МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра моделирования и прогнозирования экономики АПК

**И.И. Леньков**

# ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ АПК

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию в области сельского хозяйства в качестве пособия для студентов высших учебных заведений по специальности 1-25 01 07 Экономика и управление на предприятии со специализацией 1-25 01 07 15 Экономика и управление на предприятии агропромышленного комплекса*

Минск
БГАТУ
2009



УДК 631.371:621.1 (07)
ББК 40.7я7
Л22

Рецензенты:
доцент кафедры экономико-математических дисциплин ЧУО «БИП-Институт правоведения», кандидат физико-математических наук *В.А. Цыганов;*
доктор экономических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси *В.Ф. Медведев*

**Леньков, И.И.**
Л22 Экономико-математические методы в экономике АПК: пособие / И.И. Леньков. — Минск : БГАТУ, 2009 — 168 с.
ISBN 978-985-519-192-7.

**УДК 631.371:621.1 (07)**
**ББК 40.7я7**

**ISBN 978-985-519-192-7**

СОДЕРЖАНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Современное производство становится все более сложным и многогранным. Увеличивается число ресурсов, факторов и условий, от которых зависят результаты деятельности коллективов. Изменяются взаимоотношения товаропроизводителей между собой и с государством. Современная экономика, ориентированная на адаптацию к новой системе хозяйствования, привнесла в производственный механизм элементы экономической неопределенности. Это связано с колебанием цен на сельскохозяйственную продукцию и промышленные изделия для аграрного сектора, с последствиями конкуренции производителей и потребителей продукции, с динамизмом конъюнктуры рынка и влиянием на экономику отдельных стран мирового хозяйства.

В совокупности имеет место постоянно возрастающее число вариантов развития экономики при неизменной ограниченности незаменимых ресурсов, необходимости повышения качества продукции и обеспечения конкурентоспособности производства.

Решение перечисленных проблем связано с поиском лучших способов организации производственных процессов, производств, отраслей, предприятий, производственных комплексов и экономики в целом.

Чтобы найти лучшие варианты организации процессов или функционирования объектов в этих условиях необходимы специальные методы, способные учесть особенности развития процессов и объектов во времени и пространстве при минимальном расходовании материальных и денежных средств, а также времени. Такими методами могут быть математические, которые, применительно преимущественно к экономическим объектам (на начальной стадии их разработки и применения), получили название экономико-математических [1–10].

Экономико-математические методы представляют собой программу вычислений, обеспечивающую нахождение оптимального варианта решения задачи. Ее условия записаны в виде уравнений и неравенств, которые взаимосвязаны и, как следствие, образуют систему, где решение подчинено достижению цели или целевой функции, записанной в виде уравнения.

Таким образом, нахождение оптимального варианта развития процесса или объекта требует наличия системы уравнений



и неравенств, описывающих поведение или функционирование объекта, подчиненное определенной цели.

В свою очередь, система уравнений и неравенств является математическим аналогом объекта, учитывающим все важнейшие стороны и особенности его функционирования, по которому можно найти наилучший вариант развития этого объекта. Очевидно, что чем детальнее мы понимаем сущность и содержание объекта, взаимосвязи его элементов и их влияние на конечный результат деятельности или функционирование объекта, то тем более точным и приемлемым для применения и реализации на практике получится решение.

Таким образом, оптимальное решение мы получаем в рамках составленных уравнений и неравенств, т.е. ограничений задачи.

При этом формирование и содержание ограничений задачи должно подчиняться также и определенным требованиям, вытекающим из теории определителей, матриц, векторных пространств, из особенностей и правил составления уравнений, неравенств и их систем.

В зависимости от возможностей решения задач определенного класса экономико-математические методы можно подразделить на универсальные (симплекс-метод) и специальные. Последние используются для решения ограниченного класса задач: метод потенциалов, метод апроксимации (или метод Фогеля), дельта-метод, методы сетевого планирования и управления.

Возможность использования количественных методов для решения производственно-экономических задач впервые была доказана академиком Л.В. Канторовичем в 1939 г., который для обоснования наилучшего варианта использования ценного оборудования разработал метод разрешающих множителей. В 1940 г. им же был разработан метод потенциалов, применимый для распределения ресурсов (заказов) между потребителями (исполнителями).

В 1951 г. американский ученый Джон Данциг разработал универсальный симплексный метод, применимый для решения любого класса задач по объектам, особенности функционирования которых, описаны в виде системы линейных уравнений и неравенств, подчиненных целевой функции. Следует отметить, что помимо этих методов широкое применение в экономике нашли коррекционно-регрессивные методы, вероятностные, массового обслуживания, а также балансовый метод.

Балансовый метод позволяет получить эффективный вариант взаимодействия отраслей и предприятий, использующих ресурсы друг друга или являющиеся базой для развития других производств и отраслей.

Методы массового обслуживания, вероятностные методы позволяют обосновать эффективные варианты организации сложных процессов.

Корреляционно-регрессионные методы позволяют количественно оценить взаимодействие факторов производства, их влияние на конечные показатели деятельности предприятий.



## Раздел 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Экономико-математическая задача (ЭМЗ) включает четыре группы элементов.

1. ***Неизвестные задачи.*** Их обозначим через $x_j$ где $j$ — номер переменной. Номер переменной ($j$ = 1, ..., $n$) изменяется от 1 до $n$ или $j = \overline{1,n}$.

2. ***Известные величины правых частей уравнений и неравенств или свободные члены.*** Их насчитывается столько же, сколько имеется ограничений. Обозначим свободные члены через $A_i$, $B_i$ и т. д., где $i$ — номер ограничения. Номер ограничения ($i$ = 1,..., $m$) изменяется от 1 до $m$ ($i = \overline{1,m}$).

3. ***Известные величины при переменных,*** или технико-экономические коэффициенты $a_{ij}$. Коэффициенты $a_{ij}$ обозначаются в зависимости от того, в какой строке ($i$) и при какой переменной ($j$) они находятся. В этом состоит двойственность данных коэффициентов. Например, $a_{12,24}$ обозначает коэффициент 12-й строки, стоящей при 24-й переменной.

4. ***Коэффициенты F-строки или целевой функции*** $\lambda_j$. Этих коэффициентов насчитывается столько же, сколько имеется переменных.

В совокупности свободные члены $A_i$, $B_i$, технико-экономические коэффициенты $a_{ij}$, коэффициенты $F$-строки $\lambda_j$ составляют исходную информацию ЭМЗ. Содержание переменных, а также значения исходной информации зависят от объекта или процесса, по информации которых задача составляется.

Механизм взаимосвязи элементов позволяет сформировать общую (типичную) ЭМЗ. Например, найти $x_j$, т. е. значения переменных $j$ при условиях:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, + \dots + a_{1n}x_n \le B_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, + \dots + a_{2n}x_n \ge B_2;$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, + \dots + a_{3n}x_n = B_3;$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3, + \dots + a_{4n}x_n \le B_4;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3, + \dots + a_{mn}x_n \le B_m;$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\ ;$$
$$F_{max} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \ldots + \lambda_n x_n .$$

Таким образом, имеется ЭМЗ, состоящая из $m$ строк (или ограничений) и $n$ столбцов (или переменных), т. е. из системы ограничений. В задаче присутствуют все четыре группы элементов. Взаимосвязи элементов в конкретных условиях будут определять содержание и типы ограничений, а также характер взаимосвязи элементов исходной информации. Типы ограничений в задаче обычно бывают следующими: меньше — равно (≤), больше — равно (≥) и равно (=).

Решение экономико-математической задачи связано с нахождением значений переменных $x_j$, которые будучи подставленными в ограничения задачи, обеспечивают выполнение требований этих ограничений: уравнений или неравенств, а функции $F$ придают экстремальное (т. е. минимальное либо максимальное) значение.

Одно из требований ограничений состоит в том, что если задача решается на максимум, то среди системы уравнений и неравенств должно быть хотя бы одно ограничение типа меньше — равно либо равно (при решении на минимум — хотя бы одно ограничение типа больше — равно либо равно). Следует отметить, что при отсутствии названных ограничений величины переменных практически ничем не ограничены и решение задачи теряет смысл

Другие требования к содержанию задачи вытекают из теории математического программирования, основные положения которой, имеющие непосредственное отношение к составлению экономико-математических задач, изложены ниже.

Таким образом, решение ЭМЗ предполагает такой вариант решения системы неравенств и уравнений, при котором функция $F$ принимает максимальное значение (при решении задачи на максимум) или минимальное (при решении задачи на минимум). Отсюда следует, что содержание экономико-математической задачи, с одной стороны, должно включить в себя множество альтернативных вариантов, с другой стороны, — позволять выбрать такой вариант, при котором значение функции отвечало бы конкретным требованиям производства.

Для решения системы неравенств и уравнений ЭМЗ необходимо, чтобы содержание и взаимосвязи ее элементов соответствовали требованиям теории определителей, матриц, векторных пространств и выпуклых множеств.



## ГЛАВА 1. Понятие определителей, их значение в построении экономико-математических задач

Решение ЭМЗ, условия которой записаны в виде совокупности уравнений и неравенств, сводится к решению системы уравнений. Чтобы выяснить то, каким требованиям должна отвечать эта система и каковы принципы нахождения переменных, обратимся к теории определителей. С целью упрощения, сведем систему, состоящую из множества неравенств и уравнений экономико-математической задачи, к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Чтобы решить эту систему, используем метод уравнивания коэффициентов и алгебраического сложения переменных. Умножим первое уравнение на $a_{22}$, второе — на $a_{12}$ и уравняем коэффициенты при $x_2$:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}; \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12} \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе уравнение, получим $a_{11}a_{22}x_1 - a_{12}a_{21}x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$ или $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$.

Умножив первое уравнение на $a_{21}$, второе — на $a_{11}$, уравняем коэффициенты при $x_i$ и получим по аналогии

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} .$$

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ne 0$, то получим

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} .$$

Как следует из приведенных выражений, их знаменатели составлены по одинаковому принципу. Чтобы выяснить это, достаточно выписать коэффициенты системы двух уравнений:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} ,$$

где первое выражение — произведение коэффициентов главной диагонали, второе — побочной.

Это выражение — определитель 2-го порядка (детерминант). Обозначим его таблицей с вертикальными чертами. Коэффициенты $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$ — элементы определителя. Произведение $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}$, $a_{21}$ — члены определителя.

Таким образом, если вместо первого и второго столбцов поставим $b_1$ и $b_2$, т. е.

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

то мы также получаем определители второго порядка, где первый $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ — определитель системы, а вторые — определители переменных $x_1$ и $x_2$.

Формулы для расчета значений переменных можно записать в виде

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

или $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}$,

где $D$, $D_1$, $D_2$ — соответственно определители системы и переменных $x_1$, $x_2$.

Эти же подходы правомерны при увеличении размерности системы. Если система имеет 3 уравнения с 3 переменными, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$



$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_2 = \frac{D_3}{D},$$

где $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$ и т. д. Таким образом, определитель $D$ второго порядка содержит $2^2 = 4$ элемента и 2 ($1 \times 2 = 2!$) члена. Определитель $D$ третьего порядка имеет $3^2 = 9$ элементов и 6 ($3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$) членов. Определитель $D$ n-го порядка имеет $n^2$ элементов и $n!$ членов.

Поскольку задачи экономического содержания обычно отличаются большой размерностью, возникает проблема определения знака отдельных членов определителя. При этом знак отдельных членов определителя зависит от состава элементов, составляющих члены определителя.

Для определения знака члена определителя обратимся к следующим рассуждениям.

В рассмотренных ранее определителях $D$ элементы определителя записывались в определенном порядке. Однако в процессе вычислений возникает необходимость менять местами элементы.

Пусть имеется 1, 2, 3,…, $n$ элементов, т. е. перестановка совокупности из $n$-элементов. Если поменяем местами два элемента, то из-за этого получим новую перестановку или транспозицию.

Будем считать расположение чисел в перестановке в возрастающем порядке нормальным. Назовем инверсией (нарушением, беспорядком) положение, при котором большее число или номер элемента стоит левее меньшего.

В перестановке 1, 2, 3, 4 нет инверсий. В выражении 5, 3, 1, 2, 4 их будет несколько. Считаем, сколько впереди числа 1 цифр больше единицы. Их две. Затем перед цифрой 2 (не считая 1) — их тоже две. Затем перед цифрой 3 — одна. Впереди цифры 4 — одна. Впереди цифры 5 — ноль. Таким образом, мы имеем 6 инверсий. Всего их будет четное число (или нечетное). Понятие инверсий помогает решить, какой знак имеет член определителя $D$.

Пусть имеем определитель $D$ из $n$ строк и $n$ столбцов, т. е. определитель $n$-го порядка

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель $n$-го порядка равен алгебраической сумме $n!$ членов, каждый из которых представляет собой всевозможные произведения $n$ элементов, взятых по одному и только по одному в каждой строке и каждом столбце. При этом знак члена равен $(-1)^t$, где $t$ — число инверсий в перестановке вторых индексов элементов члена, когда эти элементы расположены в порядке возрастания первых индексов.

$$D = (a_{ij})(i = 1, 2, \ldots, n; j=1, 2, 3, \ldots, n)$$

или

$$D = \sum (-1)^t a_{1_{a_1}} \cdot a_{2_{a_2}} \cdot a_{n_{an}},$$

т. е. произведение коэффициента первой строки и всех столбцов этой строки на элемент 2-й строки и всех столбцов этой строки и т. д.

Итак, для любой системы уравнений правомерно выражение

$$x_j = \frac{D_{x_j}}{D},$$

где $D_{x_j}$ — определитель переменной $x_j$, $D$ — определитель системы.

Из приведенного выражения следует, что значение $x_j$ реально, если $D \neq 0$, а $x_j \neq 0$, если $D_{x_j} \neq 0$. Отсюда следует, что с точки зрения теории определителей при составлении экономико-математической задачи необходимо исключить все случаи, которые приводят к отсутствию решения, т. е. к $D = 0$. При этом важно знать возможные изменения в составе элементов $D$, которые не влияют на величину $D$ и значения $x_j$.



Рассмотрим свойства определителя $D$.

1. От перестановки двух столбцов (или строк) знак $D$ изменяется на противоположный.

Сущность этого свойства определителя вытекает из выражения $(-1)^t$, определяющего знак члена определителя. Если до замены местами двух строк или столбцов значение $t$ было четным, то после замены — оно нечетное (или наоборот). Поскольку аналогичным образом изменяется знак определителя переменной, то в результате знак искомой переменной $x_j$ остается без изменения.

Из этого следует, что при построении экономико-математической задачи мы можем менять местами как строки, так и столбцы. Пропущенный столбец или строка могут быть записаны последними и это не повлияет на значение переменной.

2. Определитель, имеющий два одинаковых столбца, равен нулю. Действительно, если два столбца одинаковы, то при их перестановке значение определителя не изменится. Однако в силу свойства 1 при этом произойдет замена знака определителя, т. е. $D = -D$ или $2D = 0$, или $D = 0$. Из этого свойства следует, что в ЭМЗ не может быть двух переменных с одинаковыми соответствующими элементами.

3. Определитель, в котором соответствующие элементы двух столбцов пропорциональны, равен нулю.

Допустим, что элементы столбца К + 1 (или строки) получены путем умножения элементов столбца К на коэффициент $d$. Из правила нахождения определителя следует, что в данном случае каждый член определителя будет увеличен в $d$ раз, т. е. определитель будет иметь общий множитель, который можно вынести за знак определителя. При этом, вынеся $d$ за знак определителя, мы получим два одинаковых столбца или строки. А это (в силу свойства 2) означает, что $D = 0$. Отсюда следует, что в ЭМЗ не может быть строки К (или столбца), которая получена путем умножения другой строки на коэффициент $d$. Например, строка К включает элементы, определяющие использование труда за год, а строка К + 1 — за напряженный период года. Следовательно, элементы строки К + 1 не могут быть получены посредством умножения на коэффициент $d$ соответствующих элементов строки К. Если строка по использованию труда в напряженный период К + 1 будет записана правильно, то ее элементы никогда не будут пропорциональны соответствующим элементам строки К.

4. Если один из столбцов (строк) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю. Доказательство этого положения вытекает из правила определения определителя.

При составлении ЭМЗ следует иметь в виду, что если при определении номера строки или столбца нарушен порядок (например, 16, 18, 19), то этим мы как бы искусственно ввести нуль-строку (столбец) 17, что придает определителю нулевое значение.

5. Если один из столбцов определителя является линейной комбинацией других столбцов, то определитель равен нулю.

Линейная комбинация предполагает, что рассматриваемый столбец состоит из двух слагаемых, каждое из которых находится в пропорциональной связи с одним из столбцов. Примером линейной комбинации может быть ограничение по использованию труда (например, за период, когда коэффициенты ограничения представляют собой сумму записанных ранее коэффициентов за отдельные месяцы).

Пусть мы имеем ограничения экономико-математической задачи по использования пашни (первое) и труда (второе) с переменными: зерновые яровые ($x_i$, га) и озимые ($x_2$, га).

$$x_1 + x_2 = 40;$$

$$6x_1 + 5x_2 = 220.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 40 & 1 \\ 220 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{200 - 220}{5 - 6} = 20$;

$$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 6 & 220 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}} = \dfrac{220 - 240}{5 - 6} = 20.$$



Таким образом, приведенный определитель системы $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и определители первой переменной $D_{x_1}$ и второй переменной $D_{x_2}$ не равны нулю.

Полученные значения переменных отвечают требованиям как первого, так и второго уравнений.

## ГЛАВА 2. Упорядоченный характер информации экономико-математической задачи

### 2.1. Теория матриц в формировании экономико-математических задач

Числа, необходимые для расчета определителя (элементы $a_i$), записываем в таблицу.

Множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит $m$ строк и $n$ столбцов, называется матрицей. Матрицу обозначаем слева и справа двумя вертикальными чертами

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ . & . \quad . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Числа, образующие данную таблицу, называем элементами таблицы или матрицы. При этом следует отметить, что матрица представляет собой только таблицу и ее нельзя смешивать с определителем.

Матрица из $m$ строк и $n$ столбцов есть матрица типа $m \times n$ (сокращенно $\|a_{ij}\|$, где $i$ =1,..., $m$, $j$ = 1, ..., $n$). При $i$ = 1 имеем матрицу-строку $\|a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}\|$, а при $j$ = 1 — матрицу-столбец $\begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{Vmatrix}$.

Если $m \neq n$ матрица прямоугольная, если $m > n$ — матрица укороченная, если $m < n$ — удлиненная. При $m = n$ матрица является квадратной.



Квадратные матрицы могут иметь вид диагональных:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Если в диагональной матрице все числа $a_{ij}$ равны, то такая матрица является скалярной.

Если в скалярной матрице числа $a_{ij}$ = 1, то матрица является единичной:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Если же в матрице $a_{ij}$ = 0, то она является нулевой.

Если в матрице строки со столбцами поменять местами, то получится транспонированная матрица, т. е.

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad A^T = \|a_{ij}{}^T\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Квадратная матрица $A$ равна транспонированной $A^T$ только в том случае, если она симметрична, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$ при любых значениях $i$ и $j$.

Если определитель квадратной матрицы $|A|$ равен нулю, то такая матрица является вырожденной, а если ее определитель отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то матрица $|A|$ — невырожденная. При решении экономико-математических задач необходимо, чтобы их матрицы были невырожденными, т. е. исключить ситуации, при которых определитель будет равен нулю. С этой целью прибегают к вычеркиванию строк или столбцов, которые придают определителю нулевое значение.

Вычеркивая из матрицы строки (столбцы) различными способами, можно образовывать квадратные матрицы. Их определители, называемые минорами, могут быть как равны нулю, так и отличны от него.

При этом из матрицы можно составлять миноры, порядок которых не превысит меньшее из чисел $m, n$.

Например, из матрицы 4-го порядка можем получить только 1 минор 4-го порядка.

Максимальный порядок отличных от нуля миноров является рангом матрицы. Матрица имеет ранг $r$, если хотя бы один из ее миноров $r$-го порядка отличен от нуля.

Ранг матрицы имеет непосредственное отношение к числу переменных, которые будут определены в процессе решения задачи. Это число не превысит ранг матрицы. Отсюда следует, что чем больше разница между $m$ и $n$, т. е. если в задаче много переменных и мало ограничений, то количество определенных в процессе решения задачи переменных не превысит числа строк матрицы.

Для нахождения невырожденной матрицы достаточно вычеркнуть из нее нуль-строку или нуль-столбец, один из одинаковых столбцов или столбцов, полученных на основе линейного преобразования. В случае, если какой-то столбец получен как сумма нуля с другим столбцом, умноженным на некоторое число, то этот столбец следует вычеркнуть.

## 2.2. Понятие векторов и их значение в построении экономико-математической задачи

Изучая теорию определителей и матриц, мы рассматривали их элементы как отвлеченные количественные характеристики. Однако если соотнести указанные элементы с реальной действительностью в экономике, то окажется, что элементы (или числа) всегда записываются в определенной последовательности или в определенном порядке.



В прямоугольной системе координат каждой точке соответствует пара чисел, т .е. координаты ($a_1$, $a_2$). В трехмерном пространстве точка А обозначается тремя числами ($a_1$, $a_2$, $a_3$), т. е. имеется упорядоченная система трех чисел. При изучении же экономических объектов и явлений для описания их функционирования потребуется упорядоченная последовательность из $n$ чисел.

Упорядоченную систему из $n$ чисел, взятых в определенном порядке, называют $n$-мерным вектором или точкой $n$-мерного пространства.

Числа $a_i$ , $i$ = 1,..., $n$ — компоненты вектора, а число $n$ — размерность вектора. Следовательно, $a_i$ — компоненты $i$ $n$-мерного вектора.

Таким образом, коэффициенты уравнения с $n$ переменными составляют $n$-мерный вектор.

Решение $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}$ системы $n$ уравнений с $n$-переменными — также $n$-мерный вектор.

При этом строку или столбец определителя $n$-го порядка можно рассмотреть как $n$-мерный вектор.

В матрице из $m$ строк и $n$ столбцов ее строки будут $m$-мерными векторами, т. е. строки-векторы являются строками матрицы, а столбцы — $n$-мерными векторами или вектор-столбцами матрицы.

Матрица $(m \times n)$ может рассматриваться как $mn$-мерный вектор, если ее элементы читать подряд, т. е. строку за строкой.

Очевидно, что матрица, имеющая $n$-строк, будет рассматриваться как совокупность $n$-мерных векторов или $n$-мерное векторное пространство.

Пусть $a_1$, $a_2$, $a_3$,…, $a_n$ — совокупность векторов. При этом вектор $a_1$ включает компоненты ( $a_1', a_2', a_3',\ldots,a_n'$ ) и т. д.

Если каждый из этих векторов умножить на число и полученные значения сложить, то получим линейную комбинацию векторов, т. е. новый вектор $a_{n+1}$:

$$a_{n+1} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n\,.$$

Полученный вектор будет линейно зависимым, так как он является линейной комбинацией остальных векторов. В частности, на плоскости любые три вектора будут линейно зависимы, т. к. один из них можно записать как линейную комбинацию двух других.

Если же ни один из векторов $a_1$, $a_2$, $a_3$,..., $a_n$ не является линейной комбинацией остальных, то эти векторы называются линейно независимыми.

В экономико-математической задаче линейно независимый вектор выражает какую-то новую особенность явления или процесса, что выражается через вектор-строку или вектор-столбец.

Для линейной независимости векторов $a_1$, $a_2$, $a_3$,..., $a_n$ необходимо и достаточно, чтобы линейная комбинация этих векторов (т. е. новый вектор $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n$) была равна 0 только при $\lambda_1, \lambda_2, ...., \lambda_n = 0$.

И наоборот, совокупность векторов $a_1$, $a_2$, $a_3$,..., $a_n$ будет линейно зависима тогда, когда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не все из которых равные нулю, но при этом имеет место равенство:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0.$$

Например, векторы $a_1$ = (2, 1), $a_2$ = (1, 1), $a_3$ = (-5, -4) линейно зависимы, так как $a_1 + 3a_2 + a_3 = 0$;

$$1\times(2, 1) + 3\times(1, 1) + 1\times(-5, -4) = (2, 1) + (3, 3) + (-5, -4) =$$
$$= (2 + 3 - 5, 1 + 3 - 4) = (0, 0).$$

Другой пример линейной независимости векторов: $a_1$ = (1, 0, 0), $a_2$ = (0, 2, 0), $a_3$ = (0,0,4).

Действительно, $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$;

$$\lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,2,0) + \lambda_3 (0,0,4) = (\lambda_1, 2\lambda_2, 4\lambda_3).$$

При этом вектор ($\lambda_1$, $2\lambda_2$, $4\lambda_3$) будет нулевым только в том случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Линейная зависимость и независимость векторов имеет геометрический смысл.

В двухмерном пространстве линейная зависимость векторов $a_1$, $a_2$ означает, что оба вектора находятся на одной прямой и имеют одинаковое или противоположное направление (рисунок 2.1).



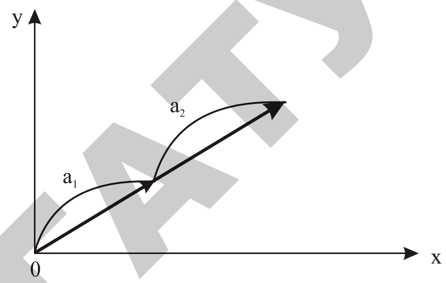



Рисунок 2.1

Если же два вектора *a, b* расположены под углом, то в этом случае нельзя получить один из них умножением другого на число $\lambda$ (рисунок 2.2).

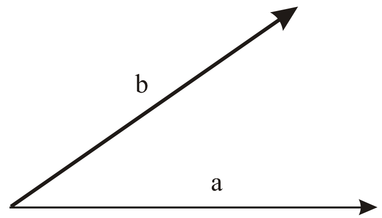



Рисунок 2.2

На плоскости двум линейно независимым векторам $a$ = ($a_{11}$, $a_{12}$), $b$ = ($a_{21}$, $a_{22}$) соответствует определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, не равный нулю. Абсолютное значение определителя $D$ равно площади параллелограмма, построенного на векторах $a$ = ($a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$), $b$ = ($b_{21}$, $b_{22}$, $b_{23}$), $c$ = ($c_{31}$, $c_{32}$, $c_{33}$).

Значение определителя $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ будет составлять объем параллелепипеда.

В трехмерном пространстве любые три вектора $a_1$, $a_2$, $a_3$, не лежащие в одной плоскости, образуют базис этого пространства.

Это означает, что любой вектор трехмерного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации трех векторов. Следовательно, в трехмерном пространстве существует сколько угодно троек линейно независимых векторов, но любые четыре вектора уже являются линейно зависимыми. Таким образом, по аналогии в $n$-мерном пространстве может быть только $n$ линейно независимых векторов, а любой $n + 1$ вектор является линейно зависимым.

Исходя из этого, сформулируем понятие базиса $n$-мерного пространства. Базисом называется такая совокупность линейно независимых векторов, при которой любой вектор мерного пространства является линейной комбинацией векторов этой совокупности.

При этом можно доказать, что в $n$-мерном пространстве векторы линейно независимы и составляют базис $n$-столбцов (в совокупности — единичную диагональную матрицу).

$$l_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \; l_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \; l_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Для этих векторов выражение $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + ... + \lambda_n l_n = 0$ верно только в том случае, если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Следует отметить, что любая другая совокупность из $n$-линейно независимых векторов образует базис пространства, если выражение $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + ... + \lambda_n l_n = 0$ верно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. Если же наряду с $l_1, l_2, ..., l_n$ имеется и вектор $A$, то векторов в этом случае будет больше чем $n$ (т. е. больше числа плоскостей) и этот вектор линейно зависим, т. е.

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + ... + \lambda_n l_n = 0$$

в случае, когда $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ не равны нулю одновременно.



Поскольку $\lambda \neq 0$, то

$$A = -\frac{\lambda_1}{\lambda} l_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} l_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda} l_n,$$

т. е. вектор $A$ является линейной комбинацией векторов базиса.

*Коэффициенты* $\frac{\lambda_1}{\lambda} = a_1', \frac{\lambda_2}{\lambda} = a_2'$ в разложении произвольного вектора $A$ по векторам базиса называются компонентами вектора $A$ в этом базисе.

## ГЛАВА 3. Интерпретация условий экономико-математической задачи

### 3.1. Геометрическое представление условий экономико-математической задачи

Геометрическое представление параметров вектора позволяет получить некоторые фигуры. Эти фигуры будут выпуклыми, если они ограничены несколькими отрезками. Например, плоская фигура является выпуклой, если она целиком содержит отрезок. К плоским выпуклым фигурам будут относиться круг, треугольник, многоугольник (рисунки 3.1, 3.2, 3.3) и др.

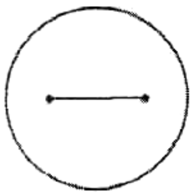


Рисунок 3.1

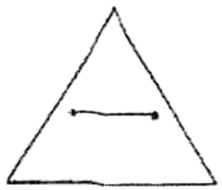


Рисунок. 3.2

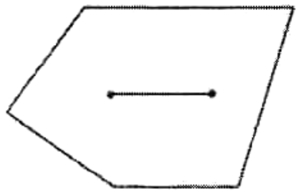


Рисунок 3.3

Точки, в которых сходятся концы двух соседних сторон многоугольника, будут угловыми точками. Каждая сторона многоугольника является опорной прямой.

В трех и более ($n$-мерном) пространстве выпуклые фигуры называются выпуклыми телами (рисунок 3.4). Особенность выпуклого тела состоит в том, что оно вместе с двумя точками отрезка содержит и сам отрезок.

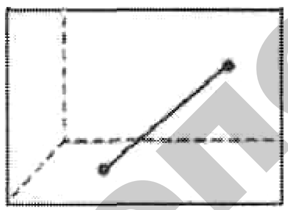


Рисунок 3.4



Крайними угловыми точками выпуклого тела или множества являются точки, которые не лежат внутри отрезков, соединяющие какие бы то ни было точки множества. Крайние точки называются экстремальными.

Однако при изучении выпуклых тел (множеств) следует знать не только параметры крайних точек, но и алгоритм определения параметров точки, лежащей на отрезке, соединяющем крайние точки.

Чтобы реализовать алгоритм необходимо пользоваться линейными комбинациями. Их содержание должно соответствовать следующим условиям:

1. Коэффициенты линейной комбинации для определения промежуточных точек должны быть положительными.

2. Сумма этих коэффициентов должна быть равна единице.

Пусть $\lambda(0 \le \lambda \le 1)$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda : (1-\lambda)$.

Тогда, взяв две любые независимые точки $A$ и $B$, лежащие на прямой и образующие этот отрезок, можно определить параметры любой точки $A$, движущейся к точке $B$ (рисунок 3.5).

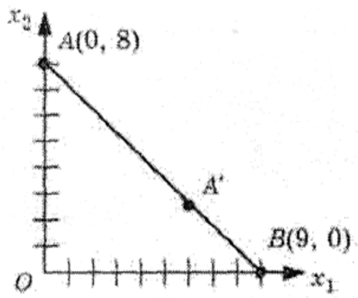



Рисунок 3.5

Пусть $A$ (0, 8), $B$ (9, 0). Тогда точка, образованная выпуклой линейной комбинацией $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ при $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0$ должна лежать на прямой, соединяющей данные точки.

Пусть $\lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$. Тогда

$$A' = \frac{1}{3}(0,8) + \frac{2}{3}(9.0) = (0, \frac{8}{3}) + (6,0) = (6, \frac{8}{3}).$$

Сделаем обобщение для случая с $n$-векторами. Пусть $a_1$, $a_2$,.., $a_n$ — множество векторов, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ — действительные числа. Тогда линейной комбинацией этих векторов будет вектор

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n \text{, где } \lambda_i \geq 0, i = 1, ..., n$$
$$\text{и } \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1.$$

Выражение показывает, что любая точка отрезка, соединяющая две конечные точки в $n$-мерном пространстве, есть выпуклая линейная комбинация точек (вектора), образовавших данный отрезок или сторону выпуклого тела.

При изучении выпуклых множеств (т. е. геометрического представления условий задачи) важная роль принадлежит определению параметров угловых или крайних точек, отвечающих определенному требованию, которое выражается общим уравнением или целевой функцией.

В двухмерном пространстве общее уравнение или целевая функция имеет вид $A_1 x_1 + A_2 x_2 = B$ и представляет собой прямую линию.

Если $B \neq 0$, то это уравнение в отрезках будет иметь вид

$$\frac{B}{A_1} x_1 + \frac{B}{A_2} x_2 = 1 \text{, где } \frac{B}{A_1} = a_1, \frac{B}{A_2} = a_2 .$$

Данное уравнение называется уравнением гиперплоскости в отрезках.

Применительно к $n$-мерному пространству гиперплоскостью (или плоскостью $n$-мерного пространства) является множество всех точек $n$-мерного пространства, удовлетворяющих линейному уравнению с $n$ переменными, т. е. $A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n = B$.

При $B = 0$ гиперплоскость проходит через начало координат. Поскольку коэффициенты $A_1, ..., A_n$ остаются постоянными, то при $B < B_1 < B_2 < B_3 < ... < B_n$ гиперплоскость будет удаляться от начала координат, оставаясь параллельной самой себе.

***Теорема***. Если $K$ является ограниченным выпуклым многогранником, то каждая точка $x$, являющаяся выпуклой линейной комбинацией угловых точек множества $K$, принадлежит этому множеству.



Пусть множество $K$ получено от пересечения полупространств:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, + ... + a_{1n}x_n = B_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, + ... + a_{2n}x_n = B_2,$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3, + ... + a_{mn}x_n \leq B_m.$$

Представим данное множество в матричной форме $A\ x = B$. Допустим, что точка $x$ является линейной комбинацией угловых точек

$$x^{\bullet} = \lambda_1 x_1^{\bullet} + \lambda_2 x_2^{\bullet} + ... + \lambda_n x_n^{\bullet} \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 .$$

Умножив на $A$ обе части этого выражения, получим

$$Ax^{\bullet} = \lambda_1 Ax_1^{\bullet} + \lambda_2 Ax_2^{\bullet} + ... + \lambda_n Ax_n^{\bullet} .$$

Однако

$$\lambda_1 Ax_1^{\bullet} + \lambda_2 Ax_2^{\bullet} + ... + \lambda_n Ax_n^{\bullet} \text{ при } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ есть } Ax_i^{\bullet} = B,$$

тогда $Ax^{\bullet} = B,\ x^{\bullet} \in K$.

Поскольку $x^{\bullet}$ является угловой точкой многогранника, то целевая функция достигает максимума в этой угловой точке

$$x^{\bullet} > x, f(x^{\bullet}) > f(x), x \in K.$$

### 3.2. Система линейных неравенств

При составлении экономико-математических задач их ограничения обычно записываются в виде неравенств.

Два числа или выражения, соединенные знаком > или <, образуют неравенство.

Неравенство 5 > 4 обозначает, что 5 строго больше 4. Неравенства с одинаковыми знаками являются неравенствами одинакового смысла, с разными — противоположного смысла.

Чаще всего вместо строгих неравенств имеются неравенства со знаками ≥ и ≤, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$ при $a = c$.

Неравенства отличаются следующими свойствами:

1. Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать.

2. Два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того, из которого вычиталось другое.

3. Если обе части неравенства умножить на отрицательное число, то знак неравенства изменится, если умножить на положительное — не изменится.

Неравенства первой степени с одним или многими переменными будем называть линейными неравенствами.

Простейшее неравенство с одним переменным имеет вид

$$ax > b \text{ или } a_{11}x_1 > b_1.$$

Решение соответствующего этому неравенству уравнения $a_{11}x_1 = b$ будет иметь вид $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$.

Если $a_{11} > 0$, то $x_{11} > \dfrac{b_1}{a_{11}}$; если $a_{11} < 0$, то $x_1 < \dfrac{b_1}{a_{11}}$.

Системой двух или нескольких неравенств называется совокупность таких неравенств, каждому из которых удовлетворяют одни и те же значения переменных.

Для того, чтобы решить систему неравенств следует найти все значения переменных, которые удовлетворяют данным неравенствам.

Множество точек, определяемых линейным неравенством, называется полупространством или пространством решений неравенства. Пересечение полупространств обозначает пространство решений.

Пусть имеются две системы неравенств

$$\text{I. } \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \end{cases} \text{ и II. } \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5 \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 12 \end{cases}.$$

Представим неравенства данных систем в отрезках и отразим их в системе координат (рисунок 3.6).

При этом система I приведена со знаками $\le$, а система II — со знаками $\ge$.

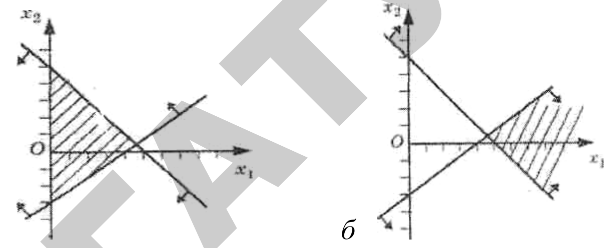


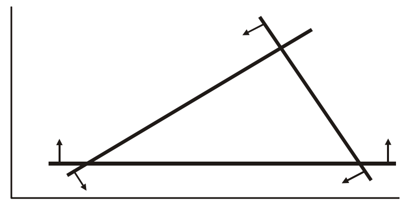

Рисунок 3.6

В соответствии с направленностью перемещения прямых образованы общие многогранники решений, которые в обоих случаях будут разными. Координаты переменных в рамках полученных общих множеств будут удовлетворять обоим неравенствам и являться решением системы неравенств.

Множество решений для равенств и неравенств будет являться пересечением множеств. Если совместное решение двух уравнений есть точка пересечения их прямых линий, то решение системы линейных неравенств будет бесчисленным и определяться общим множеством. Параметры в рамках заштрихованного пространства являются решением данной системы.

В каком же случае получится общее множество или многогранник решений? Чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим систему из трех неравенств с двумя переменными.

Решение системы трех неравенств с двумя переменными получается пересечением трех полуплоскостей, которое образует треугольник (рисунок 3.7).



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \ge 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \ge 0; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + b_3 \ge 0; \end{cases}$$

Рисунок 3.7

Для образования прямыми неравенств треугольника с общим множеством необходимо, чтобы определитель системы $D$ и три алгебраических дополнения[1] элементов столбца свободных членов были отличны от нуля и имели бы одинаковые знаки:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \quad Ab_1 \neq 0, Ab_2 \neq 0, Ab_3 \neq 0 .$$

Эти же положения распространяются и на систему $n + 1$ неравенств с $n$ переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + ... + a_{n+1,n}x_n + b_{n+1} \geq 0. \end{cases}$$

Каждое неравенство в $n$-мерном пространстве образует полупространство, а пересечение полупространств — $n$-мерный многогранник или симплекс. Для решения системы необходимо, чтобы $n + 1$ неравенство образовало внутреннюю часть $n$-мерного тетраэдра. Для этого достаточно, чтобы определитель системы, состоящий из $n + 1$ неравенства, и алгебраические дополнения свободных членов отличались от нуля и имели одинаковые знаки.

### 3.3. Замена неравенств уравнениями

Строгие неравенства обычно заменяются неравенствами типа «меньше или равно» и «больше или равно», допускающими большую гибкость в поиске решений.

Действительно, если линейному неравенству типа

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n < b_1$$

[1] Алгебраическое дополнение $A_{ij}$ есть новый определитель, который получаем, вычеркивая строку $i$ и столбец j со знаком $(-1)^{i+j}$.



соответствуют точки, лежащие выше или ниже полупространства, то линейному неравенству $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$ соответствуют также и точки, лежащие на полупространстве.

Отсюда следует, что всякому решению системы неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

соответствует решение системы линейных уравнений. Таким образом, решение системы линейных неравенств следует свести к решению соответствующей системы линейных уравнений. Для этого осуществляем преобразование системы неравенств в уравнения, прибавляя к левой части неравенств неотрицательные дополнительные переменные

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 = b_1.$$

В экономико-математических задачах требуется находить решения систем неравенств с неотрицательными значениями переменных.

Решение с неотрицательными значениями переменных будет допустимым. Если предположить, что $x_j = 0$, то, подставив их в уравнение, получим базисное решение, т. е. $y_i° = b_i$ и т. д.

Итак, пусть мы имеем систему $m$ уравнений с 2 переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \end{cases}$$

$$F = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 (\max).$$

Представив каждое неравенство в отрезках, найдем соответствующие полупространства (полуплоскости), пересечение которых позволит определить выпуклый многоугольник. Поскольку он удовлетворяет требованиям всех неравенств, то этот многоугольник является решением (рисунок 3.8).

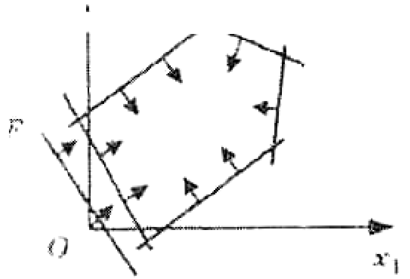


Рисунок 3.8

Целевая функция, выраженная отрезком, достигнет максимума в вершине многоугольника. Координаты точки (при максимуме — наиболее отстоящей от начала координат, при минимуме — наиболее близкой к началу координат), равные значениям переменных, будучи подставленными в целевую функцию придают ей максимальное или минимальное значение.

Если экстремум целевой функции достигается в более чем одной точке, то он достигается на всем ребре или всей грани многогранника решений.

В задаче с произвольным числом переменных и неравенств пересечение полупространств позволит получить выпуклый многогранник или выпуклое тело *K* *n*-мерного пространства. Передвигая гиперплоскость, соответствующую целевой функции, можно получить семейство параллельных гиперплоскостей. Передвигая одну гиперплоскость из подобного семейства по направлению вектора *F*, находят крайнюю угловую точку. Параметры этой точки придадут целевой функции экстремальное значение.



## ГЛАВА 4. Алгоритм метода потенциалов

Метод потенциалов относится к числу специальных методов. Его использование ориентировано на решение таких задач, когда необходимо обосновать лучший вариант распределения ресурсов между потребителями.

Последовательное улучшение исходного решения является основой метода потенциалов или модифицированного распределительного метода.

Решить данную задачу возможно при наличии информации: о ресурсах, потребностях в ресурсах и оценочных коэффициентах или коэффициентах целевой функции.

При этом информация должна отвечать следующим требованиям:

а) все виды ресурсов должны измеряться в единых величинах (физических или стоимостных);

б) наличие ресурсов и потребность в них должны быть уравнены;

в) процесс перераспределения ресурсов должен выражаться в натуральных или стоимостных оценках.

Целью решения задачи является нахождение минимума или максимума функции, т. е.

$$F = \sum_{i \in I_0} \sum_{j \in J_0} \lambda_{ij} x_{ij} \to \min\ (\max),$$

где $i$, $I_0$ — соответственно номер и множество поставщиков; $j$, $J_0$ — соответственно номер и множество потребителей; $\lambda_{ij}$ — материально-денежные затраты (или доход) для использования единицы ресурса поставщика $i$ потребителем $j$; $x_{ij}$ — объем ресурса поставщика $i$ для потребителя $j$. Экстремум должен быть обеспечен при соблюдении следующих условий:

1. По использованию возможностей каждого из поставщиков:

$$\sum_{j \in J_0} x_{ij} = A_i, i \in I_0,$$

где $A_i$ — запасы поставщика $i$. Данное соотношение обозначает, что объем ресурсов, полученных потребителями от поставщика, будет равен запасам этих ресурсов у поставщика. Количество таких ограничений будет равно числу поставщиков ($i \in I_0$). Например, применительно к первому поставщику ($i$ = 1) ограничение может иметь вид $x_{11} + x_{12} + x_{13} + ... + x_{1n} = A_1$.

2. По удовлетворению запросов каждого из потребителей:

$$\sum_{i \in I_0} x_{ij} = B_j, j \in J_0,$$

где $B_j$— заказы потребителя $j$.

Соотношение обозначает, что объем ресурсов, полученных от разных поставщиков, будет равен заказу каждого из потребителей. Число таких ограничений будет равно количеству потребителей $(j \in J_0)$. Например, применительно к первому потребителю ($j$ = 1) ограничение может иметь вид

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + ... + x_{m1} = B_1.$$

3. По соотношению наличия ресурсов (возможности поставщиков) и потребности в них (заказов потребителей):

$$\sum_{i \in I_0} A_i \neq \sum_{j \in J_0} B_j, \sum_{i \in I_0} A_i = \sum_{j \in J_0} B_j .$$

Данное соотношение определяет тип задачи: открытый или закрытый. В первом случае наличие ресурсов не равно потребности в них, во втором — равно.

Решение предусматривает нахождение $x_{ij}$ т. е. объема ресурса $i$ для потребителя $j$. При этом решение задачи может быть ориентировано как на минимум, так и на максимум.

Рассмотрим пример реализации алгоритма данного метода.

1. Возможности поставщиков ресурсов, т: *А* — 330, *В* — 592, *С* — 710, *Д* — 1240. Итого — 2872 т.

2. Заказы потребителей ресурсов, т: I — 542, II — 810, III — 792, IV — 800. Итого — 2944 т.

3. Материально-денежные затраты на перевозку грузов (ресурсов) от поставщиков к потребителям представлены в таблице 4.1.



Таблица 4.1 — Материально-денежные затраты на перевозку 1 т грузов, у. е.

| Поставщики | Потребители | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| А | 3,10 | 3,37 | 2,43 | 2,87 |
| В | 2,95 | 2,64 | 2,96 | 3,97 |
| С | 4,30 | 3,06 | 3,21 | 3,51 |
| Д | 2,42 | 4,05 | 3,21 | 2,59 |
| Фиктивный ($E_ф$) | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

4. Переменные не должны быть отрицательными, т. е. $x_{ij}$ > 0.

Поскольку наличие ресурсов ($A_i$), т. е. возможности поставщиков не равны потребности в ресурсах, т. е. заказам потребителей $(B_j)$, то задача является открытой. Преобразуем ее в закрытую задачу. Для этого вводим положительную величину, которая увеличивает меньшее значение, т. е. наличие ресурсов ($\sum_{i \in I_0} A_i$ = 2872), до большего, т. е. потребностей ($\sum_{j \in J_0} B_j = 2944$). Поскольку ресурсов недостает, то вводим пятый (недостающий) фиктивный ресурс (или поставщика $E_ф$) с объемом, равным 72 т, $E_ф$ = (2944 – 2872). При этом материально-денежные затраты ($\lambda_{ij}$) по перевозке недостающего груза от поставщика к потребителю $i$ будут нулевыми. Всего поставщиков будет пять ($i$ = 1,..., 5), а потребителей — четыре ($j$ = 1,..., 4).

Для того, чтобы не произошло смешивания информации коэффициенты запишем в верхних правых углах клеток таблицы 4.2.

Решение задачи методом потенциалов предусматривает постепенное улучшение исходного плана (допустимого или опорного) до оптимального. При этом опорное решение можно получить способами северо-западного угла и предпочтительных оценок.

Таблица 4.2 — Исходная информация для решения задачи

| Поставщики | Потребители | | | | Наличие ресурсов |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | |
| *A* | 3,10 $X_{11}$ | 3,37 $X_{12}$ | 2,43 $X_{13}$ | 2,87 $X_{14}$ | 330 |
| *B* | 2,95 $X_{21}$ | 2,64 $X_{22}$ | 2,96 $X_{23}$ | 3,97 $X_{24}$ | 592 |
| *C* | 4,3 $X_{31}$ | 3,06 $X_{32}$ | 3,21 $X_{33}$ | 3,51 $X_{34}$ | 710 |
| Д | 2,42 $X_{41}$ | 4,05 $X_{42}$ | 3,21 $X_{43}$ | 2,59 $X_{44}$ | 1240 |
| $E_ф$ | 0 $X_{51}$ | 0 $X_{52}$ | 0 $X_{53}$ | 0 $X_{54}$ | 72 |
| Потребность в ресурсах | 542 | 810 | 792 | 800 | 2944 |

Рассмотрим способы получения опорного решения.

***Способ северо-западного угла.*** Сущность его состоит в следующем. Задание по перевозкам ($x_{ij}$) начинаем распределять с верхней клетки слева, условно принятой за северо-западный угол (1; 1). В нее записываем число $x_{11}$, равное меньшему из значений, стоящих в строке (330) и столбце (542), которые содержат эту клетку, т. е. записываем 330. В этом случае ресурсы первого поставщика исчерпаны, но заказ первого заказчика не выполнен на 212 т (542 - 330). Чтобы удовлетворит этот заказ, рассматриваем возможности второго поставщика *B* (*B* = 592) и в клетку $x_{21}$ запишем меньшее из значений для этой клетки (212 и 592), т. е. 212. Теперь заказ первого потребителя в количестве 542 т выполнен, однако возможности поставщика *B* недоиспользованы на 380 единиц (592 – 212). Их распределяем второму потребителю, начиная с клетки (2; 2). Для нее характерны следующие значения: в строке — оставшийся ресурс поставщика *B* (второго) — 380 т



и заказ — 810 т (в соответствующем столбце). По тому же принципу план распределяем и дальше. Таким образом, получаем опорный план (таблица 4.3).

Таблица 4.3 — Опорный план задачи, определённый способом северо-западного угла

| Поставщики | Потребители | | | | Ресурсы, т |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | |
| *A* | 3,10 330 | 3,37 | 2,43 | 2,87 | 330 |
| *B* | 2,95 212 | 2,64 380 | 2,96 | 3,97 | 592 |
| *C* | 4,3 | 3,06 430 | 3,21 280 | 3,51 | 710 |
| Д | 2,42 | 4,05 | 3,21 512 | 2,59 728 | 1240 |
| $E_ф$ | 0 | 0 | 0 | 0 72 | 72 |
| Потребность в ресурсах, т | 542 | 810 | 792 | 800 | 2944 |

Недостаток способа северо-западного угла состоит в том, что при его использовании коэффициенты $\lambda_{ij}$ не учитываются. Это приводит к увеличению объема вычислений в процессе поиска оптимального плана.

***Способ предпочтительных оценок.*** При использовании способа предпочтительных оценок учитываем следующее:

1. Распределение плана осуществляем исходя из значений $\lambda_{ij}$. Следует отметить, что при решении задачи на минимум лучшей будет клетка с меньшим значением $\lambda_{ij}(\lambda_{ij}^{\min})$, а на максимум — с большим $(\lambda_{ij}^{\max})$.

2. Построение опорного плана начинаем со строки или столбца с наибольшим количеством запрещенных клеток (обозначаются такие клетки прочерком). В этой строке или столбце выбираем лучшую (в соответствии с целью задачи) клетку и в нее записываем

меньшее число (по наличию ресурса или потребности в нем), стоящее в строке или столбце для этой клетки. Затем определяем следующую клетку и продолжаем этот процесс до тех пор, пока ресурсы поставщика не будут исчерпаны (в строке), а заказы потребителя — выполнены (в столбце).

3. Если имеется нуль-строка или нуль-столбец, то при решении задачи на минимум план записываем в ту нуль-клетку, для которой характерна большая по абсолютной величине разность между нулем и лучшим (в соответствии с целью задачи) значением целевой функции ($0 - \lambda_{ij}$), стоящем в строке или столбце для этого нуля. При решении задачи на максимум за основу принимаем нуль с соответствующей меньшей разностью. В данном случае $\lambda_{5i} = 0$ (в строке для этого нуля стоят нулевые оценки). Таким образом, рассматриваем коэффициенты столбца (0; 2,42), затем — (0;2,64), (0; 2,43), (0; 2,59). Большая разность характерна для клетки $к_{52}$ (0; 2,64). В нуль-клетку $k_{52}$ записываем возможный план $x_{52}$ = 72. При этом возможности поставщика $E_ф$ будут исчерпаны. В другом случае рассматривали бы клетку $k_{54}$ (0; 2,59) и т. д.

4. После распределения плана в строках (столбцах) с запрещенными клетками и в нуль-строке (столбце) распределение плана выполняем по оставшимся клеткам, начиная с лучшей (с точки зрения достижения цели). В нашем примере такой клеткой будет клетка $k_{41}$ при $\lambda_{41}$ = 2,42. В нее записываем 542 и, таким образом, заказ первого потребителя будет выполнен. Затем находим лучшую клетку из оставшихся клеток и продолжаем этот процесс до полного распределения плана. Следующей лучшей клеткой будет клетка $к_{13}$ при $\lambda_{13}$ =2,43. В нее заносим план, равный 330, и т. д. В результате получим опорный план (таблица 4.4).

Таким образом, использование способа северо-западного угла обеспечило нахождение опорного плана, т. е. решения, при котором ресурсы распределены, а заказы выполнены.

Затраты материально-денежных средств на выполнение плана, полученным данным способом, составят:

$$F = 330 \times 3{,}10 + 212 \times 2{,}95 + 380 \times 2{,}64 + 430 \times 3{,}06 +$$

$$+ 280 \times 3{,}21 + 512 \times 3{,}21 + 728 \times 2{,}59 + 0 \times 72 = 8376{,}15.$$



Затраты материально-денежных средств на выполнение опорного плана, полученного способом предпочтительных оценок, составят:

$$F= 330 \times 2{,}43 + 592 \times 2{,}64 + 146 \times 3{,}06 + 462 \times 3{,}21 +$$

$$+ 102 \times 3{,}51 + 542 \times 2{,}42 + 698 \times 2{,}59 + 72 \times 0 = 7772{,}00.$$

Сравнение материально-денежных затрат на выполнение исходного плана, полученного способами северо-западного угла и предпочтительных оценок, свидетельствует о том, что второй план экономичнее, т. е. в большей степени приближается к оптимальному плану.

Таблица 4.4 — Опорный план, определенный способом предпочтительных оценок

| Поставщики | Потребители | | | | Ресурсы, т |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | |
| А | 3,10 | 3,37 | 2,43<br>330 | 2,87 | 330 |
| В | 2,95 | 2,64<br>592 | 2,96 | 3,97 | 592 |
| С | 4,3 | 3,06<br>146 | 3,21<br>462 | 3,51<br>102 | 710 |
| Д | 2,42<br>542 | 4,05 | 3,21 | 2,59<br>698 | 1240 |
| $E_ф$ | 0 | 0<br>72 | 0 | 0 | 72 |
| Потребность в ресурсах, т | 542 | 810 | 792 | 800 | 2944 |

При построении опорного или исходного плана важно обеспечить соблюдение следующего правила: число заполненных клеток должно составлять сумму строк ($m$) и столбцов ($n$) без единицы ($m + n - 1$). В нашем случае число строк равно 5, столбцов — 4. Следовательно, заполненных клеток должно быть 8. В обоих случаях их количество равно восьми. В том случае, если число заполненных клеток меньше $m + n - 1$, можно сделать следующее:

а) поменять местами несколько строк или столбцов; б) поставить нуль в лучшую (с точки зрения достижения цели) из оставшихся пустых клеток. Следует помнить, что число заполненных клеток будет меньше $m + n - 1$, если какое-либо значение в строке «потребность в ресурсах» равно значению суммы или разности значений столбца «наличие ресурсов» (или наоборот).

Построенный опорный план необходимо проверять на оптимальность. Проверка включает два этапа.

1. Нахождение потенциалов (оценочных коэффициентов) для заполненных клеток, т. е. клеток, в которых записан план.

2. Проверка на потенциальность незаполненных клеток. Проверка состоит в том, чтобы выяснить, имеются ли свободные клетки для улучшения плана, т. е. уменьшения значения $F$ (функции) при решении задачи на минимум или увеличения $F$ (при решении задачи на максимум). Рассмотрим содержание этапов.

Потенциалы для заполненных клеток определяем по формуле:

$$v_j - u_i = \lambda_{ij}, \tag{4.1}$$

откуда

$$v_j = \lambda_{ij} + u_i, \tag{4.2}$$

$$u_i = v_j - \lambda_{ij}, \tag{4.3}$$

где $v_j$ — потенциал столбца или потребителя $j$, $j$ = 1, ..., 4; $u_i$ — потенциал строки $i$ или поставщика $i$, $i$ = 1,..., 5.

Поскольку в уравнении (4.1) имеется два неизвестных, то одному из них придаем произвольное значение, например, $u_1$ = 0. При этом за основу дальнейших расчетов принимаем опорный план, полученный способом предпочтительных оценок. В таблицу 4.5 введем дополнительную строку (для обозначения потенциалов столбцов $v_j$) и дополнительный столбец (для обозначения потенциалов строк $u_i$).



Таблица 4.5 — Рабочая таблица оптимизации распределения ресурсов между потребителями

| Поставщики | Потребители | | | | Ресурсы | Потенциалы поставщиков, $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | | |
| *А* | 3,10 | 3,37 | 2,43 330 | 2,87 | 330 | $u_1$ 0 |
| *В* | 2,85 | 2,64 592 | 2,96 | 3,97 | 592 | $u_2$ -0,26 |
| *С* | 4,3 | + 3,06 146 | 3,21 462 | 3,51 102 - | 710 | $u_3$ -0,78 |
| *Д* | 2,42 542 | 4,05 | 3,21 | \| 2,59 698 | 1240 | $u_4$ 0,04 |
| $E_ф$ | 0 | **о** 72 - | 0 | 0 + | 72 | $u_5$ 2,28 |
| Потребность в ресурсах | 542 | 810 | 792 | 800 | 2944 | – |
| Потенциалы потребителей, $v_j$ | $v_1$ 2,56 | $v_2$ 2,28 | $v_3$ 2,43 | $v_4$ 2,73 | – | – |

Поскольку $u_1$ = 0, то по коэффициенту 2,43 ($\lambda_{13}$) занятой клетки $к_{13}$ определим $v_3 = \lambda_{13} + u_1$ = 2,43 + 0 = 2,43. Так как в строке $u_1$ больше нет заполненных клеток, то берем вновь определенный потенциал $v_3$ и на его основе (с учетом $\lambda_{ij}$ заполненных клеток столбца $v_3$) найдем новые потенциалы. В столбце $v_3$ заполненной является клетка $к_{33}$, для которой следует определить потенциал строки $u_3$. Согласно формуле (4.3) $u_3 = v_3 - \lambda_{33}$ = 2,43 – 3,21 = -0,78. Поскольку в столбце $v_3$ больше заполненных клеток не имеется, то принимаем за основу найденное значение $u_3$ = -0,78 и рассчитываем

по данным заполненных клеток $к_{34}$ и $к_{32}$ потенциалы $v_4$ и $v_2$. Они соответственно равны: $v_4 = \lambda_{34} + u_3$ = 3,51 + (-0,78) = 2,73; $v_2 = \lambda_{32} + u_3$ = 3,06 + (-0,78) = 2,28. Таким образом, вычисления продолжаем до определения потенциалов для всех строк и столбцов. После этого проверяем возможность улучшения плана за счет незаполненных клеток, т. е. проверяем план на потенциальность. Решение будет оптимальным, если для незаполненных клеток выполняется условие:

$$v_j - u_i \le \lambda_{ij}, \tag{4.4}$$

(при решении задачи на минимум) и

$$v_j - u_i \ge \lambda_{ij}, \tag{4.5}$$

(при решении задачи на максимум).

В нашем случае проверяем незаполненные клетки по формуле (4.4). Нарушения будут иметь место, если для незаполненной клетки характерно неравенство $v_j - u_i > \lambda_{ij}$. При этом величина нарушения потенциальности ($\kappa_{ij}$) составит $k_{ij} = v_j - u_j - \lambda_{ij} > 0$.

Из таблицы 4.5 следует, что нарушение характерно для клетки $\kappa_{54}$. Величина нарушения потенциальности $\kappa_{ij}$, т. е. $\kappa_{54}$ = 2,73 – 2,28 – 0 = 0,45. С экономической точки зрения величина непотенциальности означает, на сколько денежных единиц изменится значение $F$ (при решении задач на минимум $F$ уменьшается, на максимум — возрастает), если в непотенциальную клетку вследствие перераспределения плана введем задание ($x_{ij}$), равное 1. Клетка с нарушением потенциальности становится основой для улучшения плана. Если же в результате проверки определено несколько нарушений, то при решении задач на минимум и максимум в качестве исходной для улучшения плана принимают клетку с наибольшим нарушением. Улучшение плана выполняем на основе цикла, который строится по следующим правилам:

1. Цикл начинают строить с непотенциальной клетки (и завершают также в ней) с наибольшим нарушением потенциальности (в случае, если за основу цикла принята клетка не с максимальным нарушением, то для получения оптимального плана потребуется построить больше циклов).

2. Вершины цикла проходят только по заполненным клеткам. При этом поворот линии цикла осуществляют только в занятых клетках и под углом 90°. Число вершин цикла в строке или столбце должно быть четным (если число заполненных клеток меньше, чем $m + n - 1$, то в цикле могут получиться две и более незаполненные клетки). Решение в подобной ситуации возможно, если номер другой незаполненной клетки (кроме той, что послужила началом цикла, т. е. непотенциальной и с наибольшим нарушением), будет нечетным по отношению к начальной клетке цикла.

3. В непотенциальную клетку цикла ставится знак «плюс», в следующую — «минус» и так поочередно (если число заполненных клеток цикла меньше $m + n - 1$, то в другие клетки цикла, кроме начальной, ставится нуль). При этом необходимо, чтобы знак для данных нулевых клеток был положительным, что достигается, если номера этих клеток будут нечетными (принимая номер клетки начала цикла за 1).

В нашем случае непотенциальной клеткой является клетка $\kappa_{54}$. Она является началом цикла, который пройдет по клеткам $\kappa_{54}$ – $\kappa_{52}$ – $\kappa_{32}$ – $\kappa_{34}$. Проставляем знаки в вершинах цикла: $\kappa_{54}$ (+), $\kappa_{52}$ (–), $\kappa_{32}$ (+), $\kappa_{34}$ (–). По цепи цикла перемещаем меньшее число клетки со знаком «минус» (т. е. 72) и получаем новый план (таблица 4.6).

Таблица 4.6 — Улучшенный план распределения ресурсов

| Поставщики | Потребители | | | | Ресурсы | Потенциалы поставщиков, $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | | |
| *А* | 3,10 | 3,37 | 2,43<br>330 | 2,87 | 330 | 0 |
| *В* | 2,95 | 2,64<br>592 | 2,96 | 3,97 | 592 | -0,36 |
| *С* | 4,3 | 3,06<br>218 | 3,21<br>462 | 3,51<br>30 | 710 | -0,78 |
| *Д* | 2,42<br>542 | 4,05 | 3,21 | 2,59<br>698 | 1240 | 0,14 |
| $E_ф$ | 0 | 0 | 0 | 0<br>72 | 72 | 2,73 |
| Потребность в ресурсах | 542 | 810 | 792 | 800 | 2944 | – |
| Потенциалы потребителей, $V_j$ | 2,56 | 2,28 | 2,43 | 2,73 | | |

Материально-денежные затраты на выполнение плана составят:

$$F_2 = 330 \times 2{,}43 + 592 \times 2{,}64 + 218 \times 3{,}06 + 462 \times 3{,}21 + 30 \times \times 3{,}51 + 542 \times 2{,}42 + 698 \times 2{,}59 + 72 \times 0 = 7739{,}60.$$

Новый план вновь проверяем на потенциальность, т. е. опять выполняем расчеты двух этапов. И продолжаем эти расчеты до тех пор, пока в незаполненных клетках не будет нарушений. В нашем случае таких нарушений нет. Следовательно, $F_2 = F_{min} = 7739{,}6$ у. е. Значения $F$, следующие после первого, можно определять по упрощенной схеме по формуле: $F_{j+1} = F_j \pm b_{j+1} p_{j+1}$ (знак (–) — при минимуме или знак (+) — при максимуме). В нашем случае:

$$F_{j+1} = F_j - b_{j+1} p_{j+1},$$

где $F_j$, — значение функции, определенной по данным из предыдущей таблицы, $b_{j+1}$ — величина непотенциальности клетки, положенной в основу цикла, $p_{j+1}$ — значение плана, перемещаемое по циклу. В нашем случае $F_1 = 7772{,}0$ у. е., $b_{j+1} = 0{,}45$, $p_{j+1} = 72$. В результате имеем:

$$F_2 = 7772{,}0 - 0{,}45 \times 72 = 7739{,}6 \text{ у. е.}$$

Оптимальная программа предусматривает удовлетворение потребности 3-го потребителя за счет ресурсов первого поставщика ($A$), т. е. $x_{13} = 330$, потребности 2-го — за счет ресурсов второго поставщика ($x_{22} = 592$) и т. д. Значение $x_{54} = 72$ означает, что при недостатке ресурсов поставщиков и критерии оптимальности, которым является минимум материально-денежных затрат, целесообразнее всего недовыполнять заказ 4-го потребителя.



## ГЛАВА 5. Алгоритм симплексного метода

Симплексный метод является универсальным экономико-математическим методом. Для его использования условия задачи необходимо представить в виде уравнений и неравенств, количественно описывающих особенности функционирования изучаемого объекта.

Существенным достоинством метода является его универсальность, т. е. возможность использования для решения любых задач, условия которых записаны в виде системы уравнений и неравенств. Наряду с этим симплекс-метод обладает тем достоинством, что при приближении полупространства, выражающего целевую функцию, к экстремальной крайней угловой точке, он позволяет пропускать целый ряд промежуточных крайних угловых точек.

Метод получил свое название из геометрической интерпретации условий задачи. Они позволяют получить многогранник решений или симплекс, крайняя угловая точка которого, будучи равна значениям переменных, превращает функцию в максимум или минимум.

Имеется несколько вариантов алгоритма симплекс-метода: обычный, $m$-метод (искусственного базиса) и др.

Рассмотрим вариант, позволяющий осуществлять наиболее простые вычисления.

Алгоритм симплекс-метода включает несколько этапов:

1) подготовка информации (включает введение переменных и формирование ограничений);

2) преобразование ограничений и запись их в матрицу;

3) поиск опорного решения;

4) поиск оптимального решения.

К примеру, имеем следующую экономико-математическую задачу:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \ge A_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = A_m. \end{cases}$$

$$F = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \ldots + \lambda_n x_n \to \max.$$

Преобразование ограничений связано, в первую очередь, с превращением неравенств в уравнения. Если при этом ограничения приведены к типу $\leq$, то процедура вычислений значительно упрощается. Для этого ограничения типа $\geq$ умножим на (-1).

Превращение неравенств в уравнения связано с введением дополнительных переменных. В ограничениях типа $\leq$ дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, в ограничениях типа $\geq$ — величину превышения ресурсов над минимумом потребности в них.

В уравнения дополнительные переменные не вводятся (или вводятся равными нулю):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + y_1 = A_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n + y_2 = A_2; \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - ... - a_{3n}x_n + y_3 = -A_3; \\ ............................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n + y_m = A_m. \end{cases}$$

При этом всякое решение осуществляется из допущения, что

$x_j = 0$, тогда

$$y_1 = A_1,$$

$$y_2 = A_2,$$

$$y_3 = A_3,$$

$$y_m = 0, 0 = A_m.$$

Решение получаем поиском опорного и оптимального решений.

***Опорное решение*** получим при значениях переменных, когда ограничения задачи выполняются. Признаком выполнения ограничений является отсутствие 0-значений среди базисных переменных и отрицательных свободных членов.

При этом переменные, исходя из значений которых начинаем решение, будут базисными.

В первой симплексной таблице (таблица 5.1) такими базисными будут дополнительные переменные, т. е. вектор дополнительных



переменных. Остальные переменные, обозначающие вектор-столбцы, будут небазисными. В таблице 5.1 небазисными будут основные переменные.

Таблица 5.1 — Симплексная таблица № 1

| Базисные переменные | Свободные члены | Небазисные переменные | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ |
| $y_1$ | $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | … | $a_{1n}$ |
| $y_2$ | $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | … | $a_{2n}$ |
| $y_3$ | $-A_3$ | $-a_{31}$ | $-a_{32}$ | $-a_{33}$ | … | $-a_{3n}$ |
| ………………………………………… | | | | | | |
| 0 | $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $a_{m3}$ | … | $a_{mn}$ |
| $F$ | 0 | $-\lambda_1$ | $-\lambda_2$ | $-\lambda_3$ | … | $-\lambda_n$ |

Если в столбце дополнительных переменных есть 0, то это свидетельствует об искаженности базиса, т. е. отсутствии опорного решения. Таким образом, полученная запись при $x_j = 0$ свидетельствует, что базисное решение отсутствует по двум признакам, а именно:

– имеются отрицательные свободные члены;

– имеются 0-значения среди базисных переменных.

Всю информацию при допущении, что $x_j = 0$ заносим в таблицу. Таблица 5.1 содержит $m$ + 2 строк (где $m$ — число строк ограничений) и $n$ + 2 столбцов (где $n$ — число небазисных переменных).

Коэффициенты целевой функции в таблице 5.1 записываются с противоположным знаком.

Нахождение опорного решения предполагает замену базисных переменных небазисными или поиск нового базиса. Чтобы исключить 0 с вектора базисных переменных необходимо в 0-строке найти такой коэффициент, от деления на который коэффициента $A_m$, получим наименьшее положительное частное. Для этого вектор-столбец свободных членов делим на соответствующие коэффициенты столбцов $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Допустим, что при делении на коэффициенты первого столбца, т. е. $\frac{A_i}{a_{i1}}$ отношение $\frac{A_m}{a_{m1}} > \frac{A_2}{a_{21}}$. Это означает, что требование не выполняется. В другом случае (при $\frac{A_i}{a_{i2}}$) $\frac{A_m}{a_{m2}} > \frac{A_2}{a_{21}}$. Допустим, что при делении $\frac{A_i}{a_{in}}$ отношение $\frac{A_m}{a_{mn}}$ меньше всех других значений.

Тогда коэффициент $a_{mn}$ можно принять за разрешающий. Он указывает на то, что 0-значение и коэффициент $x_n$ поменяются местами. Эта замена означает, что целевая функция (или полупространство *F*) переместилась параллельно самой себе и поэтому значение коэффициентов изменяется. Замена значений требует вычислений, которые всегда осуществляются по одним и тем же правилам.

Для записи формул, по которым определяются коэффициенты новой симплексной таблицы (таблица 5.2), введем условные обозначения, в частности, $a_{ij}$ — коэффициент, стоящий в строке *i* и столбце *j*. При этом *F*-строка будет иметь значение *i* + 1, а столбец свободных членов *j* = 0.

Таблица 5.2 — Симплексная таблица № 2

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные переменные | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 0 |
| $y_1$ | $B_1$ | $b_{11}$ | $b_{12}$ | $b_{13}$ | $b_{1n}$ |
| $y_2$ | $B_2$ | $b_{21}$ | $b_{22}$ | $b_{23}$ | $b_{2n}$ |
| $y_3$ | $-B_3$ | $-b_{31}$ | $-b_{32}$ | $-b_{33}$ | $-b_{3n}$ |
| ………………………………………………………….. | | | | | |
| $x_n$ | $B_m$ | $b_{m1}$ | $b_{m2}$ | $b_{m3}$ | $b_{mn}$ |
| $F$ | $F_1$ | $-z_1$ | $-z_2$ | $-z_3$ | $-z_n$ |



Допустим, что коэффициент $a_{rk}$ — разрешающий, т. е. стоит в строке *r* и столбце *k* при $r \in i$, $k \in j$. При делении значений столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты столбца *k* частное от деления $A_i$ на $a_{rk}$ было наименьшим.

Условимся, что коэффициент следующей таблицы будем обозначать со штрихом, т. е. $a_{ij}'$.

***Правила:***

1. Новый коэффициент (вместо разрешающего) равен обратному от него, т. е. $a_{rk}' = \frac{1}{a_{rk}} (a_{rk} \neq 0)$ или в данном случае $\frac{1}{a_{mn}}$.

2. Новые коэффициенты столбца разрешающего элемента равны коэффициентам предыдущей таблицы, деленным на разрешающий коэффициент с противоположным значением:

$$a_{ik}' = -\frac{a_{ik}}{a_{rk}} \text{ (при } i \neq r\text{)},$$

т. е. в данном случае $-\frac{a_{in}}{a_{mn}}$ при $i \neq m$.

3. Новые коэффициенты строки разрешающего элемента равны коэффициентам предыдущей таблицы этой строки, деленным на разрешающий коэффициент:

$$a_{rj}' = \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \text{ (при } j \neq k\text{) или } \frac{a_{mj}}{a_{mn}}, \text{ при } j \neq n.$$

4. Остальные коэффициенты, не стоящие в строке и столбце разрешающего элемента определяются по правилу прямоугольника, т. е. в числителе от произведения коэффициентов главной диагонали, среди которых находится разрешающий, вычитаем произведение побочной диагонали и результат делим на разрешающий коэффициент:

$$a_{ij}' = \frac{a_{ij} a_{rk} - a_{rj} a_{ik}}{a_{rk}} = \frac{a_{ij} a_{rk}}{a_{rk}} - \frac{a_{rj} a_{ik}}{a_{rk}} =$$

$$= a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} a_{rj} = a_{ij} + a_{ik}' a_{rj} \quad \textit{или} \quad a_{ij} - \frac{a_{rj}}{a_{rk}} a_{ik} = a_{ij} - a_{rj}' a_{ik},$$

$$\text{(при } i \neq r, \quad j \neq k\text{) } a_{rk} \neq 0.$$

Перебросив 0-значения из базисных значений в небазисные, получим в $n$-мерном пространстве $m$ независимых векторов. Затем вычеркиваем 0-столбец, который в дальнейших расчетах участия не принимает. Просматривая столбец свободных членов, находим среди них отрицательные члены. Чтобы получить опорное решение, превращаем отрицательные свободные члены в положительные. Для этого базисные переменные с отрицательными свободными членами необходимо перевести в небазисные. При этом делаем столько шагов (таблиц), сколько имеется отрицательных свободных членов. За основу принимаем любую строку с отрицательным свободным членом. Лучший вариантом является та строка, среди коэффициентов которой имеется больше единиц или целых чисел. Случается, что все свободные члены являются отрицательными и им соответствуют отрицательные коэффициенты в каком-то из столбцов. В этом случае опорное решение можно получить за один шаг, взяв в качестве разрешающего коэффициента отрицательный коэффициент, от деления на который получается наибольшее положительное частное. Таким образом, за один шаг все отрицательные свободные члены будут превращены в положительные.

С точки зрения геометрической интерпретации (выпуклых множеств) это будет означать, что из мнимого многогранника решений мы переместились на реальный многогранник, но находимся не в самой лучшей выпуклой угловой точке.

Чтобы найти разрешающий коэффициент, делим значения столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты столбцов небазисных переменных.

Если $\frac{-B_3}{-b_{31}} = \min k$, то получим меньшее значение, чем от деления других частных $\frac{B_i}{b_{i1}} > \frac{-B_3}{-b_{31}}$.

Допустим, что в данном случае частное $\frac{-B_3}{-b_{31}}$ — меньше всех других. Следовательно, коэффициент $(-b_{31})$ является разрешающим.

Меняем местами $x_1$ и $y_3$, после чего проводим расчеты по приведенным выше четырем правилам (таблица 5.3).



Таблица 5.3 — Симплексная таблица № 3

| Базисные переменные | Свободные члены | Небазисные переменные | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $y_3$ | $x_2$ | $x_3$ |
| $y_1$ | $C_1$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{13}$ |
| $y_2$ | $C_2$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $c_{23}$ |
| $x_1$ | $C_3$ | $c_{31}$ | $c_{32}$ | $c_{33}$ |
| …………………………………………….. | | | | |
| $x_n$ | $C_m$ | $c_{m1}$ | $c_{m2}$ | $c_{m3}$ |
| $F$ | $F_2$ | $-z_1$ | $-z_2$ | $-z_3$ |

В этой таблице содержится опорное решение. Оно получено при следующих значениях переменных:

$$y_1 = C_1,\ y_2 = C_2,\ x_1 = C_3,\ x_n = C_m,\ y_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0\ .$$

После того, как было получено опорное решение (т. е. все ограничения выполняются), находим оптимальное, признаком которого является наличие положительных значений коэффициентов целевой функции при ее решении на максимум и отрицательных — на минимум.

Чтобы найти оптимальное решение, выбираем разрешающий столбец. Им будет тот, в $F$-строке которого стоит наибольшее по модулю отрицательное значение при решении задачи на максимум и наибольшее положительное — на минимум.

Допустим, что $|-z_2| > |-z_1, -z_3|$. Следовательно, вектор-столбец $-z_2$ является разрешающим. При этом разрешающим элементом является тот коэффициент, от деления свободного члена на который будет получено наименьшее положительное частное, т. е. $\frac{c_i}{c_{i2}} = \min k$.

Допустим, что от деления $C_3$ на $c_{32}$ было получено наименьшее положительное частное. Следовательно, $x_2$ и $x_1$ меняются местами, и мы находим новое решение по четырем правилам.

Вычисления будем продолжать до тех пор, пока в $F$-строке не получим положительные значения (при решении задачи на максимум) или отрицательные (при решении задачи на минимум).

Затем целесообразно проверить выполнение требований каждого из ограничений. Для этого переменные подставляются в каждое из ограничений. Если нарушения отсутствуют, то расчеты верны, если присутствуют — имеется ошибка в арифметических действиях.

Рассмотрим пример реализации данного алгоритма.

Пусть необходимо определить минимальный по стоимости (у. е.) состав рациона для головы крупного рогатого скота. Для содержания животного требуется не менее 30 ц к. ед., 3,17 ц перевариваемого протеина, от 7 до 12 ц концентратов, не менее 10 ц сена, не более 40 ц сенажа, не более 60 ц зеленого корма.

Неизвестными этой задачи являются веса кормов, ц: $x_1$ — концентраты; $x_2$— сено; $x_3$ — сенаж; $x_4$ — зеленый корм.

Составим систему уравнений и неравенств, а также целевую функцию, которые в совокупности будут отражать требования к рациону. Требования состоят в том, чтобы: во-первых, содержание питательных веществ в рационе было не менее установленного минимума, во-вторых, вес отдельных кормов не должен превышать допустимые пределы, в-третьих, стоимость рациона должна быть минимальной.

Следовательно, требуется найти веса отдельных кормов в рационе ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$) при следующих условиях:

1. Содержание кормовых единиц в рационе составит не меньше минимума: $1,2x_1 + 0,5x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \geq 31$.

2. Содержание перевариваемого протеина в рационе составит не меньше минимума: $0,13x_1 + 0,05x_2 + 0,033x_3 + 0,02x_4 \geq 3,17$.

3. Нижняя граница по весу концентратов составляет $x_1 \geq 7$.

4. Верхняя граница по весу концентратов составляет $x_1 \leq 12$.

5. Нижняя граница по весу сена составляет $x_2 \geq 10$.

6. Верхняя граница по весу сенажа составляет $x_3 \leq 40$.

7. По весу зеленого корма — $x_4 \leq 60$.

Минимальная стоимость рациона выражается уравнением

$$F = 12x_1 + 4,2x_2 + 2,4x_3 + 1,2x_4 \to \min .$$



Система неравенств задачи имеет вид:

1) $1,2x_1 + 0,5x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \geq 31$;

2) $0,13x_1 + 0,05x_2 + 0,033x_3 + 0,02x_4 \geq 3,17$;

3) $x_1 \geq 7$;

4) $x_1 \leq 12$; (5.1)

5) $x_2 \geq 10$;

6) $x_3 \leq 40$;

7) $x_4 \leq 60$;

$$F_{\min} = 12x_1 + 4,2x_2 + 2,4x_3 + 1,2x_4 .$$

Приводим все ограничения к типу «меньше — равно» (≤). Для этого ограничения типа (≥), т. е. 1, 2, 3, 5 умножаем на минус 1 (-1). Тогда получим:

1) $-1,2x_1 - 0,5x_2 - 0,3x_3 - 0,2x_4 \leq -31$;

2) $-0,13x_1 - 0,05x_2 - 0,033x_3 - 0,024x_4 \leq -3,17$;

3) $-x_1 \leq -7$;

4) $x_1 \leq 12$; (5.2)

5) $-x_2 \leq -10$;

6) $x_3 \leq 40$;

7) $x_4 \leq 60$;

$$F = 12x_1 + 4,2x_2 + 2,4x_3 + 1,2x_4 \to \min .$$

Превращаем неравенства в уравнения. Для этого вводим дополнительные переменные $y_i$, где $i$ — номер ограничения. При этом дополнительных переменных вводим столько же, сколько имеется ограничений типа (≤). В нашем случае вводим семь дополнительных переменных:

1) $-1,2x_1 - 0,5x_2 - 0,3x_3 - 0,2x_4 + y_1 = -31$;

2) $-0,13x_1 - 0,05x_2 - 0,033x_3 - 0,024x_4 + y_2 = -3,17$;

3) $-x_1 + y_3 = -7$;

4) $x_1 + y_4 = 12$; (5.3)

5) $-x_2 + y_5 = -10$;

6) $x_3 + y_6 = 40$;

7) $x_4 + y_7 = 60$;

$$F = 12x_1 + 4,2x_2 + 2,4x_3 + 1,2x_4 \to \min .$$

С экономической точки зрения дополнительные переменные обозначают величину недоиспользования ресурсов, если исходные ограничения (5.1) имеют вид «меньше — равно» (≤), или величину превышения минимума, если исходные ограничения имеют вид «больше — равно» (≥).

К примеру, согласно системе неравенств (5.1) первое ограничение по содержанию кормовых единиц

$$1,2x_1 + 0,5x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \geq 31$$

имеет вид «больше — равно». Допустим, что сумма произведений переменных левой части данного неравенства на коэффициенты по результатам решения равна 32. В этом случае 32 > 31. В ограничении системы неравенств (5.2) имеем -32 < -31. Тогда $y_1$ в системе (5.3) равен 1, т. е. -32 + 1 = -31. Поскольку число 31 является минимальной нормой, а 32 — фактически полученной, то $y_1$ = 1 есть величина превышения минимума содержания кормовых единиц.

Решение задачи включает два этапа: поиск опорного, т. е. допустимого и оптимального решений.

Опорное решение получается при значениях переменных, которые, будучи подставленными в условия (ограничения) задачи, обеспечивают выполнение всех ее условий. Поиск опорного решения начинается с допущения, что искомые переменные (т. е. $x_j$) равны нулю. В нашем случае $x_1, x_2, x_3, x_4$ = 0. Тогда подставив эти значения в систему уравнений (5.3), получим: $y_1$ = -31, $y_2$ = -3,17, $y_3$ = -7, $y_4$ = 12, $y_5$ = -10, $y_6$ = 40, $y_7$ = 60, $F$ = 0.

Признаком наличия опорного решения (т. е. выполнения условий при $x_i$ = 0) будут являться положительные свободные члены. При наличии хотя бы одного отрицательного свободного члена (или нуля) опорное решение будет отсутствовать. В нашем случае опорное решение отсутствует. Для его поиска сведем информацию в таблицу 5.4.



Таблица 5.4 — Исходная симплексная таблица

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные переменные | | | | Единичный базис | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ |
| $y_1$ | -31 | -1,2 | -0,5 | -0,3 | -0,3 | 1 | | | | | | |
| $y_2$ | -3,17 | -0,13 | -0,05 | -0,033 | -0,024 | | 1 | | | | | |
| $y_3$ | -7 | -1 | | | | | | 1 | | | | |
| $y_4$ | 12 | 1 | | | | | | | 1 | | | |
| $y_5$ | -10 | | -1 | | | | | | | 1 | | |
| $y_6$ | 40 | | | 1 | | | | | | | 1 | |
| $y_7$ | 60 | | | | 1 | | | | | | | 1 |
| $F$ | 0 | -12 | -4,2 | -2,4 | -1,2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Переменные столбца 1, исходя из значений которых начинается поиск оптимального решения, являются базисными. Базисные переменные в случае, когда искомые переменные $x_1, x_2, x_3, x_4$ равны нулю, будут равны свободным членам. Их значения заносятся в столбец 2. Остальные переменные (в нашем случае $x_j$, т. е. $x_1, x_2, x_3, x_4$) являются небазисными. Они всегда равны нулю.

На пересечении базисных и небазисных переменных записываем коэффициенты системы уравнений (5.3), т. е. в клетку $k_{11}$ = -1,2; $k_{12}$ = -0,5 и т. д. При записи коэффициентов $F$-строки (т. е. целевой функции) их знаки меняем на противоположные.

Находим опорное решение. Для этого необходимо, чтобы в процессе преобразований отрицательные свободные члены стали положительными, а нули в числе базисных переменных были перемещены в небазисные. При этом для упрощения расчетов и уменьшения размерности матрицы исключим столбцы единичного базиса, т. е. $y_1 \div y_7$.

Методика определения опорного решения предполагает следующее. Среди отрицательных свободных членов $B_i$ выбирается любой (для упрощения расчетов, особенно когда они выполняются вручную, следует начать решение с отрицательного свободного члена, в строке которого стоят единицы). Допустим, был выбран отрицательный свободный член $B_3 = -7$. Затем в строке данного отрицательного свободного члена находим первый отрицательный коэффициент. Им будет $a_{31} = -1$. Делим все свободные члены на соответствующие коэффициенты столбца, в котором мы выбрали отрицательный элемент, т. е. делим значения столбца свободных членов на соответствующие коэффициенты столбца $x_1$ (при этом соответствующими будем считать коэффициенты, стоящие в одной и той же строке). В нашем случае:

$$\frac{B_1}{a_{11}} = \frac{-31}{-1,2} = 25,8; \quad \frac{B_2}{a_{21}} = \frac{-3,17}{-0,13} = 24,40;$$
$$\frac{B_3}{a_{31}} = \frac{-7}{-1} = 7; \quad \frac{B_4}{a_{41}} = \frac{12}{1} = 12.$$

Коэффициент $F$-строки и столбца $x_1$, равный -12, принадлежит целевой строке и в расчетах по поиску разрешающего элемента не участвует.

В случае, если частное от деления на выбранный отрицательный элемент получится наименьшим по сравнению с другими частными, то этот отрицательный коэффициент станет разрешающим элементом[2]. В нашем случае от деления на коэффициент $a_{31}$ = -1 получено частное 7,0, которое меньше 25,8; 24,4 и 12,0.Следовательно, элемент $a_{31}$ = -1 будет разрешающим.

Разрешающий элемент показывает ту небазисную переменную, которая заменит базисную. В нашем случае базисная переменная $y_3$ заменит небазисную переменную $x_1$. С экономической точки зрения введение $x_1$ в число базисных переменных означает, что переменная вошла в решение, т. е. получит не нулевое значение.

[2] Из приведенного правила бывают исключения. Если отрицательным свободным членам соответствуют все без исключения отрицательные коэффициенты столбца небазисной переменной, то в качестве разрешающего можно взять коэффициент, от деления на который получится максимальное положительное частное. Это позволит получить опорное решение выполнив один шаг.



Случается, что частное от деления на отрицательный элемент не будет самым меньшим. Например, пусть от деления свободных членов на коэффициенты вектор-столбца $x_1$ получены значения 25,8; 6,8; 7,0; 12,0. Тогда 7 не будет меньшим положительным числом и, следовательно, коэффициент $a_{31}$ = -1 нельзя принимать в качестве разрешающего элемента. В этом случае поступаем следующим образом.

В строке отрицательного свободного члена находим следующий отрицательный элемент и делим свободные члены на соответствующие коэффициенты этого столбца, т. е. столбца с новым отрицательным элементом. Если частное от деления на новый отрицательный коэффициент будет меньшим положительным числом по сравнению с другими, то этот коэффициент примем за разрешающий. Если частное не является наименьшим положительным, то ищем третий отрицательный коэффициент в строке отрицательного свободного члена или производим те же вычисления в строке другого отрицательного свободного члена до тех пор, пока не найдем разрешающий коэффициент. После нахождения разрешающего элемента производим преобразование, т. е. приступаем к заполнению следующей симплексной таблицы (таблица 5.5). Преобразование выполняем по изложенным ранее правилам. При этом:

1. Новый коэффициент вместо разрешающего равен единице, деленной на разрешающий; где $a_{rk}'$ — новый коэффициент вместо разрешающего. Он ($a_{31}$) равен $\frac{1}{a_{31}} = \frac{1}{-1} = -1$. При этом новыми будем называть коэффициенты следующей симплексной таблицы по отношению к предыдущей:

$$a_{rk}' = \frac{1}{a_{rk}},$$

где $a_{rk}$ — разрешающий элемент, стоящий в строке $r$ и столбце $k$ при $r \in i$, $k \in j$; $i$ — номер строки, $i$ = 1, ..., $m$; $j$ — номер столбца, $j$ = 1, ..., $n$.

Разрешающий элемент обводим кружком.

Таблица 5.5 — Симплексная таблица № 5

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные переменные | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_3$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| $y_1$ | -22,6 | -1,2 | -0,5 | -0,3 | -0,2 |
| $y_2$ | -2,26 | -0,13 | -0,05 | -0,033 | -0,02 |
| $x_1$ | 7 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_4$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_5$ | -10 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| $y_6$ | 40 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $y_7$ | 60 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $F$ | 84 | -12 | -4,2 | -2,4 | -1,2 |

2. Новые коэффициенты строки разрешающего элемента $a_{rj}'$ равны предыдущим коэффициентам ($a_{rj}$), деленным на разрешающий. В нашем случае

$$a_{30}' = \frac{a_{30}}{a_{31}} = \frac{-7}{-1} = 7\ .$$

3. Новые коэффициенты столбца разрешающего элемента ($a_{ik}'$) равны предыдущим коэффициентам, деленным на разрешающий элемент с противоположным знаком.

В нашем случае:

$$a_{11}' = -\frac{a_{11}}{a_{31}} = -1,2; \quad a_{21}' = -\frac{a_{21}}{a_{31}} = -0,13; \quad a_{41}' = -\frac{a_{41}}{a_{31}} = 1.$$

4. Новые коэффициенты, не стоящие в строке и столбце разрешающего элемента ($a_{ij}$), равны частному от деления разности произведения коэффициентов главной и побочной диагонали на разрешающий элемент.



Например, чтобы найти новый коэффициент вместо $a_{40}$ = 12, строим прямоугольник, главная диагональ которого составлена коэффициен том $a_{40}$ = 12 и разрешающим элементом $a_{31}$, а побочная — $a_{30}$ и $a_{41}$ (рисунок 5.1).


Рисунок 5.1

Тогда

$$a_{40}' = \frac{a_{40}a_{31} - a_{30}a_{41}}{a_{31}} = \frac{12\times(-1) - (-7\times 1)}{-1} = 5.$$

Аналогично определяем новый коэффициент вместо $a_{F0}$ = 0. Прямоугольник для него включает $a_{F0}, a_{F1}, a_{30}, a_{31}$:

$$a_{F0}' = \frac{a_{F0}a_{31} - a_{30}a_{F1}}{a_{31}} = \frac{0(-1) - [-7(-12)]}{-1} = 84\ .$$

В таблице 5.5 опорное решение отсутствует, так как три свободных члена имеют отрицательные значения.

По изложенным выше правилам ищем разрешающий элемент в строке отрицательного свободного члена $y_5$. Этим элементом будет $a_{52}$ = -1, так как при делении свободных членов на соответствующие коэффициенты столбца $x_2$ наименьшее положительное частное получено при делении на коэффициент $a_{52}$.

По данным правилам делаем преобразования, т. е. находим новые коэффициенты симплексной таблицы 5.5. При этом базисную переменную $y_5$ поменяем местами с небазисной основной переменной $x_2$. Таким образом, получаем таблицу 5.6.

В столбце $x_2$ таблицы 5.5 все коэффициенты имеют отрицательные знаки. И этим коэффициентам в столбце свободных членов соответствуют отрицательные значения. В данном случае в качестве разрешающего элемента можно взять коэффициент, от деления на который получили наибольшее положительное частное. При подобном подходе опорное решение получается быстрее, но поскольку такие ситуации бывают не часто, то его нахождение продолжаем обычным способом.

Таблица 5.6 — Симплексная таблица № 6

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные переменные | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_3$ | $y_5$ | $x_3$ | $x_4$ |
| $y_1$ | -17,6 | -1,2 | -0, 5 | -0,3 | -0,2 |
| $y_2$ | -1,76 | -0,13 | -0,05 | -0,033 | -0,02 |
| $x_1$ | 7 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_4$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 10 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| $y_6$ | 40 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $y_7$ | 60 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $F$ | 126,0 | -12,0 | -4,2 | -2,4 | -1,2 |

Так как в таблице 5.6 опорное решение отсутствует, то продолжаем его поиск.

Выбираем любой из двух оставшихся отрицательных свободных членов. Например, -17,6. Первый отрицательный коэффициент в его строке $a_{11} = -1,2$ не является разрешающим, так как от деления на него меньшее положительное частное не получается. Проверка показывает, что $a_{12} = -0,5$. Коэффициент является разрешающим. При этом в равной мере разрешающим может быть также и коэффициент во второй строке ($a_{22} = -0,05$), так как полученные частные одинаковы:

$$\frac{-17,6}{-0,5} = 33,2; \quad \frac{-1,76}{-0,05} = 33,2.$$



Заменяем небазисную переменную $y_5$ базисной $y_1$ и делаем преобразования (таблица 5.7).

Таблица 5.7 — Симплексная таблица № 7

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные переменные | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_3$ | $y_1$ | $x_3$ | $x_4$ |
| $y_5$ | 35,2 | 2,4 | -2,0 | 0,6 | 0,4 |
| $y_2$ | 0,000 | -0,010 | -0,100 | -0,033 | 0,000 |
| $x_1$ | 7 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_4$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 45,2 | 2,4 | -2,0 | 0,6 | 0,4 |
| $y_6$ | 40 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $y_7$ | 60 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $F$ | 272,54 | -1,92 | -8,40 | 0,12 | 0,48 |

Итак, опорное решение (план) получено при следующих значениях основных переменных: $x_1 = 7,0$; $x_2 = 45,2$; дополнительных — $y_5 = 35,2$; $y_2 = 0$; $y_4 = 5$; $y_6 = 40$; $y_7 = 60$ и $F = 272,54$ у. е.

Таким образом, после подстановки значений $x_1$ и $x_2$ в систему неравенств (5.1) все условия будут выполнены.

***Поиск оптимального решения.*** Опорное решение является оптимальным, если коэффициенты целевой функции *F*-строки будут отрицательными (или нулевыми) при поиске минимума или положительными (или нулевыми) при поиске максимума (за исключением свободного члена *F*-строки). В данном случае оптимальное решение (минимум функции) отсутствует, так как здесь имеются положительные коэффициенты.

Поиск оптимального решения начинается с определения разрешающего столбца. Разрешающим столбцом при поиске минимума функции будет являться тот, в строке целевой функции которого находится наибольший положительный коэффициент, а при поиске максимума функции — наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент.

В данном случае в $F$-строке для переменной $x_4$ имеется наибольший положительный коэффициент (0,48).Следовательно, столбец $x_4$ является разрешающим. Чтобы найти разрешающий элемент, делим столбец свободных членов на соответствующие коэффициенты разрешающего столбца. Разрешающим будет элемент, от деления на который получается меньшее положительное частное. В данном случае таковым будет $a_{74} = 1$, так как

$$\frac{B_1}{a_{14}} = \frac{35,2}{0,4} = 88; \quad \frac{B_5}{a_{54}} = \frac{45,2}{0,4} = 113; \quad \frac{B_7}{a_{74}} = \frac{60}{1} = 60.$$

Меняем местами переменные $x_4$ и $y_7$ и определяем по изложенным выше правилам новые коэффициенты (таблица 5.8).

Таблица 5.8 — Симплексная таблица № 8

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные переменные | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_3$ | $y_1$ | $x_3$ | $y_7$ |
| $y_5$ | 11,2 | 2,4 | -2,0 | 0,6 | -0,4 |
| $y_2$ | 0,00 | -0,01 | -0,10 | -0,03 | 0,00 |
| $x_1$ | 7 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_4$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 21,2 | 2,4 | -2,0 | 0,6 | -0,4 |
| $y_6$ | 40,00 | -4,00 | 3,30 | 1,00 | 0,66 |
| $x_4$ | 60 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $F$ | 243,74 | -1,92 | -8,40 | 0,12 | -0,48 |

Оптимальное решение здесь отсутствует, так как в $F$-строке столбца $x_3$ имеется положительный коэффициент. Этот столбец будет разрешающим. По отношению значений столбца свободных



членов и соответствующих коэффициентов столбца $x_3$ определяем, что разрешающим будет коэффициент $a_{13} = 0,6$.

Заполняем новую таблицу, меняя при этом местами переменные $y_5$ и $x_3$ (таблица 5.9).

Таблица 5.9 — Симплексная таблица № 9

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные переменные | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_3$ | $y_1$ | $y_5$ | $y_7$ |
| $x_3$ | 18,54 | 4,00 | -3,30 | 1,70 | -0,66 |
| $y_2$ | 0,050 | 0,012 | -0,010 | 0,005 | -0,002 |
| $x_1$ | 7 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_4$ | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | 10 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| $y_6$ | 21,46 | -4,00 | 3,30 | -1,70 | 0,66 |
| $x_4$ | 60 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $F$ | 241,5 | -2,4 | -8,0 | -0,2 | -0,4 |

Таким образом, оптимальное решение получено. Минимум функции составляет 241,50 денежных единиц при значениях переменных $x_1 = 7$, $x_2 = 10$, $x_3 = 18,54$, $x_4 = 60$. Значения дополнительных переменных составили: $y_3$, $y_1$, $y_5$, $y_7$, $y_6$. Подставим значения переменных в систему неравенств (5.3):

1) $-1,2x_1 - 0,5x_2 - 0,3x_3 - 0,2x_4 + y_1 = -31$

или

$$-1,2 \times 7 - 0,5 \times 10 - 0,3 \times 18,54 - 0,24 \times 60 + y_1 = -31;$$

$$-31 + y_1 = -31; \quad y_1 = 0.$$

В таблице 5.9 имеем то же, а именно: $y_1 = 0$.

2) $-0,13 \times 7 - 0,05 \times 10 - 0,033 \times 18,54 - 0,02 \times 60 + y_2 = -3,17$;

$$-3,22 + y_2 = -3,17; \quad y_2 = 0,05.$$

Превышение над минимумом составляет 0,05.

3) $-7 + y_3 = -7; \quad y_3 = 0.$

4) $7 + y_4 = 12; \quad y_4 = 5,$

что и в симплексной таблице 5.9, т. е. ресурс недоиспользован на 5 единиц (ц).

5) $-10 + y_5 = -10; \quad y_5 = 0.$

6) $18,54 + y_6 = 40; \quad y_6 = 21,46,$

что и в симплексной таблице 5.9.

7) $60 + y_7 = 60; \quad y_7 = 0.$

$F_{\min} = 12 \times 7 + 10 \times 4,2 + 18,54 \times 2,4 + 60 \times 1,2 = 241,5$ денежных единиц. Следовательно, все условия задачи выполнены, решение получено.

В отдельных случаях среди ограничений задачи могут быть уравнения. Допустим, что в данной задаче условие (5.1) имеет вид: $x_1 = 7$. Тогда вводить дополнительную переменную $y$, как это сделано в системе (5.3), не требуется. Вместо $y_3$ в таблице 5.3 в числе базисных переменных стоял бы нуль. Свободный член был бы равен 7, а коэффициент $a_{31} = 1$. Наличие нуля в базисных переменных (как и отрицательных свободных членов) свидетельствует об отсутствии опорного решения. Для получения опорного решения требуется избавиться от отрицательных свободных членов и переместить нули из базисных переменных в небазисные. Методика переноса нулей состоит в том, что в строке с нулем в базисных переменных находят разрешающий элемент по обычному правилу, т. е. наименьшему положительному частному от деления свободного члена на коэффициент. В данном случае при делении свободных членов на соответствующие коэффициенты столбца $x_1$ коэффициент $a_{31} = 1$ стал бы разрешающим. Выполнив преобразования по изложенным выше правилам, мы имели бы в небазисных переменных вместо $x_1$ нуль, а в базисных переменных вместо нуля — $x_1$. После этого следует вычеркнуть весь нуль-столбец и продолжать решение, но с тремя вектор-столбцами небазисных переменных.



# ГЛАВА 6. Экономическое содержание симплекс-метода

## 6.1. Экономическое содержание коэффициентов пропорциональности

Выполнение расчетов по симплекс-методу предполагает нахождение параметров переменной в какой-то новой крайней угловой точке многогранника решений. Поиск параметров связан с преобразованиями, которые сохраняют не только математическую логику, но и смысловое содержание. Чтобы это выяснить, проследим изменения коэффициентов (сравним первую и вторую симплексные таблицы). Для выяснения сущности этих изменений обратимся к примеру[3].

Пример. Рассчитать размеры отраслей с целью получения максимальной прибыли.

1. Ограничение по использованию пашни (га):

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1000.$$

2. Ограничение по использованию труда (чел.-дней):

$$9x_1 + 22x_2 + 8x_3 + 20x_4 \le 20000.$$

3. Ограничение по использованию фондов (у. е.):

$$600x_1 + 1200x_2 + 300x_3 + 1500x_4 \le 1352000.$$

4. Ограничение по использованию и производству кормов (ц к. ед.):

$$50x_4 \le 5000 + 15x_1 + 20x_2 + 30x_3.$$

Целевая функция:

$$F = 300x_1 + 600x_2 + 1000x_4 \to \max,$$

где $x_1$ — площадь зерновых, га; $x_2$ — площадь картофеля, га; $x_3$ — площадь силосных, га; $x_4$ — поголовье коров, голов.

[3] Это положение легче понять и проследить в ситуации, когда в первой симплекс таблице имеется опорное решение.

Сведем эту исходную информацию в таблицу 6.1.

Таблица 6.1 — Симплексная таблица № 10

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные переменные | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| $y_1$ | 1000 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $y_2$ | 20000 | 9 | 22 | 8 | 20 |
| $y_3$ | 1352000 | 600 | 1200 | 300 | 1500 |
| $y_4$ | 5000 | -15 | -20 | -30 | 50 |
| $F$ | 0 | -300 | -600 | 0 | -1000 |

Поскольку решаем данную задачу на максимум, то разрешающим будет столбец $x_4$. С экономической точки зрения разрешающий элемент определяется самым лимитированным ресурсом, так как он дает наименьшее положительное частное. Полученные преобразованные исходные данные заносим в таблицу 6.2.

Таблица 6.2 — Симплексная таблица № 11

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_4$ |
| $y_1$ | 1000 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $y_2$ | 18000 | 15 | 30 | 20 | 0,4 |
| $y_3$ | 1202000 | 1050 | 1800 | 1200 | -30 |
| $x_4$ | 100 | -0,3 | -0,4 | -0,6 | 0,02 |
| $F$ | 100000 | -600 | -1000 | -600 | 20 |



С экономической точки зрения новый коэффициент (вместо разрешающего) означает то, сколько единиц переменной $x_4$ можно получить за счет единицы ресурса $y_4$ (0,02). При этом

$$a'_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{rk}}, \quad (i \neq r). \qquad (6.1)$$

Новые коэффициенты столбца разрешающего элемента (6.1) показывают, сколько единиц ресурсов требуется при знаке «плюс» (или сколько их получим при знаке «минус»), если в план или в базис введем небазисные переменные в размере, равном значению нового коэффициента вместо разрешающего (0,02). При этом

$$a'_{rj} = -\frac{a_{rj}}{a_{rk}}, \quad (i \neq k). \qquad (6.2)$$

Новые коэффициенты строки разрешающего элемента (6.2) показывают, на сколько единиц увеличивается ранее введенная в план переменная, если в план или в базис введем небазисную переменную в размере 1 (увеличивается при знаке «минус» и уменьшается при знаке «плюс»). Например, согласно данным таблицы 6.1, при введении в план $x_1$ в размере 1 требуется: первого ресурса — 1, второго — 9, третьего — 600, а четвертого — получим 15 единиц. Согласно таблицы 6.2 за счет 15 единиц четвертого ресурса можно иметь приращение $x_4$ на 0,3 (так как на единицу $x_4$ требуется 50 ц к. ед. ресурса $y_4$), при введении $x_2$ = 1— приращение $x_4$ на 0,4 и т. д.

$$a_{ij}' = \frac{a_{ij}a_{rk} - a_{rj}a_{ik}}{a_{rk}} = \frac{a_{ij}a_{rk}}{a_{rk}} - \frac{a_{rj}a_{ik}}{a_{rk}} = a_{ij} - a_{rj}'a_{ik}$$

$$\text{при } i \neq r, \quad j \neq k, \quad a_{rk} \neq 0.$$

Согласно данным таблицы 6.1 при введении в базис $x_1$ в размере 1 требуется ресурсов: $y_1$ = 1, $y_2$ = 9, $y_3$ = 600 и получаем ресурса $y_4$ = -15, а значение $F$ ($\lambda_1$=-300) возрастет. Согласно данным таблицы 6.2 при введении $x_1$ = 1 значение $x_4$ возрастет на 0,3 ($a_{41} = -15/50 = -0,3$). Логика формирования $a_{ij}$ такова.

| При $x_1 = 1$ значения $a_{ij}$ составляют: | В расчете на $x_4 = -0,3$ изменение коэффициентов ($a_{i_j} a_{ik}$) составит: | Новые значения вектор-столбца в таблице 6.2 составят: |
|---|---|---|
| $y_1 = 1$; | 0 × (-0,3) = 0; | 1 – 0 = 1; |
| $y_2 = 9$; | 20 × (-0,3) = -6; | 9 – (-6) = 15; |
| $y_3 = 600$; | 1500 × (-0,3) = -450; | 600 – (-450) = 1050; |
| | $x_4 = y_4$; $a_{rk} = -0,3$; | 0 – 0,3 = -0,3; |
| $y_4 = -15$, $x_4 = 0$; | -1000 × (-0,3) = 300. | -300 – (+300) = -600. |
| $F = -300$. | | |

Новые коэффициенты, не стоящие в столбце и строке разрешающего элемента, включают расход (при знаке "+") или поступление (при знаке "-") ресурсов на 1 небазисную переменную, а также на величину приращения ранее введенной в план переменной (пример с коэффициентами вектор-столбца $x_1$). В таблице 6.2 эти коэффициенты включают расход или поступление ресурсов от введения в план $x_1$ в размере 1, а также расход и поступление ресурсов в расчете на 0,3 $x_4$.

## 6.2. Корректировка оптимальных решений

Поскольку экономические объекты отличаются динамичностью, то изменяется и соответствующая информация (изменяются ресурсы, технологии и, следовательно, окупаемость ресурсов). В связи с этим полученное ранее оптимальное решение может уже не быть таковым и потребовать нового решения, т. е. увеличить или уменьшить размеры отрасли, ввести новые или исключить ранее выгодные отрасли. Чтобы избежать повторного решения задачи достаточно произвести корректировку ее прежнего оптимального решения. Для этого используем информацию последней симплексной таблицы. В ней на основе коэффициентов пропорциональности следует произвести необходимые изменения. При этом коэффициентами пропорциональности называют коэффициенты симплекс-таблицы (начиная со второй), которая количественно выражает взаимосвязи переменных между собой и с ресурсами.



Обратимся к последней симплексной таблице (таблица 6.3).

Таблица 6.3 — Симплексная таблица № 12

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные переменные | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_1$ | $y_2$ | $x_3$ | $y_4$ |
| $x_1$ | 800 | 2 | -0,066 | 0,66 | 0,026 |
| $x_2$ | 200 | -1 | 0,066 | 0,34 | -4,4 |
| $y_3$ | 2000 | -300 | -50 | -100 | 0,032 |
| $x_4$ | 420 | 0,56 | -0,017 | -0,85 | 0,02 |
| $F$ | 780000 | 200 | 26,7 | 136 | 9,3 |

Корректировку оптимального решения осуществляем по формуле:

$$x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - \sum_{j \in J_1} a_{ij} \Delta x_j (\Delta y_i),$$

где $x_j^k(y_i^k)$ — значения основных (дополнительных) переменных после корректировки; $x_j(y_i)$ — значения основных (дополнительных) переменных до корректировки; $j$ — номер столбца, участвующего в корректировке; $J_1$ — множество столбцов, участвующих в корректировке (по которым производится данная корректировка); $a_{ij}$ — коэффициенты пропорциональности (вектор-столбца, участвующего в корректировке); $\Delta x_j(\Delta y_i)$ — величина корректировки по основной или дополнительной переменной.

Корректировка может производиться по небазисным и базисным переменным, а среди них — по основным и дополнительным переменным.

## Корректировка по небазисным переменным

*Корректировка по основным небазисным переменным* (переменные, не вошедшие в план, в данном случае — $x_3$). При изменении цен или технологий не вошедшие в план (т. е. невыгодные) отрасли могут стать выгодными и их следует ввести в базис. Введение переменных предполагает изменение размеров других отраслей, использования ресурсов и экономических резервов.

Методика корректировки оптимального решения следующая:

1. Из небазисных основных переменных выбираются те, по которым наметилось наибольшее возрастание эффекта или наиболее существенные изменения в технологии.

2. Находится максимальная величина корректировки по формуле:

$$\max \Delta x_j = \min \frac{A_i}{a_{ij}},$$

где $\max \Delta x_j$ — минимальное положительное частное от деления свободных членов на коэффициенты пропорциональности столбца, по которому делаем корректировку.

3. Придаем величине $\Delta x_j$ значение, не превышающее максимально допустимую величину, т. е.

$$\Delta x_j \leq \min \frac{A_i}{a_{ij}},$$

4. По общей формуле находим новое решение.

В данном примере среди небазисных имеется одна основная переменная $x_3$. Тогда

$$\max \Delta x_3 = \min \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{800}{0,66} = 1200 \\ \dfrac{200}{0,34} = 600 \end{array} \right\} = 600.$$

Допустим, что возможности хозяйства, исходя из наличия семян, потребности рынка или новых договорных поставок таковы, что $\Delta x_3$ должно быть равно 100.



Тогда новое решение соответственно будет

$$\Delta x_3 = x_3 = 100,$$
$$x_1^k = 800 - 0,66 \times 100 = 734,$$
$$x_2^k = 200 - 0,34 \times 100 = 166,$$
$$x_3^k = 2000 - (-100) \times 100 = 12000,$$
$$x_4^k = 420 - (-0,86) \times 100 = 506,$$
$$F^f = 780000 - 136 \times 100 = 766400.$$

Если проверить его по ограничениям, то получится, что объемы ресурсов используются полностью.

*Корректировка по небазисным дополнительным переменным* ( $y_i$ )

**Ресурсы уменьшаются**, если $\Delta y_i = y_i > 0$ .

Например, имеем ограничение по использованию пашни

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000.$$

$\sum x_1, x_2, x_3$ была максимальной и равняется 1000, при этом $y_1 = 0$ .

Если $y_1$ возрастал, то величина справа и слева от него уменьшилась, т. е. ресурс уменьшился.

Методика корректировки решения следующая:

1. Выбирают дополнительную переменную, стоящую в ограничении по использованию того ресурса, который уменьшился или будет уменьшаться.

Причинами уменьшения ресурса могут быть: разгосударствление и приватизация, вследствие чего ресурсы пашни и фондов бывшего хозяйства уменьшаются; создание фермерских хозяйств в рамках многоотраслевых хозяйств; выделение фермерских хозяйств из кооперативов, акционерных предприятий.

2. Максимальная величина определяется так же, как и в предыдущем случае.

3. В рамках возможного $\Delta y_i$ придают значение, которое определяет величину уменьшения ресурса.

4. Новое решение определяют по основной формуле корректировки.

Допустим, что создается фермерское хозяйство, площадью 150 га, т. е. $\Delta y_i = y_1 = 150$. Тогда в кооперативе с площадью пашни 1000 га происходит уменьшение ресурса.

**Ресурсы увеличиваются***,* если $\Delta y_i = y_i \le 0$.

Причинами увеличения ресурсов являются: объединение нескольких кооперативов (кооператив приобрел фонды); увеличилась площадь землепользования фермерских хозяйств; увеличилась численность работников и т. д.

Методика корректировки следующая:

1. Находим ресурс, по которому возможно увеличение.
2. Находим максимальную величину корректировки

$$\max \Delta y_i = \min \left| -\frac{A_i}{a_{ij}} \right|.$$

Она равна минимальному по модулю отрицательному частному от деления свободных членов на коэффициенты пропорциональности столбца, по которому делаем корректировку.

3. Придаем $\Delta y_i$ значение корректировки со знаком "-" меньшее по модулю, чем максимально возможная величина.
4. Используя основную формулу, осуществляем корректировку.

Допустим, что в кооперативе может увеличиться площадь пашни, т. е. $y_1 < 0$:

$$\frac{800}{2} = 400; \quad \frac{200}{-1} = -200; \quad \frac{2000}{-300} = -6,6; \quad \frac{420}{0,56} = 750;$$

$$\max \Delta y_1 = -6,6.$$

Допустим также, что фермерское хозяйство взяло в аренду 5 га пашни. Тогда $\Delta y_i = -5$.

Значения остальных переменных получаем по изложенной выше методике, т. е. подставляя значение $\Delta y_i = y_1 = -5$.



## Корректировка по базисным переменным

1. Определяем небазисные переменные, которые будут участвовать в корректировке. Выбираем основные переменные в случае, когда в результате корректировки не должно произойти уменьшение какого-то ресурса.

Необходимость корректировки по базисным переменным может диктоваться тем, что изменяются ранее отработанные технологии или подходы к развитию отдельных отраслей.

Например, ранее работники АПК ориентировались на то, чтобы площадь зерновых не превышала 50 % , а часть зерна при этом закупали.

Потребность в валюте вынуждает наращивать площади сенокосов и пастбищ для увеличения производства кормов, а оставшуюся часть пашни (до 10%) использовать для производства зерна.

Другой пример — необходимость соблюдения экологической безопасности. Поскольку технология очистки отходов животноводческих комплексов далека от совершенства, то вместо возведения крупных животноводческих комплексов предпочтение отдают строительству средних. Этому способствует и то обстоятельство, что животноводство надо развивать на основе собственных кормов.

Однако при этом может потребоваться увеличение площади зерновых или уменьшение поголовья животных.

2. По данным общей формулы корректировки находим, какой должна быть величина $\Delta x_j(\Delta y_i)$ с тем, чтобы базисная переменная $x_j^k(y_i^k)$ приобрела новое значение:

$$x_j^k(y_i^k) = x_j(y_i) - a_{ij}\Delta x_j(\Delta y_i), \quad j = 1.$$

Задаем значение $x_j^k(y_i^k)$ и определяем величину $\Delta x_j(\Delta y_i)$:

$$\Delta x_j(\Delta y_i) = \frac{x_j(y_i) - x_j^k(y_i^k)}{a_{ij}}.$$

3. Находим максимальную величину корректировки по небазисной переменной по формуле:

$$\max \Delta x_j{}'(\Delta y_i{}') = \min \frac{A_i}{a_{ij}}; \text{ тогда:}$$

а) если $\Delta x_j'(\Delta y_i') > \Delta x_j(\Delta y_i)$, т. е. максимально возможная величина превышает требуемую $\Delta x_j(\Delta y_i)$, то корректировку осуществляют, используя один столбец;

б) если $\Delta x_j'(\Delta y_i') < \Delta x_j(\Delta y_i)$, т. е. максимально возможное значение меньше требуемой величины, то в корректировке используют не менее двух вектор-столбцов дополнительных переменных.

При этом на первом этапе $\Delta x_j(\Delta y_i)$ принимают в размере

$$\Delta x_j'(\Delta y_i'), \text{ т. е. } \Delta x_j(\Delta y_i) = \Delta x_j'(\Delta y_i').$$

Например, корректировку необходимо провести, чтобы $x_j^k = x_j = 700$. Используя небазисную переменную $x_k$, можем осуществлять корректировку, после которой $x_j$ может принять значение 650, т. е. $x_j = 650$.

На следующем этапе берем новую небазисную переменную, за счет которой обеспечим приращение $x_j$ на 50 единиц.



# ГЛАВА 7. Двойственные экономико-математические оценки

## 7.1. Понятие о двойственных экономико-математических оценках

В условиях самоокупаемости и самофинансирования каждое предприятие стремится к приобретению ресурсов, обеспечивающих наращивание темпов производства и высокую окупаемость издержек.

Затраты на приобретение ресурсов предприятие будет сравнивать с результатами от использования этих ресурсов. Однако в каждом предприятии (в силу взаимозаменяемости ресурсов и различий в технологиях) объем отдельных видов ресурсов, необходимых для получения единицы продукции, не одинаков.

Для успешного достижения конечных результатов необходимо, в первую очередь, обеспечить высокую окупаемость лимитированных и незаменимых ресурсов.

Следовательно, с точки зрения достижения конечных результатов (прибыли) окупаемость отдельных ресурсов по хозяйству в стоимости произведенной продукции будет различной. Ресурсы, выгодные для приобретения одним предприятиям, будут не выгодны другим. Поэтому фермерским хозяйствам, кооперативам и др. необходимо владеть инструментом объективной оценки ресурсов в конкретных условиях функционирования объекта, что позволит соответствующим работникам принимать взвешенные решения.

Таким инструментом являются двойственные или объективно обусловленные оценки. Двойственные оценки, рассчитанные по регионам, есть оптимальные цены на ресурсы в условиях равновесия спроса и предложения. Таким образом, двойственные оценки в условиях рынка могут стать важнейшим инструментом государства для экономического вмешательства в механизм хозяйствования.

Ненулевые двойственные оценки имеют ресурсы, которые лимитированы, не избыточны. Если ресурс избыточен, то он замораживает денежные средства предприятия и имеет нулевую двойственную оценку, хотя хозяйственная ценность этого ресурса, в первую очередь для предприятий, испытывающих потребность в нем, значительна. При изменении технологии, ценовых и других характеристик возможно изменение потребности в подобном ресурсе и его запасы могут быть полностью использованы, а двойственная оценка примет ненулевое значение.

Двойственные оценки имеют ту же единицу измерения, что и целевая функция задачи. Поэтому целевая функция, на основе которой определяются двойственные оценки, должна соответствовать целям работы предприятий в условиях самоокупаемости и самофинансирования.

Двойственные оценки получают как при решении обычной (прямой) задачи, так и при решении специальной, двойственной или транспонированной задачи. Однако при составлении и решении прямой задачи главная цель, которую мы преследуем, состоит в определении значений переменных задачи. Поэтому ограничения задачи составляют таким образом, чтобы количественно описать все условия, оказывающие влияние на функционирование каждой переменной (обозначающей отрасль и т. д.).

При составлении прямой задачи возможно объединение ресурсов (например, труд годовой и в том числе труд механизаторов), ибо такое объединение чаще всего не оказывает влияние на результаты решения задачи. Полученная при решении прямой задачи двойственная оценка является дополнительной количественной характеристикой оптимального плана.

При определении двойственных оценок на основе двойственной задачи предъявляются более строгие требования к ограничениям. Например, при записи ограничений по труду следует отдельно записать ограничения по ручному труду и труду механизированному. Ограничения двойственной задачи должны как можно полнее характеризовать использование всех (или почти всех) ресурсов, факторов, взаимосвязей, определяющих процесс функционирования изучаемого объекта.

## 7.2. Методика обоснования и использования двойственных экономико-математических оценок

Обоснование двойственных оценок осуществляют в двойственной или транспонированной задаче, которую получают на основе прямой.



Допустим, что имеем задачу или экономико-математическую модель

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le A_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le A_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le A_m; \\ &F_{\max} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n. \end{aligned}$$

В общем виде ее можем записать:

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij}x_j \le A_i, \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} \lambda_j x_j \quad [\text{при } x_j \ge 0].$$

Для построения двойственной задачи вводятся двойственные оценки. Их будет столько же, сколько ограничений ($u_1, u_2, u_m$).Здесь $u_1$ показывает, на сколько единиц возрастет целевая функция, если первый ресурс увеличится на единицу сверх величины $A_1$.Таким образом, двойственная оценка по смысловому содержанию противоположна знаку ограничения. Если знак «$\le$», то она предполагает прибавку (увеличение) *F*-значения (если ресурс возрастает на 1 сверх величины $A_i$). Если же знак ограничения «$\ge$» и ресурс $A_i$ уменьшится на единицу, то двойственная оценка свидетельствует об уменьшении значения *F*.

### Методика построения двойственной задачи

1. Коэффициентами строки двойственной задачи становятся коэффициенты столбца прямой задачи. При этом знаки ограничений меняются на противоположные. Если в прямой задаче ограничения имеют разные знаки, то следует привести их к одним (тем, которых больше).
2. Свободными членами двойственной задачи являются коэффициенты *F*-строки прямой задачи.

3. Коэффициентами $F$-строки двойственной задачи являются свободные члены прямой задачи. При этом цель решения двойственной задачи противоположна цели прямой задачи. Двойственная задача будет иметь вид

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m \geq \lambda_1;$$
$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{m2}u_m \geq \lambda_2;$$
$$..........................................$$
$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{mn}u_m \geq \lambda_n;$$
$$F_{\min} = A_1u_1 + A_2u_2 + ... + A_mu_m; \quad u_1 \geq 0; \quad u_2 \geq 0; ... u_m \geq 0.$$

В общем виде $\sum\limits_{i \in I_0} a_{ij}u_i \geq \lambda_j, \quad j \in J_0; \quad F_{\min} = \sum\limits_{i \in I_0} A_i u_i.$

Первое ограничение обозначает то, что расход первого ресурса $a_{11}$ на единицу отрасли $x_1$, умноженный на оценку первого ресурса, плюс расход второго ресурса на единицу первой отрасли, умноженный на оценку второго ресурса $u_2$, и т. д., плюс расход $m$-го ресурса на единицу первой отрасли, умноженный на оценку $m$-го ресурса $u_m$, будут не меньше коэффициента целевой функции на единицу первой отрасли $x_1$.

Двойственные оценки определяют значение каждого ресурса в конечных результатах предприятия, обозначенных целевой функцией.

Содержание двойственных оценок вытекает из основных теорем двойственности.

*Из первой теоремы двойственности* следует, что максимум целевой функции прямой задачи равен минимуму целевой функции двойственной задачи, т. е.

$$\max\left\{\sum_{j \in J_0} \lambda_j x_j\right\} = \min\left\{\sum_{i \in I_0} A_i u_i\right\}.$$

Это означает, что оценка всей продукции прямой задачи в двойственной задаче равна общей оценке ресурсов, затраченных на ее производство. Отсутствие такого равенства свидетельствует о том, что данный план не оптимален.



*Из второй теоремы двойственности* вытекают следующие требования:

$$\begin{cases} \textit{если} \quad u_i > 0, \quad \textit{то} \quad \sum\limits_{j \in J_0} a_{ij}x_j = A_i, \quad i \in I_0 \\ \textit{если} \quad \sum\limits_{j \in J_0} a_{ij}x_i < A_i, \quad \textit{то} \quad u_i = 0, \quad i \in I_0 \end{cases},$$

т. е. если оценка единицы ресурса вида $i$ положительна, то при оптимальной производственной программе этот ресурс используется полностью, если же оценка равна нулю, то используется не полностью;

$$\begin{cases} \textit{если} \quad x_j > 0, \quad \textit{то} \quad \sum\limits_{i \in I_0} a_{ij}u_i = \lambda_j, \quad j \in J_0 \\ \textit{если} \quad \sum\limits_{i \in I_0} a_{ij}u_i > \lambda_j, \quad \textit{то} \quad x_j = 0, \quad j \in J_0 \end{cases},$$

т. е., если отрасль включена в оптимальный план, то производство ее продукции по оценкам оправдано, так как общий расход ресурсов на единицу продукции отрасли в оценках оптимального плана равен цене продукта отрасли.

Если же отрасль убыточна, то она отсутствует в оптимальном плане, так как оценка ресурсов, затрачиваемых на единицу продукции отрасли, больше цены продукции единицы отрасли.

Иногда может быть рассчитан такой план, в котором $x_j = 0$, а соответствующее ограничение двойственной задачи выполняется как строгое равенство. Получается, что вид продукции не вошел в оптимальный план, а по его оценкам производство данного вида продукции рентабельно. Это возможно при наличии альтернативных вариантов плана. Значение целевой функции при этом не изменяется.

Из рассмотренных положений вытекают основные свойства двойственных оценок.

*Первое свойство* двойственных оценок связано с мерой дефицитности ресурсов, продуктов. Сущность его состоит в том, что если ограничение выполняется как строгое равенство, то оценка будет ненулевая; если же как неравенство типа >, < — нулевая.

*Второе свойство* связано с устойчивостью оценок. Если бы оценки были неустойчивы, т. е. менялись с изменением каждого параметра задачи, то они не представляли бы экономического интереса и потеряли свое значение в качестве средства экономико-математического анализа. Но для двойственных оценок характерна определенная устойчивость к изменению параметров правой части модели и неустойчивость к изменению технико-экономических коэффициентов и коэффициентов целевой функции.

*Третье свойство* двойственных оценок связано с мерой влияния ограничения на функционал.

Экономическое содержание оценок определяется содержанием критерия оптимальности и того фактора производства (или условия выпуска продукции), которое они оценивают. Единицу измерения оценки имеют ту же, что и функционал.

Нулевые оценки по ресурсам или продуктам свидетельствуют о том, что изменение объема ограничения на их единицу не повлияет на значение функционала, так как ресурс по оптимальному плану имеется в избытке, а продукт произведен сверх плана. Ненулевые оценки по ресурсам показывают то, насколько увеличивается (или уменьшится) функционал при увеличении или уменьшении ресурса, приходящегося на единицу продукции.

Таким образом, двойственные оценки позволяют определить конечный эффект от принятия того или иного решения по изменению исходных условий задачи.

*Четвертое свойство* связано с взаимозаменяемостью ресурсов или продуктов. При этом используется не абсолютная взаимозаменяемость, а относительная, то есть та, которая влияет на значение критерия оптимальности. Взаимозаменяемость определяется по соотношению двойственных оценок.

*Пятое свойство* связано с мерой рентабельности отдельных способов затрат ресурсов. Это означает, что по способам, вошедшим в оптимальный план, затраты ресурсов в оценках оптимального плана равны запланированному эффекту.

К примеру, составим и решим двойственную задачу.

Пусть имеется прямая задача следующего содержания: найти размеры отраслей, обеспечивающие получение максимальной прибыли. Отрасли следующие:

$x_1$ — зерновые, га;



$x_2$ — картофель, га;

$x_3$ — многолетние травы, га;

$x_4$ — поголовье коров, голов.

Ограничения:

– по использованию пашни:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1050;$$

– по использованию затрат годового труда:

$$10x_1 + 30x_2 + 6,5x_3 + 20x_4 \le 24000;$$

– по использованию труда в напряженный период работ (май–сентябрь):

$$8x_1 + 21x_2 + 6,5x_3 + 5x_4 \le 12000;$$

– по производству и использованию кормов:

$$50x_4 \le 6000 + 20x_1 + 30x_2 + 30x_3;$$

– по площади картофеля:

$$x_2 < 150.$$

$$F_{\max} = 500x_1 + 1160x_2 + 1200x_4.$$

Оценки:

$u_1$ — оценка 1 га пашни, у. е.;

$u_2$ — оценка 1 чел.- ч труда годового, у. е.;

$u_3$ — оценка 1 чел.- ч труда в напряженный период, у. е.;

$u_4$ — оценка 1 ц к. ед., у. е.;

$u_5$ — оценка 1 га посева картофеля, у. е.

При этом $u_1$ означает то на сколько у. е. возрастет прибыль, если площадь пашни увеличится на 1 га, $u_5$ — на сколько у. е. возрастет прибыль, если площадь картофеля увеличится на 1 га и т. д.

Двойственная задача:

1. $1u_1 + 10u_2 + 8u_3 - 20u_4 \geq 500$.

Смысловое содержание данного ограничения состоит в следующем: оценка 1 га пашни, которая требуется для возделывания 1 га зерновых, плюс оценка 10 чел.-дней затрат годового труда, необходимого для возделывания 1 га зерновых, плюс оценка 8 чел.-дней труда, используемого в напряженный период, минус оценка 20 ц к. ед., получаемых с 1 га зерновых, должны быть не менее 500 у. е.

2. $1u_1 + 30u_2 + 21u_3 - 30u_4 + 1u_5 \geq 1160$.
3. $1u_1 + 6{,}5u_2 + 6{,}5u_3 - 30u_4 \geq 0$.
4. $20u_2 + 5u_3 + 50u_4 \geq 1200$.
5. $u_{1 \div 5} \geq 0$.

$$F_{\min} = 1050u_1 + 24000u_2 + 12000u_3 + 6000u_4 + 150u_5.$$

Задачу решаем обычным симплекс-методом. В результате решения получаем следующие значения (таблица 7.1)

Таблица 7.1 — Симплексная таблица № 13

| Базисные переменные | Свободные члены, $B_i$ | Небазисные переменные | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_2$ | $y_1$ | $u_3$ | $y_5$ | $u_5$ |
| $u_2$ | 37,5 | -0,042 | 0,042 | 0,58 | -0,008 | 0,042 |
| $u_1$ | 305,0 | 0,750 | -1,75 | -4,50 | -0,250 | -0,75 |
| $y_3$ | 278,0 | -0,020 | -0,98 | 0,80 | 0,200 | 0,02 |
| $u_4$ | 39,3 | 0,017 | -0,017 | -0,14 | -0,017 | -0,017 |
| $F_{\min}$ | 1 274 250 | -112,5 | -937,5 | -275,0 | -562,5 | -37,5 |



Данные таблицы свидетельствует о том, что в условиях рассматриваемого предприятия лимитированными являются первый, второй и четвертый ресурсы ($u_1, u_2, u_4 > 0$), а третий ресурс и ограничение 5 (запасы труда в напряженный период) и площадь картофеля являются избыточными и поэтому, $u_3, u_5 = 0$.

Значения двойственных оценок свидетельствуют, что при увеличении площади пашни на 1 га, годового труда на 1 чел.-день, кормов на 1 ц к. ед. прибыль предприятия соответственно возрастает на 305,0; 37,5 и 39,3 у. е.

Двойственные оценки позволяют сделать вывод о ценности конкретных ресурсов отдельных предприятий.

Допустим, что в условиях хозяйства себестоимость ц к.ед. составляет 19,65 у. е. При $u_4$ = 39,3 получается, что срок окупаемости вложений в кормопроизводство составляет 0,5 года (19,65/39,3 = 0,5).

Методика оценки окупаемости издержек по наращиванию ресурсов труда состоит в следующем:

– определяем суммарные затраты на привлечение среднегодового рабочего;

– рассчитываем срок окупаемости дополнительных издержек.

Допустим, что издержки составят в расчете на 1 чел.- день 72,0 у. е., а прибыль составляет 37,5 у. е. на 1 чел.- день. В этом случае срок окупаемости составит 1,92 года (72,0 : 37,5 = 1,92 ).

Таким образом, двойственные оценки позволяют обосновать очередность окупаемости издержек в рассматриваемом хозяйстве (в первую очередь — в развитии кормопроизводства, во вторую — в наращивании ресурсов труда).

На основе решения двойственной задачи можно получить решение прямой задачи.

При этом:

1. $F^T_{\max}$ равно $F_{\min}$ и наоборот.

2. Небазисные дополнительные переменные $y_i^T$ транспонированной задачи приравниваем к основным переменным прямой задачи при условии, что $i = j$ и эти значения равны положительным коэффициентам $\lambda_i$ последней таблицы

$$y_i^T = x_j^П = +\lambda_J^T.$$

$y_1^T = x_1^П = 937,5$ т. е. $y_1$ двойственной (транспонированной) задачи равно $x_1$ прямой и т. д.

$$y_2^T = x_2^П = 112,5;\ y_4^T = x_4^П = 562,5.$$

3. Двойственные оценки приравниваются к дополнительным переменным прямой задачи при $i = j$ и эти значения равны положительным коэффициентам $\lambda_i$ последней таблицы

$$u_i = y_i^П = +\lambda_j^T, \quad i = j.$$

В нашем случае $u_3 = y_3^П = 275;\ u_5 = y_5^П = 37,5.$



## ГЛАВА 8. Метод межотраслевого баланса

Функционирование предприятий в условиях самоокупаемости и самофинансирования требует эффективного использования ресурсов (электроэнергии, металла, кормов и т. д.) во всей технологической цепочке от производства продукции до потребителя. Участие в создании потребительских товаров нескольких отраслей предполагает, что конечный продукт одной отрасли становится сырьем для другой и т. д. Так, корма, которые являются конечным продуктом отраслей растениеводства, становятся сырьем для животноводства, молоко и мясо (конечный продукт животноводства) в свою очередь становятся сырьем для соответствующих предприятий перерабатывающей промышленности. Использование ресурсов в хозяйствах со сложной технологической цепочкой может иметь и более сложные формы. Например, для получения 1 ц молока (на конечном этапе производства) в сельскохозяйственной организации, требуется 4 чел.- часа. Это непосредственные или прямые затраты. Однако для производства молока ранее уже были произведены корма, потребовавшие определенных затрат труда. Эти затраты будут косвенными. Они включают труд следующего уровня производства и считаются по отношению к непосредственным затратам труда на молоко косвенными затратами труда первого порядка. Затраты труда на производство семян, использованных на производство кормов составят косвенные затраты второго порядка и т. д. Получается, что в течение производственного цикла осуществляются и затраты второго порядка, которые обеспечат получение кормов через год, и затраты первого порядка, обеспечивающие производство кормов и расход труда для получения продукции.

Поскольку ресурсы всегда ограничены и используются на различных стадиях производства конечных продуктов, возникает необходимость учета затрат ресурсов на всех предшествующих стадиях, ориентированных на производство конечного продукта. В этом случае мы получим полные затраты ресурсов, приходящиеся на единицу продукции.

Математически коэффициенты полных затрат можно рассчитать по следующей формуле:

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(n)},$$

где $c_{ij}$ — коэффициенты полных затрат продукции вида $i$ на единицу отрасли $j$; $a_{ij}$ — прямые затраты продукции вида $i$ на единицу, отрасли $j$; $a_{ij}^{(1)}$ —косвенные затраты первого порядка и т. д.

Информация о содержании и особенностях межотраслевых связей позволяет определить полные затраты ресурсов на производство конечного продукта, выяснить особенности использования и распределения сырья, а также других ресурсов на отдельных этапах технологического процесса. Планирование производства с учетом полных затрат и межотраслевых производственных связей осуществляется с целью поиска лучших вариантов межотраслевого перераспределения ресурсов, а также продукции и предполагает использование метода межотраслевого баланса.

Метод межотраслевого баланса включает систему отраслевых балансов производства и распределения продукции. Содержание этих балансов зависит от территориального объекта, на уровне которого баланс составляется. Так, при составлении баланса отдельного вида продукции (например, зерна) на уровне хозяйства основная масса продукции (за вычетом семян, фуража и стабилизационного фонда) будет являться конечным продуктом хозяйства.

На уровне районного и областного агропромышленных комплексов зерно, являющееся конечным продуктом отдельных хозяйств, в значительной части идет на производственное потребление в качестве сырья для комбикормовой и мукомольной промышленности.

На уровне страны значительная часть зерна направляется на переработку для производственного потребления, а остальная часть, являющаяся конечным продуктом, идет на пополнение резервов и экспорт.

Таким образом, на каждом уровне часть продукции отрасли расходуется на производственное потребление в отрасли $j$, т. е. $c_{ij}$. Оставшаяся продукция $y_i$ составит конечный продукт отрасли. В сумме величина производственного потребления и конечный продукт составят величину $z$ — производство продукции вида $i$, что находит отражение в базовой модели межотраслевого баланса



$$\begin{aligned}
&c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + y_1 = z_1;\\
&c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + y_2 = z_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n + y_n = z_n;
\end{aligned}$$

или в агрегированном виде

$$z_i = y_y + \sum_{j \in J_0} c_{ij} x_j,$$

где $x_j$ — размер отрасли.

Специфика модели межотраслевого баланса состоит в том, что как по строкам, так и по столбцам указываются одни и те же отрасли (в том же порядке), то есть имеются одинаковые индексы.

Важнейшим элементом модели межотраслевого баланса является ее исходная информация и, в частности, коэффициенты затрат ресурсов $C_{ij}$. Расчет косвенных и полных затрат ресурсов выполняется по специальной методике.

Пример.

Допустим, известны показатели прямых затрат трех взаимосвязанных отраслей, каждая из которых потребляет часть продукции других отраслей (таблица 8.1).

Таблица 8.1 — Показатели прямых затрат трех отраслей

| Виды продукции | Коэффициенты прямых затрат по отраслям | | |
|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | C |
| A | 0,30 | 0,10 | 0,25 |
| B | 0,35 | 0,25 | 0,35 |
| C | 0,20 | 0,10 | 0,12 |

Пусть полные затраты для наших расчетов включают прямые затраты и косвенные первого уровня. Тогда коэффициенты косвенных затрат первого уровня рассчитаем по формуле:

$$a_{ij}^{(1)} = \sum_{j \in J_0} a_{ij} a_{ji}, i \in I_0,$$

где $i$ — номер вида продукта; $I_0$ — множество видов продуктов; $j$ — номер отрасли; $J_0$ — множество отраслей; $a_{ij}$ — прямые затраты ресурса $i$ на единицу отрасли $j$; $a_{ij}^{(1)}$ — косвенные затраты первого уровня.

Чтобы определить косвенные затраты первого уровня необходимо умножить матрицу коэффициентов прямых затрат на вектор-столбец *A:*

$$\begin{Vmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,25 \\ 0,35 & 0,25 & 0,35 \\ 0,2 & 0,1 & 0,12 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0,3 \\ 0,35 \\ 0,2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,09+0,035+0,05 \\ 0,105+0,07+0,07 \\ 0,06+0,035+0,024 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,175 \\ 0,245 \\ 0,119 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, косвенные затраты первого уровня или порядка по отрасли *A* составят: продукта А — 0,175; продукта В — 0,245; продукта С — 0,119.

Следовательно, полные затраты по отрасли *A* составят в разрезе по потребляемым продуктам:

А = 0,3 + 0,175 = 0,475,

В = 0,35 + 0,245 = 0,595,

С = 0,2+0,119=0,319.

Аналогичные расчеты осуществляются по отраслям *B* и *C*.

Показатели полных затрат позволяют составить систему уравнений, обеспечивающих увязку валовой и конечной продукции. В матричном виде эта система имеет вид

$$X = BY,$$

где $X$ — вектор валовой продукции, $B$ — матрица полных затрат, $Y$ — вектор конечной продукции.

Коэффициенты полных затрат имеют значение при составлении балансовых и оптимизационных моделей. Так, при оптимизации программы развития сельскохозяйственной организации (с учетом ресурсов подразделений) коэффициенты полных затрат труда и материально-денежных средств по отраслям животноводства, а также соответствующие ограничения задачи позволяют более полно



учесть конкретные условия деятельности и различия подразделений при обосновании размещения производства.

Составление модели межотраслевого баланса начинают с определения перечня отраслей. Поскольку учесть все отрасли очень сложно, то возникает необходимость агрегирования информации.

Агрегирование информации (равно как и объединение отраслей) может производиться двумя способами:

а) по технологическому способу или сходству структуры материально-денежных затрат;

б) по экономическому назначению продукции, т. е. по характеру использования продукции, как в производственном потреблении, так и непроизводственном потреблении.

При обосновании значений прямых затрат, в т. ч. используемых для расчета косвенных затрат, используют различные методы (в их числе — экспертных оценок, экстраполяции, корреляционные и др. модели и т. д.).

## Раздел 2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

## ГЛАВА 9. Методы сетевого планирования

### 9.1. Общее понятие о методах сетевого планирования

Применение сетевых методов планирования имеет небольшую историю. Однако составление планов в виде сети с последующим их анализом обладает настолько очевидными преимуществами, что эти методы находят все большее применение в сельском хозяйстве, промышленности, строительстве, в планировании научных исследований, а также в различных областях военного дела.

В сельском хозяйстве использование методов сетевого планирования носит экспериментальный характер и ограничивается составлением планов на короткие напряженные рабочие периоды. Необходимость выполнения сельскохозяйственных работ в установленные агротехнические сроки, неопределенность, вносимая в производственный процесс погодными условиями, затрудняют использование в сельском хозяйстве экономико-математических методов, в том числе и применение сетевого планирования.

В СССР была разработана система сетевых методов планирования и управления. Она была основана на использовании современных достижений в области общей теории управления, кибернетики, прикладной математики и вычислительной техники.

Все методы сетевого планирования имеют в своей основе сетевую модель, в которой условными знаками (стрелками) изображают во взаимосвязи работы, которые необходимо выполнить для достижения поставленной цели.

Графическое изображение плана в виде сети позволяет охватить весь комплекс работ в целом и сосредоточиться на отдельных его участках. Обзорность и полнота информации, представленной в графическом виде, сочетаются с ее доступностью для специалистов.

Помимо графического изображения работ, которые предполагается выполнить, сетевой график содержит оценки (времени, стоимости, ресурсов и др.).



### 9.2. Элементы и принципы построения сетевых графиков

Основными параметрами сетевого графика являются время и затраты. Эти два фактора находятся в непосредственной зависимости друг от друга: чем короче заданный срок выполнения работ, тем больше затрат потребуются для выполнения этих работ и наоборот.

Анализ сетевого графика позволяет выбрать оптимальный вариант плана, обеспечивающий выполнение всех работ в заданные сроки и с минимальными затратами.

Основными элементами сетевого графика являются события (обозначаются кружками) и работы (обозначаются стрелками). Каждая стрелка должна соединять 2 кружка (первый кружок обозначает начало данной работы, а второй — конец). Два кружка могут соединяться только одной стрелкой. Этим определяется последовательность выполнения каждой работы. Несколько стрелок могут исходить из одного кружка или подходить к одному кружку.

Кружок, обозначающий событие, может содержать несколько секторов и дополнительную информацию о работе (рисунок 9.1). Например, верхний сектор *(V)* обозначает объем работы, нижний средний — ее номер *(N)*. Левый нижний сектор означает производительность агрегата (*P*), правый нижний — количество агрегатов (исполнителей), необходимых для выполнения работ (*n*).

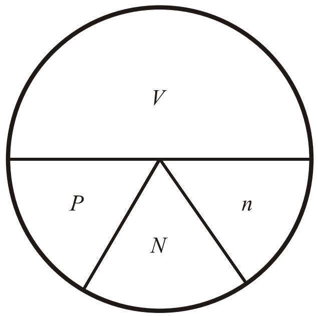



Рисунок 9.1

В сетевом графике, изображенном на рисунке 9.2, событие 1 означает, что началась работа *a*. Событие 2 фиксирует окончание работы *a* и начало работ *b* и *c,* то есть условием для начала работ *b* и *c* является окончание работы *a.* Работу *d* нельзя начать до окончания работы *b,* а работу *e* — до окончания работы *c.*

Наступление конечного события означает окончание работ *d* и *e* и одновременно завершение всего комплекса работ.

Таким образом, работы, включенные в комплекс, участвуют в достижении конечной цели и все они должны быть выполнены.

Сетевой график — изображение условное, в котором не выдерживается масштаб.

На рисунке 9.2 цифрами над стрелками обозначена продолжительность каждой работы в определенном масштабе времени.

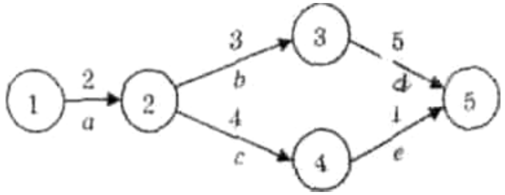



Рисунок 9.2

Единицами измерения времени могут быть часы, дни, недели и т. д. События не имеют продолжительности, они означают лишь факт окончания одной работы и начала другой.

Основным правилом графика является то, что два события могут быть соединены только одной стрелкой.

При отсутствии технологической связи между событиями используют пунктирную линию, которая в сети рассматривается как и любая другая работа с той лишь разницей, что продолжительность работы принимается равной 0.

Рассмотрим содержание графика с учетом временного фактора. При этом счет времени ведется от нуля, т. е. событие 1 совершается в нулевой момент времени. Предположим, что затраты времени указаны в днях. Очевидно, событие 3 наступит через 5 дней после начала работ по выполнению данного комплекса, а событие 4 — через 6 дней. Для наступления финального события 5 надо выполнить еще работы *d* и *e.* Первая из них может быть начата не ранее, чем через 5 дней после начала работ, и должна продолжаться 5 дней. Таким образом, событие (5) не может наступить раньше, чем через 10 дней (5 + 5) после начала работ.

При этом надо еще учесть работу *e,* которая начнется не ранее, чем через 6 дней после начала работ и будет выполнена за 1 день. Окончание ее наступит через 7 дней (6 + 1). Однако этот срок (7 дней) является недостаточным для наступления финального события (5), т. к. работа *d* по истечении семидневного срока еще не будет выполнена. Следовательно, наиболее ранний срок окончания всего комплекса работ составляет 10 дней.



## 9.3. Расчет критического пути и характеристик сетевого графика

*Критическим путем* называется такая последовательность выполнения работ (путь от исходного события до завершающего), которая занимает во времени наибольшую продолжительность. В рассмотренном примере мы имели две последовательности работ (два пути) *a*, *b,d* и *a, c, e.* Из них критическим путем является первый, продолжительность которого составляет 10 дней. Он занимает большее время и потому определяет срок выполнения всего комплекса работ. Работы, не лежащие на критическом пути, будут иметь некоторые запасы времени, определяемые разницей во времени реализации работ на критическом пути. В нашем примере эта разница была равна 3 дням (10 – 7).

Выполнение работ *c* и *e*, не лежащих на критическом пути, может быть задержано на 3 дня без ущерба для срока выполнения всего комплекса работ. Если же задержка с выполнением данных работ составит свыше трех дней, то это приведет к более позднему наступлению завершающего события (5) и к тому, что другой путь (*a, c, e*) станет критическим.

Критический путь — это то место программы, на котором должно быть сосредоточено внимание руководителя. Временные оценки для каждой работы всегда предварительны. После их использования для нахождения критического пути эти оценки подлежат уточнению. Процесс уточнения оценок направлен на сокращение времени критического пути, которое может идти по нескольким направлениям. Наиболее применяемый способ состоит в перераспределении ресурсов на производство критических работ путем изъятия данных ресурсов у некритических. В результате этого время выполнения первых работ сокращается, а вторых — увеличивается.

Перераспределение ресурсов должно производиться в известных пределах, т. е. можно привлечь дополнительные ресурсы или изменить технологию производства.

При втором способе сокращения продолжительности критического пути меняются не временные оценки, а последовательность выполнения работ. Уменьшение продолжительности критического пути достигается за счет изменений в организации самого процесса. Там, где это возможно следующие одна за другой работы на отрезке критического пути совмещаются во времени, т. е. часть последовательных работ преобразуется в параллельные.

Для характеристики возможностей сетевого планирования приведем сетевой график выполнения ряда работ (таблица 9.1).

Таблица 9.1 — Содержание и характеристики механизированных работ

| Виды сельскохозяйственных работ | Состав агрегата | Сроки | | Продолжительность, дни | Объем работ | Выработка в день | Наличие машин, единиц |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | начало работ | окончание работ | | | | |
| Скашивание зерновых в валки, га | «Нива» | 1.VIII | .VIII | 9 | 800 | 12,0 | 10 |
| Подбор и обмолот, га | «Нива» | 4.VIII | 2.VIII | 9 | 800 | 12,0 | 10 |
| Сволакивание соломы, га | МТЗ-82 | 6.VIII | 3.VIII | 8 | 500 | 14,0 | 8 |
| Скирдование соломы, га | МТЗ-82 | 7.VIII | 4.VIII | 8 | 660 | 17,0 | 8 |
| Перевозка зерна с тока на склад, т | МТЗ-82 | 13.VIII | 5.VIII | 3 | 220 | 20,0 | 8 |
| Подъем зяби, га | МТЗ-82<br>ДТ-75 | 14.VIII<br>14.VIII | 0.VIII<br>0.VIII | 7<br>7 | 800 | 6,0<br>26,0 | –<br>– |



Первая работа может быть завершена за 9 дней (если работать всеми машинами). Однако мы видим, что в срок с 1.08 по 3.08 включительно на скашивании валков может работать 10 машин, выработка составит 360 га (10 × 12 × 3). Остается еще 440 га (800 – 360) на период с 4.08 по 9.08, т. е. 6 дней. При этом потребуется 6 агрегатов (440 : (12 × 6)). Значит, с 4.08 по 9.08 на подборе валков будет работать 6 комбайнов и сделают они 6 × 12 × 6 = 6 × 72 = 432 га. В течение периода с 10.08 по 12.08 на подборе валков может работать 10 комбайнов. Они должны работать, чтобы выполнить оставшийся объем работ: 800 – 432 = 368 : (10 × 12) = 368 : 120 = 3 дня. Подбор валков можно завершить 12 числа, т. е. за 10, 11 и 12.08.

Подбор и обмолот зерна создают условия для сволакивания соломы. С 6.08 по 7.08 на этой работе можно занять все 8 тракторов МТЗ-82, которые выполнят объем работ: 8 × 14 × 2 = 8 × 28 = 224 га. Остается: 500 – 224 = 276 га. Для выполнения этой работы с 7.08 по 13.08 потребуется тракторов:

276 : (7 × 14) = 276 / 98 = 3 единицы. Значит, из числа 8 тракторов на скирдовании с 7.08 по 14.08 (т. е. 8 дней), может находиться 8 – 3 = 5 тракторов МТЗ-82. Они в состоянии заскирдовать 5 × 17 × 8 > 660 га.

Следовательно, на транспортных работах 14.08 могут работать освободившиеся после сволакивания соломы 3 трактора МТЗ-82, а 15.08 — 8 тракторов МТЗ-82. За 14.08 три трактора МТЗ-82 перевезут 60 тонн соломы (20 × 3), а оставшиеся (220 – 60) =160 тонн 15.08 перевезут 8 тракторов МТЗ-82 (8 × 1 ×·20 = 60 тонн).

Завершение сволакивания соломы создает возможность проведения подъема зяби. При этом имеющиеся в хозяйстве 8 тракторов МТЗ-82 приступят к подъему зяби 16.08, т. е. после перевозки зерна с тока. За период с 16.08 по 20.08 (т. е. пять дней) с использованием тракторов МТЗ-82 будет вспахано 240 (5 × 8 × 6) га зяби.

Для вспашки в течение 7 дней оставшихся 560 га (800 – 240) данному хозяйству необходимо приобрести 560 : 7 : 20 ≈ 5 (4) тракторов ДТ-75.

На основе имеющейся информации построим сетевой график, который представлен на рисунке 9.3. Нумерацию событий произведем с соблюдением требования, что номер последующего события не должен быть меньше номера предыдущего. Допустим при этом, что начало работы обозначается индексом *i*, а окончание — индексом $j$, $a_{ij}$ обозначает продолжительность работы *ij*. Для каждой пары, т. е. работы *ij* соблюдаются условия: индексы *i* и *j* объединяют события, т. е. определяют работу, соединенную стрелкой, идущей от *i* к *j,* и, кроме того, значение *j* должно быть больше чем *i*.

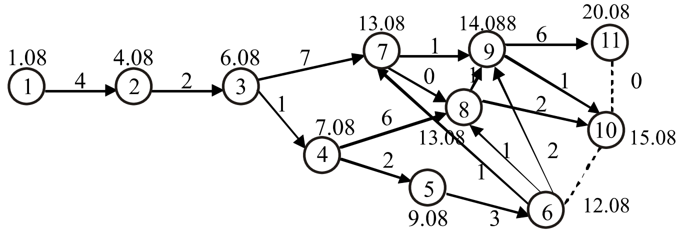



Рисунок 9.3

Рассчитаем критический путь и другие временные характеристики сетевого графика. Для определения критического пути, т. е. наибольшего по продолжительности времени выполнения работ составим все возможные варианты выполнения этих работ (таблица 9.2).

Таблица 9.2 — Возможные пути выполнения работ

| Номер пути | Состав пути | Продолжительность пути, дней |
|---|---|---|
| 1 | 1-2-3-7-9-11 | 20 |
| 2 | 1-2-3-7-8-9-10-11 | 15 |
| 3 | 1.2-3-4-8-9-10-11 | 15 |
| 4 | 1.2-3-4-8-10-11 | 15 |
| 5 | 1-2-3-4-5-6-8-9-10-11 | 15 |

При этом события 10 и 11, связанные между собой не прямо, а опосредованно, будут иметь нулевую продолжительность.



Для изучения возможных запасов времени составим таблицу наиболее ранних и наиболее поздних сроков начала и окончания работ (таблица 9.3).

Таблица 9.3 — Временные характеристики сетевого графика

| Условное обозначение работы *ij* | Продолжительность выполнения работы $y_{ij}$ | Наиболее раннее время | | Наиболее позднее время | | Максимальное время выполнения работы $t_j'' - t_i'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | начала работ $t_i'$ | окончания работ $t_i' + y_{ij}$ | начала работ $t_j'' - y_{ij}$ | окончания работ $t_j''$ | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1-2 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 4 |
| 2-3 | 2 | 4 | 6 | 4 | 6 | 2 |
| 3-7 | 7 | 6 | 13 | 6 | 13 | 7 |
| 3-4 | 1 | 6 | 7 | 6 | 7 | 1 |
| 4-5 | 2 | 7 | 9 | 7 | 9 | 2 |
| 4-8 | 6 | 7 | 13 | 7 | 13 | 6 |
| 5-6 | 3 | 9 | 12 | 9 | 12 | 3 |
| 6-7 | 1 | 12 | 13 | 12 | 13 | 1 |
| 6-8 | 1 | 12 | 13 | 12 | 13 | 1 |
| 6-9 | 2 | 12 | 14 | 12 | 14 | 2 |
| 7-8 | 0 | 13 | 13 | 13 | 13 | 0 |
| 7-9 | 1 | 13 | 14 | 13 | 14 | 1 |
| 8-9 | 1 | 13 | 14 | 13 | 14 | 1 |
| 8-10 | 2 | 13 | 15 | 18 | 20 | 7 |
| 9-10 | 1 | 14 | 15 | 19 | 20 | 6 |
| 9-11 | 6 | 14 | 20 | 14 | 20 | 6 |

При заполнении таблицы в целях упрощения будем исходить из того, что событие 1 происходит не в календарные сроки, а в нулевой момент времени. При заполнении графы 1 помещаем рядом работы, имеющие общее начало. Продолжительность работ ( $y_{ij}$ ) берем из сетевого графика как разницу между сроками окончания и начала $t_i$ конкретной работы. Наиболее ранние сроки начала работ ($t_i'$) определяются максимальным временем, которое требуется для выполнения всех предшествующих работ.

Так, для работы, начинающейся событием 1, никакая другая работа не предшествует и наиболее раннее время начала работы здесь равно 0. Работам, начинающимся событием 2, предшествует первая работа, обозначенная нами парой событий 1-2. Ее продолжительность составляет 4 дня. Следовательно, наиболее ранний срок выполнения работ, начинающихся событием 2, составит 4 дня. В свою очередь, наиболее раннее время $t_i'$ начала работы 3-7 получаем, складывая продолжительность работ 1-2 и 2-3, лежащих на пути между первым (*i*) и третьим событиями. Если же началу события *i* предшествует несколько путей, то в этом случае наиболее ранний срок начала работы определяется наибольшей продолжительностью пути. Например, событию 7, являющемуся началом для работ 7-9 и 7-8, предшествуют два пути (1-2-3-4-5-6-7 и 1-2-3-7).

Наиболее позднее время начала и окончания работы начинаем с заполнения графы 6, т. е. наиболее позднего времени окончания работы. Эти расчеты начинаем выполнять с конца, то есть с определения наиболее позднего времени наступления конечного события 11. Это наиболее позднее время окончания работы *j* получаем посредством вычитания из наиболее позднего срока окончания последующей работы *j* + 1 продолжительности этой работы *j* .

Например, для работ 9-10 и 10-11 $t_j'' - t_{11}'' = 20$. Следовательно, для работ 9-10, 8-10 $t_j'' = 20 - y_{10-11} = 20 - 0 = 20$.

Для определения наиболее позднего срока окончания работ 7-9, 8-9 и 6-9 сравниваем числа $20 - y_{9-10} - y_{10-11} = 20 - 1 - 0 = 19$ и $20 - y_{9-10} = 20 - 6 = 14$.

Наименьшее из полученных чисел (т. е. 14) будет искомым $t_j''$ для работ 7-9, 8-9, 6-9.

Для определения наиболее позднего времени начала работы необходимо от наиболее позднего времени окончания работы вычесть ее продолжительность, т. е. $t_j'' - y_{ij}$.



Максимальное время для выполнения работы определяется как разность между наиболее поздним временем ее окончания и наиболее ранним временем ее начала, т. е. $t_j'' - t_i'$.

Поскольку наряду с критическим путем имеются и другие пути, которые критическими не являются, то имеется возможность определить запас времени по работе *ij*, при этом $R_{ij}$ определяется как разность между максимальным временем для выполнения работы и ее продолжительностью, т. е.

$$R_{ij} = t_j'' - t_i' - y_{ij}.$$

Таким образом, запасы рабочего времени имеется для работ 8-10, 9-10 и составляют — $R_{8-10} = 7 - 2 = 5$ дней, $R_{9-10} = 6 - 1 = 5$ дней.

# ГЛАВА 10. Методы управления запасами

## 10.1. Постановка задачи

Осуществление процесса производства предприятиями технологической цепочки АПК: (т. е. сельскохозяйственными организациями, кооперативами, перерабатывающими предприятиями и др.) требует наличия сырья и материалов. При этом для обеспечения непрерывности производства необходимы их запасы.

Запасы сырья и материалов (т. е. предметов труда) формируются в силу пространственной разобщенности предприятий, отсутствия возможности «мгновенных» поставок необходимых видов сырья и материалов. Регулирование их объема (т. е. запасов предметов труда на предприятии) существенно сказывается на издержках по хранению сырья и материалов, а также загрузке их поставщиков. Поэтому обоснование объема запасов тесно связано с издержками по производству конечных видов продукции.

Из-за цикличности сельскохозяйственного производства и, в силу этого, в определенной мере и предприятий по переработке, хранению и реализации конечной продукции сельского хозяйства задачи управления запасами в хозяйствах могут рассматриваться применительно к характерным периодам, т. е. при максимальной, средней или малой загрузке этих хозяйств.

Обеспечение непрерывности процесса производства в течение какого-то периода приводит к тому, что сырье и материалы завозятся партиями. При этом необходимо знать число партий, т. е. запасов сырья и материалов, которые предприятию следует создать, чтобы общие издержки товаропроизводителя или поставщика услуг были минимальными. Речь может идти об удобрениях, горючем, запасных частях и т. д.

Чтобы сформировать математическую модель управления запасами введем основные понятия, определяющие ее содержание.

Включение сырья и материалов в производственный процесс, вплоть до создания конечного продукта или завершения выполнения этого процесса, предполагает использование следующих этапов и понятий:



1. Оформление и доставка сырья и материалов, которые определяют организационные издержки ($C_1$).
2. Хранение сырья и материалов. Издержки по содержанию запасов формируются за счет амортизации помещений, возможных потерь при хранении. В свою очередь, сумма амортизации и потерь при удлинении сроков хранения определяет размер партии сырья и материалов ($C_2$).
3. Издержки по производству товара или выполнению услуг ($C_3$).
4. Объем спроса ($V$). Допускается, что спрос на сырье и материалы постоянен, непрерывен и полностью удовлетворяется.
5. Организационные издержки на доставку партии товаров, сырья, материалов ($a$). Допускается, что в течение рассматриваемого периода организационные издержки (простейший вариант) не зависят от размера партии (перевозки грузов, в т. ч. малогабаритных изделий).
6. Стоимость полученной в результате использования сырья и материалов единицы товара или вида услуг ($W$). В первом приближении в течение рассматриваемого периода эта стоимость постоянна.
7. Издержки по хранению единицы сырья или материалов в течение рассматриваемого периода ($b$) постоянны.
8. Количество единиц сырья ($y$) или материалов и их размеры в одной партии в течение рассматриваемого периода постоянны.

## 10.2. Основные ограничения задачи

Общие издержки предприятия по обеспечению производственного цикла, начиная от закупки сырья и материалов и заканчивая завершением производственного цикла или исполнением услуг ($C_0$) составляют:

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3$$

где $C_1$ — организационные издержки; $C_2$ — издержки по содержанию запасов; $C_3$ — издержки производства, т. е. цена товаров или услуг.

В свою очередь, издержки $C_1$ зависят от спроса (его объема), количества товаров в партии, числа партий и организационных издержек, приходящихся на единицу партии.

Число партий составляет $V/y$, а с учетом организационных издержек, приходящихся на одну партию ($a$):

$$C_1 = \frac{Va}{y}.$$

Объем запаса в течение производственного цикла будет равномерно убывать от $y$ до нуля. Следовательно, средний объем запаса составит $\frac{y+0}{2} = \frac{y}{2}$, а общие издержки на содержание запасов соответственно

$$C_2 = \frac{y}{2} b.$$

Следует иметь в виду, что все другие партии сырья и материалов будут храниться на одной площади. Поэтому $C_2 = \frac{by}{2}$ являются издержками, приходящимися на все партии сырья и материалов за производственный цикл.

Стоимость товаров или услуг составит

$$C_3 = Vw.$$

Тогда $C_0 = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{Va}{y} + Vw + \frac{yb}{2}$.

Постольку неизвестной в уравнении является у, а все остальные величины известны, то минимизация $C_0$ зависит только от $y$, т. е. $C_0 = f(y)$. Рассчитав производную $\frac{dC_0}{dy}$, найдем значение $y$:

$$\frac{dC_0}{dy} = -aV / y^2 + b/2.$$

Поскольку $dC_0 / dy = 0$, то $b/2 = av / y^2$, откуда $y = \sqrt{2av/b}$.



Рассмотрим использование изложенной методики на примере.

**Пример 1.** Потребность сельскохозяйственной организации в минеральных удобрениях, которые будут вноситься равномерно в течение посевного периода (40 дней) составляет 400 т. Организационные издержки в расчете на одну партию составляют 22 у. е. Цена 1 т удобрений равна 250 у. е., а издержки на хранение 1 т удобрений в течение периода весенних работ составляют 7 у. е.

Условные обозначения:

$$V = 400,\ a = 22,\ \mathrm{w} = 250,\ b = 7.$$

Общие издержки в течение посевного периода составят:

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{400 \times 22}{y} + \frac{7 \times y}{2} + 400 \times 250,$$

где $C_1$ — организационные издержки по оформлению и доставке удобрений, у. е.; $C_2$ — общие издержки на содержание запасов, удобрений одной партии, у. е.; $C_3$ — стоимость всех удобрений, у. е.

$$C_1 = \frac{Va}{y} = \frac{22 \times 400}{y},\ C_2 = Vw = 400 \times 250 = 10000,$$

$$C_2 = \frac{by}{2} = \frac{7y}{2};$$

$$\frac{dC_0}{dy} = \sqrt{2av/b} = \sqrt{\frac{2 \times 22 \times 400}{7}} = \sqrt{2514} = 50{,}1.$$

Таким образом, размер партии составляет 50,1 т, а число поставок — 400/50,1 ($v/y$) $\approx$ 8.

## 10.3. Управление запасами с учетом издержек на потери и штрафы

В зависимости от характера экономических взаимоотношений потребителей и поставщиков сырья и материалов, особенностей этих материалов и их условий хранения и использования возможно возникновение дефицита сырья и материалов, который при следующих поставках ликвидируется. При этом могут взиматься штрафы за несвоевременные поставки и потери конечных продуктов вследствие нарушения технологического цикла.

Возможны ситуации, когда недопоставка запасов является мерой вынужденной (площади склада заняты, непрерывный технологический процесс приостанавливается). В этой ситуации выплата штрафа может быть выгоднее расходования средств и использования складов для хранения нормативного запаса.

Цель данной задачи состоит в определении такого значение количества товара *n* (меньшее оптимальной величины партии *y*), при котором экономия средств на хранение запасов будет превышать величину штрафа.

Для формирования модели построим график, характеризующий взаимодействие элементов задачи (рисунок 10.1).

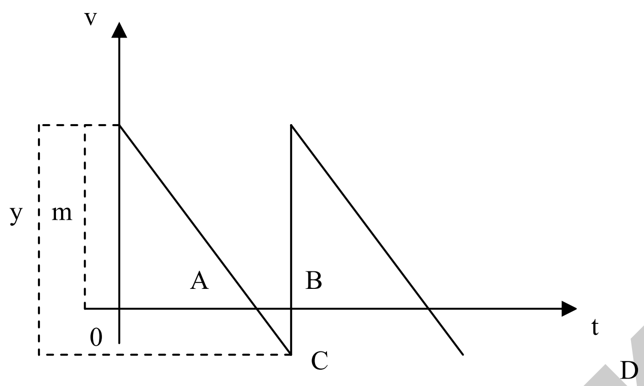



Рисунок 10.1

На рисунке 10.1 указаны следующие обозначения:

*y* — оптимальный размер партии, штук;

*m* — запас сырья, материалов, предполагающий дефицит;

*b* — издержки хранения единицы сырья или материалов;

*z* — затраты на штраф в расчете на единицу времени.

Издержки производственного цикла на содержание запасов и штраф составляют:

$$C = C_1 + C_2,$$



где $C_1$ — общие издержки содержания запасов; $C_2$ — общие штрафные издержки; OA или $t_0$ — промежуток времени, в течение которого сырье или материалы находятся на складе.

$m/t_0 = e =$ AD — интенсивность спроса ($e$) на сырье или материалы или норма их расхода в единицу времени.

Отсюда $t_0 = m/e;$

$m/2$ — средний объем запасов за период $t_0$.

Следовательно, общие издержки содержания запасов составляют:

$$C_1 = b * \frac{m}{2} * \frac{m}{e} = \frac{bm^2}{2e}.$$

Штраф за недопоставку сырья и материалов ($y$-$m$) в течение времени $t_1$ или AB составит $(y\text{-}m)/e$.

Отсюда затраты на штраф составляют

$$C_2 = \frac{(y-m)}{2} \times z\frac{(y-m)}{e} = \frac{z(y-m)^2}{2e},$$

где $\frac{(y-m)}{2}$ — средний объем недопоставок сырья и материалов.

Общие издержки на содержание запасов и оплату штрафов составляют

$$C_1 = \frac{bm^2}{2e} + \frac{z(y-m)^2}{2e} = \frac{bm^2 + z(y-m)^2}{2e}.$$

Поскольку в данном выражении *m* является неизвестным, то найдя $\frac{dc}{dm}$, получим $m_{опт} = ze/(b+z)$.

**Пример 2.** Допустим, что необходимо обосновывать оптимальный запас удобрений (пример 1) в случае, если для их хранения в хозяйстве недостаточно помещений, а условия хранения удобрений в хозяйстве предполагаются потери и снижение качества. В этом случае снижение запаса сверх нормативного предполагает взыскание штрафа в размере (0,14 у. е. за хранение 1 тонны удобрений в день).

Исходные данные:

1) $z$ — затраты на штраф за 1 тонну удобрений в расчете на 1 день (0,14 у. е.);

2) $e$ — интенсивность спроса или объем сырья и материалов (т) в расчете на один день производственного цикла (400/40), где 40 — продолжительность цикла периода работ, дней;

3) $b$ — издержки хранения единицы товара (т) за единицу времени (1 день) — 7/40 = 0,175 у. е., где 7 — издержки по хранению товара в день, у. е.

Тогда $m_{опт} = 0{,}14 \times 10 / (0{,}175 + 0{,}1) = \dfrac{1{,}4}{0{,}275} \approx 5$ т.

Таким образом, в условиях рассматриваемого хозяйства размер одной поставки должен составить 5 т удобрений, а количество поставок в течение периода внесения удобрений (40 дней) составит 80 поставок (400 т / 5т).



# ГЛАВА 11. Использование теории игр при принятии решений

В процессе человеческой деятельности возможны ситуации, когда ее участники имеют противоположные интересы или же намерения сторон отличаются неопределенностью.

В подобных условиях решение одной из сторон зависит от действий другой стороны. Это также касается ситуации, когда действия одной из сторон порождаются не сознательным противодействием другой стороны, а неопределенностью, вытекающей из сущности функционирования данной стороны.

Для выбора рекомендаций по рациональному образу действий одной стороны в связи с действиями другой используют теорию игр. При этом игровую схему можно распространить на многие производственные ситуации. В одних случаях эти ситуации основаны на соперничестве двух сторон. Тогда выигрыш одной стороны зависит от действий другой. В других случаях, которые часто встречаются в экономике аграрного сектора, одна из сторон (природа) безразлична к результату игры. Однако воздействия природы существенны, ибо, выражая свое влияние через соответствующие факторы (осадки и др.), она придает вероятностный характер урожайности сельскохозяйственных культур и результативным показателям предприятий в целом.

В случае, если природа выступает в качестве одной стороны (участника) игры (как и в других случаях), важно знать поведение другой стороны. Закономерности, если таковые имеются, чаще всего выражаются вероятностью определенных действий другой стороны.

В зависимости от состояния природы используются различные методы и методики принятий решений. Рассмотрим данные подходы на примере.

**Пример 1.** Проанализируем возможную урожайность сельскохозяйственных культур в зависимости от почвенного состава полей и погодных условий.

Исходная информация**:**

1. Имеются три участка с различными почвенными характеристиками (стратегиями): $A_1, A_2, A_3$.

2. Погодные условия характеризуются тремя состояниями: $П_1$ – норма, $П_2$ — меньше нормы, $П_3$ — больше нормы.

3. Средняя урожайность картофеля на участках в зависимости от погодных условий составит:

| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 178 | 182 | 162 |
| $A_2$ | 180 | 167 | 185. |
| $A_3$ | 190 | 160 | 215 |

4. Вероятность погодных условий по многолетним данным такова: 1) норма $P_1 = 0{,}4$; 2) меньше нормы $P_2 = 0{,}3$; 3) больше нормы $P_3 = 0{,}3$.

Решение**.**

1. Средняя урожайность по участкам при условиях погоды, отличных от равновероятностных ($p \neq 0$), следующая:

$$a_1 = 178 \times 0{,}4 + 182 \times 0{,}3 + 162 \times 0{,}3 = 174{,}4\,;$$

$$a_2 = 180 \times 0{,}4 + ......... = 177{,}6\,;$$

$$a_3 = 190 \times 0{,}4 + ......... = 188{,}5\,.$$

По критерию Байеса оптимальной является максимальная средняя урожайность:

$$(\overline{a}_1 \quad \overline{a}_2 \quad \overline{a}_3) = \max(174{,}4 / 177{,}6 / 188{,}5) = 188{,}5\,.$$

2. При равновероятных условиях погоды

$$P_1 = P_2 = P_3 = 1/3\,.$$

Имеем: $a_1 ... 1/3(178; 182; 162) = 174$;

$a_2 ... 177{,}3$;

$a_3 ... 188{,}3$.

По критерию Лапласа (как и Байеса) оптимальным является стратегия $A_3$, при которой средняя урожайность составит

$$\max(174{,}4 : 177{,}6 : 188{,}5) = 188{,}5\,.$$

3. Вероятностные характеристики отсутствуют.



По критерию Вальда оптимальной будет та стратегия, которая в наихудших условиях обеспечит максимальную урожайность:

$$\max = (a_1; \quad a_2; \quad a_3)\,,$$

где $a_1 = \min(178; 182; 162) = 162$,

$a_2 = \min(180; 167; 185) = 167$,

$a_3 = \min(190; 160; 215) = 160$.

По критерию Вальда максимальная урожайность составит 167 ц, которую получим независимо от погодных условий на участке $A_2$.

4. Критерий Сэвиджа.

Строим матрицу риска: $r_{ij} = B_j - a_{ij}$;

$$B_j = \max a_{ij};\ B_1 = 190;\ B_2 = 182;\ B_3 = 215$$

| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 12 | 0 | 53 |
| $A_2$ | 10 | 15 | 30 |
| $A_3$ | 0 | 22 | 0. |

Оптимальной является та стратегия, для которой число определяется по формуле $r_{ij} = \min \max r_{ij}$.

Определяем максимальное значение риска по каждой строке:

max (12, 0, 53) = 53;

max (10, 15, 30) = 30;

max (0, 22, 0) = 22.

Тогда $r$ = (53, 30, 22) = 22, т. е. оптимальной является стратегия $A_3$ на участке $A_3$ при минимуме потерь.

5. Для проверки решения (вывода) используем критерий Гурвица. Выбираем число $\lambda$ на отрезке (0, 1), т. е. $\lambda \in (0.1)$. Если принято $\lambda = 0$, то имеем критерий крайнего оптимизма:

$$\max[\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}] = \max_i (\max_j a_{ij})\,.$$

$$\max a_{1j} = \max(178; 182; 162) = 182;$$

$$\max a_{2j} = \max(180; 167; 185) = 185;$$

$$\max a_{3j} = \max(190; 160; 215) = 215;$$

отсюда max = max $a_{ij}$ = max (182; 185; 215) = 215, т. е. принимается стратегия $A_3$.

При этом $\lambda$ = 1 — критерий крайнего пессимизма. Решение: выбор участка $A_2$ при урожайности 167 ц/га и при $\lambda$ = 0,5 (среднее значение критерия).

$$\max[0,5\min a_{ij} + 0,5\max a_{ij}] = \max h_i$$

| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 178 | 182 | 162 |
| $A_2$ | 180 | 167 | 185 |
| $A_3$ | 190 | 160 | 215 |

| $0,5\min a_{ij}$ | $0,5\max a_{ij}$ | $h_i$ |
|---|---|---|
| 81 | 91 | 172 |
| 83,5 | 92,5 | 176 |
| 80 | 95 | 175. |

Таким образом, оптимальным является значение 176,0.



# ГЛАВА 12. Методы управления в системе массового обслуживания в экономике

В условиях рыночной экономики типичной является ситуация, когда заказчик обращается к исполнителю (организации, лицу и т. д.) с просьбой выполнить работу (заказ) или оказать услугу. Особенностями взаимоотношений заказчика и исполнителя, как правило, являются:

– вероятностный характер потребностей заказчика;

– рабочее состояние исполнителя, его предрасположенность к исполнению заказа;

– экономическая выгодность взаимоотношений.

Ожидание заказов исполнителем в условиях вероятностного характера возникновения потребностей у заказчиков является объектом системы массового обслуживания (СМО).

Цель СМО — выявление закономерностей во взаимоотношениях заказчиков и исполнителей для обоснования целесообразных и эффективных параметров и характеристик исполнителя для качественного и эффективного выполнения требований заказчиков (заказчика).

В экономике СМО используется при обосновании оптимальной численности отделов или служб предприятий (организаций), мощности ремонтных и других организаций, обслуживающих объектов системы агросервиса и т. д.

Основными элементами СМО являются каналы обслуживания (заказчики с их заявками на выполнение работ и оказание услуг) и выходящий поток информации (рисунок 12.1).

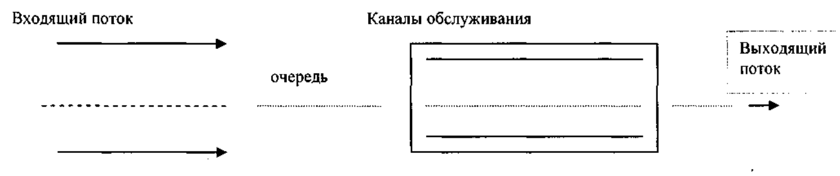



Рисунок 12.1 — Взаимосвязи в СМО и ее элементы

Построение блок-схемы СМО осуществляется с соблюдением следующих условий:

– заявок на выполнение работ и услуг может быть множество. При этом вероятность поступления заявки зависит только от времени (чем больше промежуток времени, тем больше будет поступать заявок);

– поступление заявок не зависит от количества ранее поступивших заявок. При этом имеется минимальный интервал в поступлении заявок, т. е. можно считать, что они не поступали одновременно и на этой основе установить очередность их выполнения. В зависимости от количества каналов обслуживания (один или несколько) и числа заявок возможны следующие ситуации:

1. Каналы обслуживания заняты, но заказчик не встает в очередь и покидает данную систему обслуживания. Такая ситуация называется системой с отказами.

2. Каналы обслуживания заняты, но заказчик встает в очередь. Такая ситуация называется системой ожидания. Она предполагает, что заказ будет обязательно выполнен.

3. В случае СМО с ожиданиями и с ограниченной длинной очереди важно определить вероятность того, что все каналы системы обслуживания будут заняты. Решение в этом случае предполагает определение вероятности получения отказа и обоснование на этой основе параметров, при которых заказ будет принят.

4. В случае с ожиданием очереди решение состоит в обосновании времени пребывания заказчика в очереди и возможностей сокращения этого времени.

### *Методика расчета параметров СМО с отказами*

1. Вероятность простая каналов обслуживания:

$$P_o = \frac{1}{\sum\limits_{K=0}^{n} \frac{P^K}{K!}},$$

где $к$ — номер исполнителя; $n$ —максимальное число исполнителей.

2. Вероятность отказа в обслуживании в связи с занятостью всех исполнителей или каналов обслуживания ($k$=$n$),

$$P_{отк.} = P_n = P_o \frac{P^n}{n!}.$$



3. Вероятность обслуживания

$$P_{обс} = 1 - P_{отк}.$$

4. Среднее число каналов, занятых обслуживанием,

$$n_1 = pP_{обс}.$$

5. Для каналов, занятых обслуживанием,

$$K_1 = {}^{n_1}\!/_{n}.$$

6. Пропускная способность всех каналов

$$N = \lambda P_{обс},$$

где $\lambda$ — среднее число заказов в единицу времени (интенсивность заявок).

Рассмотрим пример обоснования эффективных параметров организации при функционировании СМО в ситуации с отказами.

**Пример 1.** В складе «Сельхозхимии» работает три грузчика. Среднее число машин, приезжающих в склад за удобрениями, составляет 4 (в течение часа). Затраты времени на погрузку одной автомашины составляют 40 мин. Если автомашина подъезжает к складу, когда все грузчики заняты, то она направляется в другой склад. Определить вероятность того, что автомашина не будет загружена, степень загрузки трех грузчиков и необходимое число грузчиков, чтобы вновь прибывшая за грузом автомашина была загружена с вероятностью $P$ = 0,95.

Исходные данные:

$\lambda$ — интенсивность заявок или среднее число автомашин, прибывших за удобрением, в час ($\lambda$ = 4);

К — число исполнителей, т. е. грузчиков (К = 3);

$t_{обс}$ = 40 мин. или ${}^{40}\!/_{60} = 0{,}66$ ч — среднее время на выполнение одного заказа, загрузки одной автомашины;

$M = \frac{1}{t_{обс}} = \frac{1}{0{,}66} = 1{,}52$ — количество заказов, выполняемых в течение часа (в единицу времени) или количество автомашин, загружаемых в течение часа одним исполнителем (грузчиком);

$P$ — среднее число занятых обслуживанием каналов

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{1,52} = 2,6 .$$

Решение:

1. Вероятность простая каналов обслуживания

$$P_o = \frac{1}{\sum_{K=0}^{n} P^k/K!} = \frac{1}{2.6^0/0! + 2.6^1/1! + 2.6^2/2! + 2.6^3/3!} =$$

$$= \frac{1}{1 + 2.6 + \frac{6.76}{2} + \frac{17.58}{6}} = \frac{1}{9.91} = 0.101.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании

$$P_{OTK} = P_n = P_K \frac{P_0}{n!} = 2,6 \times 0,101/3! = 17,58 \times [0,101 / 1 \times 2 \times 3] =$$

$$= 17,58 \times 0,0168 = 0,295.$$

3. Вероятность обслуживания $P_{обс.} = 1 - 0,295 = 0,705$.

4. Среднее число занятых обслуживанием исполнителей, каналов обслуживания:

$$n_1 = p\, P_{обс.} = 2,6 \times 0,705 = 1,833.$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием ($K_1$),

$$K_1 = n_1/n = 1,833/3 = 0,611 .$$

6. Абсолютная пропускаемая способность: $A = \lambda\, P_{обс.} = 4 \times 0,705 = 2,82$.

При $K = 3$, $P_{обс.} = 0,705$, что менее 0,950.

Выполненные расчеты свидетельствуют о том, что при $K = 3$ вероятность загрузки автомашин составит 0,705.

При $K = 4$; $P_o = \dfrac{1}{1 + 2,6 + \frac{6,76}{2} + \frac{17,58}{6} + \frac{45,71}{24}} = \dfrac{1}{11,81} = 0,085 .$



$$P_{OTK} = 2,6^4 \times 0,08/4! = 45,71 \frac{0,085}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 45,71 \times 0,0035 = 0,160 .$$

$$P_{обс.} = 1 - 0,160 = 0,840 \le 0,950.$$

При $K = 5$; $p_0 = 0,078$; $P_{отк.} = 2,6^5 \times 0,078/5! = 118,84 \times 0,00062 = 0,074$.

$$P_{обс.} = 1 - 0,074 = 0,926 \le 0,950.$$

Таким образом, при числе грузчиков $K = 5$ вероятность загрузки автомашины составит 0,926.

При $K = 6$; $P_0 = 0,075$; $P_{OTK} = 2,6^6 \times 0,075/6! = 308,98 \times \frac{0,075}{720} = 308,98 \times 0,0001 = 0,03$.

$$P_{обс.} = 1 - 0,03 = 0,97 > 0,95.$$

Таким образом, чтобы с вероятностью не менее 95 % обеспечить загрузку автомашины требуется шесть грузчиков.

### ***Методика расчета параметров СМО с ожиданием***

Данная методика применяется в том случае, когда все исполнители заняты и заказчик становится в очередь, ожидая освобождения одного из исполнителей или каналов обслуживания.

Формулы для расчета параметров следующие:

1. Вероятность простая каналов обслуживания заявок ($K$=0)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n} \frac{P^K}{k!}} + P^{n+1} + 1/n!(n-p),$$

где $\kappa$, $n$ — число занятых и их общее количество каналов обслуживания (при $p/n < 1$).

2. Вероятность занятости каналов

$$P_K = P^K P^0/K!, \quad 1 \le K \le n .$$

3. Вероятность занятости всех каналов

$$P_n = P^n \frac{P_0}{n!}..$$

4. Вероятность попадания заказчика в очередь

$$P_{оч} = \frac{P^{n+1}}{n!\left(n-p\right)} P_0.$$

5. Среднее число заявок в очереди

$$\text{m}m_{оч} = \frac{P^{n+1}}{\left(n-1\right)!\left(n-p\right)^2} P_0.$$

6. Среднее время ожидания заявки в очереди

$$t_{оч} = \frac{m_{оч}}{\lambda}.$$

7. Среднее время пребывания заказчика в СМО

$$t_{СМО} = t_{оч} + t_{abc}.$$

8. Среднее число исполнителей, занятых обслуживанием заказчиков,

$$n_1 = p.$$

9. Среднее число свободных каналов (исполнителей)

$$n_{СВ} = n - n_1.$$

10. Коэффициент занятости исполнителей (каналов обслуживания)

$$K_1 = {}^{n_1}\!/_{n}.$$

11. Среднее число заявок

$$m_1 = m_{оч} + n_1.$$

В этой ситуации важнейшим параметром решения является время ожидания в очереди.



**Пример 2.** Используем исходные данные, приведенные в примере 1. Итак, в складе работают три грузчика. Среднее число машин, приезжающих в склад за удобрениями составляет 4, затраты времени на погрузку одной автомашины составляют 40 мин. Если автомашина подъезжает к складу, когда все грузчики заняты, то она становится в очередь.

Определить параметры СМО в случае с ожиданием заказчика.

Исходные данные:

λ — интенсивность заявок, λ = 4; К = 3 — число каналов обслуживания или исполнителей,

$t_{обс.}$ = 40 мин. или 40/60 = 0,66 ч,

$\mu = \frac{1}{t_{обс.}} = \frac{1}{0,66} = 1,52$ — количество заказов, выполняемых в течение часа;

$P$ — среднее число занятых обслуживанием каналов

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{1,52} = 2,6\,.$$

Решение:

1. Вероятность простоя грузчиков в течение рабочего дня

$$P_o = \frac{1}{\frac{2,6^0}{0!} + \frac{2,6^1}{1!} + \frac{2,6^2}{2!} + \frac{2,6^3}{3!} + \frac{2,6^4}{3!(3,00-2,6)}} = 0,034\,.$$

2. Вероятность занятости всех грузчиков (каналов обслуживания)

$$P_K = \frac{2,6^3}{3!} \times 0,034 = \frac{17,58}{1\times 2\times 3} \times 0,034 = 0,100.$$

3. Вероятность занятости всех каналов

$$P_n = P^n \times \frac{P_o}{n!} = 2,6^3 \frac{0,034}{1\times 2\times 3} = 0,098.$$

4. Вероятность попадания заказчика в очередь

$$P_{оч} = \frac{P^{n+1}}{n^1!(n-p)} P_o = \frac{2,6^4}{1\times 2\times 3\times (3-2,6)} \times 0,034 = 0,647.$$

5. Среднее число заявок в очереди

$$m_{оч} = \frac{p^{n+1}}{(n-1)!(n-p)^2} p_0 = \frac{2,6^4}{(3-1)!(3-2,6)^2} \times 0,034 =$$

$$0,034\times \frac{45,6976}{1\times 2\times (0,4^2)} = 4,86.$$

6. Среднее время ожидания в очереди

$$t_{оч} = \frac{m_{оч}}{\lambda} = \frac{4,86}{4} = 1,21 \text{ ч.}$$

7. Среднее время пребывания заказчика в СМО

$$t_{смо} = t_{оч} + t_{обс} = 1,21 + 0,66 = 1,87 \text{ ч.}$$

8. Среднее число исполнителей, занятых обслуживанием заказчиков,

$$n_1 = p = 2,6 .$$

9. Среднее число свободных каналов

$$n_{св} = 3 - 2,6 = 0,4 .$$

10. Коэффициент занятости исполнителей

$$k_1 = \frac{2,6}{3} = 0,87 .$$

11. Среднее число заявок

$$m_1 = m_{оч} + n_1 = 4,86 + 2,6 = 7,46 .$$

Таким образом, вероятность простоя грузчиков составляет 3,4 %, вероятность попадания заказчика в очередь — 64,7 %, среднее число заявок (автомашин) в очереди — 4,86; среднее время ожидания погрузки — 1,21 часа.



Следует отметить, что иногда СМО с ожиданиями дополняется тем, что продолжительность выполнения заказа ограничена. В таком случае речь идет о СМО с ожиданиями и с ограниченной длиной очереди.

### *Методика расчета параметров СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди*

Формулы для расчета данных параметров таковы:

1. Вероятность простая каналов обслуживания при отсутствии заявок ($k = 0$)

$$P_o = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{p^k}{k!} + \frac{p^{n+1}}{n^1(n-p)} \times \left[1 - (\frac{p}{n})^m\right]},$$

где $m$ — возможности исполнителей, вместимость складского помещения, автомашин.

2. Вероятность отказа в выполнении заказа

$$P_{отк} = \frac{p^{n+m}}{n!\times n^m} p_0 .$$

3. Вероятность выполнения заказа

$$P_{обс} = 1 - p_{отк} .$$

4. Абсолютная пропускная способность

$$\mu = P_{абс} \lambda .$$

5. Среднее число занятых исполнителей

$$n_1 = \frac{N}{\mu} .$$

6. Среднее число заявок в очереди

$$m_{оч} = \frac{P^{n+1}}{n\, n!} \; \frac{1-(P/n)^m (m+1-m-mp/n)}{(1-p/n)^2} P_o .$$

7. Среднее время ожидания выполнения заказа

$$t_j = \frac{m_{оч}}{\lambda}.$$

8. Среднее число заявок

$$y = m_m + n_1.$$

9. Среднее время пребывания в системе

$$t_{nc} = \frac{y}{\lambda}.$$

Рассмотрим пример СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди.

Следует отметить, что в задаче по обеспечению загрузки автомашин удобрениями (пример 2) рассматривалась ситуация, при которой «Сельхозхимия» располагала неограниченным запасом удобрений. Решение сводилось к удовлетворению заказов, которые обеспечивали выполнение производственных программ потребителей.

Вместе с тем рыночная система хозяйствования предполагает экономное использование ресурсов на всех этапах технологической цепочки (в нашем случае при формировании мощности складского помещения и запасов удобрений).

Согласно приведенного решения (пример 2) сельскохозяйственные организации, обслуживаемые "Сельхозхимией", в среднем вывозят со склада в день 5 автомашин, загруженных удобрениями. Очевидно, что такое же количество удобрений должно поступать и на данный склад «Сельхозхимии».

**Пример 3.**

«Сельхозхимия» завозит от поставщиков на свой склад удобрения в разное время дня и с интенсивностью λ = 5 автомашин. Складское помещение «Сельхозхимии» и его оборудование позволяют обрабатывать удобрения, привезенные двумя машинами (m = 2). В складе «Сельхозхимии» работают 3 фасовщика (n = 3), каждый из которых в среднем может подготовить для отправки



в хозяйство удобрения с одной машины в течении $t_{обс.}$ = 3,3 ч. Продолжительность рабочего дня составляет 10 часов ($t_0$ = 10).

Определить необходимую емкость складского помещений «Сельхозхимии», чтобы вероятность полной подготовки удобрений для отправки в хозяйство составляла $P_{обс.} \geq 0{,}98$.

Исходные данные:

λ — интенсивность заявок (λ = 5);

вместимость складского помещения равна вместимости 2 машин (при их средней грузоподъемности), т. е. $m = 2$;

$t_{обс.}$ = 3,3 ч;

$\mu = \dfrac{t_0}{t_{абс}}$ — число машин, которое можно подготовить к отправке в хозяйство в течение рабочего дня, $\dfrac{10}{3{,}3} = 3$ машины в день;

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{3} = 1{,}66\,; \ \ k = n = 3.$$

Решение:

1. Вероятность простоя фасовщиков при возможном отсутствии автомашин с удобрениями

$$P_0 = \frac{1}{\dfrac{1{,}66^0}{0!} + \dfrac{1{,}66^1}{1!} + \dfrac{1{,}66^2}{2!} + \dfrac{1{,}66^3}{3!} + \dfrac{1{,}66^{3+1}}{3!(3-1{,}66)}} \times \left[1 - \left(\frac{1{,}66}{3}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{1 + 1{,}66 + 1{,}38 + 0{,}76 + \dfrac{7{,}59 \times (1 - 0{,}55^2)}{1 \times 2 \times 3 \times (1{,}34)}} \times (1 - 0{,}55^2) = 0{,}122.$$

2. Вероятность отказа фасовщиков в обслуживании

$$P_{отк} = \frac{P^{n+m}}{n!\,n^m} P_o = 0{,}122 \times \frac{1{,}66^{3+2}}{3! \times 3^2} = 0{,}028.$$

3. Вероятность выполнения заказа

$$P_{обс.} = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}028 = 0{,}972.$$

Таким образом, при емкости складского помещения, равной вместимости двух автомашин ($m$ = 2),

$$P_{обс.} = 0{,}972 \leq P_{обс.}(0{,}98).$$

Допустим, что $m$ = 3, тогда $P_0 = \dfrac{0{,}83}{5{,}744} = 0{,}144$;

$$P_{отк} = 0{,}144 \times \frac{1{,}66^{3+3}}{3! \times 3^3} = 0{,}018;$$

$$P_{обс} = 0{,}982.$$

При числе фасовщиков $n$ = 3 ($m$ = 3) достигается заданная вероятность (0,982 ≥ 0,980) подготовки удобрений для отправки в хозяйство.

Прочие параметры СМО (при $m$ = 3; $P_0$ = 0,144; $P_{отк}$ = 0,018; $P_{абс}$ = 0,982) составят:

4. Абсолютная пропускная способность

$$\mu = P_{абс}\,\lambda = 0{,}982 \times 5 = = 4{,}91.$$

5. Среднее число занятых фасовщиков

$$n_1 = \frac{N}{\mu} = \frac{4{,}91}{3} = 1{,}64\ .$$

6. Среднее число автомашин в очереди на расфасовку удобрений

$$m_{оч} = \frac{p^{n+1}}{n\,n!} \times \frac{1-(P/n)^m \times (m+1-\frac{mp}{n})}{\left(1-\frac{P}{n}\right)^2} P_o = 0{,}590.$$

7. Среднее время ожидания автомашин на обслуживание

$$t_{аб} = \frac{m_{оч}}{\lambda} = \frac{0{,}59}{5} = 0{,}12 \text{ дня или 1,2 часа.}$$



8. Среднее число заявок или автомашин

$$y = m_{оч} + n_1 = 0{,}59 + 1{,}64 = 2{,}23.$$

9. Среднее время пребывания автомашин в системе

$$t_{пр} = \frac{y}{\lambda} = \frac{2{,}23}{5} = 0{,}45 \text{ дня или 4,5 часа.}$$

Таким образом, емкость хранилища должна вмещать удобрения с 3 автомашин средней вместимости. При этом вероятность обработки удобрений составит 0,98.

## ГЛАВА 13. Методы анализа регрессий и корреляций

### 13.1. Сущность корреляций и регрессий, корреляционных моделей

При управлении производством постоянно возникает необходимость выяснить взаимосвязи показателей, влияние изменений одних из них на изменение других. Эти исследования осуществляют при построении группировок. Но группировки не позволяют определять тесноту связи множества показателей, что является предметом метода корреляций. Чтобы объяснить влияние количественного изменения одного показателя на изменение другого используются регрессии. Наличие взаимосвязи показателей является основанием для построения математических аналогов или моделей. Если все параметры, на основе которых построена модель,
являются следствием точных измерений и экспериментов, то она будет регрессионной. Если среди показателей имеются статистические данные, то полученная на их основе модель является корреляционно-регрессионной или корреляционной.

Корреляционная модель имеет результативный показатель, который изменяется при изменении одного или нескольких факторных показателей.

Наряду с названием «корреляционная модель» часто используется выражение «производственная функция». При этом понятие «производственная функция» предполагает, что, во-первых, какой-то результат функционально зависит от одного или нескольких формирующих его показателей и, во-вторых, речь идет о количественном выражении, характеризующем производственные процессы.

Название «корреляционная модель» (КМ) является более точным, так как модель дает усредненную (корреляционную) оценку эффективности факторов (в том числе статистических). В общем виде однофакторная линейная корреляционная модель имеет вид

$$y_x = a_0 + a_1 x,$$

где $y_x$ — ожидаемое значение результативного показателя, который формируется под воздействием вектора (фактора $x$); $x$ — факторный показатель; $a_1$ — коэффициент регрессии или эффективности



фактора. Этот коэффициент показывает на сколько единиц возрастает (при знаке «+») или уменьшается (при знаке «-») результативный показатель при изменении фактора на 1; $a_0$ — известная величина (свободный член), которая выражает влияние неучтенных факторов и имеет знак «+» или «-» в зависимости от того, как влияют неучтенные факторы.

По характеру взаимосвязи корреляционные модели могут быть линейными и нелинейными.

Линейные корреляционные модели являются моделями с переменными в +1 степени.

Пример нелинейной модели:

$$y_x = a_0 + \frac{a_1}{x}.$$

По числу факторов, учтенных в корреляционной модели, их можно подразделить на одно- и многофакторные:

$y_x = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n$ — линейная многофакторная модель;

$y_x = a_0 x_1^{a1} x_2^{a2}$ — простейшая нелинейная модель.

Первые исследования в области корреляционных моделей появились в начале XIX века. Ю. Либих впервые сделал попытку математически определить урожайность сельскохозяйственных культур через выражение типа

$Y = ax$,

где $a$ — окупаемость единицы удобрений; $x$ — удобрения.

Позже эта модель приобрела вид

$Y = a_0 + a_1x$,

где $a_0$ — урожайность, зависимая от других факторов (кроме удобрений).

В дальнейшем существенный вклад в разработку теории корреляционных моделей внесли В.С. Немчинов, В.В. Новожилов, Хеди, Дилон и др.

В настоящее время корреляционные модели используются во всех сферах человеческой деятельности.

## 13.2. Методика построения корреляционных моделей

Основными этапами построения корреляционных моделей являются следующие:

1) выбор результативного и факторных показателей;

2) сбор информации и проверка ее на достоверность;

3) выбор вида корреляционной модели;

4) расчет параметров и характеристик корреляционной модели;

5) анализ использования ресурсов на основе корреляционной модели.

Этап 1. В обобщенном виде корреляционная модель означает, что любой результативный показатель есть функция от каких-то факторов.

Пусть корреляционная модель является однофакторной и имеет вид

$$y_x = a_0 + a_1 x,$$

где $y_x$ — результативный показатель, $x$ — факторный.

Следовательно, выполняя первый этап построения корреляционной модели необходимо правильно выбрать результативный и факторные показатели. Этот выбор осложняется тем, что отсутствуют количественные методы, которые позволили бы осуществить его без ошибок.

В этой связи при обосновании результативного и факторных показателей необходимо руководствоваться следующими положениями:

1. Результативный показатель в цепочке причинно-следственных связей всегда находится на более высоком уровне, который определяют на основе логических рассуждений, а также знаний о том, какие из рассматриваемых показателей являются первичными и вторичными.

Например, $y_x$ — себестоимость, $x$ — урожайность.

Факторный показатель — урожайность ($x$), результативный — себестоимость ($y_x$). Следовательно, себестоимость вторична и находится в цепочке выше урожайности. С другой стороны, содержание показателя зависит от содержания рассматриваемого реального процесса. Это значит, что если в одном случае показатель является результативным, то в другом случае данный показатель может быть факторным и наоборот.



Например, $y_x$ — урожайность, $x$ — удобрения. В данном случае удобрения являются первичным фактором, а урожайность — вторичным.

2. В корреляционную модель следует включать факторы, которые оказывают непосредственное влияние на результативный показатель.

Например, урожайность ячменя является результативным показателем ($y$). Доля или процент посевов ячменя в зерновом клине — это фактор ($x$). Механизм влияния данного фактора на урожайность отсутствует, хотя известно, что доля посевов ячменя в зерновом клине больше именно потому, что ячмень обладает более высокой урожайностью, чем другие культуры. Такие факторы не следует включать в корреляционную модель. Размер доли посевов не влияет на формирование показателя урожайности.

3. В корреляционную модель включают факторы, которые логически определяют содержание результативного показателя.

Например, в соответствии с теорией К. Маркса, валовая продукция является результатом использования живого и овеществленного (т. е. прошлого) труда.

Следовательно, стоимость валовой продукции $y_x$ — результативный показатель. Тогда прошлый труд будет представлен фондами ($x_1$ и $x_2$) и сельскохозяйственными угодьями ($x_4$ и $x_3$), а живой — среднегодовыми рабочими ($x_5$). При этом:

$x_1$ — основные производственные фонды, у. е.;

$x_2$ — оборотные фонды, у. е.;

$x_3$ — сельскохозяйственные угодья, га;

$x_4$ — балл 1 га сельскохозяйственных угодий;

$x_5$ — среднегодовые работники, чел.

Расшифровав модель, мы определили перечень ее основных факторных показателей.

4. Если результативный показатель является синтетическим (сложным), то и факторные показатели должны быть такими же.

Например, стоимость валовой продукции — это показатель синтетический, который характеризует хозяйство в целом.

В свою очередь, остальные показатели также являются синтетическими и сложными. Они характеризуют ресурсный потенциал хозяйства в целом. В процессе исследований может возникнуть необходимость выяснить влияние на результативный показатель отдельных частей синтетического показателя (фактора). В этом случае вводим столько факторов, сколько выделяем частей синтетического показателя с тем, чтобы сумма этих частей дала его значение.

Например, пусть необходимо выяснить то, как на стоимость валовой продукции влияют стоимость зданий, сооружений, силовых машин и оборудования. Для этого вводим факторы:

$x_6$ — стоимость зданий;

$x_7$ — стоимость силовых машин и оборудования;

$x_8$ — остальные фонды.

При этом $x_6 + x_7 + x_8 = x_1$.

В условиях рынка возможны ситуации, когда нужно определить эффективность фондов, введенных в течение какого-то периода.

Например, $x_6$ — стоимость фондов, введенных в действие в течение 1980–1985 гг.; $x_7$ — в 1986–1992 гг. и т. д.

Тогда в корреляционную модель вводим $x_6$, $x_7$, $x_8$ при условии, что $x_6 + x_7 + x_8 = x_1$.

5. Если результативный показатель является относительной величиной, то и факторные показатели должны иметь такой же знаменатель.

Например, результативный показатель — это уровень производства, который равен отношению стоимости валовой продукции к площади сельскохозяйственных угодий (из расчета 100 га). Значит, все остальные показатели должны быть взяты в расчете на 100 га сельскохозяйственных угодий, за исключением тех, содержание которых от количества га не меняется (к примеру, балл сельскохозяйственных угодий).

6. Если исследования показывают, что увеличение какого-то показателя сверх определенного уровня предполагает получение дополнительного эффекта, то этот показатель может быть учтен дважды, что вытекает из закона превращения количества в качество.

Например, установлено, что если стоимость кормов в издержках превышает 28 %, то эффективность оборотных фондов возрастает. Чтобы посчитать эффективность превышения фондов сверх 28 %, вводим дополнительный фактор (стоимость кормов сверх 28 % в стоимости оборотных фондов), что позволит определить его влияние на результативный показатель.



В настоящее время возрастает роль качественных параметров в результатах производства. Исследования ученых России (ЦЭМИ АН РФ), Японии, США, Англии свидетельствуют о том, что вследствие изменения качественных параметров производства (технологий, квалификации работников, организации труда, типов хозяйствования и др.) при тех же ресурсах предприятия (организации) получают до 50 % дополнительного продукта. Поэтому перед экономистами стоит задача — количественно оценивать эффективность использования ресурсов предприятиями различных форм собственности и типов хозяйствования. Для этого необходимо использовать возможности корреляционных моделей.

Чтобы получить количественную оценку качественных параметров форм хозяйствования, следует вводить столько же факторов, сколько имеется форм хозяйствования.

Например, по данным районного агропромышленного комплекса имеются следующие формы хозяйствования: кооперативы, арендные предприятия, акционерные предприятия (СПК, ФХ и др.). Чтобы оценить в них особенности использования ресурсов необходимо построить корреляционную модель формирования стоимости товарной продукции или денежной выручки и, наряду с пятью приведенными выше факторами, определяющими ресурсный потенциал, ввести качественные признаки, которых будет столько же, сколько форм хозяйствования.

Таким образом, $y_x$ — результативный показатель (ожидаемая стоимость валовой продукции); $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ —факторные показателеи; $x_6$, $x_7$, $x_8$, — показатели фермерские, кооперативные; арендные; $x_9$ — акционерные общества; $x_{10}$ — СПК.

Для оценки качественных признаков следует руководствоваться следующими положениями.

Все качественные признаки можно разделить на две группы: альтернативные и нарастающие.

Альтернативные признаки характеризуются тем, что они или присутствуют, или отсутствуют.

Нарастающие — изменяются (возрастают от какой-то величины). Примером альтернативного качественного признака является сорт растений, который присутствует или отсутствует в посевах. Альтернативные признаки породы животных и т. д.

Для количественной характеристики этих признаков используется два параметра (1 и 0). Допустим, что формы хозяйствования — альтернативный признак (хотя в действительности каждая форма содержит в себе и старое, что отрицается, и новое, что зарождается). Исходя из этого, можно учесть и оценить отмеченные выше формы хозяйствования в рамках района. Другой пример. Допустим, что фермер возделывает картофель, но данные об эффективности его сортов отсутствуют. С помощью корреляционной модели имеется возможность сделать подобную оценку, т. е. определить, какова эффективность сорта (в центнерах дополнительной продукции).

Строим корреляционную модель формирования урожайности. При этом учитываем факторы, которые ее формируют (таблица 13.1).

Таблица 13.1 — Значения факторов, формирующих урожайность картофеля

| Урожайность, ц/га | Факторы корреляционной модели ($x_1,\ldots,x_{25}$) | | | | | Сорта культуры | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | «Темп» | «Ласунок» |
| $y_x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_{25}$ | $x_{29}$ | $x_{30}$ |
| I опыт, 210 | 4,8 | 2,6 | 40,0 | | 3,0 | 0 | 1 |
| II опыт, 190 | 4,6 | 2,4 | 35,0 | | 2,8 | 1 | 0 |

В результате решения модели с альтернативными качественными признаками получают коэффициенты регрессии, которые помогут определить дополнительный эффект от использования сортов.

Аналогично осуществляется оценка пород животных или видов технологий.

Допустим, картофель сорта «Темп» возделывается по различным технологиям: посадка в гребни, голландская технология с междурядьями 1,2–1,4 м.

Если сорт один, то в качестве альтернативных признаков в модели формирования урожайности выбирают виды технологий:

$x_{29}$ — технология гребневая 1-го сорта;

$x_{30}$ — технология голландская 1-го сорта.



Если сорта были разные, то тогда наряду с факторами-сортами, вводим и факторы-технологии:

$x_{31}$ — технология гребневая 2-го сорта;

$x_{32}$ — технология голландская 2-го сорта.

В этом случае коэффициенты регрессии покажут эффект от применения и сортов, и технологий, также будет выяснено, какому сорту более подходит та или иная технология.

Наряду с альтернативными, имеют место и нарастающие качественные признаки. Специфика их состоит в том, что они формируются под влиянием нескольких элементов, взаимосвязанных между собой. Взаимосвязь элементов обычно не является линейной, поэтому вывести закон или формулы оценки нарастающего качественного признака очень сложно, хотя в условиях рыночной системы хозяйствования роль качественных признаков в результатах хозяйствования постоянно возрастает. Примером нарастающего качественного признака может быть квалификация специалиста. Ее элементами являются образование, стаж работы, черты характера и др.

Применительно к каждому специалисту влияние этих параметров на его квалификацию бывает разным. Поэтому оценка квалификации в баллах, как производная от образования и стажа работы специалиста, не всегда точна. Отсюда, с одной стороны, необходимо учитывать влияние квалификации на результаты хозяйствования, с другой стороны, искать методы правильной оценки элементов, формирующих нарастающий качественный признак. Квалификацию работников в корреляционной модели часто выражают через число работников с высшим и средним образованием, с определенными разрядами или стажем работ. Однако подобный подход не отличается достаточной точностью.

После того, как результативные и факторные показатели определены, приступаем к сбору информации.

Этап 2. Необходимо, чтобы число опытов или хозяйств, по данным которых строим корреляционную модель, было не меньше 20 ($n \geq 20$). Если модель многофакторная, то требуется выдержать соотношение между числом опытов ($n$) и числом факторов ($k$); число опытов (хозяйств) должно быть в 2,5 раза больше числа факторов, включая и результативный ($n \geq 2,5k$). Например, если $k = 9$, то $n \geq 2,5\ (9+1)$.

Выборка должна быть репрезентативной, т. е. представительной. Информация должна нести в себе именно ту смысловую нагрузку, которая ей свойственна. Если экономическая информация репрезентативна, то она отвечает требованиям закона нормального распределения.

Сущность закона нормального распределения заключается в следующем. Если информация распределена нормально, то вероятность появления значения возрастает по мере приближения его величины к средней арифметической.

Закон описывается следующей формулой:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2}},$$

где $\sigma_x$ — среднее квадратическое отклонение; $e$ — основание натурального логарифма; $x_i$ — значение варианта фактора $i$; $\bar{x}$ — средняя арифметическая; $p(x)$ — вероятность появления варианта фактора $x$.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2},$$

где $\overline{x^2}$ – средняя арифметическая квадратов фактора $x$; $\bar{x}^2$ – квадрат средней арифметической фактора $x$.

На рисунке 13.1 приведена кривая распределения вероятностей.

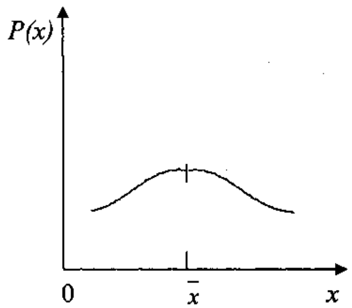



Рисунок 13.1

Для определения соответствия информации требованиям закона нормального распределения используются более простые характеристики: асимметрия ($A$) и эксцесс ($Э$).

Асимметрия:

$$A = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n\sigma_x^3}.$$



Эксцесс:

$$Э = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{n\sigma_x^4} - 3.$$

Эти характеристики ($A$ и $Э$) имеют геометрическую интерпретацию (рисунок 13.2). Для ее демонстрации построим систему координат. На оси абсцисс будут размещаться значения переменной $x$, на оси ординат — вероятность появления значения $x$. Линией, выполненной жирным шрифтом, показана кривая вероятностей (если информация отвечает требованиям закона нормального распределения). На соответствие требованиям закона нормального распределения проверяется каждый из столбцов корреляционной модели (начиная с результативного). Если информация столбца отвечает требованиям закона нормального распределения, то А и Э = 0.

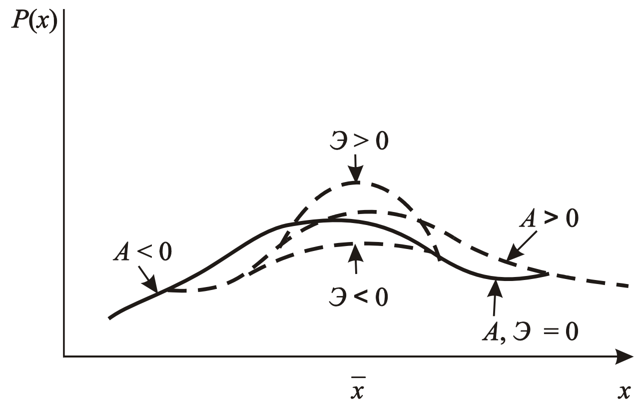



Рисунок 13.2

Если $A > 0$, то фигура вероятностей смещена вправо, если $A < 0$, — влево. В том случае, если $Э > 0$, то фигура вероятностей островерхая, если $Э < 0$, — пологая.

Следует отметить, что экономическая информация часто содержит ошибки. Поэтому характеристики информации $A$ и $Э$ обычно отличны от 0.

Однако расчеты свидетельствуют, что информация может считаться репрезентативной и отвечающей требованиям закона нормального распределения в том случае, если $A \leq 3\sigma_A$, $Э \leq 5\sigma_Э$. При этом $\sigma_A$ и $\sigma_э$ зависят только от одного параметра — числа данных[4].

Смысл этого положения состоит в следующем: чем больше изучается данных, по которым строится корреляционная модель, тем в большей мере ошибки со знаком «-» покрывают ошибки со знаком «+» и информация выражает закономерности, которые ей свойственны. Однако бывает ситуация, когда *А* или *Э* (либо *А* и Э) выходят за допустимые пределы. Тогда информация не будет соответствовать закону нормального распределения и если посчитать по ней коэффициенты регрессии, то их значения будут существенно отличаться от истинных.

Пример. Урожайность зерновых (фактор $x_k$ ) имеет следующие значения:

| $x_k$ | |
|---|---|
| 1. | 29,0. |
| 2. | 26,0. |
| 3. | 20,0. |
| ……….. | |
| 10. | 44,0. |
| | …. |
| 15. | 18,0. |
| | …. |
| 20. | 27,6. |
| | …. |
| 30. | 31,4. |

$\overline{x_k} = 30,6$.

Допустим, что по столбцу $x_k$ $A = 2,1$; $Э = 4,2$; $\sigma_A = 0,65$; $\sigma_Э = 0,8$.

Проверяем информацию на репрезентативность:

$2,1 > 3 \times 0,65$, т. е. $А > 3\ \sigma_A$;

$4,2 > 5 \times 0,8$, т. е. $Э > 5\ \sigma_Э$.

4 $$\sigma_A = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}};\ \sigma_э = \sqrt{\frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)}}.$$



Таким образом, информация столбца $x_k$ не отвечает требованиям закона нормального распределения, что возможно в случае, когда не все значения вектор-столбца отвечают закону трех сигм, т. е. $|x_i - \overline{x} \leq 3\ \sigma_x|$. Это означает, что отклонение значения варианта-фактора от средней арифметической не должно превышать утроенное среднее квадратическое отклонение по модулю. Допустим, $\sigma_{Xк} = 3,8$. В столбце есть выделяющиеся значения 10-го и 15-го хозяйств: 44,0 и 18,0. Проверяем, могут ли значения 10-го и 15-го хозяйств принадлежать вектор-столбцу $x_k$:

$|18 - 30,6 > 3,8 \times 3|$;

$|12,6 > 11,4|$;

$|44 - 30,6 > 3,8 \times 3|$;

$|13,4 > 11,4|$.

Таким образом, информация 10-го и 15-го хозяйств формируется по законам, отличным от среднего по выборке. Очевидно, в одном случае для хозяйства характерна передовая технология, в другом — отсталая. Информацию данных хозяйств следует исключить из выборки.

После этого вновь определяем значения А, Э, $\sigma_А$ и $\sigma_Э$ . Как правило, А и Э будут находится в допустимых пределах, а информация будет отвечать требованиям закона нормального распределения. При этом исключенную ранее информацию следует изучить монографически, т. е. применительно к каждому хозяйству. Так, хозяйство № 10 располагает такой технологией и организацией, которые являются перспективными для других хозяйств. Если бы удалось в группе рядом расположенных районов найти хозяйства с такими же высокими значениями $x_к$, то по ним можно было бы построить модель формирования урожайности ($x_к$). Модель (прогрессивная) показала бы те ресурсы и их окупаемость, при которых получены наивысшие значения урожайности.

В современных условиях хозяйствования изучение опыта отдельных хозяйств с высокими показателями является важнейшей формой накопления информации. Однако информация передового 10-го хозяйства отличается особенностями формирования, своей сущностью и должна быть исключена из выборки.

В результате этого будет получена информация от меньшего числа хозяйств, которая, однако, отвечает требованиям закона нормального распределения. После этого переходим к определению вида корреляционной модели.

Этап 3. Вид корреляционной модели определяется графическим и аналитическим методами.

Рассмотрим графический метод.

В случае, если речь идет об однофакторной корреляционной модели, то вывод о характере связи $y$ и $x$ делают на основании одного графика. Для этого строим корреляционное поле и по расположению в нем точек находим преобладающую тенденцию (рисунки 13.3 и 13.4).

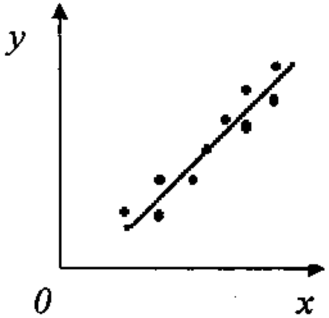



Рисунок 13.3

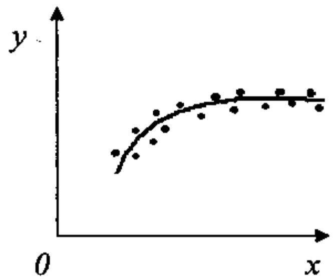



Рисунок 13.4

Из взаимосвязи $y$ и $x$, показанной на рисунке 13.3, следует, что корреляционная модель имеет вид

$$y_x = a_0 + a_1x.$$

В случае, показанном на рисунке 13.4, характер связи имеет вид

$$y_x = a_0 x^{a_1}.$$

Следует отметить, что обычно корреляционные модели являются многофакторными. Чтобы определить вид корреляционной модели необходимо построить график взаимосвязи результативного показателя с каждым из факторов отдельно. При этом возможны 3 ситуации.



Тенденция выражена (рисунок 13.5). Фактор $x_1$ (первый фактор) влияет на результативный показатель линейно. Эту связь, определяет выражение $a_1x_1$ (рисунок 13.5).

Взаимосвязь $y$ и $x_2$, показанная на рисунке 13.6, характеризуется тем, что корреляционное поле отличается неопределенностью, хотя в соответствии с логической моделью $x_2$ формирует результативный показатель, но корреляционное поле неопределенно. В этом случае влияние фактора $x_2$ учитываем как линейное, т. е. $a_2x_2$.

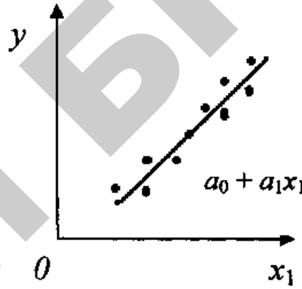



Рисунок 13.5

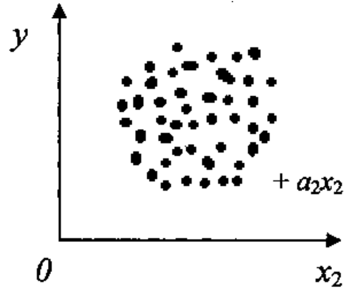



Рисунок 13.6

Связь $y$ и $x_3$ является нелинейной (рисунок 13.7). Этот фактор учитываем дважды (в первой степени и в степени, отличной от единицы) т. е. $a_3x_3 + a_4 x^n_3$, где $n \neq 1$.

Если бы по корреляционному полю получалось, что взаимосвязь $y$ с $x_3$ предполагает выгнутую вниз кривую, то это означало бы, что взаимосвязь $y$ с $x_3$ описывается параболой (рисунок 13.8).

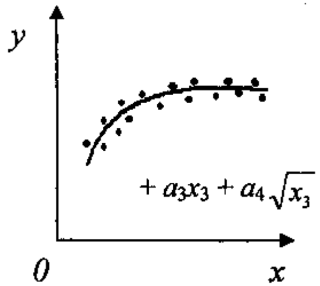



Рисунок 13.7

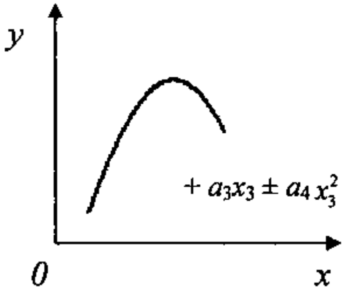



Рисунок 13.8

В этом случае взаимосвязь такова:

$$+a_3x_3 \pm a_4 x_3^2.$$

Когда форму нелинейной связи трудно определить на базе известных графиков (парабола, гипербола и т. д.), то влияние фактора на результативный показатель можно описать более сложным выражением:

$$a_3x_3 + a_4\sqrt{x_3} + a_5x_3^2 \text{ и т. п.}$$

Если влияние фактора учитывается выражением, состоящим из более чем двух членов (в нашем случае 3), то лишние, т. е. превышающие *l* членов выражения можем опустить, используя статистические характеристики, и, в частности, коэффициенты существенности коэффициентов регрессии.

Каким же образом можно учесть эффективность результативного показателя, влияние которого описывается нелинейным выражением?

В данном случае выражением описывается влияние фактора $x_3$, которое колеблется в пределах $\min x_3 \le x_3 \le max\ x_3$. Придаем фактору $x_3$ значения:

$$x_3' = x_3^{\min}; \qquad x_3'' = \overline{x_3}; \qquad x_3''' = x_3^{\max}.$$

Допустим, что в результате решения задачи влияние фактора $x_3$ описывается выражением: $+a_3x_3 + a_4\sqrt{x_3} + a_5x_3^2$ и т. п.

Определим, на сколько единиц возрастет $y$ при изменении $x_3$ на единицу в случае, если $x_3$ принимает последовательно меньшее значение, т. е.

$$x_3' = x_3^{\min}\text{; среднее — } x_3'' = \overline{x_3}\text{, максимальное — } x_3''' = x_3^{\max}.$$

Для этого подставляем значения $x_3$ в приведенное выше выражение. Допустим, что при этом получаем:

при $x_3' = x_3^{min}$: $$\frac{a_3x_3^{\min} + a_4\sqrt{x_3^{\min}} + a_5(x_3^{\min})^2}{x_3^{\min}} = 26;$$

при $x_3 = \overline{x}_3$: $$\frac{a_3\overline{x_3} + a_4\sqrt{\overline{x_3}} + a_5(\overline{x_3})^2}{\overline{x_3}} = 34;$$

при $x^3 = x_3^{\max}$: $$\frac{a_3x_3^{\max} + a_4\sqrt{x_3^{\max}} + a_5(x_3^{\max})^2}{x_3^{\max}} = 31.$$



Выводы: 1) с увеличением значения $x_3$ эффективность результативного показателя на единицу фактора возрастает; 2) изменение эффективности результативного показателя может быть не одинаковым, т. е. имеется точка перегиба, после которой приращение эффективности на единицу фактора уменьшается.

В результате проведенных построений находим, что корреляционная модель взаимосвязи $y$ с 3-мя факторами будет иметь вид

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4\sqrt{x_3} + a_5x_3^2.$$

В реальной ситуации выбор вида модели очень важен. Правильность выбора вида модели можно подтвердить аналитически с помощью разделенных разностей. Допустим, что связь $y$ с $x$ лучше всего описывается линейной однофакторной моделью. Чтобы доказать правомерность этого допущения строим вариационный ряд по $y$.

Пусть имеются следующие данные:

| Номер | *У* | *Х* |
|---|---|---|
| 1. | 16,0 | 27 |
| 2. | 11,0 | 34 |
| 3. | 14,0 | 29 |

Упорядочим данную информацию, т. е. построим вариационный ряд:

| Номер | *У* | *Х* |
|---|---|---|
| 1. | 11,0 | 34 |
| 2. | 14,0 | 29 |
| 3. | 16,0 | 27 |

При этом $y$ — себестоимость 1 ц зерна; $x$ — урожайность зерна (ц с 1 га).

Если вид корреляционной модели выбран правильно, то ожидаемые значения результативного показателя будут таковы:

$$y_1 = a_0 + a_1x_1,$$
$$y_2 = a_0 + a_1x_2,$$
$$y_3 = a_0 + a_1x_3.$$

Вычитая из каждого предыдущего выражения последующее, получим

$$y_1 - y_2 = a_1(x_1 - x_2),$$
$$y_2 - y_3 = a_1(x_2 - x_3).$$

Поделив первое и второе выражения на выражение при $a_1$, получим

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = a_1,$$

$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = a_1.$$

Отсюда видно, что выражение слева записывается по одному и тому же закону. При этом частное одинаково, поскольку вид корреляционной модели был выбран правильно. Обобщенно выражение будет иметь вид

$$\frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} = \Delta_i',$$

где $\Delta_i'$ — первая разделенная разность по опыту, хозяйству $i$. Значит, если взаимосвязь $y$ с $x$ описывается линейной однофакторной корреляционной моделью, то разделенные разности для вектора $y$ будут равными. Это выражение верно и в том случае, если в многофакторной модели факторы второй и $k$-й влияют на $y$ линейно. В этом случае формула, первых разделенных разностей равна как для 2-го, так и для $k$-го столбцов или переменных.

При этом следует отметить, что многофакторные модели описывают сложные процессы. Поэтому для факторов, учтенных в этих процессах линейно, абсолютного равенства первых разделенных разностей получить невозможно. В этой связи в равенстве допустимо отклонение ( ±15 %).

Наряду с линейным влиянием фактора на $y$, возможно и нелинейное. Допустим, что между $y$ и каким-то фактором имеет место нелинейная связь (на примере уравнения параболы):

$$y_1 = a_1x_k + a_2x_k^2.$$



Если подставить в это уравнение фактические значения фактора $x$, то получим выражения:

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_1^2,$$

$$y_2 = a_1x_2 + a_2x_2^2,$$

$$y_3 = a_1x_3 + a_2x_3^2,$$

$$y_4 = a_1x_4 + a_2x_4^2.$$

Находим разность между предыдущим и последующим выражениями:

$$y_1 - y_2 = a_1(x_1 - x_2) + a_2(x_1^2 - x_2^2),$$

$$y_2 - y_3 = a_1(x_2 - x_3) + a_2(x_2^2 - x_3^2),$$

$$y_3 - y_4 = a_1(x_3 - x_4) + a_2(x_3^2 - x_4^2).$$

Поделив эти уравнения на выражение при $a_1$, получим:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = a_1 + a_2(x_1 + x_2),$$

$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = a_1 + a_2(x_2 + x_3),$$

$$\frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = a_1 + a_2(x_3 + x_4).$$

Выражения слева являются первыми разделенными разностями:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \Delta_1', \quad \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \Delta_2', \quad \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = \Delta_3'.$$

Упростив записанные выше уравнения, находим разность между предыдущими и последующими выражениями:

$$\Delta_1' - \Delta_2' = a_2(x_1 - x_3),$$

$$\Delta_2' - \Delta_3' = a_2(x_2 - x_4).$$

Поделив уравнения на выражение при $a_2$, получим:

$$\frac{\Delta_1' - \Delta_2'}{x_1 - x_3} = a_2, \qquad \frac{\Delta_2' - \Delta_3'}{x_2 - x_4} = a_2.$$

Левые части выражения, равные $a_2$, записаны по одному закону, что позволяет сделать обобщение в виде математического выражения. Если взаимосвязь результативного показателя с факторным является нелинейной и определена правильно, то вторые разделенные разности для этих столбцов (векторов) одинаковы и описываются выражением

$$\frac{\Delta_i' - \Delta_{i+1}'}{x_i - x_{i+2}} = \Delta_i''.$$

Таким образом, на основании графиков, интуиции, опыта, первых и вторых разделенных разностей можно определить вид корреляционной модели.

Главными параметрами корреляционной модели являются коэффициенты регрессии $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Этап 4. Для определения $a_0, \ldots, a_n$ обычно используется метод наименьших квадратов, а также метод моментов, который применяется значительно реже.

Сущность метода наименьших квадратов заключается в том, чтобы найти такие значения $a_0, a_1, \ldots, a_n$, при которых сумма квадратов разностей расчетных и фактических значений результативного показателя была бы минимальной, т. е.

$$\sum (y_x - y_i)^2 \to \min.$$

Расчетное значение — это то значение, которое получается подстановкой в модель соответствующих значений факторов.

Например, пусть имеется корреляционную модель формирования урожайности зерновых:

$$y_x = 5{,}2 + 0{,}3x_1 + 5x_2;$$
$$R = 0{,}811;\ F = 7{,}6,$$

где $x_1$ — балл пашни; $x_2$ — количество внесенных удобрений, центнеров д. в.; 5,2 — свободный член, учитывающий положительное влияние других факторов; 0,3 — коэффициент регрессии при $x_1$.



Пусть $x_1 = 40$, $x_2 = 3$. Тогда расчетное значение составит $y_x = 32{,}2$.

Допустим, что для формирования результативного показателя была выбрана простейшая корреляционная модель $y_x = a_0 + a_1x_1$. Попытаемся, используя выражение метода наименьших квадратов, вывести правило для определения неизвестных параметров $a_0$ и $a_1$. Для этого раскроем содержание формулы $\sum (y_x - y_i)^2 \Rightarrow \min$. Эту формулу можно записать в виде

$$\sum (y_x - y_i)^2 = (a_0 + a_1x_1 - y_1)^2 + \ldots + (a_0 + a_1x_n - y_n)^2 \to \min.$$

Поскольку неизвестны $a_0$ и $a_1$, то продифференцируем эту формулу по $a_0$ и $a_1$:

$$\frac{dy}{da_0} = 2(a_0 + a_1x_1 - y_1) + 2(a_0 + a_1x_2 - y_2) + \ldots. + 2(a_0 + a_1x_n - y_n);$$

$$\frac{dy}{da_1} = 2(a_0 + a_1x_1 - y_1)x_1 + 2(a_0 + a_1x_2 - y_2)x_2 + \ldots. + 2(a_0 + a_1x_n - y_n)x_n.$$

Упростим полученные выражения, имея в виду, что их правые части (как и левые) равны нулю. Поделим эти выражения на 2 и рассмотрим первое уравнение. В нем значение $a_0$ повторяется $n$ раз. Отсюда можем записать $a_0n$. Выражение $a_1x_1$, $a_2x_2$, ... включает $a_1$ умноженное на $n$ значений $x$. Вынеся $a_1$ за скобки, т. е. $a_1(x_1 + x_2 + x_n)$, получим в скобках сумму значений $x$, которую можем записать в виде $a_1\sum x$ и т. д. Аналогично упрощаем второе уравнение. В результате получим систему:

$$\begin{cases} a_0n + a_1\sum x = \sum y, \\ a_0\sum x + a_1\sum x^2 = \sum yx. \end{cases}$$

Таким образом, чтобы найти неизвестные параметры $a_0$ и $a_1$ для корреляционной модели $y_x = a_0 + a_1x_1$ необходимо решить приведенную выше систему уравнений.

Для трехфакторной корреляционной модели система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_2 + a_3 \sum x_3 = \sum y, \\ a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_1 x_2 + a_3 \sum x_1 x_3 = \sum y x_1, \\ a_0 \sum x_2 + a_1 \sum x_1 x_2 + a_2 \sum x_2^2 + a_3 \sum x_2 x_3 = \sum y x_2, \\ a_0 \sum x_3 + a_1 \sum x_1 x_3 + a_2 \sum x_2 x_3 + a_3 \sum x_3^2 = \sum y x_3. \end{cases}$$

Система уравнений, при помощи которой определяются параметры корреляционной модели с $n$ факторами, включает $n + 1$ уравнений, где $n$ — число факторов корреляционной модели. При этом

$$y_x = a_0 + a_1 + \ldots + a_n x_n;$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_2 + \ldots + a_n \sum x_n = \sum y, \\ a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_1 x_2 + \ldots + a_n \sum x_1 x_n = \sum y x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 \sum x_n + a_1 \sum x_1 x_n + a_2 \sum x_2 x_n + \ldots + a_n \sum x_n^2 = \sum y x_n. \end{cases}$$

Нелинейная степенная корреляционная модель имеет вид $y_x = a_0 x^{a_1}$.

Преобразуем данное выражение в условное линейное, для чего прологарифмируем его:

$$\underbrace{\lg y_x}_{y_x^1} = \underbrace{\lg a_0}_{a_0^1} = a_1 \underbrace{\lg x}_{x^1}$$

или $y'_x = a'_0 + a_1 x'$.

Допустим, что $lg y_x = y_x'$ и т. д.

Решаем соответствующую этому уравнению систему для однофакторной корреляционной модели, но вместо переменных подставим переменные и параметры со штрихом:



$$\begin{cases} a'_0 n + a_1 \sum x' = \sum y', \\ a'_0 \sum x' + a_1 \sum x'^2 = \sum y' x'. \end{cases}$$

Затем заменим в соответствующих выражениях условные значения на реальные:

$$\begin{cases} \lg a_0 n + a_1 \sum \lg x = \sum \lg y \\ \lg a_0 \sum \lg x + a_1 \sum (\lg x)^2 = \sum \lg y \lg x. \end{cases}$$

Если $y_x = a_1 + a_1 x^k$, то принимаем $x' = x^k$ и опять решаем соответствующую систему.

После того, как определены коэффициенты регрессии, приступаем к обоснованию характеристик корреляционной модели, которые определяют ее устойчивость, возможность использования при анализе экономики и планировании экономических показателей на перспективу. Если модель является однофакторной и линейной, то важнейшей ее характеристикой будет коэффициент парной корреляции

$$r_{y_x} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

Где $r_{y_x}$ — парный коэффициент корреляции между $y$ и $x$ ($-1 \leq r_{y_x} \leq 1$). Поскольку $r_{y_x}$ является вероятностным параметром, то необходимо определить его существенность или надежность

$$t_r = \frac{r}{M_r} \geq 2{,}48,$$

где $M_r$ — ошибка $r$; 2,48 — минимальное значение, ниже которого $r$ не является устойчивым. Если $t_r < 2{,}48$, то полученную корреляционную модель и ее характеристики не следует использовать в расчетах. В свою очередь, $M_r$ определяем по формуле:

$$\mathrm{M_r} = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n - 1}}.$$

Следовательно, чем больше $n$, тем меньше ошибка. Таким образом, при большом $n$ и малом коэффициенте $r$ связь окажется устойчивой.

В том случае, если корреляционная модель является многофакторной ($y_x = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$) или нелинейной (любого вида), то есть $y_x = a_0 x_x^{a_1} \dots x_2^{a_2} x_n^{an}$, то для определения тесноты связи используются следующие коэффициенты:

а) для многофакторных линейных корреляционных моделей — коэффициент множественной корреляции $R$;

б) для нелинейных корреляционных моделей — коэффициент η или корреляционное отношение

$$R \text{ или } \eta = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_x - y_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Если число факторов линейной корреляционной модели равно двум, то для расчета $R$ можно использовать частную формулу:

$$R = \frac{\sqrt{r_{yx_1}^2 + r_{yx2}^2 - 2r_{yx_1}\ r_{yx_2}\ r_{x_1x_2}}}{1 - r_{x_1x_2}^2},$$

где $y_x$ — расчетное значение результативного показателя; $y_i$ — фактическое значение результативного показателя; $\bar{y}$ — средняя арифметическая фактических значений результативного показателя.

В числителе формулы находится выражение, определяющее необъяснимую вариацию. Чем совершеннее модель, тем степень объяснения особенностей формирования показателя будет выше и значит $y_x$ ближе к $y_i$. Предел (лимит) суммы равен $\lim\limits_{R \to 1} \sum (y_x - y_i)^2 = 0$.

Поскольку $R$, η являются вероятностными характеристиками , то рассчитываем коэффициенты их существенности

$$t_{R(\eta)} = \frac{R(\eta)}{M_R(M_\eta)} \geq 2,48;$$

$$M_R(M_\eta) = \frac{1 - R^2(\eta^2)}{\sqrt{n - k - 1}},$$



где $k$ — число факторов корреляционной модели, включая результативный показатель.

Если $t_{R(\eta)} \geq 2,48$, то модель устойчива и на ее основе можем рассчитывать другие характеристики.

Одной из таких характеристик является коэффициент эластичности ($Э_j$), который определяется по формуле:

$$Э_j = a_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}},$$

где $a_j$ - коэффициент регрессии при факторе $j$; $\bar{x}_j$ — среднеарифметическая фактора $j$.

Коэффициент эластичности позволяет сравнить роли отдельных факторов в формировании результативного показателя и показывает, на сколько единиц изменяется (уменьшается или увеличивается) результативный показатель, если факторный показатель изменится на единицу.

Пусть известны коэффициенты регрессии $a_j$ и средние арифметические факторных ($x_j$) и результативного ($\bar{y}$) показателей:

$$a_1 = 0,8; \ a_2 = 10; \ a_к = 3,6;$$

$$\bar{x}_1 = 20; \qquad \bar{x}_2 = 40; \qquad \bar{x}_k = 7;$$

$$\bar{y} = 1000.$$

Тогда $Э_1 = 0,8 \times 20/1000 = 0,016$; $Э_2 = 10,0 \times 40/1000 = 0,4$ и т. д.

Например, $Э_2 = 0,4$ показывает, что при увеличении $x_2$ на 1, $y$ возрастает на 0,4. Если сумма коэффициентов эластичности больше 1, т. е. $\sum\limits_j Эj > 1$, то это означает, что результативный показатель прирастает более быстрыми темпами, чем факторные и наоборот.

Коэффициенты эластичности имеют недостаток, который состоит в том, что они приемлемы, если вариации факторов одинаковы или почти одинаковы.

Допустим, $\overline{x_1}$ = 20 изменяется в диапазоне
$(x_1^{min} = 19) \le x_1 \le (x_1^{max} = 22)$, а $\overline{x_2}$ = 40 изменяется в диапазоне
$(x_2^{min} = 25) \le x_2 \le (x_2^{max} = 70)$.

Вариация первого факторного значения меньше, чем второго. Это значит, что первый фактор в меньшей степени объясняет изменение результативного показателя, чем второй.

Если вариация факторов отличается существенно, то для объяснения роли отдельных факторов в формировании результативного показателя используются $\beta_j$-коэффициенты, которые определяются по формуле:

$$\beta_j = a_j \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_y}.$$

Коэффициент $\beta_j$ показывает число сравнимых или стандартных единиц, на которое возрастет результативный показатель при изменении (увеличении) факторного на 1.

Таким образом, коэффициенты $Э_j$, и $\beta_j$ позволяют сравнить степени влияния на результативный показатель факторов, имеющих несопоставимые единицы измерения.

В многофакторной корреляционной модели роли отдельных факторов в формировании результативного показателя различны. Различна и теснота связи отдельных факторных показателей с результативным. Отсюда следует, что устойчивость характеристик различных факторов может быть разной.

В связи с этим требуется проверить на существенность отдельные коэффициенты регрессии.

Существенность коэффициента регрессии определяется по формуле:

$$t_{a_j} = {a_j}/{M_{a_j}},$$

где $M_{a_j}$ — ошибка коэффициента регрессии,

$$M_{a_j} = \frac{\sigma_{y_x y_i}}{\sigma_{x_j}\sqrt{n}},$$



а $\sigma_{y_x y_i}$ — стандартная ошибка по модели или необъяснимая вариация,

$$\sigma_{y_x y_i} = \sqrt{\frac{\sum (y_x - y_i)^2}{n}}.$$

Существенным является тот коэффициент регрессии, для которого выполняются условия (в частности, что фактическое $t_{aj}$ больше табличного $t^T_{a_j}$), т. е.

$$t_{a_j} > t^T_{a_j}, \text{ где } t^T_{a_j} \text{ – табличное.}$$

При этом $t^T_{a_j} = f(n,k)$, т. е. зависит от числа опытов и факторов. К примеру, $t^T_{a_j} \approx 1{,}96$ при $n \to \infty$.

В случае, если значения коэффициентов существенности отдельных факторов ниже табличных, то эти факторы из корреляционной модели исключаются и производится перерасчет параметров и характеристик модели. При этом коэффициенты регрессии изменяются. Изменение происходит потому, что при уменьшении числа факторов корреляционной модели через коэффициенты регрессии оставшихся факторов преломляется влияние исключенных (неучтенных) в силу мультиколлинеарности факторов. При этом сущность мультиколлинеарности заключается в том, что между факторами $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеется взаимосвязь, которая влияет на величину коэффициентов регрессии $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Если $t_{a_2} < 1{,}96$, например, для фактора $x_2$, то $x_2$ исключается и мы получим новые коэффициенты регрессии $a_1', \ldots, a_к'$. При этом $a_1' = a_1 + \Delta a_1'$, где $\Delta a_1'$ равно функции взаимосвязи $x_1$ и $x_2$.

Если $x_1$ — основные производственные фонды, а $x_2$ — производственные затраты, то степень взаимовлияния этих факторов в корреляционной модели формирования стоимости валовой продукции является очень тесной. При этом (согласно парным коэффициентам регрессии) на $y$ более непосредственно влияет $x_1$, а $x_2$ влияет на $y$ как самостоятельно, так и через $x_1$.

В силу мультиколлинеарности коэффициенты регрессии отдельных факторов могут быть значительно завышены или занижены.

Чтобы избежать искажения коэффициентов регрессии в корреляционной модели с мультиколлинеарными факторами используется каскадный корреляционный анализ, сущность которого заключается в следующем:

1. Выбираем результативный и факторные показатели и проверяем информацию столбцов на достоверность.
2. Определяем пары тесно связанных друг с другом факторов, т. е. коррелируемых (например, в корреляционной модели формирования стоимости валовой продукции такой парой факторов являются основные производственные и оборотные фонды).
3. Определяем, какие из факторов тесно связанных пар являются ведущими (определяющими). Эти определяющие факторы назовем промежуточными результативными.
4. Строим парную корреляционную модель взаимосвязи каждой пары факторов, например, $y_{x_2} = a_0 + a_1x_1$, где $y_{x_2}$ — стоимость оборотных фондов; $x_1$ — стоимость основных производственных фондов.

При этом рассчитываем все остальные характеристики ($r$, $t_r$, $t_{aj}$).

5. Рассчитаем разность фактических и расчетных значений фактора, тесно связанного с другим или другими факторами:

$$x_2 - y_{x_2} = \Delta x_2.$$

В корреляционной модели вместо фактора $x_2$ ставим столбец $\Delta x_2$, определяющий величину отклонения фактического значения фактора от среднего уровня, и считаем параметры модели. В этом случае коэффициент регрессии при $\Delta x_2$ определяет влияние на результативный показатель нового фактора при его отклонении от среднего уровня. При этом удается избежать искажения, которое имеет место в корреляционной модели с тесно коррелируемыми факторами.

Наряду с перечисленными выше, важным критерием для корреляционного анализа является $F_1$, который, как и $t_{R,r,\eta}$, характеризует эффективность корреляционной модели в целом (т. е. $F_1$ определяет то, насколько полно построенная модель выражает изучаемую закономерность).



Если $F_1^{факт} > 1{,}5$, то корреляционная модель количественно выражает ту закономерность, которую мы изучаем. Критерий $F_1$ измеряется как отношение общей дисперсии к остаточной:

$$F_1 = \frac{D_{y_i}}{D_{y_x y_i}}, \qquad F_1 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sum (y_x - y_i)^2},$$

где

$$D_{y_i} = \sum (y_i - \bar{y})^2, \qquad D_{y_x y_i} = \sum (y_x - y_i)^2 .$$

Для характеристики степени связи или мультиколлинеарности факторов используются коэффициенты внутренней меры определенности $d_{BH,j}$. Они характеризуют то, в какой мере данный фактор определяется изменениями других. Если $d_{BH,j} \leq 0{,}5$, то факторы слабо коррелируют между собой. По мере увеличения коэффициентов внутренней меры определенности ($d_{BH,j} > 0{,}5$) степень взаимосвязи факторов корреляционной модели возрастает.

Следует отметить, что $R^2$, $r^2$, $\eta^2$ выраженные в %, показывают то, на сколько процентов факторы объясняют изменение результативного показателя. Коэффициент $R = 0{,}95$ означает, что в 95 случаях из 100 выбранные факторы влияют на значение результативного.

Величина коэффициента $R^2 = 0{,}9025$ показывает, что учтенные факторы на 90,25 % объясняют изменение результативного показателя.

## 13.3. Корреляционные модели при анализе показателей

Допустим, что в результате расчетов была получена корреляционная модель, где $t_{R,r,\eta} > 2{,}48$, $t_{aj} > 1{,}96$, $F_1 > 1{,}5$. В этом случае модель может быть использована для анализа и планирования показателей.

Первым этапом анализа на базе корреляционной модели является сравнение расчетных и фактических значений результативного показателя.

Чтобы получить расчетные значения $y_x$, в корреляционную модель подставляем фактические значения факторов. Допустим, что имеется корреляционная модель формирования урожайности зерновых:

$$y_x = 4{,}2 + 0{,}3x_1 + 6{,}0x_2.$$

При этом в трех предприятиях фактическая ( $y_i$) и расчетная ( $y_x$ ) урожайности зерновых составляют: в хозяйстве № 1 — $y_x = 28$, $y_i = 28$; в хозяйстве № 2 — $y_x = 23$, $y_i = 24$; в хозяйстве № 3 — $y_x = 31$, $y_i = 30$.

При традиционной оценке эффективности использования ресурсов лучшим считалось бы третье хозяйство с большей по абсолютной величине урожайностью зерновых. Если же анализ эффективности использования ресурсов проводился с помощью корреляционной модели, то в этом случае мы учли бы то, при каких условиях и расходовании ресурсов была получена соответствующая урожайность.

Анализ показывает, что при факторных значениях $x_1$, $x_2$ и среднем уровне хозяйствования первое хозяйство должно было получить столько зерна, сколько было получено фактически, второе — меньше фактического, третье — больше. В данном случае (с точки зрения эффективности использования ресурсов) лучше других работало второе хозяйство.

Таким образом, приведенный пример свидетельствует о том, что корреляционная модель является аппаратом объективной оценки эффективности использования ресурсов или формирования показателей. На основе корреляционной модели можно выявить устойчивые тенденции в экономике и те параметры (лучшие), при которых ресурсы используются наиболее эффективно.

Чтобы выявить закономерности и лучшие параметры в экономике, построим на основе корреляционной модели группировку по следующей методике:

1. Рассчитываем параметры корреляционной модели.

2. Если в корреляционной модели $t_{R,r,\eta,aj} >$ min, то производим сравнение расчетных и фактических значений и выделяем предприятия (опыты), для которых характерны следующие ситуации:

$$y_x > y_i; \quad y_x \approx y_i; \quad y_x < y_i.$$



По каждой из этих групп ситуаций рассчитываем среднее значение факторов ($x_1$ ... $x_n$), учтенных в корреляционной модели. При этом также можем рассчитать средние значения других факторов.

3. Сравнивая средние значения факторов указанных грех групп, выясняем то, как изменяются факторы в каждой из этих групп. При этом в лучшей группе имеются средние значения факторов, которые можем считать оптимальными и ориентирами для остальных групп.

В условиях нерыночной системы хозяйствования в качестве базы для формирования цен брались средние по совокупности издержки, т. е. издержки предприятий первой, второй, и третьей групп, хотя предприятия худшей по показателям труппы имели низкую окупаемость затрат, в том числе из-за низкого уровня хозяйствования и организации производства.

В рыночных условиях система хозяйствования не может ориентироваться на подобные предприятия, которые могут стать банкротами. Это означает, что в качестве издержек, на основе которых будут формироваться цены, принимаются издержки предприятий лучшей и средней по показателям групп.

В этой связи необходимо обосновывать показатели лучших и средних по эффективности использования ресурсов групп хозяйств, показатели которых будут являться ориентиром в развитии экономики, основой при формировании цен на продукцию. Решать эти задачи позволяют корреляционные модели. При этом наиболее приемлемой является двухэтапная схема корреляционного анализа.

## 13.4. Корреляционные модели при анализе региональной экономики

*Цель анализа* — выяснить устойчивые тенденции развития экономики большой группы предприятий, расположенных на значительной территории. Методика анализа включает следующие этапы:

1. Выделяется показатель, который может быть обобщающим с точки зрения эффективности использования ресурсов (например, прибыль и др.).

2. Определяются факторы, формирующие результативный показатель.

3. Выделяются территории со схожими природно-климатическими и экономическими условиями (в пределах региона).

4. Строится корреляционную модель формирования результативного показателя по предприятиям выделенных территорий (округов).

5. На основе сравнения расчетных и фактических значений результативного показателя в каждом округе выделяют 3 группы хозяйств
(с лучшими, средними и худшими условиями хозяйствования) или 2 группы (если выделяют группы хозяйств только с лучшими и худшими условиями).

По информации каждой из групп (территорий каждого из округов) строят корреляционную модель формирования результативного показателя. При этом учитывается требование, что число хозяйств (или опытов) должно быть не меньше 20 или больше 2,5$k$, где $k$ — число факторов (включая результативный).

Сравнивая коэффициенты регрессии при одноименных факторах и выясняя различия в окупаемости ресурсов, делаем предположение о том, где лучше реализовать ограниченные ресурсы с тем, чтобы общий эффект был больше.

Данная методика использовалась для анализа окупаемости ресурсов сельскохозяйственных организаций Могилевской области.

В области было выделено 2 округа: Северо-Восточный и Восточный (Хотимский, Костюковичский, Климовичский районы, частично Кричевский). Были рассчитаны корреляционные модели формирования стоимости товарной продукции (ТП) в разрезе округов (таблица 13.2).

Данные свидетельствуют о том, что предприятия округов существенно отличаются окупаемостью практически всех (за исключением энергетических мощностей) ресурсов.

В таблице 13.2 приведены коэффициенты регрессии при факторах по предприятиям обоих округов. Абсолютные значения коэффициентов регрессии и знаки при них свидетельствуют о значении отдельных факторов. Так, увеличение численности среднегодовых работников в хозяйствах Северо-Восточного округа не приводит к положительному эффекту, в то время как в Восточном округе с ростом численности работников стоимость товарной продукции возрастает.



Таблица 13.2 — Тенденции развития и параметры окупаемости ресурсов сельскохозяйственных организаций Могилевской области

| Уровень использования ресурсного потенциала | | Стоимость ТП (тыс. у. е.) на единицу ресурсного потенциала | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Среднегодовые работники, чел. | Основные производственные фонды, тыс. у. е. | Производственные затраты, без амортизации, тыс. ед. | Энергетические мощности, л. с. | Покупные комбикорма, тыс. у. е. | Покупной скот, тыс. у. е. | Сотни баллогектаров, баллы/га |
| Северо-восточный округ | Средний (для всех хозяйств) | -0,709 | 0,143 | 0,602 | 0,028 | 1,070 | -0,02 | 0,380 |
| | Выше среднего | -1,662 | 0,142 | 0,694 | 0,038 | 0,702 | 0,286 | 0,834 |
| | Ниже среднего | 0,521 | 0,147 | 0,336 | 0,027 | 1,755 | -0,195 | 0,333 |
| Восточный округ | Средний (для всех хозяйств) | 0,582 | 0,060 | 0,101 | 0,019 | 2,064 | 1,280 | 0,762 |
| | Выше среднего | 0,232 | 0,070 | 0,370 | 0,014 | 2,301 | 1,460 | 0,704 |
| | Ниже среднего | 1,027 | 0,053 | 0,077 | 0,047 | 1,094 | 0,764 | 0,715 |

Отсюда можно сделать вывод, что в отличие от большинства хозяйств Северо-Восточного округа во всех хозяйствах Восточного округа наметился дефицит трудовых ресурсов.

Поскольку в рамках каждого из округов имеются сельскохозяйственные организации с различным уровнем использования ресурсов, то были выделены две группы таких хозяйств (с лучшим и худшим уровнями использования ресурсов). В разрезе этих групп были рассчитаны параметры той же корреляционной модели и получены коэффициенты регрессии, которые объясняют эффективность ресурсов в разрезе выделенных групп и округов. В результате этого было выяснено то, что средняя эффективность отдельных факторов по округам существенно отличается (если рассматривать ее в разрезе хозяйств с эффективностью использования ресурсов выше и ниже среднего уровня). Так, в хозяйствах Северо-восточного округа с эффективностью производства ниже среднего уровня имеет место дефицит трудовых ресурсов и, следовательно, увеличение численности работающих в этих хозяйствах предполагает увеличение стоимости товарной продукции. Значительно отличаются от средних по округу коэффициенты регрессии и при других факторах.

Таким образом, анализируя данные таблицы 13.2, можно отметить следующее: чем выше значение коэффициента регрессии, тем больше наблюдается недостаток ресурса. Следовательно, необходимо направлять ресурсы именно в те хозяйства, где этих ресурсов не хватает. Например, покупку комбикормов целесообразнее всего осуществлять в лучших хозяйствах Восточного округа (а = 2,301) и худших хозяйствах Северо-Восточного округа (а = 1,755).

### 13.5. Корреляционные модели при планировании показателей

При обосновании показателей на перспективу важнейшее значение имеет устойчивость параметров модели. Чем в большей мере коэффициенты $t_{R,r,\eta}$, $t_{aj}$, $F_1$ превышают их минимальные величины, тем устойчивее модель и тем на больший срок можно планировать значения показателей.

При этом следует отметить, что корреляционные модели реальны при значениях факторов в пределах от минимальных до максимальных величин:

$$x_j^{min} \le x_j \le x_j^{max}.$$

В том случае, если значения каких-либо из факторов существенно выходят за эти пределы, корреляционная модель теряет устойчивость и эту модель следует пересчитать при новых значениях изменившихся факторов.

В настоящее время такими резко меняющимися факторами являются стоимостные параметры (стоимость основных производственных фондов, материально-денежные затраты). Отсюда следует,



что корреляционная модель формирования стоимостных показателей отличается низкой устойчивостью. При планировании показателей необходимо учитывать его период: краткосрочный — 1 год, среднесрочный — 1…3 года, долгосрочный — 5…10 лет (прогноз 10 и более лет).

Следует также учитывать то, значения каких показателей мы обосновываем — абсолютных или относительных.

*При краткосрочном планировании* планируемый показатель тесно коррелирует с фактическим его значением и, следовательно, значения показателей на начало планового периода можно брать в качестве факторных.

*При среднесрочном планировании* связь планируемого показателя с его фактическим значением ослабевает, однако еще остается существенной.

*При долгосрочном планировании* планируемые показатели слабо коррелируют с фактическими значениями. Связь может иметь место (с точки зрения современной экономики) только между натуральными показателями.

*При планировании абсолютных показателей* следует учитывать то обстоятельство, что влияющие на них факторы отличаются односторонней направленностью действий, т. е. влияют только на понижение или на повышение этих показателей.

*При планировании относительных показателей* следует учитывать то, что отдельные факторы могут влиять одновременно и на повышение, и на понижение результативного показателя. При этом преобладающая тенденция может быть как положительной (плюсовой), так и отрицательной (минусовой).

Пример. Взаимосвязь себестоимости и урожайности. Рост урожайности сельскохозяйственной культуры предполагает уменьшение затрат на производство 1 ц продукции и, следовательно, снижение ее себестоимости. С другой стороны, рост урожайности сельскохозяйственной культуры связан с увеличением издержек, приходящихся на 1 га, что предполагает рост ее себестоимости. В зависимости от того, какое направление преобладает (увеличение затрат или прирост урожайности) в корреляционной модели себестоимости мы имеем соответствующий знак при факторе урожайности (±).

Знак при факторе в корреляционной модели является результатом сравнения двух противоположных тенденций. Поэтому в одноименных моделях при одном и том же факторе в одном случае имеется знак «+», в другом — «-».

При планировании показателей важно, во-первых, выделить ведущий показатель (или генеральный ориентир); во-вторых, выявить и выразить количественно взаимосвязь между ведущим и другими показателями.

В качестве ведущего выбирается показатель достаточно полно характеризующий эффективность отрасли в целом.

В условиях нестабильности цен и издержек в качестве генерального показателя в сельском хозяйстве лучше всего принять урожайность зерновых культур. Величина урожайности зерновых в значительной мере отражает общее состояние растениеводства, что в свою очередь предопределяет количественные и качественные характеристики животноводства.

Взаимосвязи факторов имеют место в реальной экономике. Эти взаимосвязи надо учесть и количественно определить. При этом необходимо, чтобы выходная информация одних корреляционных моделей служила бы входной для других, т. е. в перечне информации, используемой для построения оптимизационной модели, не было бы ни одного показателя, который не был бы связан с другими.

Урожайность зерновых может определяться несколькими корреляционными моделями. Рассмотрим возможные при этом ситуации.

1. Урожайность зерновых в хозяйстве изменяется стабильно, влияние природных факторов ослаблено.

В этом случае для планирования урожайности можно использовать трендовую корреляционную модель вида $y_x = a_0 + a_1x$, где $x$ — номер года.

Устойчивость этой модели возрастает, если вместо $a_0$ используем $y_0$ , который означает среднюю за последние 2…3 года фактическую урожайность зерновых,

$$y_x = y_0 + a_1x.$$



2. Урожайность зерновых колеблется, однако по многолетним данным наблюдений установлено, что она тесно связана с факторами урожайности (плодородие почв, внесение удобрений), природными условиями (осадки и т. п.) и другими (технологии и т. д.).

В этом случае урожайность зерновых обосновывают с помощью многофакторной корреляционной модели вида

$$y_x = a_0 + \sum_{i \in J_0} a_i x_{ij} .$$

Среди факторов этой модели можно выделить следующие группы:

$i$ = 1…7 — факторы, характеризующие свойства почвы (pH — реакция почвенного раствора, H — гидролитическая кислотность, $S$ — сумма поглощенных оснований, $P_20_5$, $K_20$ и т. д.);

$i$ = 8…12 — параметры агротехники (внесение минеральных и органических удобрений и т. д.);

$i$ = 13…18— свойства самого растения, выражаемые через сорта растений;

$i$ = 19…25— коэффициенты взаимосвязи температуры ($t°$) и атмосферных осадков (обычно выражаются через гидротермический коэффициент (ГТК)). Однако расчеты свидетельствуют о том, что используемая ныне формула ГТК не точна. Ее следует совершенствовать, учитывая то, что декады вегетационного периода, которые отличаются низкой температурой и большим количествам осадков, оказывают негативное влияние на развитие растений. При расчете ГТК для этих декад можно использовать поправочный коэффициент. Следует также иметь в виду, что ГТК необходимо считать по каждой культуре.

3. Многофакторная модель требует использования прогноза показателей на планируемый год, что предполагает наличие ошибок и снижает эффективность прогнозных расчетов в целом.

В этой связи при планировании урожайности зерновых рекомендуется использовать автокорреляционную трендовую модель, которая является функцией от фактического значения урожайности и времени, $y_x = f(y_0, t)$. Данная модель учитывает то, что при увеличении $y_0$ возможности приращения урожайности уменьшаются.

Параметры этой модели могут быть рассчитаны на основе поэтапного моделирования.

На первом этапе рассчитывают корреляционную модель вида

$$y_x = a_0 + a_1 t .$$

На следующем этапе — параметры $a_2$, $a_3$: $y_x = y_0 + a_1 t^{a_2 + a_3 t}$, учитывая то, что $a_0$ и $a_1$ известны, а значение $a_0$ заменяется на $y_0$.

Урожайность зерновых отдельных видов может быть рассчитана на основе соотношения средней урожайности зерновых и отдельных видов сельскохозяйственных культур этой группы.

Коэффициенты соотношения урожайности можно рассчитывать в среднем по совокупности хозяйств или (что более правильно) по группе хозяйств с лучшим использованием ресурсов (где $y_i > y_x$).

Урожайность других сельскохозяйственных культур может быть обоснована исходя из производственных и технологических взаимосвязей, имеющихся в растениеводстве.

Суть взаимосвязей заключается в том, что в условиях ротации сельскохозяйственных культур (севооборота) на площади, занятой ранее зерновыми, возделываются и другие культуры. Следовательно, плодородие почвы в равной степени влияет как на зерновые, так и на другие культуры. При этом присутствует также технологическая взаимосвязь в производстве различных видов продукции. Эта взаимосвязь выражается в том, что уровень технологии при возделывании прочих культур, как правило, повышается до уровня развития технологий возделывания ведущей культуры (зерновых). Отсюда следует, что урожайность других культур может быть определена на основе нелинейных моделей в зависимости от урожайности зерновых, т. е.

$$y_j^{\,x} = a_j^{\,0} x^{a_j} ,$$

где $x$ — перспективная урожайность зерновых, ц с 1 га; $a_j^0$, $a_j$ — коэффициенты регрессии по культуре $j$.

При этом следует обеспечить взаимосвязь урожайности сельскохозяйственных культур и продуктивности животных, так как именно в цепочке показателей «урожайность — продуктивность» чаще всего и наблюдается нарушение взаимосвязи.

Корреляционную модель формирования продуктивности животных (для исключения диспропорций в показателях) можно



обосновать в зависимости от фактической продуктивности, времени и приращения урожайности зерновых ($y_x = f(y_0, t, \Delta u)$). При этом приращение урожайности зерновых ($\Delta u$) считается величиной, выражающей темпы развития кормовой базы. Данные по урожайности культур и продуктивности животных используют для построения корреляционной модели по определению затрат труда. Обычно факторами модели являются следующие:

$x_1$ — урожайность сельскохозяйственных культур или продуктивность животных;

$x_2$ — фактические затраты на начало планового периода;

$x_3$ — номер года, для которого производится расчет.

Данные урожайности, продуктивности и затрат труда используются для построения модели формирования себестоимости продукции. Ее факторы таковы:

$x_1$ — урожайность или продуктивность животных;

$x_2$ — затраты труда на получение 1 ц продукции;

$x_3$ — фактические значения себестоимости 1 ц продукции на начало планируемого периода;

$x_4$ — номер года.

Данные по урожайности, продуктивности и затратам труда могут послужить основой для определения фондооснащенности. Факторами в данной модели будут следующие:

$x_1$ — урожайность, продуктивность;

$x_2$ — затраты труда;

$x_3$ — фактическая фондооснащенность на начало планового периода;

$x_4$ — номер года.

Модель фондооснащенности может быть упрощена исходя из того, что стоимость фондов в расчете на единицу отрасли (га, гол.) может быть представлена в виде составляющих: постоянной части и переменной, которая непосредственно связана с урожайностью сельскохозяйственных культур или продуктивностью животных. Приведенные выше модели составляют систему, в которой выходная информация для одних моделей используется в качестве входной в других.

Для обоснования перспективных значений показателей могут быть использованы пространственно-временные корреляционные модели. Методика их построения заключается в следующем:

1. Закономерности использования ресурсов изучают за продолжительный период времени по результативному показателю (желательно по абсолютному показателю), отличающемуся стабильностью.

2. В рамках данного временного отрезка выделяют три или более периодов. Например: 1) 1999–2001 гг.; 2) 2002–2004 гг.; 3) 2005–2008 гг.; 4) 2009 г. и т. д.

По средним данным каждого периода рассчитывают параметры многофакторной корреляционной модели формирования единого результативного показателя:

период 1: $y_x = 312{,}0 + 0{,}49x_1 + 0{,}86x_2 + ... + 2{,}01x_5$,

период 2: $y_x = 150{,}0 + 0{,}22x_1 + 0{,}72x_2 + ... + 2{,}88x_5$,

период 3: $y_x = 76 + 0{,}18x_1 + 0{,}41x_2 + ... + 3{,}45x_5$,

где $x_1$ — стоимость основных производственных фондов, тыс. у. е.; $x_2$ — сумма производственных затрат, тыс. у. е.; $x_5$ — среднегодовая численность рабочих, чел.

3. Выясняют закономерности изменения параметров корреляционной модели. Эти закономерности применительно к $a_0$ и $a_j$, (коэффициентам регрессии) выражают через трендовые корреляционные модели и получают пространственно-временную корреляционную модель, которая учитывает основные тенденции или изменения окупаемости ресурсов во времени. Расчет производим следующим образом:

| ($y$) | $x$ |
|---|---|
| $a_0$ | $t$ – номер года |
| 312 | 1,5 |
| 150 | 4,5 |
| 76 | 7,5 |

В среднем: 1999 г. (первый год) — $t = 1$; 2000 г. (второй год) — $t = 2$; 2001 г. (третий год) — $t = 3$.

В среднем за 1999–2001 гг. $t = 1{,}5$ и т. д. Определяем параметры корреляционной модели: $y_{ao} = 315 – 22t$.

$a_1$ (ожидаемый) $= 0{,}500 – 0{,}049t$;



$a_2 = 0{,}93 – 0{,}06t$;

$a_5 = 2{,}00 + 0{,}23t$.

Приведенные математические выражения объединяют все три корреляционные модели и учитывают изменение окупаемости ресурсов во времени. При этом получают пространственно-временную корреляционную модель, которая имеет вид

$$y_x = (315 – 22t) + (0{,}5 – 0{,}049t)x_1 + (0{,}93 – 0{,}06t)x_2 + ... + (2{,}0 + 0{,}23t)\,x_5.$$

Параметры корреляционной модели свидетельствуют о том, что влияние неучтенных факторов с увеличением $t$ снижается. При этом эффективность первого и второго ресурсов по мере увеличения $t$ снижается, а эффективность пятого ресурса — возрастает.

Суть пространственно-временной модели заключается в том, что эффективность ресурсов изменяется во времени (следовательно, также и $R$).

Проблемы информационного обеспечения на основе корреляционных и других видов моделей существенно усложняются в условиях функционирования новых видов хозяйственных формирований и соблюдения ими коммерческой тайны, касающейся информации. Трудности с получением необходимых данных будут ориентировать эти организации на сбор информации в рамках одного или нескольких рядом расположенных хозяйств. В данной ситуации возрастает роль методики сбора информации по системе «хозяйства–лет» (или «объекта–лет»). Поскольку при подобном подходе информация берется за каждый год в отдельности, то требуется учитывать существенное влияние на результативные показатели субъективных факторов (особенно на показатели отраслей растениеводства). Чтобы ослабить это влияние, наряду с учетом материальных или главных факторов корреляционной модели, следует ввести дополнительные факторы, описывающие принадлежность информации к тому или иному году. Например, по восьми участкам хозяйством за три года собрана информация о плодородии пашни и внесении удобрений. В этом случае корреляционная модель формирования урожайности будет иметь факторы: $x_1$, $x_2$ — соответственно балл 1 га пашни и внесение удобрений,

$x_3$, $x_4$, $x_5$ — принадлежность соответствующей информации соответственно к первому, второму и третьему годам. В результате расчетов будут получены коэффициенты регрессии для материальных факторов и количественная оценка влияния на результативный показатель природно-экономических условий в отдельные годы.



## Литература

1. Замков, О.О. Математические методы в экономике: учебник / О.О. Замков. — М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2001. — 368 с.

2. Кузнецов, В.П. Экономико-математические методы и модели / В.П. Кузнецов. — Мн.: МИУ, 2002. — 132 с.

3. Леньков, И.И. Экономико-математическое моделирование систем и процессов в сельском хозяйстве: учебное пособие / И.И. Леньков. — Мн.: Дизайн ПРО, 1997. — 303 с.

4. Нозайтис, В.С. Экономико-математическое моделирование производственных систем: учебное пособие / В.С. Нозайтис. — М.: Высшая школа, 1991. — 192 с.

5. Орехов, Н.А. Математические методы и модели в экономике: учебное пособие / Н. А. Орехов. — М.: ЮНИТИ, 2004. — 304 с.

6. Фомин, Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебное пособие / Г.П. Фомин. — М.: Финансы и статистика, 2001. — 544 с.

7. Холод, Н.И. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / Н.И. Холод. — Мн.: БГЭУ, 1999. — 405 с.

8. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций: учебное пособие / А.С. Шапкин. — М.: Дашков и К, 2003. — 400 с.

9. Шикин, Е.В. Математические методы и модели в управлении: учебное пособие / Е.В. Шикин. — М.: МГУ, 2002. — 440 с.

10. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие / Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 2002. — 392 с.

Учебное издание

**Леньков** Иосиф Иосифович

# ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ АПК

*Пособие*

Ответственный за выпуск *И.И. Леньков*
Редактор, корректор *Н.Н. Акимов*
Верстка *Т.И. Снитко*

Подписано в печать 29.12.2009 г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,76. Уч.-изд. л. 8,66. Тираж 500 экз. Заказ 1183.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
ЛИ № 02330/0131734 от 10.02.2006.
ЛП № 02330/0131656 от 02.02.2006.
Пр. Независимости, 99, к. 2, 220023, г. Минск.