $I_{min}$ ), при необходимости путем вычислений.
- 3 Выразить в долях искомого размера ( $a$ ) сечения следующие геометрические характеристики: площадь ( $A$ ), осевой момент инерции ( $I_{min}$ ) и минимальный радиус инерции ( $i_{min}$ ).
- 4 Для решения задачи использовать метод последовательных приближений, задаваясь коэффициентом продольного изгиба ( $\varphi$ ); в первом приближении принять  $\varphi_0 = 0,5$ .
- 5 Решение производить до тех пор, пока разность между нормальными напряжениями стойки и допускаемыми напряжениями на устойчивость будет не более 5%.
- 6 По соответствующей формуле (в зависимости от фактической и предельной гибкостей) определить критическую силу или критическое напряжение для заданной стойки и вычислить коэффициент безопасности на устойчивость.

Таблица 4.2 – Числовые данные к РГР «Устойчивость сжатых стержней»

№	$l$ , м	$F$ , кН	№	$l$ , м	$F$ , кН	№	$l$ , м	$F$ , кН	№	$l$ , м	$F$ , кН
1	1,8	100	9	2,0	150	17	2,2	200	25	2,4	200
2	2,6	220	10	2,8	180	18	3,0	180	26	3,2	100
3	3,4	340	11	3,6	300	19	3,8	250	27	4,0	200
4	4,2	140	12	4,4	100	20	4,6	480	28	3,6	300
5	3,2	160	13	3,6	320	21	2,4	460	29	3,8	250
6	4,0	200	14	3,8	240	22	3,6	480	30	3,4	500
7	3,2	220	15	3,0	160	23	2,8	500	31	2,6	150
8	2,4	290	16	2,2	140	24	2,0	60	32	1,8	320

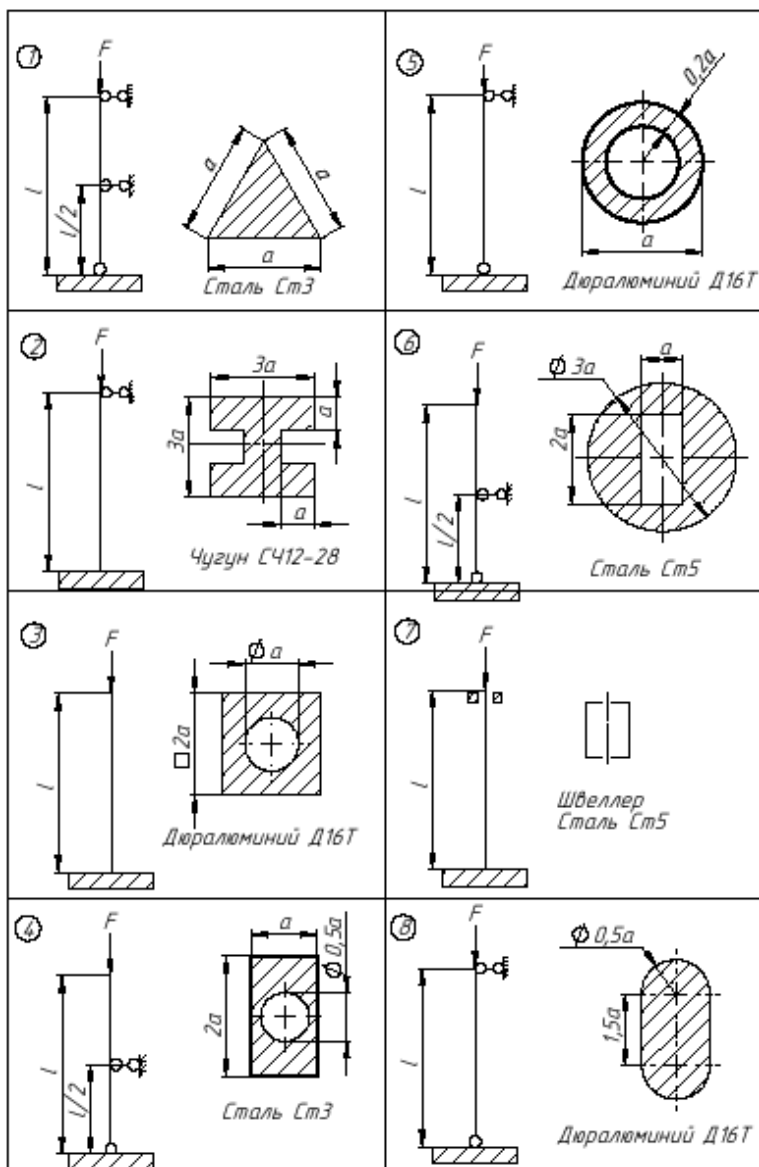
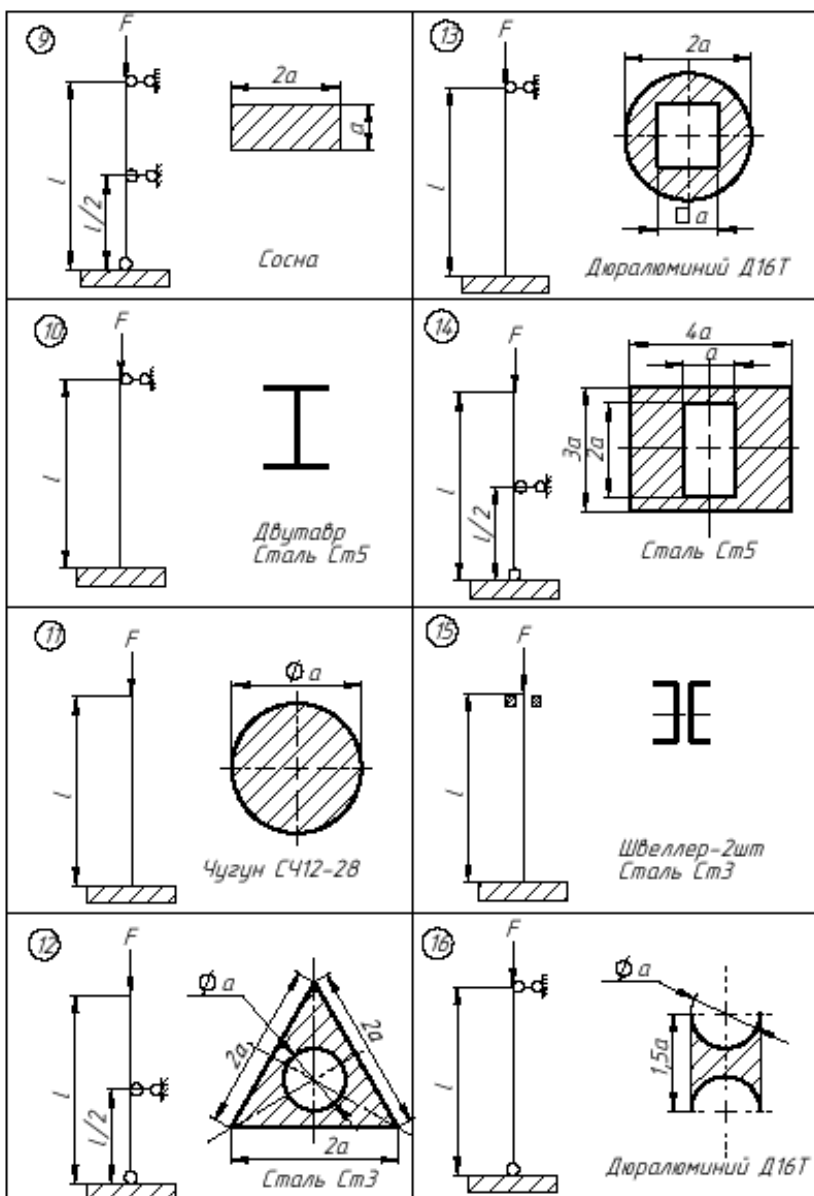
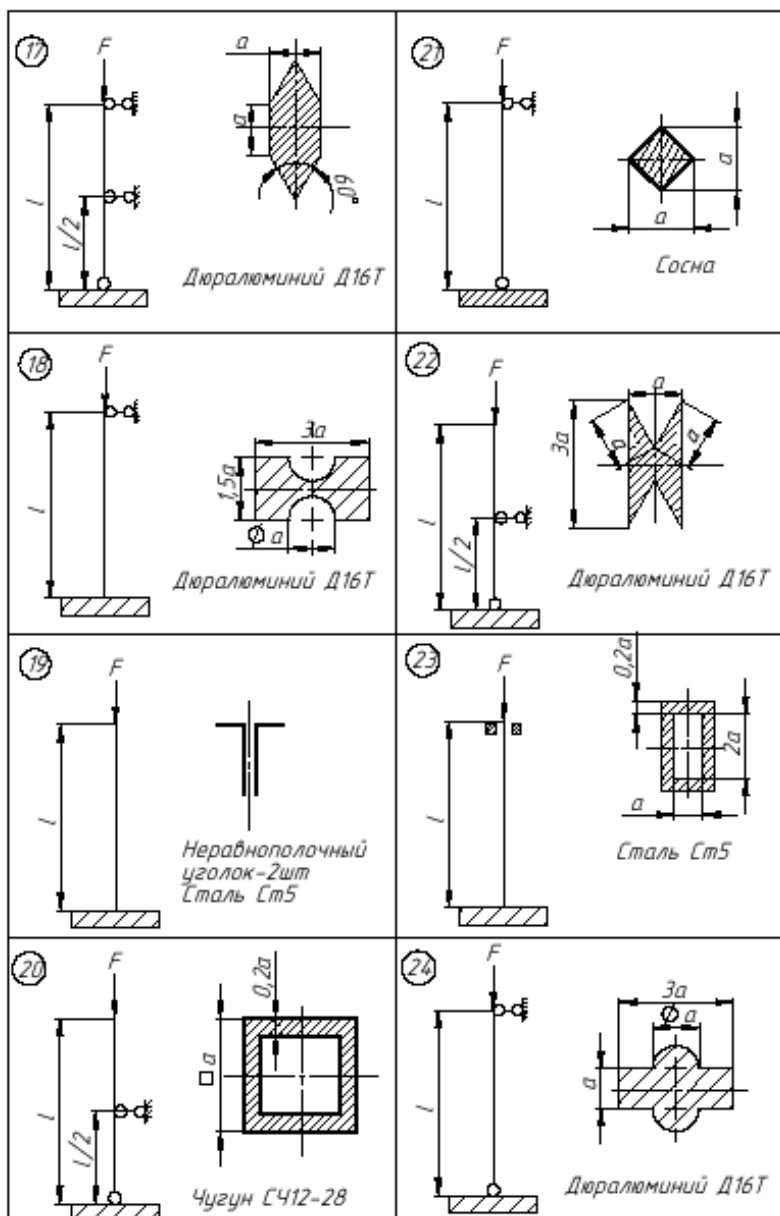


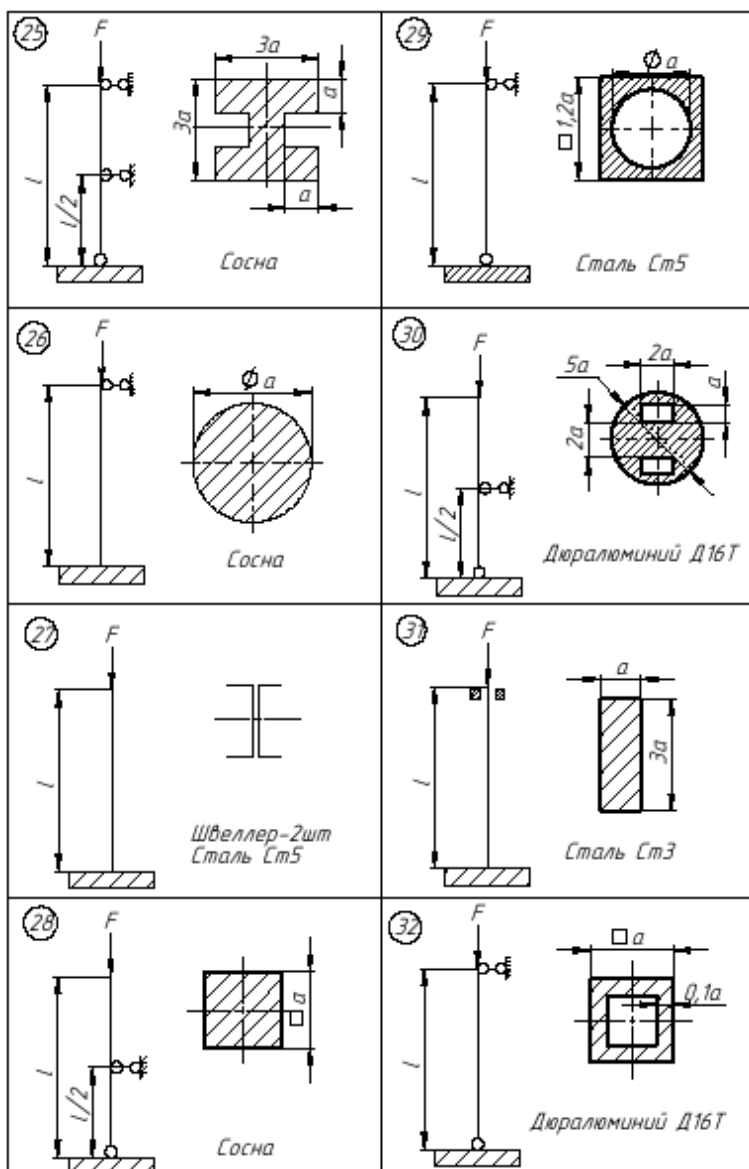
Рисунок 4.4 – Схемы к РГР «Устойчивость сжатых стержней»



Продолжение рисунка 4.4



Продолжение рисунка 4.4



Окончание рисунка 4.4

## ЛИТЕРАТУРА

### *Основная*

- 1 Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов : учебник для вузов – 9-е изд. перераб. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
- 2 Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов. – Мн.: Выш. шк., 2007. – 797 с.: ил.
- 3 Сборник задач по сопротивлению материалов под редакцией В.К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.

### *Дополнительная*

- 4 Дарков, А.В. Сопротивление материалов : учебник для техн. вузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.: ил.
- 5 Сопротивление материалов. Руководство к решению задач / М.Д. Подскребко, О.И. Мисуно, С.А. Легенький. – Мн.: БГАТУ, 2004. – 80 с.
- 6 Сопротивление материалов : метод. пособие для самостоятельной работы студентов второго и третьего курсов / А.Е. Тетеркин, Д.Н. Колоско. – Мн.: БГАТУ, 2002. – 126 с.
- 7 Задачи по сопротивлению материалов (из сборника задач под ред. В.К. Качурина) / А.Е. Тетеркин. – Мн.: БИМСХ, 1988. – 80 с.
- 8 Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф. Винокуров [и др.]. – Мн.: 1988.
- 9 Сопротивление материалов : учеб.-метод. пособие и контрольные задания для студ.-заочн. / О.И. Мисуно, Д.Н. Колоско, С.А. Легенький. – Мн.: БГАТУ, 2005. – 50 с.

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Кафедра «Сопротивление материалов  
и детали машин»**

*Расчетно-графическая работа  
по дисциплине «Механика материалов»  
на тему: \_\_\_\_\_*

Вариант:  
схема № \_\_\_\_\_; строка № \_\_\_\_\_

Выполнил:  
студент \_\_\_\_\_  
группа \_\_\_\_\_

Проверил:  
\_\_\_\_\_

Минск 200\_\_

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1 ИЗГИБ . . . . .	4
1.1 Виды изгибов . . . . .	5
1.2 Внутренние силовые факторы – поперечная сила $Q_y$ и изгибающий момент $M_z$ . . . . .	5
1.3 Напряжения в поперечных сечениях балки при чистом изгибе. . . . .	8
1.4 Касательные напряжения при поперечном изгибе . . . . .	11
1.5 Расчет балок на прочность при изгибе . . . . .	13
1.6 Метод начальных параметров . . . . .	16
1.7 Пример решения задачи (балка) . . . . .	21
1.8 Пример решения задачи (рама) . . . . .	29
1.9 Расчетно-графическая работа (РГР) «Прямой поперечный изгиб» . . . . .	34
1.10 Методические указания для выполнения РГР «Прямой поперечный изгиб» . . . . .	51
2 КОСОЙ ИЗГИБ . . . . .	52
2.1 Основные понятия. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса. Условие прочности . . . . .	52
2.2 Пример решения задачи . . . . .	58
2.3 Расчетно-графическая работа (РГР) «Косой изгиб» . . . . .	65
2.4 Методические указания для выполнения РГР «Косой изгиб» . . . . .	66
3 РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ . . . . .	74
3.1 Основные понятия . . . . .	74
3.2 Пример решения задачи . . . . .	78
3.3 Расчетно-графическая работа (РГР) «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил» . . . . .	85
3.4 Методические указания для выполнения РГР «Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил» . . . . .	86
4 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ . . . . .	93
4.1 Основные понятия. . . . .	93
4.2 Примеры решения задач . . . . .	100
4.3 Расчетно-графическая работа (РГР) «Устойчивость сжатых стержней» . . . . .	104
4.4 Методические указания для выполнения РГР «Устойчивость сжатых стержней» . . . . .	105
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	110
ПРИЛОЖЕНИЕ . . . . .	111



Учебное издание

## **МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

*Учебно-методическое пособие и задания  
к расчетно-графическим работам для студентов  
дневной формы обучения*

Составители:

**Мисуно** Олег Иосифович,  
**Колоско** Дина Николаевна,  
**Легенький** Сергей Александрович

Ответственный за выпуск *В.Н. Основин*

Редактор *А.П. Бондич*

Правка, верстка *А.П. Бондич*

Подписано в печать 14.10.2008. Формат 60x84<sup>1/16</sup>

Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 6,51.

Уч.-изд. л. 5,2. Тир. 300 экз. Зак. 891.

Издатель и полиграфическое исполнение

Белорусский государственный аграрный технический университет  
ЛИ № 02330/0133465 от 09.02.05. ЛП № 02330/0131507 от 02.02.05  
220023, Минск, пр. Независимости, 99, к. 2.