

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра сопротивления материалов
и деталей машин

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Минск
БГАТУ
2009

УДК 539.3/.6(07)
ББК 30.121я7
М 55

Рекомендовано научно-методическим советом факультета «Технический сервис в АПК» БГАТУ

Протокол № 3 от 19 марта 2009 г.

Составители:

канд. техн. наук, доц. *О.И. Мисуно* (разделы 1 – 4, 6, 7),
канд. техн. наук, доц. *Д.Н. Колоско* (разделы 1, 5),
ст. преподаватель *С.А. Легенький* (разделы 6, 7)

Рецензенты: д-р техн. наук, проф., зав. каф. теоретической
механики и ТММ БГАТУ *А.Н. Орда*;
канд. техн. наук, доц., зав. каф. деталей машин и ПТУ БГТУ
С.Е. Бельский

Механика материалов в примерах и задачах: учебно-
М 55 методическое пособие / сост. О.И. Мисуно, Д.Н. Колоско,
С.А. Легенький. – Минск : БГАТУ, 2009. – 72 с.

ISBN 978-985-519-162-0.

Учебно-методическое пособие содержит задания и образцы их выполнения по дисциплине «Механика материалов» для самостоятельной работы и контроля учебной деятельности студентов очной и заочной форм обучения агроинженерных специальностей.

УДК 539.3/.6(07)
ББК 30.121я7

ISBN 978-985-519-162-0

© БГАТУ, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций (сооружений и машин).

Инженеру любой специальности часто приходится производить расчеты на прочность, жесткость и устойчивость. Неправильный расчет самой незначительной, на первый взгляд, детали может повлечь за собой очень тяжелые последствия – привести к разрушению конструкции в целом. При проведении подобных расчетов на прочность необходимо стремиться к сочетанию надежности работы конструкции с ее экономичностью, добиваться наибольшей прочности при наименьшем расходе материала. Необходимо повышать эффективность проектных решений, применять новые прогрессивные конструкционные материалы.

Механика материалов – одна из сложных дисциплин, изучаемых в высших технических учебных заведениях; занятия по этому курсу должны обязательно сопровождаться составлением конспекта и решением задач. Если при решении задач возникают затруднения, следует воспользоваться имеющимися в задачниках указаниями и решениями, но совершенно необходимо научиться самостоятельно решать задачи и делать выводы формул. При этом необходимо обращать особое внимание на физическую сущность явления и на те допущения и ограничения, которые делаются в процессе выводов. Д. И. Менделеев в предисловии к первому изданию «Основ химии» писал: «Знание выводов без сведений о способах их достижения может легко привести к заблуждению не только в философской, но и практической стороне наук, потому что тогда неизбежно необходимо придавать абсолютное значение тому, что нередко относительно и временно». Поэтому необходимо полностью понимать чертежи и схемы, которыми сопровождаются выводы формул. Выдающийся русский ученый, отец русской авиации Н. Е. Жуковский писал: «Раз усвоенные геометрические образы, рисующие картину рассматриваемого явления, надолго западают в голову и живут в воображении изучающего».

После изучения каждой темы надо обязательно ответить на вопросы для самопроверки; это способствует лучшему усвоению пройденного материала.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Студент обязан взять из таблицы, прилагаемой к условию задачи, данные в соответствии со своим личным номером (шифром) и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например:

шифр – 0 1 2 3 4 5 6;

буквы – а б в г д е.

В том случае, когда личный номер состоит из семи цифр, первая цифра шифра не учитывается.

Из каждого вертикального столбца любой таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы. Например, вертикальные столбцы таблицы 1.1 обозначены буквами *e*, *z* и *d*. В этом случае при указанном выше личном номере (шифре) 0 1 2 3 4 5 6 студент должен взять из столбцов: *e* – строку номер 6 (схема на рисунке 1.2 – VI, высота полосы $h = 180$ мм, швеллер № 18а), из столбца *z* – строку номер 4 (ширина полосы $b = 24$ мм) и из столбца *d* – строку номер 5 (равнобекий уголок 140×90×8).

Задачи, выполненные с нарушением этих указаний, не засчитываются.

2. Не следует приступать к решению задач, не изучив соответствующего раздела курса. Если основные положения теории усвоены слабо и студент обратил мало внимания на подробно разобранные в курсе примеры, то при решении задач возникнут большие затруднения.

3. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие с числовыми данными, составить расчетную схему и указать на ней в числах все величины, необходимые для расчета.

4. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными (без сокращения слов) объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны в числах. Надо избегать многословных пояснений и пересказа учебника. При пользовании формулами или данными, отсутствующими в пособии, необходимо кратко и точно указывать их источник (автор, название, издание, страницу, номер формулы).

5. Необходимо указывать единицы всех величин и подчеркивать окончательные результаты.

6. Не следует вычислять большое число значащих цифр, вычисления должны соответствовать необходимой точности.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Теоретические вопросы, изучение которых необходимо для успешного решения задач

Литература: [1, С. 166–197], [2, С. 121–132], [3, задачи 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.8, 5.9, 5.10, 5.15, 5.16, 5.21].

Статические моменты сечений, их изменение при параллельном переносе осей. Центр тяжести сечения. Осевой, центробежный, полярный моменты инерции сечения, их свойства, изменение при параллельном переносе и при повороте осей. Главные центральные оси инерции и главные моменты инерции. Определение моментов инерции сечений простой формы (прямоугольник, круг, кольцо). Моменты инерции сечений стандартных прокатных профилей. Свойства симметричных сечений. Определение главных центральных осей инерции и главных моментов инерции сложного сечения. Радиусы инерции.

Задача 1

Для заданного поперечного сечения бруса, состоящего из полосу (сечение прямоугольник: h – больший размер, b – меньший размер), стандартных прокатных профилей швеллера и неравнополочного уголка (рисунок 1.1) провести главные центральные оси инерции и определить величину главных центральных моментов инерции. Данные принять из таблицы 1.1.

Методические указания для решения задачи 1

1. Вычертить в масштабе 1 : 1 или 1 : 2 заданное поперечное сечение бруса.

2. Разбить заданное сложное сечение на простейшие элементы (швеллер, неравнополочный уголок, полоса) и присвоить им порядковые номера (1, 2, 3 и т.д.).

3. Последовательно для каждого элемента:

– вычертить его отдельно в заданном положении и указать все размеры;

– провести центральные оси инерции параллельно основным контурам, обозначить их z_{ci}, y_{ci} , где i – порядковый номер элемента

в этом и других обозначениях;

– провести главные центральные оси инерции, обозначить их (v_i, u_i);

– установить геометрические характеристики: положение центра тяжести, площадь сечения A_i , осевые J_{z_i}, J_{y_i} и центробежный $J_{z_i y_i}$ моменты инерции относительно собственных центральных осей инерции, главные центральные моменты инерции J_{v_i}, J_{u_i} .

4. На чертеже заданного поперечного сечения бруса:

– провести вспомогательные координатные оси z_o, y_o так, чтобы они были параллельны центральным осям как можно большего количества элементов и совпадали с основным контуром, при этом, желательно, чтобы заданное сечение оказалось в первом квадранте;

– провести центральные оси инерции z_{ci}, y_{ci} каждого элемента;

– определить координаты центров тяжести элементов, показать их на чертеже как расстояния z_i, y_i между центральными осями инерции z_{ci}, y_{ci} и вспомогательными координатными осями z_o, y_o .

5. Относительно вспомогательных осей определить координаты центра тяжести заданного сечения z_c, y_c , показать их на чертеже и провести через центр тяжести центральные оси инерции z_c, y_c параллельно осям z_o, y_o .

6. Определить и показать на чертеже расстояния между центральными осями каждого элемента и центральными осями заданного сечения (z_{ci} и z_c, y_{ci} и y_c), обозначив их, соответственно, a_i и b_i .

7. Для заданного сечения определить осевые J_{z_c}, J_{y_c} и центробежный $J_{z_c y_c}$ моменты инерции относительно центральных осей инерции.

8. Определить положение главных центральных осей инерции заданного сечения, провести и обозначить их на чертеже буквами v и u (v – ось, относительно которой момент инерции принимает максимальное значение, u – ось, относительно которой момент инерции принимает минимальное значение), указать угол $\alpha_{\text{главн}}$.

9. Вычислить величины главных центральных моментов инерции заданного сечения J_v, J_u .

10. Проверить правильность вычисления по свойству инвариантности суммы осевых моментов инерции при повороте осей, а также по условию равенства нулю центробежного момента инерции заданного сечения относительно главных центральных осей J_{vu} .

Таблица 1.1 – Исходные данные к задаче 1

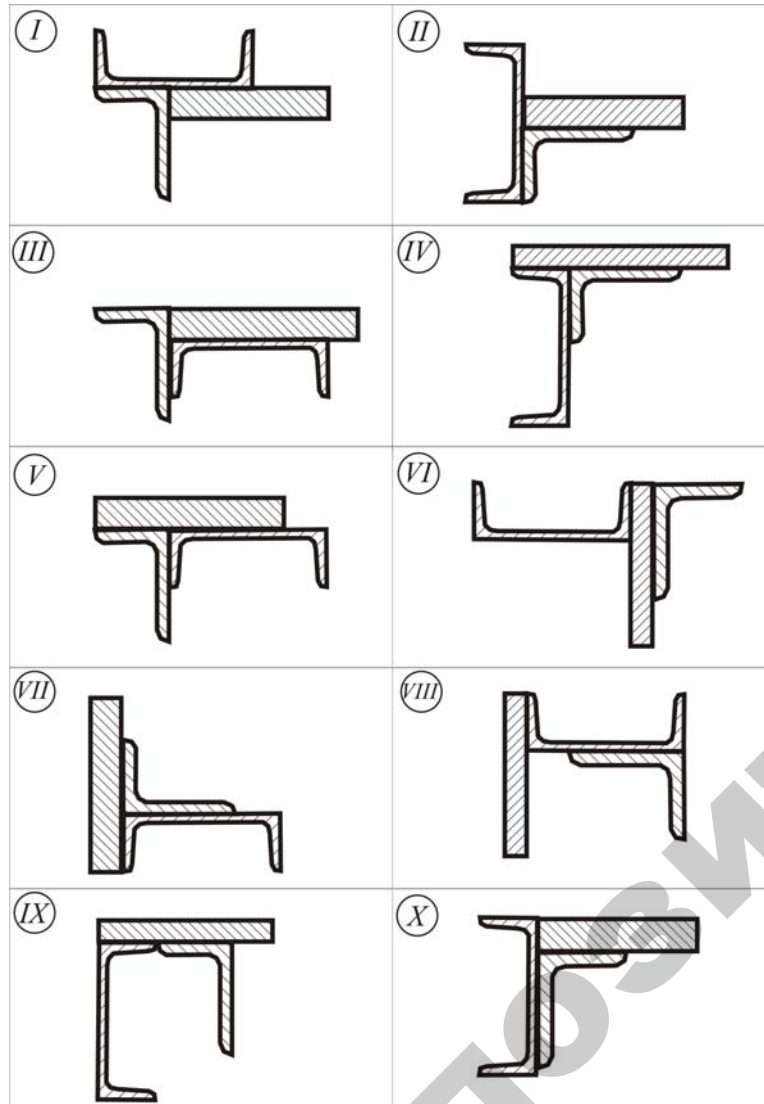


Рисунок 1.1 – Схема поперечного сечения бруса

№ строки	Схема по рисунку 1.2	Элементы заданного сечения			
		Полоса		Швеллер ГОСТ 8240-72	Неравнополочный уголок ГОСТ 8510-86
		h , мм	b , мм		
1	<i>I</i>	155	38	14	140×90×10
2	<i>II</i>	160	28	14a	110×70×8
3	<i>III</i>	165	34	16	125×80×7
4	<i>IV</i>	170	24	16a	125×80×12
5	<i>V</i>	175	36	18	140×90×8
6	<i>VI</i>	180	26	18a	80×50×6
7	<i>VII</i>	185	32	20	90×56×8
8	<i>VIII</i>	190	20	20a	100×63×7
9	<i>IX</i>	195	26	22	100×63×10
0	<i>X</i>	200	30	22a	125×80×10
	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>e</i>	<i>д</i>

Пример решения задачи 1

Схема для примера выбрана произвольно, числовые данные взяты для шифра с последними цифрами 8, 2, 4: $z \quad d \quad e$
8 2 4.

Из столбца, в котором последняя строка обозначена буквой z , следует брать данные по восьмой строке; буквой d – по второй строке; буквой e – по четвертой. Данные будут следующими: $h = 170$ мм; $b = 20$ мм; швеллер № 16a, неравнополочный уголок 110×70×8.

Решение.

1. Вычерчиваем заданное поперечное сечение в выбранном масштабе (рисунок 1.2).

2. Разбиваем сложное сечение на простейшие фигуры и присваиваем им порядковые номера: полоса – 1, швеллер – 2, неравнополочный уголок – 3.

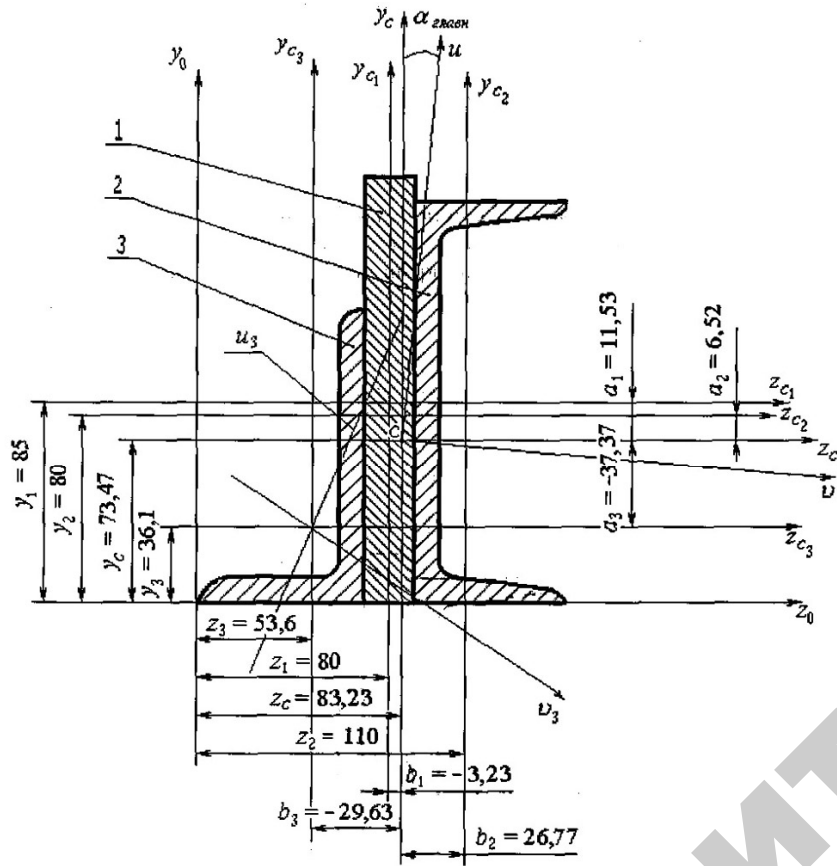
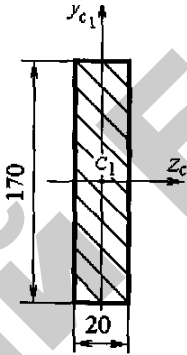


Рисунок 1.2 – Заданное поперечное сечение бруса



1. Полоса 20×170

$$A_1 = b \cdot h = 20 \cdot 170 = 3400 \text{ мм}^2;$$

$$J_{z_1} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 170^3}{12} = 8188333 \text{ мм}^4 = 81,88 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$J_{y_1} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{170 \cdot 20^3}{12} = 113333 \text{ мм}^4 = 1,133 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Рисунок 1.3 – Полоса

2. Швеллер № 16а

$$A_2 = 19,5 \text{ см}^2 = 1950 \text{ мм}^2;$$

$$J_{z_2} = 823 \text{ см}^4 = 82,3 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$J_{y_2} = 78,8 \text{ см}^4 = 7,88 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Для полосы и швеллера центральные оси совпадают с главными центральными в силу симметричности этих фигур, поэтому оставлено обозначение z_{c_1}, y_{c_1} и z_{c_2}, y_{c_2} . Центробежные моменты инерции таких фигур относительно главных центральных осей равны 0.

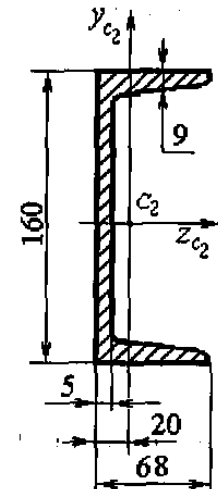


Рисунок 1.4 – Швеллер

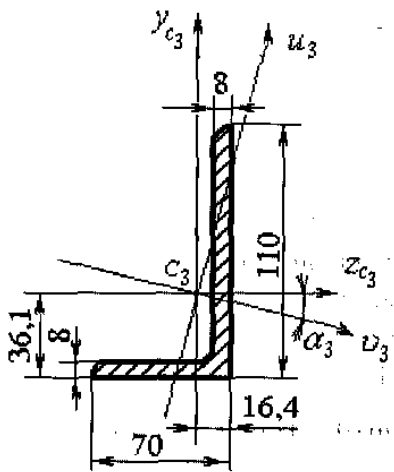


Рисунок 1.5 — Уголок неравнополочный

3. Уголок неравнополочный 110x70x8

$$\begin{aligned}
 A_3 &= 13,9 \text{ см}^2 = 1390 \text{ мм}^2; \\
 J_{z_3} &= 172 \text{ см}^4 = 17,2 \cdot 10^5 \text{ мм}^4; \\
 J_{y_3} &= 54,6 \text{ см}^4 = 5,46 \cdot 10^5 \text{ мм}^4; \\
 J_{u_3} &= 32,3 \text{ см}^4 = 3,23 \cdot 10^5 \text{ мм}^4; \\
 \operatorname{tg} \alpha &= 0,4 \Rightarrow \alpha = 21^\circ 48'; \\
 y_0 &= 36,1 \text{ мм}; z_0 = 16,4 \text{ мм}.
 \end{aligned}$$

Максимальный осевой момент инерции уголка J_{v_3} определяем из свойства инвариантности суммы осевых моментов инерции при повороте осей:

$$J_z + J_y = J_v + J_u.$$

Откуда

$$J_{v_3} = J_{z_3} + J_{y_3} - J_{u_3} = 172 + 54,6 - 32,3 = 194,3 \text{ см}^4 = 19,4 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Центробежный момент инерции определяем по формуле:

$$\begin{aligned}
 J_{z_3 y_3} &= \frac{J_{v_3} - J_{u_3}}{2} \sin 2\alpha_3 = \frac{194,3 - 32,3}{2} \cdot 0,689 = 55,809 \text{ см}^4 = \\
 &= 5,581 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^4.
 \end{aligned}$$

Угол α принимаем положительным, т.к. поворот осей v и u до совмещения с осями z_3 и y_3 производится против хода часовой стрелки.

4. Проводим вспомогательные координатные оси z_0 и y_0 таким образом, чтобы они совпадали с основным контуром, сечение располагалось в первом квадранте. Проводим центральные оси каждого элемента, обозначаем координаты центров тяжести элементов относительно этих вспомогательных осей:

$$z_1 = 70 + \frac{20}{2} = 80 \text{ мм}; \quad z_2 = 70 + 20 + 20 = 110 \text{ мм}; \quad z_3 = 53,6 \text{ мм};$$

$$y_1 = \frac{170}{2} = 85 \text{ мм}; \quad y_2 = \frac{160}{2} = 80 \text{ мм}; \quad y_3 = 36,1 \text{ мм}.$$

5. Определяем координаты центра тяжести всего сечения:

$$\begin{aligned}
 z_c &= \frac{\sum S_{y_i}}{\sum A} = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2 + z_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \\
 &= \frac{80 \cdot 3400 + 110 \cdot 1950 + 53,6 \cdot 1390}{3400 + 1950 + 1390} = 83,23 \text{ мм};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{\sum S_{z_i}}{\sum A} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \\
 &= \frac{85 \cdot 3400 + 80 \cdot 1950 + 36,1 \cdot 1390}{3400 + 1950 + 1390} = 73,47 \text{ мм}.
 \end{aligned}$$

Откладываем их на чертеже, обозначаем центр тяжести c и проводим через него центральные оси инерции z_c и y_c параллельно вспомогательным осям z_0 и y_0 .

6. Рассчитываем расстояния между центральными осями каждого элемента и центральными осями всего сечения:

$$a_1 = y_1 - y_c = 85 - 73,47 = 11,53 \text{ мм},$$

$$b_1 = z_1 - z_c = 80 - 83,23 = -3,23 \text{ мм},$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 80 - 73,47 = 6,52 \text{ мм},$$

$$b_2 = z_2 - z_c = 110 - 83,23 = 26,77 \text{ мм},$$

$$a_3 = y_3 - y_c = 36,1 - 73,47 = -37,37 \text{ мм},$$

$$b_3 = z_3 - z_c = 53,6 - 83,23 = -29,63 \text{ мм}.$$

Обозначаем их на чертеже.

7. Определяем осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей инерции, используя формулы изменения этих моментов при параллельном переносе осей:

$$J_{z_c} = J_{z_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{z_2} + a_2^2 \cdot A_2 + J_{z_3} + a_3^2 \cdot A_3 = 81,88 \cdot 10^5 + 11,53^2 \cdot 3\,400 + 82,3 \cdot 10^5 + 6,52^2 \cdot 1\,950 + 17,2 \cdot 10^5 + (-37,37)^2 \cdot 1\,390 = 206,143 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$J_{y_c} = J_{y_1} + b_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + b_2^2 \cdot A_2 + J_{y_3} + b_3^2 \cdot A_3 = 1,133 \cdot 10^5 + (-3,23)^2 \cdot 3\,400 + 7,88 \cdot 10^5 + 26,77^2 \cdot 1\,950 + 5,46 \cdot 10^5 + (-29,63)^2 \cdot 1\,390 = 41,005 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$J_{z_c y_c} = J_{z_1 y_1} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1 + J_{z_2 y_2} + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2 + J_{z_3 y_3} + a_3 \cdot b_3 \cdot A_3 = 0 + 11,53 \cdot (-3,23) \cdot 3\,400 + 0 + 6,52 \cdot 26,77 \cdot 1\,950 + 5,581 \cdot 10^5 + (-37,37) \cdot (-29,63) \cdot 1\,390 = 20,828 \text{ мм}^4.$$

8. Определяем положение главных центральных осей инерции заданного сечения по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{главн}} = -\frac{2 \cdot J_{z_c y_c}}{J_{z_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot 20,828 \cdot 10^5}{206,143 \cdot 10^5 - 41,005 \cdot 10^5} =$$

$$= -0,252 \Rightarrow 2\alpha_{\text{главн}} = \operatorname{arctg}(-0,252) = -14^\circ 9' \Rightarrow \alpha_{\text{главн}} = -7^\circ 4'.$$

Знак «-» означает, что центральные оси z_c и y_c нужно повернуть по часовой стрелке, чтобы они совпали с главными центральными осями v и u . Обозначаем угол $\alpha_{\text{главн}}$ и оси v и u на чертеже.

9. Рассчитываем величины главных центральных моментов инерции сечения, используя формулы изменения моментов инерции при повороте осей:

$$J_v = J_{z_c} \cdot \cos^2 \alpha + J_{y_c} \cdot \sin^2 \alpha - J_{z_c y_c} \cdot \sin 2\alpha,$$

$$\text{где } \alpha = \alpha_{\text{главн}} \Rightarrow \cos \alpha = 0,9923, \cos^2 \alpha = 0,9848, \cos 2\alpha = 0,9696,$$

$$\sin \alpha = -0,1232, \sin^2 \alpha = 0,0152, \sin 2\alpha = -0,2445;$$

$$J_v = 206,143 \cdot 10^5 \cdot 0,9848 + 41,005 \cdot 10^5 \cdot 0,0152 - 20,828 \cdot 10^5 \cdot (-0,2445) = 208,725 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$J_u = J_{z_c} \cdot \sin^2 \alpha + J_{y_c} \cdot \cos^2 \alpha + J_{z_c y_c} \cdot \sin 2\alpha = 206,143 \cdot 10^5 \cdot 0,0152 + 41,005 \cdot 10^5 \cdot 0,9848 + 20,828 \cdot 10^5 \cdot (-0,2445) = 38,423 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

10. Проверяем правильность вычисления главных моментов инерции сечения по свойству инвариантности суммы осевых моментов инерции при повороте осей:

$$J_{z_c} + J_{y_c} = J_v + J_u,$$

$$206,143 \cdot 10^5 + 41,005 \cdot 10^5 = 208,725 \cdot 10^5 + 38,423 \cdot 10^5,$$

$$247,148 \cdot 10^5 = 247,148 \cdot 10^5;$$

по условию равенства нулю центробежного момента инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$J_{vu} = \frac{J_{z_c} - J_{y_c}}{2} \sin 2\alpha + J_{z_c y_c} \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= \frac{206,143 \cdot 10^5 - 41,005 \cdot 10^5}{2} \cdot (-0,2445) +$$

$$+ 20,828 \cdot 10^5 \cdot 0,9696 = -20,188 \cdot 10^5 + 20,194 \cdot 10^5 = 0,006 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Определяем погрешность вычислений:

$$\frac{0,006 \cdot 10^5}{20,188 \cdot 10^5} \cdot 100 = 0,029 \% < 3 \%$$

Следовательно, задача решена верно.

2. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Теоретические вопросы, изучение которых необходимо для успешного решения задач

Литература: [1, С. 74–119], [2, С. 252–270, 275–284, 292–310], [3, 7 задачи 2.8, 2.11, 2.12, 2.18, 2.19, 2.28, 2.29, 2.30, 2.31].

Напряженное состояние в точке. Компоненты напряжения и их обозначения. Закон парности касательных напряжений. Нормальные и касательные напряжения на произвольной площадке, проходящей через данную точку. Главные площадки и главные напряжения. Экстремальные касательные напряжения. Чистый сдвиг. Главные напряжения при чистом сдвиге. Обзор различных видов напряженных состояний.

Деформированное состояние в точке. Основные понятия, компоненты деформированного состояния. Главные оси деформированного состояния и главные деформации. Объемная деформация.

Закон Гука при растяжении и сжатии. Модуль упругости (модуль Юнга), коэффициент Пуассона, их физический смысл. Закон Гука при сдвиге. Модуль сдвига. Связь между упругими постоянными для изотропного тела. Обобщенный закон Гука. Удельная потенциальная энергия деформации, ее составляющие в общем случае напряженного состояния.

Назначение и сущность теорий прочности. Эквивалентное напряженное состояние и эквивалентное напряжение. Классические теории прочности: теория наибольших нормальных напряжений, теория наибольших относительных удлинений, теория наибольших касательных напряжений, энергетическая теория прочности. Применение классических теорий прочности. Теория прочности Мора и ее практическое применение.

Задача 2

В окрестности опасной точки стальной конструкции выделен бесконечно малый элемент в виде прямоугольного параллелепипеда. На его гранях действуют нормальные ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) и касательные (τ_{xy}, τ_{yx}) напряжения (рисунок 2.1). Требуется: определить и показать главные площадки и главные напряжения; определить максимальные касательные напряжения; найти главные деформации и относительное изменение объема; определить удельную потенциальную энергию деформации; проверить прочность материала, используя третью и четвертую классические теории прочности, принимая $[\sigma] = 160$ МПа. Данные к задаче принять из таблицы 2.1.

Методические указания для решения задачи 2

1. Определить по формуле величину угла, на который следует повернуть грани исходного элемента до их совмещения с главными площадками.
2. Показать на схеме угол, найденный в п. 1, и главные площадки.

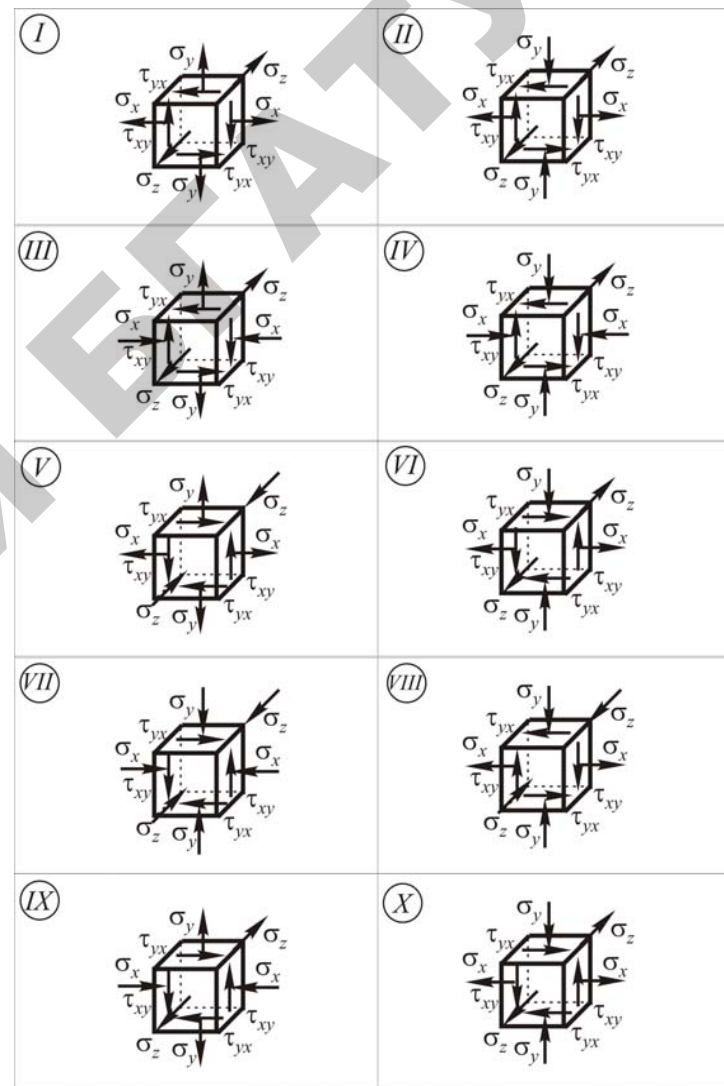


Рисунок 2.1 – Схемы нормальных и касательных напряжений, действующих по граням выделенного элемента

Таблица 2.1 – Исходные данные к задаче 2

№ строки	Схема по рисунку 2.1	Напряжения (приведены по модулю)			
		σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа	τ_{xy} , МПа
1	<i>I</i>	20	75	10	18
2	<i>II</i>	25	70	15	20
3	<i>III</i>	30	65	20	22
4	<i>IV</i>	35	60	25	24
5	<i>V</i>	40	55	30	26
6	<i>VI</i>	45	50	25	28
7	<i>VII</i>	50	45	20	25
8	<i>VIII</i>	55	40	15	23
9	<i>IX</i>	60	35	10	21
0	<i>X</i>	65	30	25	17
	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>e</i>

3. Найти на параллельных оси z площадках экстремальные нормальные напряжения и обозначить главные напряжения.

4. Показать на схеме главные напряжения.

5. Зная величины наибольшего и наименьшего из главных напряжений, определить максимальные касательные напряжения.

6. Используя обобщенный закон Гука, определить главные деформации и относительное изменение объема.

7. Используя главные напряжения, определить удельную потенциальную энергию деформации.

8. Записать условие прочности согласно третьей классической теории прочности (теории наибольших касательных напряжений) и, подставив наибольшее и наименьшее из главных напряжений, допускаемое напряжение, оценить прочность материала.

9. Записать условие прочности согласно четвертой классической теории прочности (энергетической теории) и, подставив главные напряжения, допускаемое напряжение, оценить прочность материала.

Пример решения задачи 2

В окрестности опасной точки стальной конструкции выделен бесконечно малый элемент в виде прямоугольного параллелепипеда. На его гранях действуют нормальные и касательные напряжения, равные $\sigma_x = 100$ МПа, $\sigma_y = -50$ МПа, $\sigma_z = 60$ МПа, $\tau_{yx} = 40$ МПа. Определить положение главных площадок, главные напряжения, максимальные касательные напряжения и показать их; найти главные деформации и относительное изменение объема; определить удельную потенциальную энергию деформации; проверить прочность материала, используя третью и четвертую классические теории прочности, принимая $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение. Для исследования напряженного состояния в опасной точке изобразим прямоугольный параллелепипед и действующие на его гранях напряжения (рисунок 2.2).

На площадке перпендикулярной к оси z нет касательных напряжений. Следовательно, эта площадка является главной, а σ_z – главным напряжением. Найдем положение двух других главных площадок, которые будут параллельны оси z :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{гл}} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot (-40)}{100 + 50} = 0,533;$$

$$\alpha_{\text{гл}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2\alpha_{\text{гл}} = 14,4^\circ.$$

Углы, определяющие положение нормалей к главным площадкам, равны

$$\alpha_{\text{гл}1} = \alpha_{\text{гл}} = 14,4^\circ; \quad \alpha_{\text{гл}2} = \alpha_{\text{гл}} + 90^\circ = 14,4^\circ + 90^\circ = 104,4^\circ.$$

Положение главных площадок, перпендикулярных к нормалям, показано на рисунке 2.3.

Главные напряжения, действующие на главных площадках, определяем по формуле:

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}^{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{100 - 50}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(100 + 50)^2 + 4 \cdot (-40)^2} = (25 \pm 85) \text{ МПа}; \\ \sigma_{\max} &= 110 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\min} = -60 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Учитывая значения σ_z , присваиваем σ_{\max} , σ_{\min} индексы главных напряжений:

$$\sigma_1 = 110 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 60 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -60 \text{ МПа}.$$

Заданное напряжение σ_y в алгебраическом смысле больше напряжения σ_x , поэтому площадка, на которой действует напряжение σ_1 , будет определяться углом $\alpha_{\text{гл}2} = 104,4^\circ$. Напряжение σ_1 проходит через две четверти, в которых сходятся стрелки касательных напряжений, что указывает на правильность определения направления главных напряжений σ_1 и σ_3 и положения главных площадок.

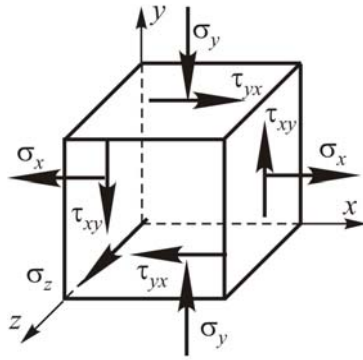


Рисунок 2.2 – Схема нормальных и касательных напряжений, действующих по граням элемента

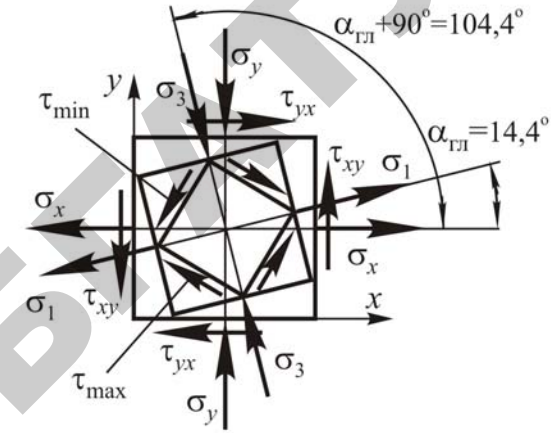


Рисунок 2.3 – Положение главных площадок и площадок сдвига

Максимальные касательные напряжения равны:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{110 - (-60)}{2} = 85 \text{ МПа}.$$

Площадки, на которых действуют τ_{\max} , располагаются под углом 45° к главным площадкам с напряжениями σ_1 и σ_3 (рисунок 2.3).

Для определения относительных линейных деформаций воспользуемся обобщенным законом Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [110 - 0,3(60 - 60)] = 55 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [60 - 0,3(110 - 60)] = 22,5 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-60 - 0,3(110 + 60)] = -55,5 \cdot 10^{-5}.$$

Находим относительное изменение объема:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 55 \cdot 10^{-5} + 22,5 \cdot 10^{-5} - 55,5 \cdot 10^{-5} = 22 \cdot 10^{-5}.$$

Находим удельную потенциальную энергию деформации по формуле:

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2)) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} [110^2 + 60^2 + (-60)^2 - 2 \cdot 0,3(110 \cdot 60 + 110(-60) + 60(-60))] = 4,285 \cdot 10^{-2} 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{М}^2} = 4,285 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}.$$

Проверим прочность конструкции по третьей теории прочности или по теории наибольших касательных напряжений.

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставим в это выражение главные напряжения

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 110 - (-60) = 170 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 180 \text{ МПа}.$$

Прочность конструкции по третьей теории прочности обеспечена.

Проверим прочность конструкции по четвертой теории прочности или по энергетической теории.

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} = [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{110^2 + 60^2 + (-60)^2 - 110 \cdot 60 - 60 \cdot (-60) - 110 \cdot (-60)} =$$

$$= 151,3 \text{ МПа}.$$

Прочность конструкции по четвертой теории прочности обеспечена.

3. ИЗГИБ

Теоретические вопросы, изучение которых необходимо для успешного решения задач

Литература: [1, С. 18–57, С. 286–332], [2, С. 9–32, С. 133–169], [3, 7, задачи 6.1, 6.5, 6.29, 6.30, 6.33, 6.35, 6.48, 7.5, 7.6].

Виды изгибов. Поперечная сила и изгибающий момент, их определение, правило знаков. Соотношения между внешними нагрузками, поперечной силой и изгибающим моментом. Выводы, вытекающие из соотношений между внешними нагрузками, Q и M , их использование при проверке эпюр Q и M . Напряжения в поперечных сечениях балки при чистом изгибе. Касательные напряжения при поперечном изгибе, формула Журавского, эпюра касательных напряжений по высоте прямоугольного поперечного сечения. Расчет балок на прочность при изгибе, условие прочности. Осевые мо-

менты сопротивления сечений простой формы (прямоугольник, круг, кольцо). Осевые моменты сопротивления сечений стандартных прокатных профилей. Рациональные формы поперечных сечений и материалы для балок. Перемещения при изгибе. Дифференциальное уравнение упругой линии балки и его интегрирование. Метод начальных параметров, универсальное уравнение упругой линии балки.

Задача 3

Для заданных двух схем балок (рисунок 3.1) требуется построить эпюры внутренних силовых факторов (Q и M) и подобрать для схемы: а) деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$; б) стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Данные принять из таблицы 3.1.

Методические указания для решения задачи 3

1. Вычертить в масштабе схему балки, оставляя под ней место для двух эпюр. Показать координатные оси, совместив ось x с осью балки.
2. Показать опорные реакции и обозначить их.
3. Установить количество расчетных участков. Расчетным участком называется часть длины балки, в пределах которой внутренний силовой фактор изменяется по одному и тому же закону. Тогда границами участков будут являться сечения балки, в которых изменяется характер действующей нагрузки.
4. Используя уравнения равновесия для балки как плоской системы, определить величину опорных реакций, а также выполнить проверку правильности их нахождения.
5. Последовательно, для каждого расчетного участка схемы:
 - провести перпендикулярно оси x секущую плоскость, разделяющую балку на две части. Расстояние до поперечного сечения, совпадающего с секущей плоскостью, отсчитывается от левого или правого конца балки и обозначается x_i (i – порядковый номер расчетного участка);
 - составить уравнение поперечной силы;

– произвести расчет поперечной силы.

6. Построить для балки эпюру поперечных сил Q .

7. Последовательно, для каждого расчетного участка схемы составить уравнение изгибающего момента и произвести его расчет.

8. Построить для балки эпюру изгибающих моментов M .

9. Проверить правильность построения эпюр Q и M , используя при этом следствия, вытекающие из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом.

10. Используя условие прочности при изгибе, подобрать размеры поперечного сечения балки.

Таблица 3.1 – Исходные данные к задаче 3

№ строки	Схема по рисунку 3.1	Расстояния		Соотношение расстояний			Нагрузки		
		$l_1, \text{ м}$	$l_2, \text{ м}$	$\frac{a_1}{a}$	$\frac{a_2}{a}$	$\frac{a_3}{a}$	$M, \text{ кН м}$	$F, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$
1	<i>I</i>	2,1	8	1	4	1	10	11	11
2	<i>II</i>	2,2	5	2	8	2	11	12	12
3	<i>III</i>	2,3	7	3	7	3	12	3	3
4	<i>IV</i>	2,4	6	4	6	4	4	4	4
5	<i>V</i>	2,5	4	5	5	5	5	5	5
6	<i>VI</i>	2,6	5	6	6	1	6	6	6
7	<i>VII</i>	2,7	4	7	7	2	7	7	7
8	<i>VIII</i>	2,8	6	8	8	3	8	8	8
9	<i>IX</i>	2,9	7	5	4	4	9	9	9
0	<i>X</i>	3,0	5	6	7	5	5	10	10
	<i>e</i>	<i>o</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>o</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>o</i>	<i>e</i>

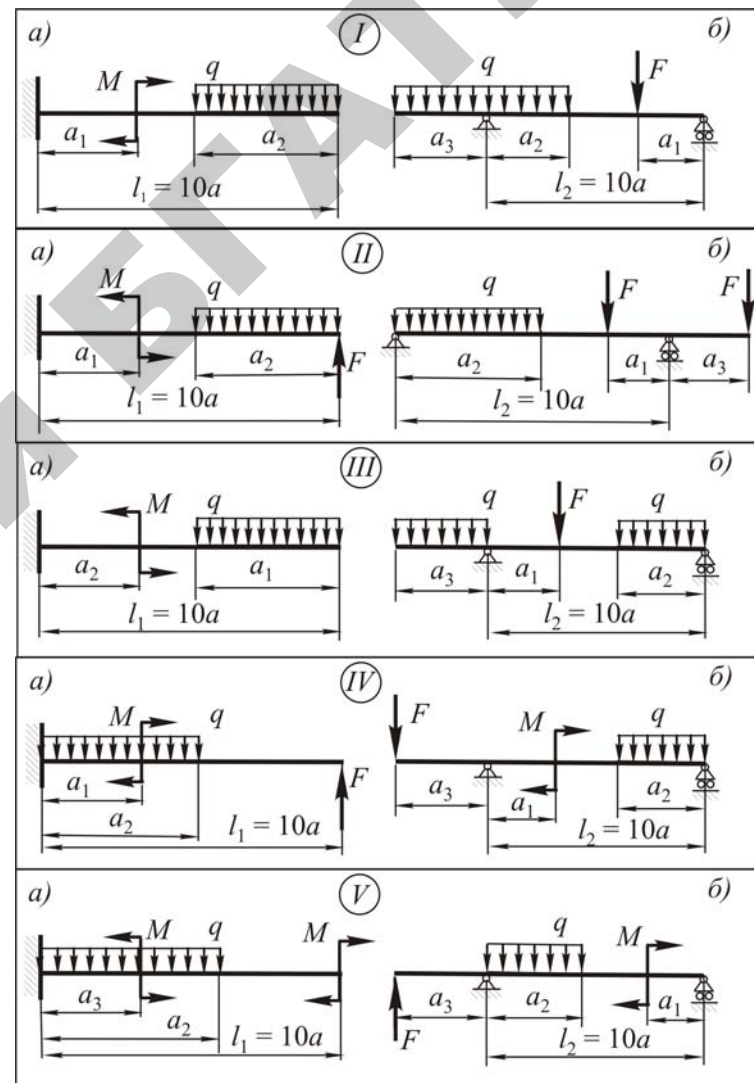
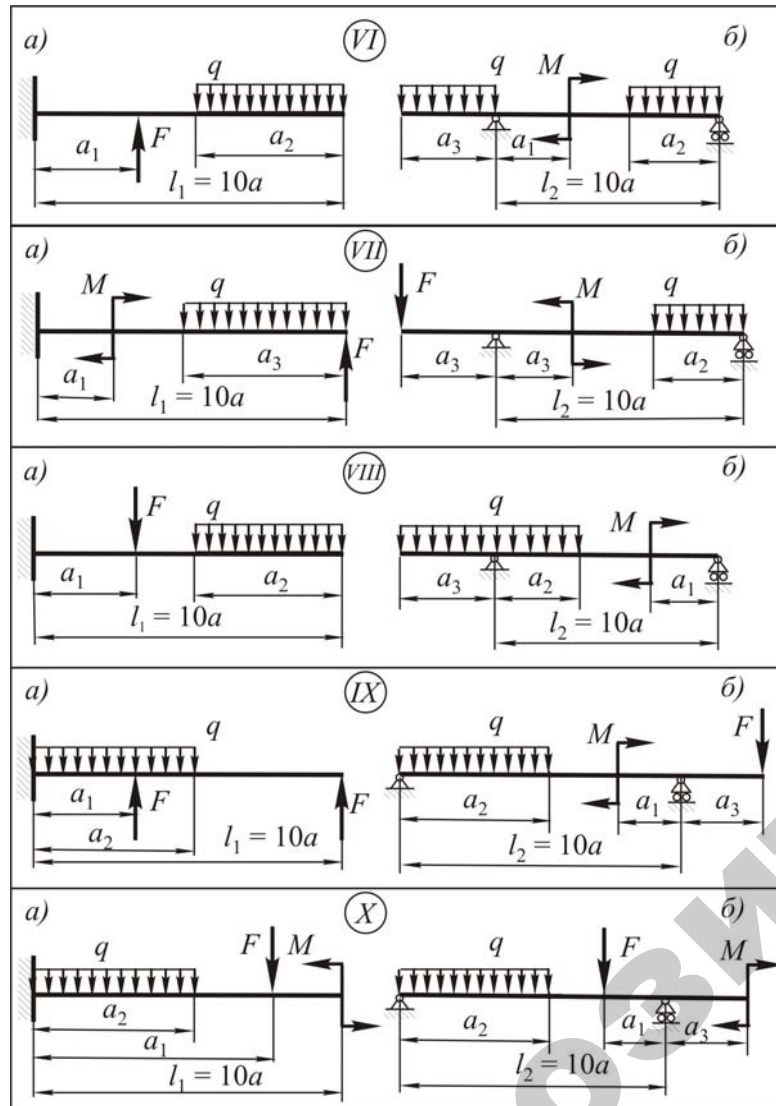


Рисунок 3.1 – Схемы балок

Пример решения задачи 3



Окончание рисунка 3.1

Для заданной балки (рисунок 3.2) требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать номер профиля двутавра, если $[\sigma] = 160$ МПа. Весом балки пренебречь.

Решение. Проведем координатные оси. При этом ось x совместим с осью балки, ось y проведем перпендикулярно оси x в точке B . Рассмотрим равновесие балки, для чего наложенные связи со стороны опор заменим реакциями. Опора B – шарнирно-неподвижная. Реакцию опоры представим составляющими B_y и B_x , проходящими через ось шарнира. Опора C – шарнирно-подвижная. Реакция такой опоры проходит через ось шарнира и направлена перпендикулярно оси балки.

Таким образом, на балку действует уравновешенная плоская система сил. Для нахождения неизвестных B_y , B_x и C_y , составим уравнения равновесия в виде:

$$\sum m_C(F_i) = -B_y \cdot 5 - F \cdot 1 - m + q \cdot 3 \cdot 3,5 + q \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum m_B(F_i) = -C_y \cdot 5 + m + q \cdot 1 \cdot 4,5 - F \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0;$$

$$\sum F_x = B_x = 0.$$

Последнее уравнение необходимо для определения составляющей B_x , которая в данной задаче равна нулю, так как силы, действующие на балку, перпендикулярны оси x .

Решая уравнения равновесия, находим опорные реакции:

$$B_y = \frac{-F \cdot 1 - m + q \cdot 3 \cdot 3,5 + q \cdot 0,5}{5} = \frac{-8 - 12 + 10 \cdot 3 \cdot 3,5 + 10 \cdot 0,5}{5} = 18 \text{ кН.}$$

$$C_y = \frac{m + q \cdot 1 \cdot 4,5 - F \cdot 4 + q \cdot 3 \cdot 1,5}{5} = \frac{12 + 10 \cdot 1 \cdot 4,5 - 8 \cdot 4 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5}{5} = 14 \text{ кН.}$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось y :

$$\sum F_y = B_y - q \cdot 3 + F + C_y - q \cdot 1 = 18 - 30 + 8 + 14 - 10 = 0.$$

Значит, опорные реакции определены верно.

Разбиваем балку на четыре расчетных участка, принимая за их границы сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы, момент, а также начало и конец распределенной нагрузки.

В пределах первого участка проводим произвольное поперечное

сечение на расстоянии x_1 от левой опоры (точки B). Мысленно отбрасываем правую часть балки и, учитывая правила знаков, составляем уравнения для Q_{x_1} и M_{x_1} на первом участке.

I участок: $0 \leq x_1 \leq 3$ м.

$$Q_{x_1} = B_y - q \cdot x_1;$$

$$M_{x_1} = B_y \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2}.$$

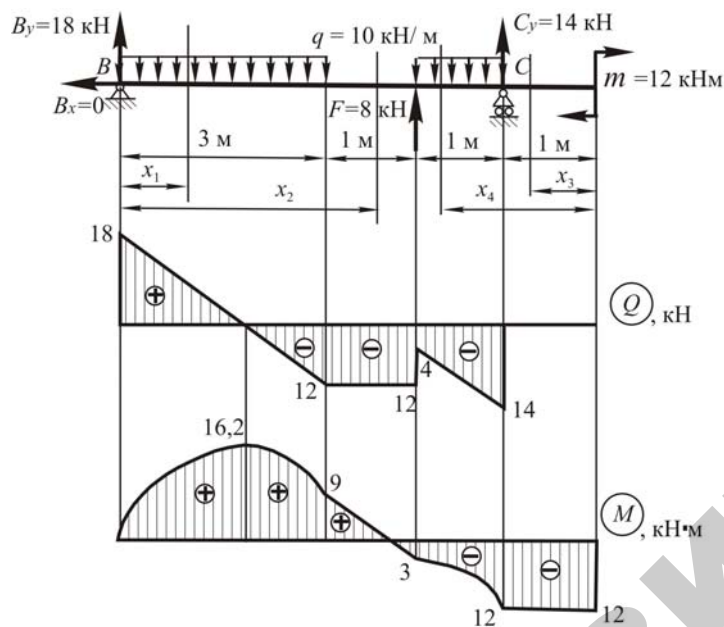


Рисунок 3.2 – Расчетная схема, эпюры поперечных сил, изгибающих моментов в сечениях балки

Из уравнений следует, что на первом участке поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент изменяется по квадратичной функции. Задавая x_1 значения, соответствующие границам участка, найдем:

$$x_1 = 0: Q_{x_1} = 18 \text{ кН};$$

$$x_1 = 3 \text{ м}: Q_{x_1} = 18 - 10 \cdot 3 = -12 \text{ кН};$$

$$x_1 = 0: M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 3 \text{ м}: M_{x_1} = 18 \cdot 3 - 10 \cdot \frac{3^2}{2} = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Так как на первом участке поперечная сила Q_{x_1} непрерывно убывает и происходит смена ее знака, то в сечении, где $Q_{x_1} = 0$, эпюра моментов M_{x_1} примет экстремальное значение, при вычислении которого воспользуемся дифференциальной зависимостью между Q_{x_1} и M_{x_1} . Поэтому приравняем к нулю выражение поперечной силы Q_{x_1} и найдем расстояние x_1 до сечения с экстремальным значением изгибающего момента.

$$Q_{x_1} = B_y - q \cdot x_1 = 0; \quad x_1 = \frac{18}{10} = 1,8 \text{ м}.$$

Подставив полученное значение x_1 в уравнение моментов M_{x_1} , найдем величину искомого экстремального момента:

$$x_1 = 1,8 \text{ м}: M_{x_1} = 18 \cdot 1,8 - 10 \cdot \frac{1,8^2}{2} = 16,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюры для первого участка и отмечаем на них найденные значения Q_{x_1} и M_{x_1} (рисунок 3.2).

Аналогично проводим произвольное поперечное сечение в пределах второго расчетного участка на расстоянии x_2 от крайней левой точки B . Отбрасываем мысленно правую часть балки и, рассматривая силы, действующие на оставшуюся часть, составляем уравнения Q_{x_2} и M_{x_2} для второго участка.

II участок: $3 \text{ м} \leq x_2 \leq 4$ м.

$$Q_{x_2} = B_y - q \cdot 3 = \text{const} = 18 - 30 = -12 \text{ кН},$$

$$M_{x_2} = B_y \cdot x_2 - q \cdot 3(x_2 - 1,5).$$

На втором участке поперечная сила постоянна, не зависит от x_2 , а изгибающий момент представляет линейную функцию, для построения которой достаточно найти ее значение в двух сечениях, соответствующих границам участка

$$x_2 = 3 \text{ м: } M_{x_2} = 18 \cdot 3 - 10 \cdot 3 (3 - 1,5) = 9 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 4 \text{ м: } M_{x_2} = 18 \cdot 4 - 10 \cdot 4 (4 - 1,5) = -3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюры Q_{x_2} и M_{x_2} на втором участке (рисунок 3.2).

Проводим сечение в пределах третьего расчетного участка на расстоянии x_3 от крайней правой точки балки. Рассматривая силы, действующие на правую часть балки, составляем уравнения Q_{x_3} и M_{x_3} для третьего участка.

III участок: $0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}.$

$$Q_{x_3} = 0; \quad M_{x_3} = -m = \text{const} = -12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюры Q_{x_3} и M_{x_3} на третьем участке, где поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент постоянный (рисунок 3.2).

Проводим сечение в пределах четвертого расчетного участка на расстоянии x_4 от крайней правой точки балки. Рассматривая силы, действующие на правую часть балки, составляем уравнения Q_{x_4} и M_{x_4} для четвертого участка.

IV участок: $1 \text{ м} \leq x_4 \leq 2 \text{ м}.$

$$Q_{x_4} = -C_y + q(x_4 - 1);$$

$$M_{x_4} = -m + C_y(x_4 - 1) - q(x_4 - 1) \cdot \frac{x_4 - 1}{2}.$$

Из уравнений следует, что на четвертом участке поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент изменяется по квадратичной функции. Подставляя числовые значения x_4 на границах участка, получим:

$$x_4 = 1 \text{ м: } Q_{x_4} = -14 \text{ кН};$$

$$x_4 = 2 \text{ м: } Q_{x_4} = -14 + 10 \cdot (2 - 1) = -4 \text{ кН};$$

$$x_4 = 1 \text{ м: } M_{x_4} = -12 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_4 = 1 \text{ м: } M_{x_4} = -12 + 14 \cdot (2 - 1) - 10 \cdot \frac{(2 - 1)^2}{2} = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным данным строим эпюры на четвертом участке (рисунок 3.2). Поскольку эпюра поперечных сил на этом участке не изменяет знак, то изгибающий момент не будет принимать экстремального значения.

Контроль правильности построения эпюр с использованием общих выводов, вытекающих из соотношений между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом, показывает, что эпюры Q и M построены верно.

Подберем поперечное сечение для заданной балки в виде двутавра. Для этого, применяя условие прочности при изгибе, найдем величину требуемого осевого момента сопротивления поперечного сечения.

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{16,2 \cdot 10^5}{160 \cdot 10^2} = 101,3 \text{ см}^3.$$



По сортаменту прокатной стали (сталь горячекатаная, балки двутавровые ГОСТ 8239–89) и $W_z = 101,3 \text{ см}^3$ выбираем двутавр № 16, у которого $W_z = 109 \text{ см}^3$.

4. КОСОЙ ИЗГИБ

Теоретические вопросы, изучение которых необходимо для успешного решения задач

Литература: [1, С. 404–424], [2, С. 173–176], [3, 7, задачи 10.5, 10.6, 10.7, 10.16, 10.21].

Косой изгиб, основные понятия. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса. Нахождение опасного сечения. Положение нейтральной оси и опасных точек в поперечном сечении. Условие прочности. Определение размеров поперечного сечения бруса. Перемещения при косом изгибе.

Задача 4

Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q и моментом в виде пары сил m , как показано на рисунке 4.1. В опорах балки возникают реакции, действующие в главных центральных плоскостях инерции. Подобрать размеры поперечного сечения h и b при допускаемом напряжении $[\sigma] = 10$ МПа, провести в опасном сечении нейтральную ось и построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений в аксонометрии. Данные принять из таблицы 4.1.

Методические указания для решения задачи 4

1. Провести и обозначить в поперечном сечении балки главные центральные оси инерции z и y , ось x совместить с осью балки.
2. Составить расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в главной центральной плоскости $yoх$.
3. Построить эпюру изгибающих моментов относительно оси z (M_z).
4. Составить расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в главной центральной плоскости zox .
5. Построить эпюру изгибающих моментов относительно оси y (M_y).
6. Определить положение опасного сечения балки (опасное сечение – поперечное сечение, в котором находится опасная точка балки, т.е. точка, в которой действует максимальное нормальное напряжение σ_{\max}).
7. В опасном сечении балки провести нейтральную ось и установить положения опасных точек.
8. Используя условие прочности при косом изгибе, определить размеры поперечного сечения балки (h и b).
9. Определить нормальные напряжения в выступающих угловых точках опасного сечения балки.
10. Построить для опасного сечения балки эпюру нормальных напряжений в аксонометрии.

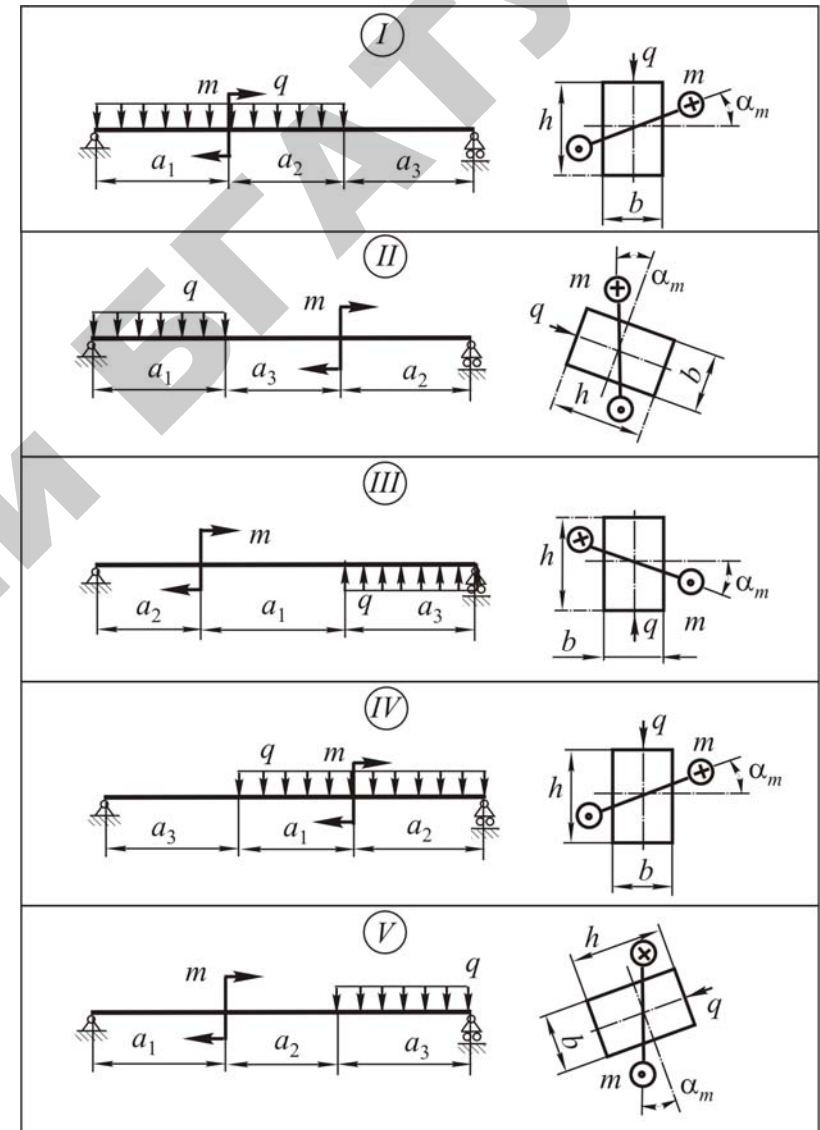
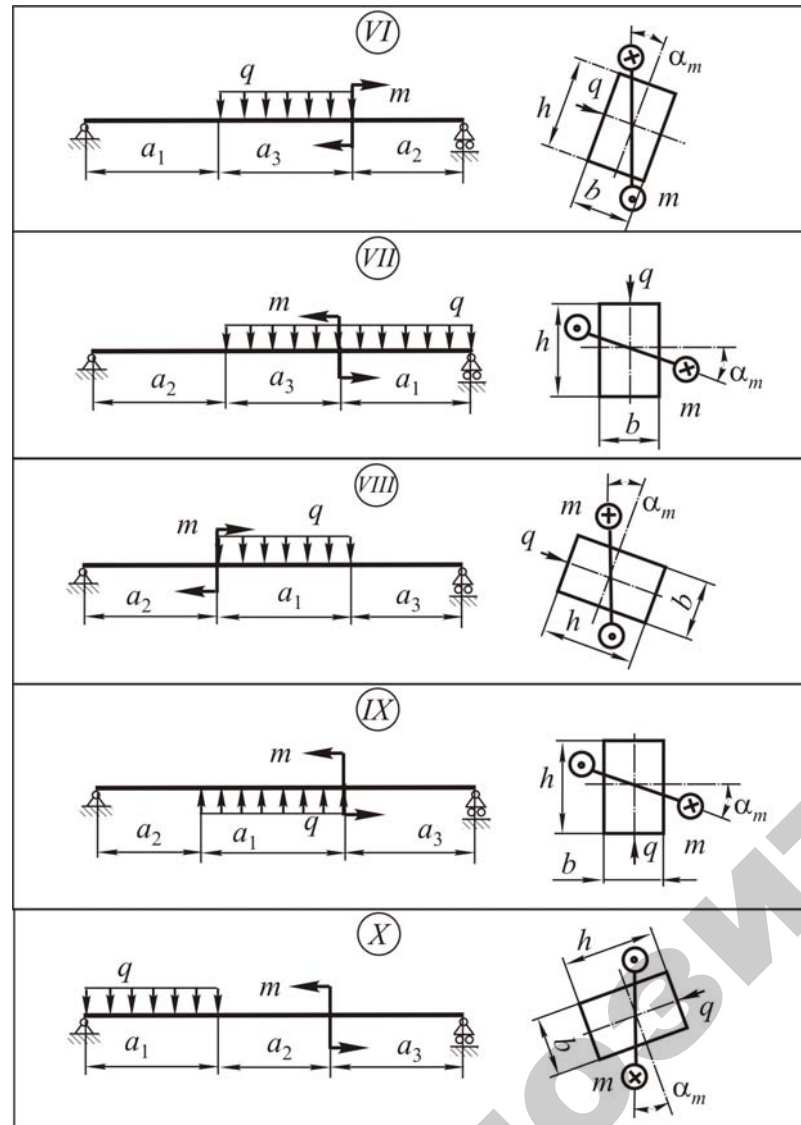


Рисунок 4.1 – Схемы балок



Окончание рисунка 4.1

Таблица 4.1 – Исходные данные к задаче 4

№ строки	Схема по рисунку 4.1	Расстояния			q , кН/м	m , кН м	$ \alpha_m $, градус	$\frac{h}{b}$
		a_1 , м	a_2 , м	a_3 , м				
1	<i>I</i>	2,2	1,4	1,8	10	8	10	1,2
2	<i>II</i>	1,8	1,5	2,2	9	7	12	1,3
3	<i>III</i>	2,4	1,2	1,6	8	9	15	1,4
4	<i>IV</i>	2,5	0,9	1,9	7	10	18	1,5
5	<i>V</i>	1,7	0,8	2,9	6	9	20	1,6
6	<i>VI</i>	1,9	1,3	2,1	5	11	22	1,7
7	<i>VII</i>	2,1	1,2	2,2	9	6	25	1,8
8	<i>VIII</i>	1,6	1,0	2,7	8	7	28	1,9
9	<i>IX</i>	2,6	1,4	1,5	7	12	30	2,0
0	<i>X</i>	1,5	1,1	3,0	6	8	32	2,1
	<i>e</i>	<i>d</i>			<i>z</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>d</i>

Пример решения задачи 4

Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 10$ кН/м и моментом в виде пары сил $m = 12$ кНм, как показано на рисунке 4.2, *a*. В опорах балки возникают реакции, действующие в главных центральных плоскостях инерции. Подобрать размеры поперечного сечения h и b при допуске напряжении $[\sigma] = 10$ МПа, если соотношение $h/b = 1,2$, провести в опасном сечении нейтральную ось и построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений в аксонометрии.

Решение. Проведем для поперечных сечений балки главные центральные оси инерции y, z , а ось x совместим с осью балки (рисунок 4.2, *a*).

Спроектируем силы, действующие на балку, в главную центральную плоскость инерции $yoх$.

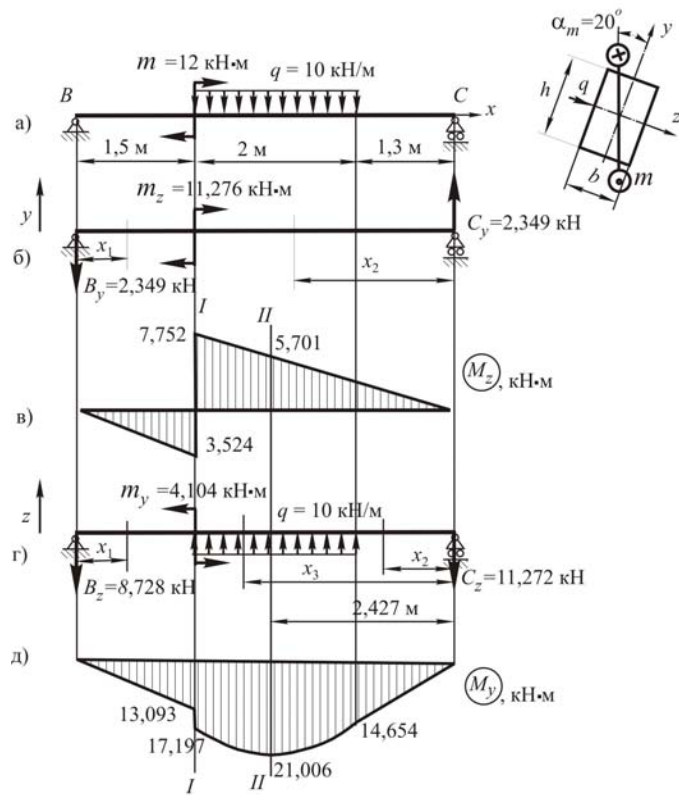


Рисунок 4.2 – Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов в сечениях балки

$$m_z = m \cdot \cos \alpha_m = 12 \cdot \cos 20^\circ = 11,276 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составляем расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в плоскости yox и, соответственно, изгибающими ее относительно оси z (рисунок 4.2, б). Для нахождения неизвестных опорных реакций B_y и C_y составим уравнения равновесия. Составляющая опорной реакции в шарнире B равна нулю, так как силы, действующие на балку, перпендикулярны оси x .

$$\sum m_c (F_i) = -B_y \cdot 4,8 + m_z = 0;$$

$$\sum m_B (F_i) = -C_y \cdot 4,8 + m_z = 0.$$

Решая уравнения равновесия, находим опорные реакции:

$$B_y = \frac{m_z}{4,8} = \frac{11,276}{4,8} = 2,349 \text{ кН};$$

$$C_y = \frac{m_z}{4,8} = \frac{11,276}{4,8} = 2,349 \text{ кН}.$$

Проверим правильность определения опорных реакций, используя уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось y .

$$\sum F_y = -B_y + C_y = -2,349 + 2,349 = 0.$$

Опорные реакции B_y и C_y определены верно. Разбиваем балку на два расчетных участка и находим значения изгибающего момента M_z .

I участок: $0 \leq x_1 \leq 1,5 \text{ м}$.

$$M_{x_1} = -B_y \cdot x_1;$$

$$x_1 = 0: M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,5 \text{ м}: M_{x_1} = -2,349 \cdot 1,5 = -3,524 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

II участок: $0 \leq x_2 \leq 3,3 \text{ м}$.

$$M_{x_2} = C_y \cdot x_2;$$

$$x_2 = 0: M_{x_2} = 0;$$

$$x_2 = 3,3 \text{ м}: M_{x_2} = 2,349 \cdot 3,3 = 7,752 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям изгибающего момента строим эпюру M_z (рисунок 4.2, в).

Спроектируем силы, действующие на балку в главную центральную плоскость инерции zox .

$$m_y = m \cdot \sin \alpha_m = 12 \cdot \sin 20^\circ = 4,104 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составляем расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в плоскости zox и соответственно изгибающими ее относительно оси y (рисунок 4.2, г). Для нахождения неизвестных опорных реакций B_z и C_z составим уравнения равновесия. Составляющая опорной реакции в шарнире B равна нулю, так как силы, действующие на балку, перпендикулярны оси x .

$$\sum m_c (F_i) = -B_z \cdot 4,8 - m_y + q \cdot 2 \cdot 2,3 = 0;$$

$$\sum m_B (F_i) = -C_z \cdot 4,8 + m_y + q \cdot 2 \cdot 2,5 = 0.$$

Решая уравнения равновесия, находим опорные реакции:

$$B_z = \frac{-m_y + q \cdot 2 \cdot 2,3}{4,8} = \frac{-4,104 + 10 \cdot 2 \cdot 2,3}{4,8} = 8,728 \text{ кН},$$

$$C_z = \frac{m_y + q \cdot 2 \cdot 2,5}{4,8} = \frac{4,104 + 10 \cdot 2 \cdot 2,5}{4,8} = 11,272 \text{ кН}.$$

Проверим правильности определения опорных реакций, используя уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось y .

$$\Sigma F_z = -B_z + q \cdot 2 - C_z = -8,728 + 20 - 11,272 = 0.$$

Значит, опорные реакции B_z и C_z определены верно. Разбиваем балку на два расчетных участка и находим значения изгибающего момента относительно оси y (M_y).

I участок: $0 \leq x_1 \leq 1,5 \text{ м}$.

$$M_{x_1} = -B_z \cdot x_1;$$

$$x_1 = 0: \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 3 \text{ м}: \quad M_{x_1} = -8,728 \cdot 1,5 = -13,093 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

II участок: $0 \leq x_2 \leq 1,3 \text{ м}$.

$$M_{x_2} = -C_z \cdot x_2;$$

$$x_2 = 0: \quad M_{x_2} = 0;$$

$$x_2 = 1,3 \text{ м}: \quad M_{x_2} = -11,272 \cdot 1,3 = 14,654 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

III участок: $1,3 \text{ м} \leq x_3 \leq 3,3 \text{ м}$.

$$M_{x_3} = -C_z \cdot x_3 + q \cdot \frac{(x_3 - 1,3)^2}{2};$$

$$x_3 = 1,3 \text{ м}: \quad M_{x_3} = -11,272 \cdot 1,3 = 14,654 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 3,3 \text{ м}: \quad M_{x_3} = -11,272 \cdot 3,3 + 10 \cdot \frac{(3,3 - 1,3)^2}{2} = 17,197 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На третьем расчетном участке изгибающий момент M_y имеет экстремальное значение. Для его определения составим и приравняем к нулю выражение поперечной силы Q_{x_3} , а также найдем расстояние x_3 до сечения с экстремальным значением изгибающего момента.

$$Q_{x_3} = C_z - q \cdot (x_3 - 1,3) = 0;$$

откуда

$$x_3 = \frac{11,272 + 1,3 \cdot 10}{10} = 2,427 \text{ м}.$$

Подставив полученное значение x_3 в уравнение моментов M_{x_3} , найдем величину искомого экстремального момента:

$$M_{x_3} = -11,272 \cdot 2,427 + 10 \cdot \frac{(2,427 - 1,3)^2}{2} = -21,006 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям изгибающего момента строим эпюру M_y (рисунок 4.2, д).

Находим положение опасного сечения балки. Как показывают эпюры изгибающих моментов M_z и M_y , опасное сечение может располагаться на расстоянии 1,5 м от точки B ($M_z^{\max} = 7,752 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_y = 17,197 \text{ кН}\cdot\text{м}$) или на расстоянии 2,427 м от точки C ($M_z = 2,349 \cdot 2,427 = 5,701 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_y^{\max} = 21,006 \text{ кН}\cdot\text{м}$). Определим величину максимального напряжения в этих сечениях по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y},$$

где W_z и W_y – момент сопротивления поперечного сечения относительно, соответственно, осей z и y .

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (1,2b)^2}{6} = 0,24b^3;$$

$$W_y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{1,2b \cdot b^2}{6} = 0,2b^3.$$

Тогда

$$\sigma_{\max}^I = \frac{7,752}{0,24b^3} + \frac{17,197}{0,2b^3} = \frac{118,285}{b^3};$$

$$\sigma_{\max}^{II} = \frac{5,701}{0,24b^3} + \frac{21,006}{0,2b^3} = \frac{128,784}{b^3}.$$

Значит, опасным сечением является сечение II, так как $\sigma_{\max}^{II} > \sigma_{\max}^I$.

Определяем в опасном сечении балки положение нейтральной оси:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{I_z}{I_y} = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} = -\frac{-21,006}{5,701} \cdot \frac{b \cdot (1,2b)^3 \cdot 12}{1,2b \cdot b^3 \cdot 12} = 5306.$$

$$\beta = \arctg 5,306 = 79,3^\circ.$$

Откладывая от оси z против хода часовой стрелки угол β и проводим нейтральную ось (рисунок 4.3). Опасными точками будут точки опасного поперечного сечения, наиболее удаленные от нейтральной оси, т.е. точки 1 и 3.

Определяем ширину поперечного сечения балки из условия

$$\sigma_{\max}'' = \frac{128,784}{b^3} \leq [\sigma].$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{128,784 \cdot 10^6}{10}} = 235 \text{ мм.}$$

Тогда высота поперечного сечения будет равна:

$$h = 1,2 \cdot b = 1,2 \cdot 235 = 282 \text{ мм.}$$

Найдем величины осевых моментов сопротивления поперечного сечения:

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{235 \cdot 282^2}{6} = 3114690 \text{ мм}^3;$$

$$W_y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{282 \cdot 235^2}{6} = 2595575 \text{ мм}^3.$$

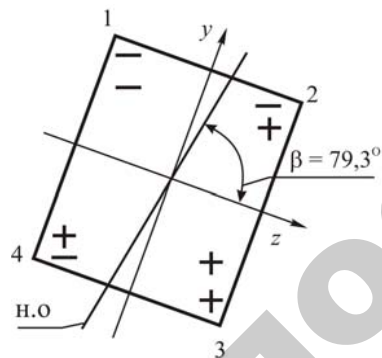


Рисунок 4.3 – Опасное сечение балки

Для построения эпюры нормальных напряжений определим напряжения в выступающих угловых точках (1, 2, 3, 4) опасного поперечного сечения (рисунок 4.3) по формуле:

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

При выполнении расчетов величины изгибающих моментов M_z и M_y принимаем по модулю, а знаки перед каждым слагаемым ставим с учетом характера деформации в точке (растяжение – «+», сжатие – «-»).

$$\sigma_{(1)} = -\frac{5,701 \cdot 10^6}{3\,114\,690} - \frac{21,006 \cdot 10^6}{2\,595\,575} = -9,923 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = -\frac{5,701 \cdot 10^6}{3\,114\,690} + \frac{21,006 \cdot 10^6}{2\,595\,575} = 6,263 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{5,701 \cdot 10^6}{3\,114\,690} + \frac{21,006 \cdot 10^6}{2\,595\,575} = 9,923 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(4)} = \frac{5,701 \cdot 10^6}{3\,114\,690} - \frac{21,006 \cdot 10^6}{2\,595\,575} = -6,263 \text{ МПа}.$$

По найденным значениям строим в аксонометрии эпюры нормальных напряжений, действующих по граням опасного сечения балки (рисунок 4.4). Из эпюр видно, что в точках, в которых нейтральная ось пересекает контур сечения, нормальные напряжения равны нулю.

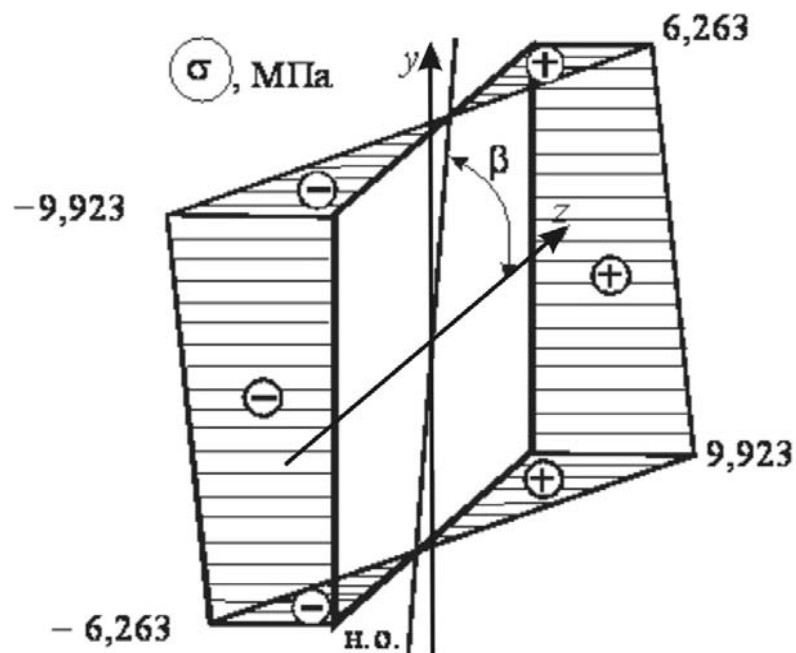


Рисунок 4.4 – Эпюры нормальных напряжений, действующих по граням опасного сечения балки

5. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

Теоретические вопросы, изучение которых необходимо для успешного решения задач

Литература: [1, С. 443–450], [2, С. 176–180], [3, задачи 10.26, 10.27, 10.28, 10.29, 10.30, 10.33, 10.36, 10.37, 10.42, 10.43].

Внутренние силовые факторы. Направление и расположение равнодействующей внешних сил. Эксцентриситеты силы, полюс или центр давления. Эпюры внутренних силовых факторов. Опасное сечение. Принцип независимости действия сил, алгебраическая сумма напряжений. Нормальные напряжения в поперечных сечениях. Закон изменения нормальных напряжений в сечении, вид эпюры напряжений. Уравнение нейтральной линии, уравнение нейтральной линии в отрезках, свойства нейтральной линии. Определение положения опасных точек. Условия прочности для опасных точек.

Условие прочности для сечений, имеющих две оси симметрии, опасные точки которых наиболее удалены от осей симметрии. Понятие о ядре сечения. Особенности расчета стержней из хрупких материалов.

Задача 5

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рисунке 5.1, сжимается силой F , параллельной оси x , приложенной в точке B . Требуется: определить положение нейтральной линии и найти опасные точки сечения; вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении; найти допускаемую нагрузку $[F]$ при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_c]$ и растяжение $[\sigma_p]$. Данные взять из таблицы 5.1.

Методические указания для решения задачи 5

1. Вычертить в масштабе 1 : 1 или 1 : 2 заданное поперечное сечение.
2. Определить координаты центра тяжести сечения y_c и z_c .
3. Обозначить на чертеже главные центральные оси инерции сечения.
4. Рассчитать главные моменты инерции сечения J_{y_c} и J_{z_c} .
5. Определить положение нейтральной линии по уравнению нейтральной линии в отрезках. Обозначить рассчитанные отрезки на чертеже, провести нейтральную линию.
6. Найти и обозначить опасные точки сечения.
7. Выразить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения через силу F и размеры поперечного сечения.
8. Приравнять полученные выражения к допускаемым напряжениям на растяжение или сжатие для чугуна.
9. Из полученных уравнений рассчитать значения допускаемой нагрузки, выбрать из них удовлетворяющие обоим условиям прочности.

Таблица 5.1 – Исходные данные к задаче 5

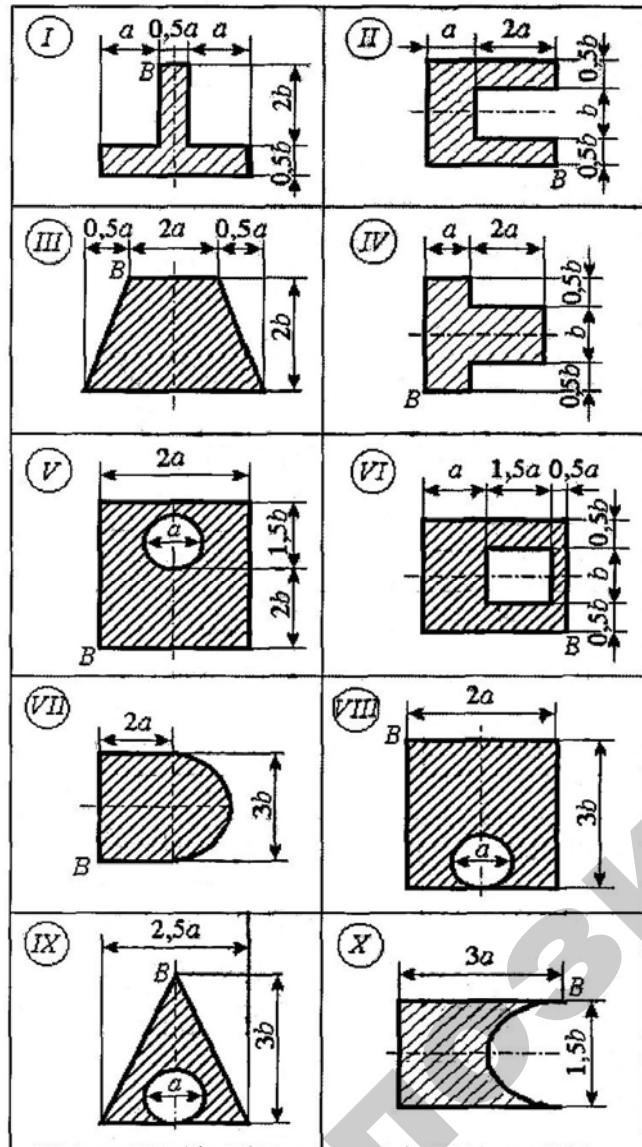


Рисунок 5.1 – Схемы поперечного сечения

Номер строки	Схема по рисунку 5.1	Размеры сечения, мм		Допускаемые напряжения, МПа	
		a	b	$[\sigma_c]$	$[\sigma_p]$
1	<i>I</i>	60	40	100	25
2	<i>II</i>	70	50	90	24
3	<i>III</i>	80	60	80	23
4	<i>IV</i>	70	70	70	22
5	<i>V</i>	60	80	60	21
6	<i>VI</i>	50	40	150	30
7	<i>VII</i>	40	50	140	29
8	<i>VIII</i>	50	60	130	28
9	<i>IX</i>	60	70	120	27
0	<i>X</i>	70	80	110	26
	<i>e</i>	δ	e	ζ	e

Пример решения задачи 5

Схема для примера выбрана произвольно, числовые данные взяты для шифра с последними цифрами 037:

$$\begin{matrix} \zeta & \delta & e \\ 0 & 3 & 7 \end{matrix}$$

Из столбца, в котором последняя строка обозначена буквой ζ , следует брать данные по десятой (0) строке; буквой δ – по третьей строке; буквой e – по седьмой. Числовые данные будут следующими: $a = 80$ мм; $b = 50$ мм; $[\sigma_c] = 110$ МПа; $[\sigma_p] = 29$ МПа.

Решение.

1. Вычерчиваем сечение в выбранном масштабе (рисунок 5.2).
2. Для определения положения центра тяжести сложного сечения разбиваем его на простейшие элементы: прямоугольник 1 и полукруг 2. Рассчитываем геометрические характеристики каждого элемента: площадь A , осевые моменты инерции J_z и J_y .

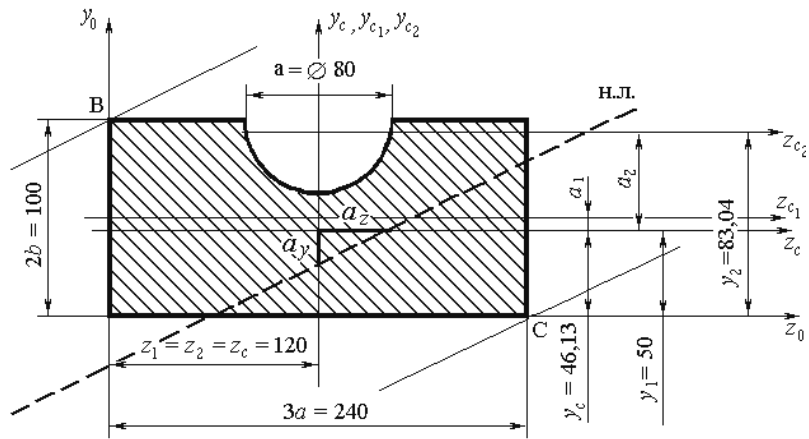


Рисунок 5.2 – Схема поперечного сечения

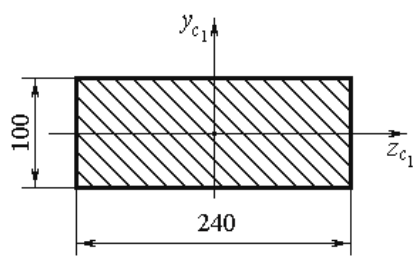


Рисунок 5.3 - Прямоугольник

$$A_1 = 240 \cdot 100 = 2,4 \cdot 10^4 \text{ мм}^2;$$

$$J_{z_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{240 \cdot 100^3}{12} = 2 \cdot 10^7 \text{ мм}^4;$$

$$J_{y_1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{240^3 \cdot 100}{12} = 11,52 \cdot 10^7 \text{ мм}^4.$$

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{3,14 \cdot 80^2}{8} = -2\,512 \text{ мм}^2;$$

$$y_0 = 0,212d = 0,212 \cdot 80 = 16,96 \text{ мм};$$

$$J_{z_2} = 0,00686d^4 = -2,8 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$J_{y_2} = \frac{\pi d^4}{128} = -1,0048 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

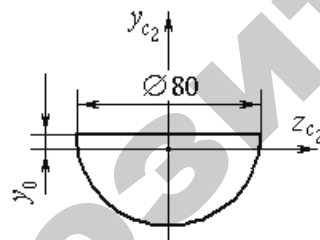


Рисунок 5.4 - Полукруг

Геометрические характеристики для второго пустого элемента отрицательны.

Проводим на чертеже вспомогательные оси y_0 и z_0 таким образом, чтобы они касались контура сечения, а само сечение располагалось в первом квадранте. Обозначаем координаты центров тяжести прямоугольника и полукруга y_1, z_1 и y_2, z_2 относительно вспомогательных осей. Так как оси y_{c1} и y_{c2} совпадают, для определения положения центра тяжести сечения достаточно найти координату y_c .

$$y_c = \frac{\sum S_{z_0}}{\sum A} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{50 \cdot 24\,000 - 83,04 \cdot 2\,512}{24\,000 - 2\,514} = 46,13 \text{ мм}.$$

3. Обозначаем на чертеже координату y_c и находим общий центр тяжести сечения. Так как сечение имеет одну ось симметрии, то главными центральными будут сама ось симметрии y_c и ось ей перпендикулярная, проходящая через центр тяжести сечения z_c .

4. Рассчитываем моменты инерции сечения относительно главных центральных осей, используя формулу изменения моментов инерции при параллельном переносе осей:

$$J_{z_c} = J_{z_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{z_2} + a_2^2 \cdot A_2 = 2 \cdot 10^7 + 3,87^2 \cdot 24\,000 - 2,8 \cdot 10^5 - 36,91^2 \cdot 2\,512 = 16\,657\,227,17 \text{ мм}^4 = 16,657 \cdot 10^6 \text{ мм}^4,$$

где a_1 и a_2 – смещения между главными центральными осями всего сечения и собственными осями каждой фигуры:

$$a_1 = y_1 - y_c = 50 - 46,13 = 3,87 \text{ мм};$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 83,04 - 46,13 = 36,91 \text{ мм}.$$

Относительно оси y_c смещения осей y_{c1} и y_{c2} не происходит, поэтому для определения осевого момента инерции всего сечения суммируются J_{y_1} и J_{y_2} :

$$J_{y_c} = J_{y_1} - J_{y_2} = 11,52 \cdot 10^7 - 1,0048 \cdot 10^6 = 11,42 \cdot 10^7 \text{ мм}^4.$$

5 Находим квадраты радиусов инерции:

$$i_z^2 = \frac{J_{z_c}}{A} = \frac{16,657 \cdot 10^6}{24\,000 - 2\,512} = 775,19 \text{ мм}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{J_{y_c}}{A} = \frac{11,42 \cdot 10^7}{24\,000 - 2\,512} = 5\,314,59 \text{ мм}^2.$$

Рассчитываем отрезки, отсекаемые нейтральной линией на главных центральных осях:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_F} = -\frac{5314,59}{-120} = 44,29 \text{ мм};$$

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F} = -\frac{775,19}{53,87} = -14,39 \text{ мм},$$

где $z_F = -120$ мм и $y_F = 100 - 46,13 = 54,87$ мм координаты точки B приложения силы относительно главных центральных осей z_c и y_c .

Откладываем отрезки a_z и a_y на чертеже с учетом знаков и проводим нейтральную линию штриховой жирной линией.

6. Опасными называются точки, в которых возникают максимальные напряжения и наиболее удаленные от нейтральной линии. Для их нахождения необходимо провести касательные к контуру сечения параллельные нейтральной линии. В рассматриваемом примере опасными будут точки B и C . В точке B возникают наибольшие сжимающие напряжения, а в точке C – наибольшие растягивающие.

7. Выражаем наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения через неизвестную силу F и геометрические характеристики поперечного сечения:

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F \cdot y_B}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z_B}{i_y^2} \right) = -\frac{F}{21488} \left(1 + \frac{54,87 \cdot 54,87}{775,19} + \frac{120 \cdot 120}{5314,59} \right) =$$

$$= -\frac{F}{21488} (1 + 3,88 + 2,71) = -F \cdot 3,532 \cdot 10^{-4},$$

$$\sigma_C = \frac{F}{A} \left(-1 + \frac{y_F \cdot y_C}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z_C}{i_y^2} \right) = \frac{F}{21488} \left(-1 + \frac{54,87 \cdot 46,13}{775,19} + \frac{120 \cdot 120}{5314,59} \right) =$$

$$= \frac{F}{21488} (-1 + 3,26 + 2,71) = F \cdot 2,315 \cdot 10^{-4},$$

где $y_B = 100 - 46,13 = 54,87$ мм и $z_B = 120$ мм – координаты точки B относительно осей y_c и z_c , совпадающие с y_F и z_F ;

$y_C = 46,13$ мм и $z_C = 120$ мм – координаты точки C относительно тех же осей.

8. Полученное выражение наибольших сжимающих напряжений в точке B приравниваем к допускаемым напряжениям на сжатие, а

наибольших растягивающих напряжений в точке C – к допускаемым напряжениям на растяжение.

$$\sigma_B = -F \cdot 3,532 \cdot 10^{-4} = -110 \Rightarrow F = \frac{110}{3,532 \cdot 10^{-4}} = 31143 \text{ Н.}$$

$$\sigma_C = F \cdot 2,315 \cdot 10^{-4} = 29 \Rightarrow F = \frac{29}{2,315 \cdot 10^{-4}} = 125269 \text{ Н.}$$

9. Из двух полученных значений допускаемой нагрузки необходимо выбрать меньшее, чтобы оно удовлетворяло условиям прочности на сжатие и на растяжение. Окончательно принимаем $[F] = 125,3$ кН.

6. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Теоретические вопросы, изучение которых необходимо для успешного решения задач

Литература: [1, С. 424–434], [3, 7, задачи 10.73, 10.76, 10.77, 10.78, 10.79, 10.80, 10.95].

Изгиб с кручением вала круглого поперечного сечения. Определение эквивалентного момента с использованием 3-ей и 4-ой теорий прочности, опасное сечение вала. Нахождение диаметра вала сплошного и кольцевого сечений.

Задача 6

Вал вращается с частотой n оборотов в минуту. На вал насажены три шкива: один с диаметром D_1 и углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 передает мощность P , два других с диаметрами D_2 и углами наклона ветвей к горизонту α_2 передают мощность $P/2$ каждый (рисунок 6.1). Определить диаметр вала по третьей теории прочности при $[\sigma] = 70$ МПа и принять его значение из стандартного ряда. Данные взять из таблицы 6.1.

Методические указания для решения задачи 6

1. Выполнить в масштабе расчетную схему вала с расположенными на нем шкивами.

2. Провести и обозначить в поперечном сечении вала главные центральные оси инерции z и y , ось x совместить с осью вала.

3. По заданным P и n определить скручивающие моменты, приложенные к шкивам.

4. Построить эпюру крутящих моментов (T).

5. Определить окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы, по найденным скручивающим моментам и заданным диаметрам D_1 и D_2 .

6. Определить усилия, действующие на вал, принимая их равными трем окружным усилиям.

7. Составить расчетную схему вала, нагруженного внешними силами в главной центральной плоскости $уох$.

8. Построить эпюру изгибающих моментов вала относительно оси z (M_z).

9. Составить расчетную схему вала, нагруженного внешними силами в главной центральной плоскости $зох$.

10. Построить эпюру изгибающих моментов вала относительно оси y (M_y).

Таблица 6.1 – Исходные данные к задаче 6

№ строки	Схема по рисунку 6.1	P , кВт	n , мин ⁻¹	Размеры, м					α_1 , градус	α_2 , градус
				a	b	c	D_1	D_2		
1	<i>I</i>	8	100	1,1	2,0	1,0	0,8	0,6	10	0
2	<i>II</i>	10	150	1,2	1,9	1,1	0,9	0,7	20	10
3	<i>III</i>	12	200	1,3	1,8	1,2	1,0	0,8	30	20
4	<i>IV</i>	15	250	1,4	1,7	1,3	1,1	0,9	40	30
5	<i>V</i>	20	300	1,5	1,6	1,4	1,2	1,0	50	40
6	<i>VI</i>	22	400	1,6	1,5	1,5	1,0	0,8	60	50
7	<i>VII</i>	24	500	1,7	1,4	1,6	0,8	0,9	70	60
8	<i>VIII</i>	26	600	1,8	1,3	1,7	0,9	0,6	80	70
9	<i>IX</i>	14	800	1,9	1,2	1,8	0,6	0,5	90	80
0	<i>X</i>	16	700	2,0	1,1	2,0	0,7	0,7	0	90
	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>e</i>

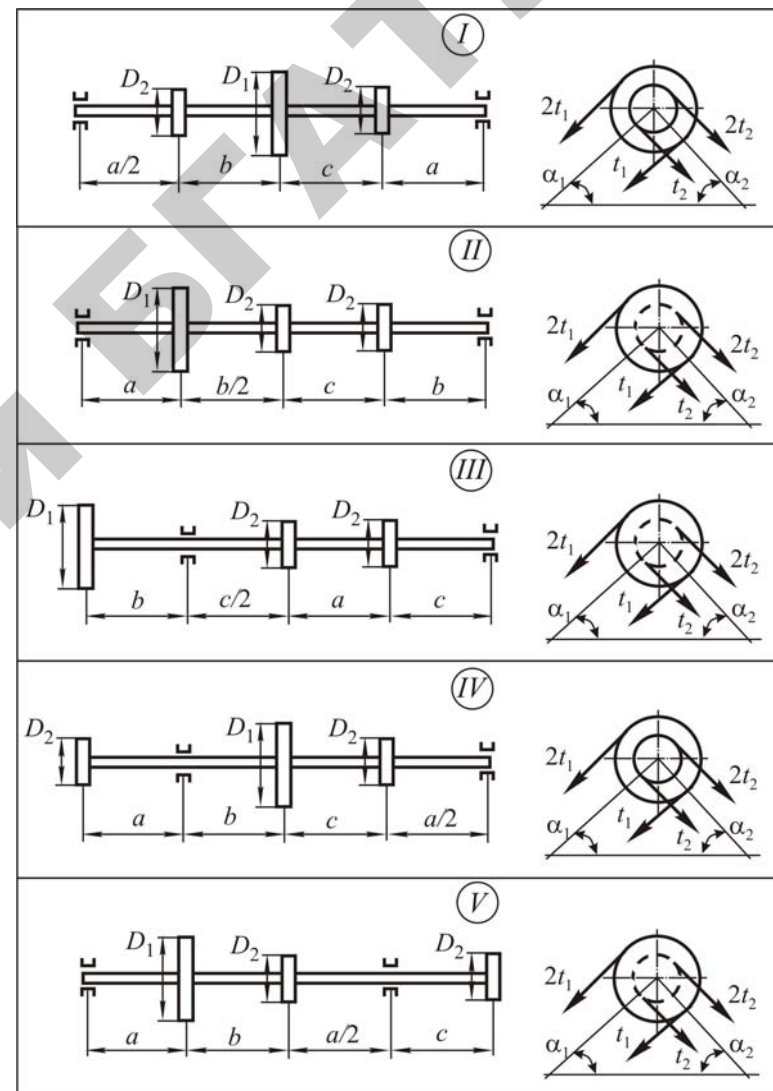
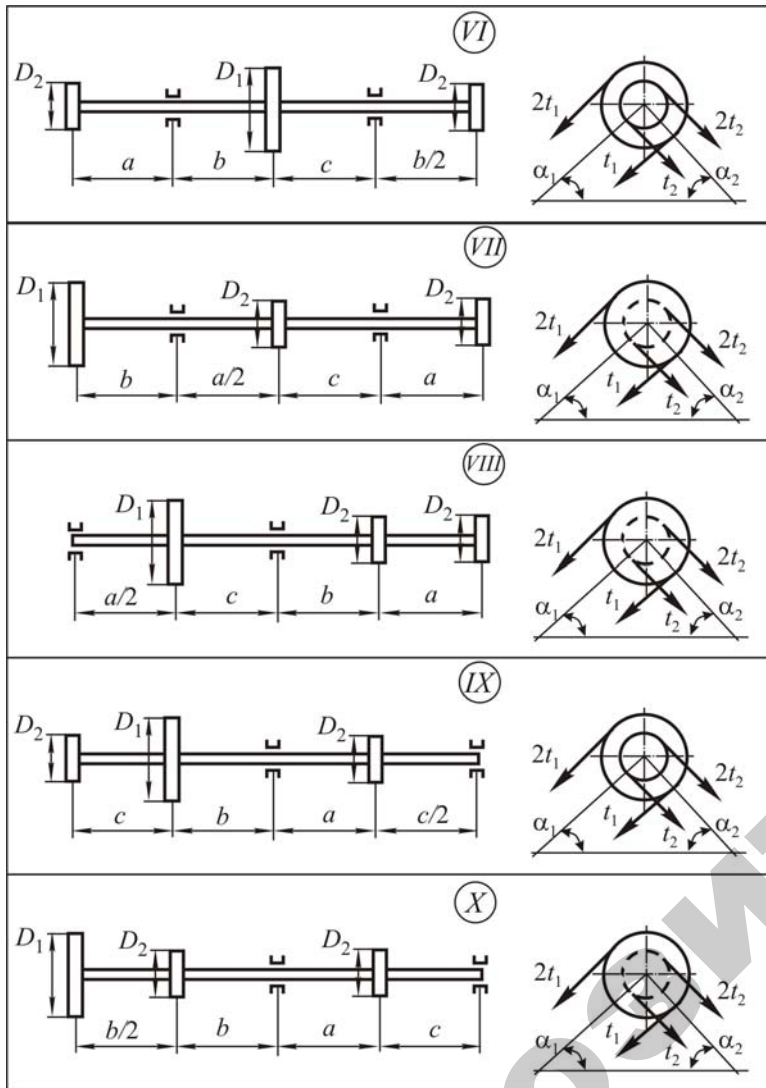


Рисунок 6.1 – Схемы валов



Окончание рисунка 6.1

11. Построить эпюру полных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ (для каждого поперечного сечения вала имеется своя плоскость действия полного изгибающего момента, но для круглого сечения можно совместить плоскость M для всех поперечных сечений и построить эпюру M в плоскости чертежа).

12. Определить опасное сечение вала, используя эпюры M , T и третью классическую теорию прочности.

13. Определить диаметр вала и принять его значение из стандартного ряда.

Пример решения задачи 6

Определить диаметр вала (рисунок 6.2, а) по третьей теории прочности, если допустимое напряжение $[\sigma] = 80$ МПа. Ведущий шкив $D_1 = 0,8$ м передает мощность $P_1 = 15$ кВт, ведомые шкивы $D_2 = 0,6$ м и $D_3 = 1,0$ м передают мощности $P_2 = 5$ кВт и $P_3 = 10$ кВт соответственно при частоте вращения $n = 1200$ мин⁻¹. Ветви ремней параллельны и образуют с горизонтом угол $\alpha_1 = 45^\circ$ на ведущем шкиве и угол $\alpha_2 = 60^\circ$ на ведомых шкивах. Натяжение ведущей ветви ремня в 2 раза больше натяжения в ведомой ветви.

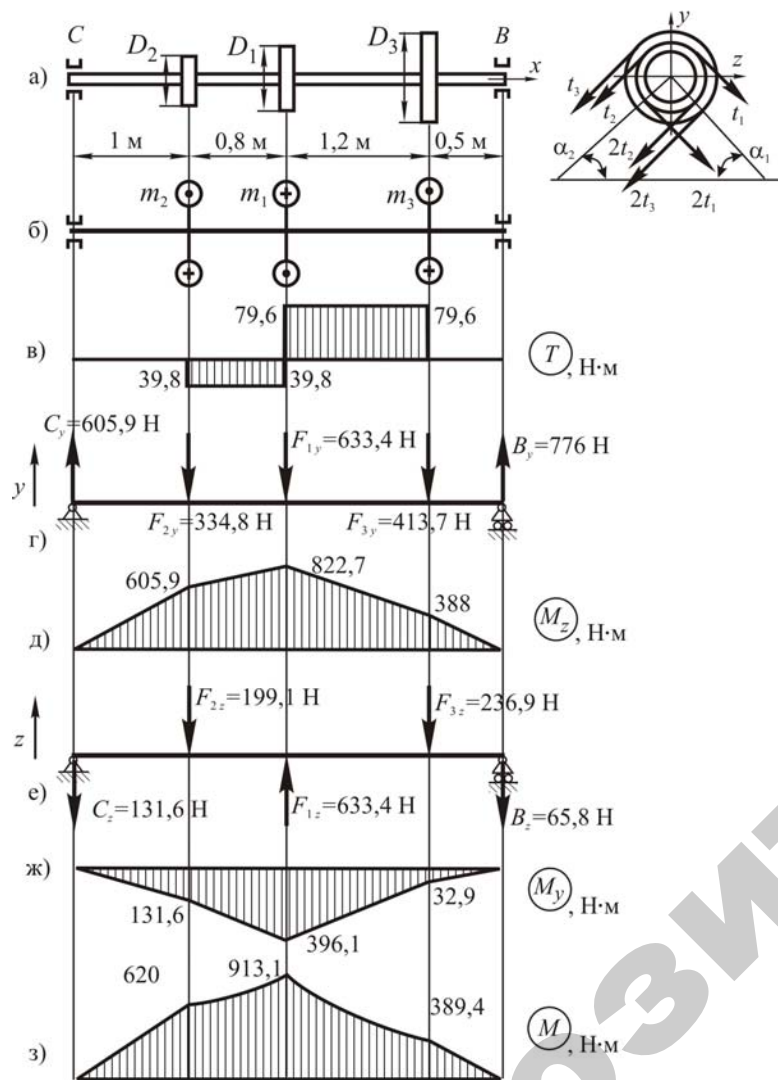


Рисунок 6.2 — Расчетные схемы, эпюры крутящих и изгибающих моментов в сечениях вала

Решение. Определяем скручивающие моменты, приложенные к шкивам по формуле:

$$m = \frac{P}{\omega},$$

где P — передаваемая мощность, Вт,

ω — угловая скорость, с^{-1} .

Угловая скорость определяется по формуле

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30},$$

где n — частота вращения, мин^{-1} .

Скручивающий момент, приложенный к первому шкиву (D_1), равен

$$m_1 = \frac{30 P_1}{\pi n} = \frac{30 \times 15 \times 10^3}{3,14 \times 1200} = 119,4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Скручивающий момент, приложенный ко второму шкиву (D_2), равен

$$m_2 = \frac{30 P_2}{\pi n} = \frac{30 \times 15 \times 10^3}{3,14 \times 1200} = 39,8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Скручивающий момент, приложенный к третьему шкиву (D_3), равен

$$m_3 = \frac{30 P_3}{\pi n} = \frac{30 \times 15 \times 10^3}{3,14 \times 1200} = 79,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного скручивающими моментами (рисунок 6.2, б), и строим эпюру крутящих моментов T (рисунок 6.2, в).

Определяем окружные усилия t_1 , t_2 и t_3 , действующие на шкивы.

Скручивающий момент на шкиве равен

$$m = (2t - t) \frac{D}{2}.$$

$$\text{Отсюда } t = \frac{2m}{D}.$$

$$t_1 = \frac{2m_1}{D_1} = \frac{2 \times 119,4}{0,8} = 298,6 \text{ Н};$$

$$t_2 = \frac{2m_2}{D_2} = \frac{2 \times 39,8}{0,6} = 132,7 \text{ Н};$$

$$t_3 = \frac{2m_3}{D_3} = \frac{2 \times 79,6}{1} = 159,2 \text{ Н}.$$

Определяем усилия, действующие на вал:

$$F_1 = 3 t_1 = 3 \times 298,6 = 895,84 \text{ Н};$$

$$F_2 = 3 t_2 = 3 \times 132,7 = 398,1 \text{ Н};$$

$$F_3 = 3 t_3 = 3 \times 159,2 = 477,6 \text{ Н}.$$

Проектируем силы, действующие на вал в плоскость uox :

$$F_{1y} = F_1 \times \sin \alpha_1 = 895,7 \times \sin 45^\circ = 633,4 \text{ Н};$$

$$F_{2y} = F_2 \times \sin \alpha_2 = 398,1 \times \sin 60^\circ = 344,8 \text{ Н};$$

$$F_{3y} = F_3 \times \sin \alpha_3 = 477,7 \times \sin 60^\circ = 413,7 \text{ Н}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного силами в плоскости uox (рисунок 6.2, z), и определяем реакции в опорах:

$$\sum M_B = F_{1y} \times 1,7 + F_{2y} \times 2,5 + F_{3y} \times 0,5 - C_y \times 3,5 = 0;$$

$$\sum M_C = 633,4 \times 1,7 + 344,8 \times 2,5 + 413,7 \times 0,5 - C_y \times 3,5 = 0.$$

Отсюда $C_y = 605,9 \text{ Н}$;

$$\sum M_C = F_{1y} \times 1,8 + F_{2y} \times 1,0 + F_{3y} \times 3,0 - B_y \times 3,5 = 0;$$

$$\sum M_C = 633,4 \times 1,8 + 344,8 \times 1,0 + 413,7 \times 3,0 - B_y \times 3,5 = 0.$$

Отсюда $B_y = 776 \text{ Н}$.

$$\text{Проверка: } \sum F_{iy} = -F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} + B_y + C_y = 0;$$

$$\sum F_{iy} = -633,4 - 344,8 - 413,7 + 605,9 + 776 = 0.$$

Реакции в опорах B_y и C_y определены верно.

Строим эпюру изгибающих моментов M_z (рисунок 6.2, d) (порядок построения эпюры M_z см. в решении задачи 4, с. 32).

Проектируем силы, действующие на вал в плоскость zox :

$$F_{1z} = F_1 \times \cos \alpha_1 = 895,7 \times \cos 45^\circ = 633,4 \text{ Н};$$

$$F_{2z} = F_2 \times \cos \alpha_2 = 398,1 \times \cos 60^\circ = 199,1 \text{ Н};$$

$$F_{3z} = F_3 \times \cos \alpha_3 = 477,7 \times \cos 60^\circ = 236,9 \text{ Н}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного силами в плоскости zox (рисунок 6.2, e), и определяем реакции в опорах:

$$\sum M_B = F_{1z} \times 1,7 - F_{2z} \times 2,5 - F_{3z} \times 0,5 - C_z \times 3,5 = 0;$$

$$\sum M_B = 633,4 \times 1,7 - 199,1 \times 2,5 - 236,9 \times 0,5 - C_z \times 3,5 = 0.$$

Отсюда $C_z = 131,6 \text{ Н}$;

$$\sum M_C = F_{1z} \times 1,8 - F_{2z} \times 1,0 - F_{3z} \times 3,0 + B_z \times 3,5 = 0;$$

$$\sum M_C = 633,4 \times 1,8 - 199,1 \times 1,0 - 236,9 \times 3,0 - B_z \times 3,5 = 0.$$

Отсюда $B_z = 65,84 \text{ Н}$.

$$\text{Проверка: } \sum F_{iz} = F_{1z} - F_{2z} - F_{3z} - B_z - C_z = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 633,4 - 199,1 - 236,9 - 65,8 - 131,6 = 0.$$

Реакции в опорах B_z и C_z определены верно.

Строим эпюру изгибающих моментов M_y (рисунок 6.2, $ж$) (порядок построения эпюры M_y см. в решении задачи 4, с. 33).

Строим эпюру полных изгибающих моментов в сечениях вала (рисунок 6.2, $з$), используя формулу:

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Определяем положение опасного сечения вала. Как видно из эпюр M и T , опасное сечение вала находится в месте крепления первого шкива (D_1).

Условие прочности круглого вала при изгибе с кручением по третьей теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \frac{\sqrt{T^2 + M^2}}{W_z} \leq [\sigma],$$

где $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ – осевой момент сопротивления для круглого сечения.

Тогда диаметр вала равен

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \times (79,6^2 + 913,1^2) \times 10^3}{3,14 \times 80}} = 48,8 \text{ мм}.$$

Принимаем $d = 50 \text{ мм}$.

7. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Теоретические вопросы, изучение которых необходимо для успешного решения задач

Литература: [1, С. 598–621], [2, С. 413–430, 447–449], [3, 7, задачи 12.1, 12.5, 12.6, 12.7, 12.10, 12.15, 12.17].

Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия упругих тел. Устойчивость прямолинейной формы сжатых стержней. Критическая сила. Формула Эйлера. Влияние закрепления концов стержня на величину критической силы. Гибкость стержня. Пределы применимости формулы Эйлера. Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности, формула Ясинского. Стержни большой, средней и малой гибкости. Расчет на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемых напряжений. Условие устойчивости сжатых стержней. Практические расчеты стержней на устойчивость. Выбор материалов и рациональной формы поперечных сечений для сжатых стержней.

Задача 7

Стержень длиной l , изготовленный из стали Ст.3 ($\sigma_n = 200$ МПа), сжимается силой F , приложенной по оси. Требуется: найти размеры поперечного сечения при допускаемом напряжении на сжатие $[\sigma_c] = 160$ МПа (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом продольного изгиба $\varphi = 0,5$); найти коэффициент безопасности по устойчивости. Данные взять из таблицы 7.1.

Методические указания для решения задачи 7

1. Вычертить расчетную схему стержня и его поперечное сечение.
2. Провести главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня. Определить ось, относительно которой момент инерции принимает минимальное значение.
3. Выразить в общем виде (в долях искомого размера a или d) геометрические характеристики поперечного сечения стержня: площадь A , минимальный осевой момент инерции J_{\min} , минималь-

ный радиус инерции i_{\min} .

4. При решении задачи использовать метод последовательных приближений. Задаваясь вначале коэффициентом продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$ из условия устойчивости определяются площадь поперечного сечения стержня, его размеры, минимальный радиус инерции i_{\min} , гибкость стержня и коэффициент продольного изгиба φ_1^* . Если при этом окажется, что напряжение в поперечном сечении стержня значительно ($> 5\%$) отличается от допускаемого напряжения на устойчивость, то расчет следует повторить, задаваясь коэффициентом продольного изгиба $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2}$.

5. Определить предельную гибкость стержня, критическую силу.
6. Вычислить коэффициент безопасности по устойчивости.

Таблица 7.1 – Исходные данные к задаче 7

№ строки	F , кН	l , м	Схема закрепления концов стержня	Форма поперечного сечения стержня	
				а	б
1	100	3,0		1	
2	200	2,9		2	2
3	300	2,8		3	
4	400	2,7		4	4
5	500	2,6		5	
6	600	2,5		6	6
7	700	2,4		7	
8	800	2,3		8	8
9	900	2,2		9	
0	1000	2,1		0	0
	z	∂	∂	e	

Таблица 7.2 – Значения коэффициента продольного изгиба

Гибкость стержня λ	Сталь Ст 4,3, 2	Сталь Ст 5	Бетон		Дюралюминий Д16Т	Чугун СЧ 15-30 СЧ 15-18 СЧ 15-36 СЧ 21-40	Дерево (сосна)
			тяжелый	легкий			
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	1,00	1,00	0,999	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,96	0,96	0,998	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,90	0,86	0,835	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,84	0,73	0,700	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,76	0,68	0,568	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,70	0,59	0,455	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,63	0,52	0,353	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,57	0,46	0,269	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,51	-	0,212	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,45	-	0,172	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	-	0,142	-	0,25
120	0,45	0,36	-	-	0,119	-	0,22
130	0,40	0,33	-	-	0,101	-	0,18
140	0,36	0,29	-	-	0,087	-	0,16
150	0,32	0,26	-	-	0,076	-	0,14
160	0,29	0,24	-	-	-	-	0,12
170	0,26	0,21	-	-	-	-	0,11
180	0,23	0,19	-	-	-	-	0,10
190	0,21	0,17	-	-	-	-	0,09
200	0,19	0,16	-	-	-	-	0,08

Пример решения задачи 7

Определить размеры поперечного сечения и коэффициент безопасности по устойчивости деревянного стержня, показанного на рисунке 7.1, если $l = 2,5$ м; $F = 22$ кН; $[\sigma] = 8$ МПа.

Решение. Условие устойчивости сжатого стержня имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{оп}}} \leq \varphi [\sigma].$$

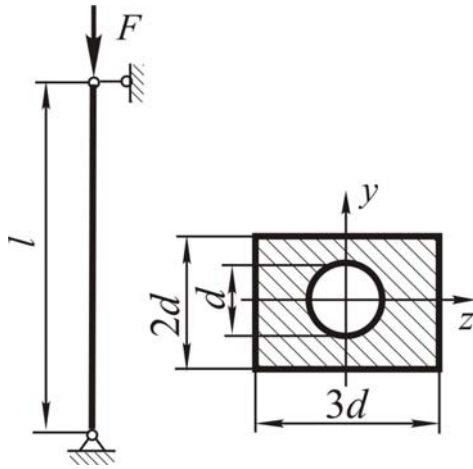


Рисунок 7.1 – Схема стойки и поперечного сечения

Отсюда выражаем площадь поперечного сечения стержня

$$A_{\text{оп}} = \frac{F}{\varphi [\sigma]}.$$

Пользуясь заданной формой и соотношением размеров поперечного сечения стержня, составляем выражения для определения площади поперечного сечения $A_{\text{оп}}$, размера d , минимального момента инерции I_{min} , минимального радиуса инерции i_{min} , гибкости стержня λ :

$$A_{\text{оп}} = 3d \times 2d - \frac{\pi d^2}{4} = 5,215d^2; \quad d = \sqrt{\frac{A_{\text{оп}}}{5,215}};$$

$$I_{\text{min}} = I_z = \frac{3d(2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 1,95d^4;$$

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{A_{\text{оп}}}} = \sqrt{\frac{1,95d^4}{5,215d^2}} = 0,612d;$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}} = \frac{1 \times 2500}{0,612d} = \frac{4085}{d}.$$

Подбор сечения производится методом последовательных приближений. В первом приближении принимаем коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$ и находим численные значения:

$$A_{\text{оп}1} = \frac{22000}{0,5 \times 8} = 5500 \text{ мм}^2; \quad d_1 = \sqrt{\frac{5500}{5,215}} = 32 \text{ мм};$$

$$\lambda_1 = \frac{4085}{32} = 127.$$

Из таблицы 7.2 принимаем значения φ при гибкости стержня

$$\lambda = 120 \quad - \quad \varphi = 0,22,$$

$$\lambda = 130 \quad - \quad \varphi = 0,18.$$

Интерполируя, находим действительное значение коэффициента продольного изгиба при гибкости стержня $\lambda = 127$:

$$\varphi_1^* = 0,22 - \frac{0,22 - 0,18}{130 - 120} (127 - 120) = 0,19.$$

Так как φ_1 и φ_1^* отличаются значительно (более 5%), то принимаем другое приближение и повторяем расчет:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,19}{2} = 0,35;$$

$$A_{\text{ср}2} = \frac{22000}{0,35 \times 8} = 7857 \text{ мм}^2; \quad d_2 = \sqrt{\frac{7857}{5,215}} = 39 \text{ мм};$$

$$\lambda_2 = \frac{4085}{39} = 105.$$

Из таблицы 7.2 принимаем значения φ при гибкости стержня

$$\lambda = 100 \quad - \quad \varphi = 0,31,$$

$$\lambda = 110 \quad - \quad \varphi = 0,25.$$

Интерполируя, находим действительное значение коэффициента продольного изгиба при гибкости стержня $\lambda = 105$.

$$\varphi_2^* = 0,31 - \frac{0,31 - 0,25}{110 - 100} (105 - 100) = 0,28.$$

Так как φ_1 и φ_1^* отличаются значительно (более 5%), то принимаем третье приближение и повторяем расчет:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^*}{2} = \frac{0,35 + 0,28}{2} = 0,32;$$

$$A_{\text{ср}3} = \frac{22000}{0,32 \times 8} = 8594 \text{ мм}^2; \quad d_3 = \sqrt{\frac{8594}{5,215}} = 41 \text{ мм}; \quad \lambda_3 = \frac{4085}{41} = 100.$$

Из таблицы 7.2 принимаем действительное значение коэффициента продольного изгиба при гибкости стержня $\lambda = 100$ $\varphi_3^* = 0,31$.

Так как φ_3 и φ_3^* отличаются незначительно (менее 5%), то проверяем выполнение условия устойчивости при $\varphi_3^* = 0,31$.

Определяем напряжение в материале стойки:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{ср}3}} = \frac{22000}{8594} = 2,56 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma_y] = \varphi_3^* \times [\sigma] = 0,31 \cdot 8 = 2,48 \text{ МПа}.$$

Перегрузка равна

$$\frac{\sigma - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} \cdot 100\% = \frac{2,56 - 2,48}{2,48} \cdot 100\% = 3,2\% < [5\%].$$

Перенапряжение допустимо.

Определяем предельную гибкость по формуле:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{п}}}},$$

где E – модуль упругости материала (для дерева $E = 10^4$ МПа);

$\sigma_{\text{п}}$ – предел пропорциональности материала (для дерева $\sigma_{\text{п}} = 20$ МПа).

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 10^4}{20}} = 70,2.$$

Так как фактическая гибкость стержня $\lambda = \lambda_3 = 100 > \lambda_{\text{пред}} = 70$, критическую силу определяем по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E I_{\text{min}}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \times 0,8 \times 10^4 \times 1,95 \times 41^4}{(1 \times 2500)^2} = 69412 \text{ Н}.$$

Коэффициент безопасности стержня по устойчивости равен

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{69412}{22000} = 3,2.$$

Таблица 7.2 – Значения коэффициента продольного изгиба

Гибкость стержня λ	Сталь Ст 4,3, 2	Сталь Ст 5	Бетон		Дюралюминий Д16Т	Чугун СЧ 15-30 СЧ 15-18 СЧ 15-36 СЧ 21-40	Дерево (сосна)
			тяжелый	легкий			
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	1,00	1,00	0,999	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,96	0,96	0,998	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,90	0,86	0,835	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,84	0,73	0,700	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,76	0,68	0,568	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,70	0,59	0,455	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,63	0,52	0,353	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,57	0,46	0,269	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,51	-	0,212	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,45	-	0,172	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	-	0,142	-	0,25
120	0,45	0,36	-	-	0,119	-	0,22
130	0,40	0,33	-	-	0,101	-	0,18
140	0,36	0,29	-	-	0,087	-	0,16
150	0,32	0,26	-	-	0,076	-	0,14
160	0,29	0,24	-	-	-	-	0,12
170	0,26	0,21	-	-	-	-	0,11
180	0,23	0,19	-	-	-	-	0,10
190	0,21	0,17	-	-	-	-	0,09
200	0,19	0,16	-	-	-	-	0,08

Окончание таблицы 7.2

Гибкость стержня λ	Сталь Ст 4,3, 2	Сталь Ст 5	Бетон		Дюралюминий Д16Т	Чугун СЧ 15-30 СЧ 15-18 СЧ 15-36 СЧ 21-40	Дерево (сосна)
			тяжелый	легкий			
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	1,00	1,00	0,999	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,96	0,96	0,998	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,90	0,86	0,835	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,84	0,73	0,700	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,76	0,68	0,568	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,70	0,59	0,455	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,63	0,52	0,353	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,57	0,46	0,269	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,51	-	0,212	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,45	-	0,172	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	-	0,142	-	0,25
120	0,45	0,36	-	-	0,119	-	0,22
130	0,40	0,33	-	-	0,101	-	0,18
140	0,36	0,29	-	-	0,087	-	0,16
150	0,32	0,26	-	-	0,076	-	0,14
160	0,29	0,24	-	-	-	-	0,12
170	0,26	0,21	-	-	-	-	0,11
180	0,23	0,19	-	-	-	-	0,10
190	0,21	0,17	-	-	-	-	0,09
200	0,19	0,16	-	-	-	-	0,08

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Подскребко, М.Д.* Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. – Минск : Выш. шк., 2007. – 797 с.: ил.
2. *Феодосьев, В.И.* Сопротивление материалов : учебник для вузов / В. И. Феодосьев. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов под редакцией В.К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.

Дополнительная

4. *Подскребко, М.Д.* Сопротивление материалов. – Мн.: Дизайн ПРО, 1998. – 552 с.: ил.
5. *Дарков, А.В.* Сопротивление материалов : учебник для техн. вузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.: ил.
6. Сопротивление материалов. Руководство к решению задач / М.Д. Подскребко, О.И. Мисуно, С.А. Легенький. – Мн.: БГАТУ, 2004. – 80 с.
7. Задачи по сопротивлению материалов (из сборника задач под ред. В.К. Качурина) / А.Е. Тетеркин. – Мн.: БИМСХ, 1988. – 80 с.
8. Сопротивление материалов : метод. пособие для самостоятельной работы студентов второго и третьего курсов / А.Е. Тетеркин, Д.Н. Колоско. – Мн.: БГАТУ, 2002. – 126 с.
9. Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф. Винокуров [и др.]. – Мн.: 1988. – 464 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.	3
ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ.	4
1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	5
<i>Задача 1.</i>	5
Методические указания для решения задачи 1.	5
Пример решения задачи 1.	8
2. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ	14
<i>Задача 2.</i>	15
Методические указания для решения задачи 2.	15
Пример решения задачи 2.	18
3. ИЗГИБ	21
<i>Задача 3.</i>	22
Методические указания для решения задачи 3.	22
Пример решения задачи 3.	26
4. КОСОЙ ИЗГИБ	30
<i>Задача 4.</i>	31
Методические указания для решения задачи 4.	31
Пример решения задачи 4.	34
5. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ).	41
<i>Задача 5.</i>	42
Методические указания для решения задачи 5.	42
Пример решения задачи 5.	44
6. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ	48
<i>Задача 6.</i>	48
Методические указания для решения задачи 6.	48
Пример решения задачи 6.	52
7. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ	57
<i>Задача 7.</i>	57
Методические указания для решения задачи 7.	57
Пример решения задачи 7.	61
ЛИТЕРАТУРА.	67

Для заметок

Для заметок

РЕПОЗИТОРИЙ БГАТУ

Для заметок

Учебное издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Составители:

Мисуно Олег Иосифович,
Колоско Дина Николаевна,
Легенький Сергей Александрович

Ответственный за выпуск *В.Н. Основин*
Редактор *Н.А. Антипович*
Компьютерная верстка *А.И. Стебуля*

Подписано в печать 29.10.2009 г. Формат 60×84¹/₁₆.

Бумага офсетная. Офсетная печать.

Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 3,22. Тираж 200 экз. Заказ 962.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».

ЛИ № 02330/0131734 от 10.02.2006.

ЛП № 02330/0131656 от 02.02.2006.

Пр. Независимости, 99–2, 220023, Минск.