где $H(x, t) = \omega_0 x \sum \delta(t - mT)$ -внешнее возмущение, β-коэффициент вязкости, ω_0-собственная частота, k(x)-выражает нелинейную часть зависимости между упругой силой и перемещением, $\varepsilon \ll 1$.

Для амплитуд и фаз, находящихся слева и справа от δ - функции в точке $x_i = iX$ выписаны уравнения в конечных разностях с точностью до ε.

$$A_{i+1} = 2A_i\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\sin 2\varphi_i\right)$$

$$\varphi_{i+1} = \left\{\varphi_i + q_i \sin 2\varphi_i + \varepsilon \cos^2 \varphi_i + \omega_i x\right\}$$

где $q_i = \varepsilon \Delta\omega_i x$; $0 < \varphi < 1$.

Фигурные скобки означают дробную часть аргумента.

Далее исследуется условие некоррелированности фаз, при выполнении которого колебания пластинки носят стохастический характер. Определена граница стохастичности. Для стохастической области с помощью уравнения Лиувилля, записанного в переменных « действие-угол» построено дифференциальное уравнение первого порядка описывающее колебания пластины.

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПАХОТНОГО И ПОДПАХОТНОГО СЛОЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

Ю.В. Чигарев, д.ф.-м.н., проф.,
Н.Н. Романюк (БАТУ)

Рассмотрим колебания жесткого колеса на деформируемом почвогрунте. Будем рассматривать процесс взаимодействия колеса с почвогрунтом при гармонических колебаниях вертикальной нагрузки

$$Q(t) = Q_0 + Q_1 \sin wt \qquad (1)$$

В качестве примера деформируемой полуплоскости рассмотрим торфяной грунт. Согласно Амаряну торфяные грунты по механическим свойствам делятся на четыре типа, которые отличаются друг от друга наличием или отсутствием характерных напластований. В нашей модели верхний пласт представляет собой слой очеса h, а нижний пласт H является водонасыщенным и плотным торфом. Эта модель работает на сжатие и срез под действием нормальной нагрузки Q(t).

При действии на почво-грунт динамических нагрузок, каждая из слоев ведет себя как достаточно однородная среда: давление в жидкости и газе, заполняющих скелет почво-грунта, близко к давлению, действующему на грунт, особенно в случае очень влажных почво-грунтов. В этом случае имеют место малые деформации, быстро изменяющиеся во времени и выбор схемы упругой полуплоскости является более оправданным и возможным, чем в задачах статики.

Рассмотренную послойную структуру торфа можно моделировать для любых типов почв, где h соответствует уплотненному пахотному слою, а H - подпахотному.

Положим, что $Q_0 \gg Q_1$, тогда динамические эффекты будут локализовываться в поверхностном слое h, а на ось колеса будет действовать сила, изменяющаяся со временем по величине, по направлению всегда в сторону полуплоскости. Считаем, что слой h работает подобно слою винклеровских пружин, а поверхность колеса в зоне контакта описывается уравнением f(x).

В дальнейшем всем величинам, относящимся к слою h приписываем индекс 1, а к слою H - индекс 2.

Очевидно, что глубина колеи и линия контакта будут зависеть от значений Q(t) и свойств почво-грунта.

Граничные условия будут иметь вид:

$$y = h:\ \tau_{xy}^{1} = 0; \quad V^1 = \delta - f(x_1);\ |x| \le a;$$

$$y = 0:\ \sigma_y^1 = \sigma_y^2;\ \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 = 0;\ V^2 = V^1; \qquad (2)$$

$$y = -H:\ \tau_{xy}^2 = V^2 = 0;$$

$$y = h:\ \sigma_y^1 = 0 \ \text{для} \ |x| > a,$$

где τ_{xy}^{i} - касательные напряжения;

σ_x, σ_y - напряжения вдоль осей x,y;

δ - вертикальное поступательное перемещение колеса;
a - подвижная граница зоны контакта;
V^i - перемещение точек почво-грунта вдоль оси y (i = 1,2).

Напряженно- деформированное состояние слоя h описывается уравнениями:

$$\varepsilon_y^1 = R\sigma_y^1;$$

$$\sigma_x^1 = \nu_1 (1 - \nu_1)^{-1} \sigma_y^1;$$

$$R = \frac{1 - 2\nu_1}{2G_1(1 - \nu_1)}; \qquad (3)$$

где ν_1 ; G_1 - коэффициенты Пуассона и модуль сдвига.

Пусть ось колеса движется вдоль оси Ox со скоростью v = const, а вращение колеса происходит с постоянной угловой скоростью w. Воспользуемся подвижной - OXY и $O_1X_1Y_1$ - неподвижной системой координат. Линии контакта соответствует участок ($-a(t) \leq x \leq a(t)$).

Между координатной точки X на линии контакта в подвижной системе координат и координатой X_1 той же точки в неподвижной системе координат существует связь

$$X = X_1 - Vt,$$

где t - время.

Уравнение движения слоя h запишем в виде:

$$\frac{\partial\sigma^1}{\partial_y} = \rho_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \qquad (4)$$

где ρ_1 - плотность очесового слоя.

При отсутствии скольжения формула Коши имеет вид:

$$\varepsilon_y^1 = \frac{\partial V^1}{\partial_y}. \qquad (5)$$

Уравнение (5) с учетом (3) примет вид:

$$\varepsilon_y^1 = \frac{\partial V^1}{\partial_y} = RG_y^1. \qquad (6)$$

Дифференцируя (6) по y, получим:

$$\frac{\partial \varepsilon_y^1}{\partial \theta_y} = R\,\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 V^1}{\partial y^2}.$$

Тогда движение слоя h можно описать уравнением

$$\frac{1}{R}\,\frac{\partial^2 V^1}{\partial y^2} = \rho_1\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

которое приводится к виду

$$V^1 = \frac{1}{\mu^2}\int\limits_0^y\int\limits_0^\xi \frac{\partial^2 V^1}{\partial t^2}\,d\eta\, d\xi + C_1 y + C_2,$$

где $$\mu^2 = \frac{1}{R\rho_1}.$$

Коэффициенты C_1 и C_2, которые в общем случае зависят от времени, определим из следующих граничных условий:

$$\frac{\partial V^1}{\partial y}\Big|_{Y=0} = -qR;\quad \frac{\partial V^1}{\partial y}\Big|_{Y=h} = -pR, \qquad (8)$$

где p - нагрузка, действующая на верхнюю границу очесового слоя,

q - реактивная нагрузка, действуюшая на нижнюю грань h со стороны слоя H.

После несложных преобразований, а также учитывая, что на границе контакта слоев точки очесового слоя и слоя H имеют одинаковые перемещения, найдем:

$$C_1 = -\frac{q}{\rho_1\mu^2} = -qR;\quad C_2 = -V^*,$$

где $V^* = -V^1$ на границе $y_1 = 0$.

Подставив (9) в (7), получим

$$V^1 = \frac{1}{\mu^2}\int_0^y\int_0^\xi \frac{\partial^2 V^1}{\partial t^2}\, d\eta d\xi - qRy - V^*.$$

Условие контакта колеса и поч о-грунта имеет вид

$$V^1 = (\delta(t) - f(x)).$$

Последовательное решение контактных задач жестокого колеса и полуплоскости, а также двух полуплоскостей дают выражения для соответствующих контактных напряжений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНКИ В СЛУЧАЕ ЕЁ ШАРНИРНОГО ОПИРАНИЯ

Ю.В. Чигарев, д.ф.-м.н.,проф., С.А. Литвинов(БАТУ)

Исследуем случай нелинейных колебаний пологой цилиндрической панели со сторонами a и b, шарнирно закрепленной по краям, при условии, что точки краев панели свободно смещаются в плане. Будем считать, что оболочка имеет заданные начальные неправильности в форме срединной поверхности. Примем, что к криволинейным краям панели приложены равномерно распределенные по ширине сжимающие усилия р, постоянные во времени, и что оболочка совершает нелинейные колебания под действием случайного акустического давления $q(t)$. Поставим задачу найти плотность распределения вероятности координаты и скорости в центре панели, а также укажем пути исследования данной обслочки на устойчивость.

Пусть на оболочку действует поперечная нагрузка $q(x,y,t) = F\cos\Omega t$, где F является амплитудным значением акустического давления. Обозначим через ω_1 и ω_0 соответственно дополнительный и начальный прогибы. Система основных уравнений для такой оболочки имеет следующий вид: