МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов высших учебных заведений
по направлению образования
1-25 01 07 Экономика и управление на предприятии
1-26 02 02 Менеджмент

В 2-х частях

Часть 2

Минск
2009

УДК 51(07)
ББК 22.1я 7
М 34

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом факультета предпринимательства и управления БГАТУ

Протокол № 7 от 28 мая 2009 г.

Авторы:
канд. физ.-мат. наук, доц. *И.М. Морозова*,
канд. физ.-мат. наук, доц. *Т.А. Жур*,
ассист. каф. ВМ *О.М. Кветко*,
ассист. каф. ВМ *О.В. Рыкова,*
канд. физ.-мат. наук, доц. *А.А. Тиунчик*

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теории функций БГУ
М.В. Дубатовская;
д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный
сотрудник Института математики НАН Беларуси
П.И. Соболевский

М34 **Высшая математика:** В 2-х ч. Ч. 2: учеб.-метод. комплекс / И.М. Морозова [и др.] – Минск: БГАТУ, 2009. – 248 с.
ISBN 978-985-519-126-2.

УДК 51(07)
ББК 22.1я 7

ISBN 978-985-519-126-2 (ч. 2)
ISBN 978-985-519-058-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методический комплекс (УМК) дисциплины «Высшая математика» предназначен для студентов специальностей 1-25 01 07 «Экономика и управление на предприятии», 1-26 02 02 «Менеджмент» высших учебных заведений.

УМК составлен в соответствии с учебной программой по учебной дисциплине «Высшая математика», разработанной по модульной технологии обучения. Каждый модуль содержит теоретический материал, задачи для управляемой самостоятельной работы студентов, задания для контроля знаний по модулю. В конце УМК приведены образцы итоговых тестов.

УМК состоит из двух частей. В **первой части** комплекса содержится материал по линейной алгебре, системам линейных алгебраических уравнений и неравенств, векторной алгебре, аналитической геометрии, кривым второго порядка, функции одной переменной, дифференциальному исчислению функции одной переменной, функции нескольких переменных.

Во **вторую часть** УМК включен материал по интегральному исчислению, обыкновенным дифференциальным уравнениям, рядам, теории вероятностей и математической статистике, математическому программированию.

В результате изучения дисциплины «Высшая математика» студент должен

знать:

- методику применения методов матричной алгебры и аналитической геометрии при решении конкретных задач;
- методику применения аппарата функции одной переменной, методов дифференциального исчисления функции одной и нескольких переменных при решении математических и прикладных задач;
- прикладные аспекты интегрального исчисления и дифференциальных уравнений;
- основные определения, теоремы и соотношения теории вероятностей;
- основные законы распределения случайных величин и их практические приложения;

- методы обработки и анализа статистических данных;
- содержание практических задач, подлежащих экономико-математическому моделированию;
- методы и алгоритмы решения оптимизационных экономических и производственных задач;

уметь:

- решать формальные и прикладные задачи матричной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа, строить математические модели и решать задачи с экономическим содержанием;
- применять вероятностные и статистические методы при решении задач прикладного характера, осуществлять сбор и обработку статистических данных, применять методы анализа полученных данных;
- моделировать простейшие экономические ситуации, связанные с оптимизацией исследуемых процессов;
- решать оптимизационные задачи методами математического программирования и с использованием пакетов прикладных компьютерных программ;
- обосновывать оптимальное решение и проводить экономический анализ полученных результатов.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ, СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ВТОРОЙ ЧАСТИ УМК

Модуль 9
Неопределенный интеграл

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Теорема о первообразной. [1] гл. 10, §1.
2. Основные свойства неопределенного интеграла. [1]гл. 10, §3.
3. Таблица основных интегралов. [1] гл. 10, §2.
4. .Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, интегрирование путем замены

переменной (метод подстановки) и интегрирование по частям. [1] гл. 10, §4,6.

5. Интегрирование простейших рациональных дробей. [1] гл. 10, §7.
6. 6.Интегрирование дробно-рациональных функций. [1] гл. 10, §8, 9.
7. Нахождение интегралов вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. [1] гл. 10, §5.
8. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических. [1] гл. 10, §12.

Модуль 10
Определённый интеграл.

1. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл. [1] гл. 11, §1,2.
2. Основные свойства определенного интеграла. [1] гл. 11, §3.
3. Теорема о среднем значении определенного интеграла. [1] гл. 11, §3.
4. Теорема о производной определенного интеграла по верхнему пределу. [1] гл. 11, §4.
5. Формула Ньютона-Лейбница. [1] гл. 11, §4.
6. Замена переменной в определенном интеграле. [1] гл. 11, §5.
7. Вычисление определенных интегралов путем интегрирования по частям. [1] гл. 11, §6.
8. Вычисление с помощью определенных интегралов площадей плоских фигур, длины дуги кривых, объемов тел вращения. [1] гл. 12, §7.
9. Определённый интеграл в экономических задачах. [7] тема 10, [4], гл.7.

Модуль 11
Несобственный интеграл

1. Несобственные интегралы 1-го и 2-го. [1] гл. 11, §7.

Модуль 12
Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения, порядок уравнения. Общее и частное решения. Общий и частный интегралы. [1] гл. 13, § 1, 2.
2. Дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши. [1] гл. 13, § 3.
3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. [1] гл. 13, § 4.
4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. [1], гл. 13, § 5.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. [1], гл. 13, § 7.
6. Дифференциальные уравнения второго порядка. Задача Коши. [3], гл. 10, § 1.
7. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка. [3], гл. 10, § 2.
8. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. [1], гл. 13, § 1.
9. Дифференциальные уравнения первого и второго порядков в экономике. [3], гл. 11, § 1, 2.

Модуль 13
Ряды

1. Понятие числового ряда и его суммы. [1], гл. 16, § 1.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд. [1], гл. 16, § 2.
3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов: признак сравнения, признак Д'Аламбера, интегральный признак Коши. [1], гл. 16, § 3, 4, 6.

4. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. [1], гл. 16, § 7.
5. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. [1], гл. 16, § 8.
6. Степенной ряд. Теорема Абеля. [1], гл. 16, § 13.
7. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. [1],гл.16, § 13.
8. 8.Ряды Тейлора и Маклорена. Условия разложимости функций в степенной ряд. [1], гл. 16, § 16.
9. Степенные ряды функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = e^x$, $y = \ln(1+x)$. [1], гл. 16, § 17, 20.
10. Биномиальный ряд. [1], гл. 16, § 19.
11. Приложения рядов к приближенным вычислениям. [1], гл. 16, § 20, 21, 22.
12. Использование рядов в задачах экономики. [7], гл. 14, § 1.

Модуль 14
Теория вероятностей.

1.Некоторые задачи комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания, их свойства и вычисление. [16], §1.4.
2. Основные понятия теории вероятностей: события, классификация событий. [8], §1.1, 1.2.
3.* Частота событий, ее основные свойства. [8], §1.3.
4. Вероятность события: статистическое, классическое и геометрическое определения вероятностей событий. [8], §1.4, 1.5.
5. Основные аксиомы теории вероятностей. Непосредственное вычисление вероятностей событий. [8], §1.6.
6. Операции сложения и умножения событий. [8], §1.1, 1.2.
7. Теоремы сложения и умножения вероятностей. [8], §1.7, 1.8, 1.9.
8. Формула полной вероятности. [8], §1.10.
9. Формула гипотез (Байеса). [8], §1.11
10. Повторение испытания. Формула Бернулли. [17], §1.10.
11. Формула Пуассона. [17], §1.12.

12. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. [8], §1.12, 1.13.

* для самостоятельного изучения.

13. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний. [17], §1.11.
14. Случайная величина. Виды случайных величин. Закон распределения дискретной случайной величины. [8], §2.1, 2.2.
15. Интегральный закон (функция распределения) распределения случайной величины, его свойства. [8], §2.1, 2.2.
16. Дифференциальная функция (плотность) распределения и ее свойства. [17], §2.6.
17. Числовые характеристики распределения случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, их свойства. Среднее квадратическое отклонение. [8], §2.5, 2.6.
18. Законы распределения случайных величин: биномиальный, Пуассона, равномерный и показательный. Их числовые характеристики. [8], §2.7, 2.8, 2.9, 2.10.
19. Нормальный закон распределения и его приложения. Правило трех сигм. [8], §2.11, 2.12.
20. Системы случайных величин. Законы распределения систем. Понятие условного закона распределения. [8], §3.1, 3.2, 3.3.
21.Числовые характеристики распределения двумерной случайной величины, корреляционные момент, его свойства. [8], §3.7, [9] гл.4, §17, 18.

Модуль 15
Математическая статистика.

1. Математическая статистика, ее основные понятия и задачи. [9], гл. 15, §1–3.
2. Выборка и генеральная совокупность. Эмпирические законы распределения. Полигон, гистограмма. [9], гл. 15, §4-8.
3. Числовые характеристики статистического распределения: среднее, дисперсия, корреляционный момент. [9], гл. 16, §1–4, 9, 10, гл. 17.

4. Точечные и интервальные оценки числовых характеристик: математического ожидания и дисперсии. [9], гл. 16, §14-19.
5.* Построение нормальной кривой по опытным данным. Асимметрия и эксцесс. [9], гл. 17, §7, 8.
6.* Метод наименьших квадратов. [8], §7.14.
7. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой регрессии. Свойства выборочного коэффициента корреляции. [9], гл. 18, §4–7, 9.
8.* Статистическая проверка гипотез: нулевая и конкурирующая гипотезы. Ошибки первого и второго рода. [9], гл. 19, §1,2.
9.* Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия. Критические точки. [9], гл. 19, §3–5.
10.* Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции. [9], гл. 19, §21.
11.* Проверка гипотезы о нормальности распределения генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона. [9], гл. 19, §22.

Модуль 16
Математическое программирование

1. Элементы линейного программирования: постановка задачи линейного программирования (ЗЛП), основные свойства ЗЛП, первая и вторая геометрический интерпретации.[17], § 1.1-1.3.
2. Симплекс-метод.[17], § 1.4-1.5.
3. Теория двойственности в линейном программировании. Построение двойственной задачи, решение ЗЛП двойственным симплекс- методом. [17]. § 1.6-1.7.
4. Транспортная задача и методы ее решения. Матричная постановка транспортной задачи. Метод потенциалов для транспортной задачи [17], § 3.1.
5*. Сетевые задачи. Метод потенциалов для транспортной задачи в сетевой постановке. Задача о кратчайшем пути. [17], § 3.2.
6. Постановка задач целочисленного, дробно-линейного и параметрического программирования. [18], § 8.5, § 8.9, § 8.10.

7*. Метод Гомори. Транспортная, параметрическая задачи Экономическая интерпретация задач дробно-линейного и параметрического программирования. [17], § 4.2.

* для самостоятельного изучения.

8*. Основные понятия о задачах нелинейного и динамического программирования. Примеры задач динамического программирования. Решение задач нелинейного программирования методом допустимых направлений. [17], § 2.1-2.2, § 5.1-5.4.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА
Основная литература

1. Пискунов Н.С. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. 1985. Т.1.
2. Пискунов Н.С. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. 1985. Т.2.
3. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Мн.: Высш. шк. 1985-1987, ч.2, ч.3.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании. М.: «Дело», 2001.
5. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Индивидуальные домашние задания по высшей математике. Мн.: Высш. шк. 2000, ч.2 и ч.3.
6. Гусак А.Н. Высшая математика. Мн.: Тетра Системс 2000, ч.1 и ч.2.
7. Малыхин В.И. Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 2001.
8. Гурский, Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики / Е.И. Гурский. – Мн.: Высш. шк., 1971.
9. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика/ В.Е. Гмурман. – Мн.: Высш. шк., 1977.
10. Белько, И.В.Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И.В.Белько, Г.П. Свирид. — Мн.: ООО «Новое знание», 2004.
11. Калинина, В.М. Математическая статистика / В.М. Калинина, В.Ф. Панкин. – Мн.: Высш. шк., 2001.
12. Рябушко, А.П. Индивидуальные домашние задания по высшей математике / А.П. Рябушко. – Мн.: Высш. шк., 2006. — Ч. 4.

13. Фигурин, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика / В.А. Фигурин, В.В. Оболонкин. — М.: ООО «Новое знание», 2000.
14. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: математическое программирование.- Мн.: Вышэйшая школа, 2001.

* для самостоятельного изучения.

15. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. –Мн.: Вышэйшая школа, 2001.
16. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. СПб: Питер 2000
17. Глухов В.В. Менеджмент: Учебник для вузов. СПб: Питер 2007

Дополнительная литература

18. Высшая математика. Общий курс. Под общей редакцией С.А. Самаля. М.: Высшая школа, - 2000.
19. Лихолетов И.И., Мицкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Мн.: Вышэйшая школа, - 1976.
20. Горелова, Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика / Г.В. Горелова, И.А. Кацко. — Феникс, Ростов-на-Дону, 2002.
21. Унсович, А.Н. Краткий курс высшей математики для экономистов / А.Н. Унсович. — Барановичская укрупненная типография, 2000.
22. Белько, И.В. Высшая математика для экономистов, III семестр / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. - М.: ООО «Новое знание», 2002.
23. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах – М.: Высшая школа, 1986.
24. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И.Ермакова. – М., Инфра-М, 2003.
25. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. – М.: Физматлит, 2005 .
26. Высшая математика для экономистов /Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. - М.: Банки и биржи, 1997.

МОДУЛЬ 9. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Неопределённый интеграл и его свойства

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т.е.

$$\boxed{F'(x) = f(x)}.$$

Пример 9.1.

Функция $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$, так как $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$.

Очевидно, что первообразными для данной функции $f(x) = x^2$ также являются функции: $F(x) = x^2 + 1$;

$$F(x) = x^2 + 2;$$

$$F(x) = x^2 + 3; \ldots$$

Т.е. совокупность всех первообразных для функции $f(x) = 2x$ можно записать в виде $F(x) = x^2 + c$, где c — любое число (постоянная).

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции $f(x)$ и обозначается

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*.

Пример 9.2.

$\int 2xdx = x^2 + c$, где $f(x) = 2x$ — подынтегральная функция.

Операция нахождения неопределённого интеграла от данной функции называется *интегрированием* этой функции.

Интегрирование — операция, обратная операции дифференцирования (т.е. операции, заключающейся в нахождении производной от данной функции). У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределённый интеграл.

Таблица простейших интегралов

1. $\int du = u + c$;	10. $\int ctgu\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + c$;
2. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\alpha \neq -1$;	11. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$
3. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$	12. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$
4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$	13. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\lvert tg\dfrac{u}{2}\rvert + c$
5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$, $(a > 0,\ a \neq 1)$	14. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + c$
6. $\int e^u du = e^u + c$	15. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{u}{a} + c$
7. $\int \sin u\,du = -\cos u + c$	16 $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u+a}{u-a}\right\rvert + c$
8. $\int \cos u\,du = \sin u + c$	17. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c$
9. $\int tgu\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + c$	18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + c$

Пример 9.3. Используя таблицу, найдите следующие интегралы:

$$1)\ \int x^{10} dx;\quad 2)\ \int 10^x dx;\quad 3)\ \int \sqrt[3]{x^{10}} dx;\quad 4)\ \int \frac{1}{x^{10}} dx;$$

$$5)\ \int \frac{\sqrt{x}}{x^{10}} dx;\quad 6)\ \int \frac{dx}{x^2+9};\quad 7)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}};\quad 8)\ \int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}.$$

$$1)\ \int x^{10} dx = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{табличным}\\ \text{интегралом 2}\end{array}\right| = \frac{x^{10+1}}{10+1} + c = \frac{x^{11}}{11} + c.$$

$$2)\ \int 10^x dx = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{табличным}\\ \text{интегралом 5}\end{array}\right| = \frac{10^x}{\ln 10} + c.$$

Для решения примеров 3)-5) преобразуем подынтегральные функции с помощью следующих правил:

Действия со степенями

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$3)\ \int \sqrt[3]{x^{10}} dx = \int x^{\frac{10}{3}} dx = \left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{табличным}\\ \text{интегралом2}\end{array}\right| = \frac{x^{\frac{10}{3}+1}}{\frac{10}{3}+1} + c =$$

$$=\frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}}+c.$$

4) $$\int\frac{1}{x^{10}}dx=\int x^{-10}dx=\left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{табличным}\\ \text{интегралом2}\end{array}\right|=\frac{x^{-10+1}}{-10+1}+c=$$

$$=-\frac{1}{9}x^{-9}+c.$$

5) $$\int\frac{\sqrt{x}}{x^{10}}dx=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{10}}dx=\int x^{\frac{1}{2}-10}dx=\int x^{-\frac{19}{2}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{табличным}\\ \text{интегралом2}\end{array}\right|=\frac{x^{-\frac{19}{2}+1}}{-\frac{19}{2}+1}+c=-\frac{2}{17}x^{-\frac{17}{2}}+c.$$

6) $$\int\frac{dx}{x^2+9}=\int\frac{dx}{3^2+x^2}=\left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{табличным}\\ \text{интегралом 15}\end{array}\right|=\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+c.$$

7) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-(\sqrt{7})^2}}=\left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{табличным}\\ \text{интегралом 18}\end{array}\right|=$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right|+c.$$

8) $$\int\frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-x^2}}=\left|\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{табличным}\\ \text{интегралом 17}\end{array}\right|=$$

$$=\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}+c.$$

Основные свойства неопределённого интеграла

1. $\int dF(x)=F(x)+c$
2. $d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx$
3. $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$, где c — const
4. $\int[f_1(x)+f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$
5. $\int f(u)du=F(u)+c$,

   где $u=\varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция.

Пример 9.4. Используя свойства неопределённого интеграла и таблицу, найдите следующие интегралы:

1) $\int(3x^5-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-3)dx$; 2) $\int\frac{x^2-3x+5\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x}}dx$.

1) Воспользуемся свойствами 3 и 4:

$$\int(3x^5-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-3)dx=3\int x^5dx-2\int x^{-\frac{2}{3}}dx-3\int dx=$$

$$=3\frac{x^{5+1}}{5+1}-2\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}-3x+c=\frac{3}{6}x^6-2\cdot3x^{\frac{1}{3}}-3x+c=$$

$$=\frac{1}{2}x^6-6x^{\frac{1}{3}}-3x+c.$$

2) $$\int\frac{x^2-3x+5\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x}}dx=\int(\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{3x}{\sqrt{x}}+\frac{5\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x}})dx=$$

$$=\int x^{2-\frac{1}{2}}dx-3\int x^{1-\frac{1}{2}}dx+5\int\cos x dx=$$

$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx+5\sin x+c=$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5\sin x + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 5\sin x + c.$$

§ 2. Замена переменной в неопределённом интеграле (метод подстановки)

Пример 9.5. Найдите $\int \sin(2x+1)dx$.

I способ

$$\int \sin(2x+1)dx = \left| \begin{array}{c} \text{сравним данный} \\ \text{интеграл с табличным} \\ \int \sin u du = -\cos u + c \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(\overset{u}{\frown}{(2x+1)})d(\overset{u}{\frown}{(2x+1)}) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{перед знаком интеграла возник} \\ \text{коэффициент } \frac{1}{2} \text{ так, как} \\ d(2x+1) = (2x+1)'dx = 2dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c.$$

Такой **метод подведения под знак дифференциала** является частным случаем метода замены переменной. Он основан на свойстве 5 неопределённого интеграла и формуле:

$$\boxed{du = u'dx}, \; u = \varphi(x).$$

Пример 1.5. Найдите $\int \sin(2x+1)dx$.

II способ

$$\int \sin(2x+1)dx = \left| \begin{array}{ll} \text{сделаем замену переменной} & \\ & 2x+1 = t \\ \text{тогда} & d(2x+1) = dt \\ \text{т.е.} & 2dx = dt \\ & dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| =$$

$$\int \sin t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c.$$

Здесь мы применили **метод замены переменной**.

Пример 9.6. Найдите $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x+x^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{выделим полный квадрат} \\ 3-2x+x^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 1 + 1 + 2 = \\ = (x-1)^2 + 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(\sqrt{2})^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{воспользуемся} \\ \text{табличным} \\ \text{интегралом 18} \end{array} \right| =$$

$$= \ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+2}\right| + c = \ln\left|x-1+\sqrt{3-2x+x^2}\right| + c.$$

Пример 9.7. Найдите $\int \frac{x-1}{x^2+5x}dx$.

$$\int \frac{x-1}{x^2+5x}dx = \int \frac{x}{x^2+5x}dx + \int \frac{-1}{x^2+5x}dx =$$

$$= \int \frac{x}{x(x+5)}dx - \int \frac{1}{x^2+2\cdot x\cdot \frac{5}{2}+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x+5} - \int \frac{dx}{(x+\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+5)} + \int \frac{dx}{(\frac{5}{2})^2-(x+\frac{5}{2})^2} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} + \int \frac{d(x+5)}{(\frac{5}{2})^2-(x+\frac{5}{2})^2} =$$

$$= \ln|x+5| + \frac{1}{2\cdot 5/2}\ln\left|\frac{x+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}}{x+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}\right| + c = \ln|x+5| + \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+5}{x}\right| + c .$$

Пример 9.8. Найдите $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \left| \begin{array}{c} \text{сделаем замену переменной} \\ \ln x = t \\ d(\ln x) = dt \\ \frac{1}{x}dx = dt \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c .$$

§ 3. Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du} \qquad (9.1)$$

Среди интегралов, берущихся по частям, выделяют три основных класса интегралов:

1.	$\int x^n \sin ax dx$, $\int x^n \cos ax dx$, $\int x^n e^{ax} dx$; $\rightarrow$	Здесь полагают $u = x^n$.
2.	$\int x^n \ln x dx$, $\int x^n \arcsin x dx$, $\int x^n \arccos x dx$, $\int x^n \mathrm{arctg}\, x dx$, $\int x^n \mathrm{arcctg}\, x dx$; $\rightarrow$	Здесь полагают $dv = x^n dx$..
3.	$\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$. $\rightarrow$	Полагают либо $u = e^{ax}$, либо $dv = e^{ax} dx$.

Пример 9.9. Найдите $\int x^3 \ln x dx$.

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{matrix} dv = x^3 dx & \rightarrow & v = \int dv = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \\ u = \ln x & \rightarrow & du = u' dx = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{x^4}{16} + c.$$

Пример 9.10. Найдите $\int (2x-1)e^{3x} dx$.

$$\int (2x-1)e^{3x} dx = \left| \begin{matrix} u = 2x-1 & \rightarrow & du = (2x-1)' dx = 2dx \\ dv = e^{3x} dx & \rightarrow & v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} \end{matrix} \right| =$$

$$= (2x-1) \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 2dx = (2x-1) \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx =$$

$$= (2x-1) \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{2}{9} e^{3x} + c.$$

Замечание. Иногда формулу (9.1) применяют несколько раз подряд.

Пример 9.11. Найдите $\int x^2 \cos 2x dx$.

$$\int x^2 \cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & \rightarrow & du = (x^2)' dx = 2x dx \\ dv = \cos 2x dx & \rightarrow & v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x \cdot 2x dx = \frac{x^2}{2} \sin 2x - \int x \sin 2x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & \rightarrow & du = (x)' dx = dx \\ dv = \sin 2x dx & \rightarrow & v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \left(x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c.$$

§ 4. Интегрирование дробно-рациональных функций

__Рациональной функцией__ называют дробь вида

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0},$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно.

Если $m \geq n$, то дробь называется *__неправильной,__* если $m < n$ – *__правильной__*.

Правильные дроби следующих четырёх типов называются простейшими (или элементарными) дробями:

I.	$\dfrac{A}{x-a}$;
II.	$\dfrac{A}{(x-a)^k}$ (k=2,3,4,…);
III.	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$;
IV.	$\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k=2,3,4,…).

При этом предполагается, что A, B, a, p, q — действительные числа, а квадратный трёхчлен x^2+px+q в дробях III и IV типов не имеет действительных корней (т.е. $p^2-4q<0$).

Пример 9.12. Найдите

1) $\int\frac{5dx}{x+2}$; 2) $\int\frac{10dx}{(x+4)^5}$;

3) $\int\frac{6x-7}{x^2+4x+13}dx$; 4) $\int\frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}dx$.

1) Это дробь — простейшая I типа.

$$\int\frac{5dx}{x+2}=5\int\frac{d(x+2)}{x+2}=5\ln|x+2|+c.$$

2) Это дробь — простейшая II типа.

$$\int\frac{10dx}{(x+4)^5}=10\int(x+4)^{-5}d(x+4)=10\frac{(x+4)^{-4}}{-4}+c=$$

$$=-\frac{5}{2}(x+4)^{-4}+c.$$

3) Это дробь — простейшая III типа.
(Дискриминант квадратного трёхчлена в знаменателе: $D=4^2-4\cdot13=16-52=-36<0$.)

$$\int\frac{6x-7}{x^2+4x+13}dx=\left|\begin{array}{c}\text{выделим в числителе}\\ \text{производную знаменателя}\\ (x^2+4x+13)'=2x+4\end{array}\right|=$$

$$=3\int\frac{2x-\frac{7}{3}}{x^2+4x+13}dx=3\int\frac{2x+4-4-\frac{7}{3}}{x^2+4x+13}dx=$$

$$=3\int\frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx+3\int\frac{-4-\frac{7}{3}}{x^2+4x+13}dx=$$

$$=3\int\frac{d(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13}+3\int\frac{-\frac{19}{3}}{x^2+4x+13}dx=$$

$$=3\ln|x^2+4x+13|-19\int\frac{dx}{x^2+2\cdot x\cdot2+4-4+13}dx=$$

$$=3\ln|x^2+4x+13|-19\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}dx=$$

$$=3\ln|x^2+4x+13|-\frac{19}{3}arctg\frac{x+2}{3}+c.$$

4) Это дробь — простейшая IV типа.
(Дискриминант квадратного трёхчлена в знаменателе: $D=(-2)^2-4\cdot17=4-72=-68<0$. Выделим в числителе производную этого трёхчлена $(x^2-2x+17)'=2x-2$.)

$$\int\frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}dx=4\int\frac{2x-2+2+\frac{5}{4}}{(x^2-2x+17)^2}dx=$$

$$=4\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+17)^2}dx+4\int\frac{\frac{13}{4}}{(x^2-2x+17)^2}dx=$$

$$=4\int(x^2-2x+17)^{-2}d(x^2-2x+17)+13\int\frac{dx}{(x^2-2x+17)^2}=$$

$$=4\frac{(x^2-2x+17)^{-1}}{-1}+13\int\frac{dx}{(x^2-2x+1-1+17)^2}=$$

$$=-4(x^2-2x+17)^{-1}+13\int\frac{dx}{((x-1)^2+16)^2}=$$

$$=\frac{-4}{x^2-2x+17}+13\int\frac{d(x-1)}{((x-1)^2+4^2)^2}=(*)$$

Далее воспользуемся рекуррентной формулой, понижающей степень знаменателя подынтегральной дроби:

$$\boxed{\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{y}{(y^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}}$$

Для нашего случая $a=4$, $n=2$.

$$(*)=\frac{-4}{x^2-2x+17}+13\Big(\frac{1}{2(2-1)\cdot 4^2}\cdot\frac{x-1}{((x-1)^2+4^2)^{2-1}}+$$
$$+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\int\frac{d(x-1)}{((x-1)^2+4^2)^{2-1}}\Big)=$$
$$=\frac{-4}{x^2-2x+17}+\frac{13}{32}\cdot\frac{x-1}{(x-1)^2+4^2}+\frac{13}{32}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+4^2}=$$
$$=\frac{-4}{x^2-2x+17}+\frac{13x-13}{32(x^2-2x+17)}+\frac{13}{32}\cdot\frac{1}{4}arctg\frac{x-1}{4}+c=$$
$$=\frac{-4}{x^2-2x+17}+\frac{13x-13}{32x^2-64x+544}+\frac{13}{128}arctg\frac{x-1}{4}+c.$$

Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей (указанных четырёх типов):

$$\boxed{\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_m(x)}{\ldots(x-a)^k\ldots(x^2+px+q)^l}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+ +\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}.}$$

Пример 9.13. Найдите $\int\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}dx$.

Подынтегральная дробь — правильная. Разложим её на сумму простейших дробей первого типа:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}.$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B, приведём дроби в правой части равенства к общему знаменателю:

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}\Rightarrow$$
$$7x+4=A(x+2)+B(x-3);$$
$$7x+4=Ax+2A+Bx-3B;$$
$$7x+4=(A+B)x+2A-3B;$$
$$\begin{cases}A+B=7\\2A-3B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=7-B\\2(7-B)-3B=4\end{cases}\Rightarrow 14-2B-3B=4;$$
$$-5B=-10;$$
$$B=2;$$
$$\begin{cases}B=2\\A=7-B=7-2=5\end{cases}.$$

$$\int\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}dx=\int\frac{5}{x-3}dx+\int\frac{2}{x+2}dx=5\ln|x-3|+2\ln|x+2|+c.$$

Если дробь неправильная, то выделяют целую часть. Для этого числитель делят "уголком" на знаменатель.

Пример 9.14. Найдите $\int\frac{2x^3+3}{x^2+x+1}dx$.

Данная подынтегральная дробь — неправильная (т.к. степень числителя — 3, а знаменателя — 2), поэтому сначала выделим целую часть:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;2x^3+3 & x^2+x+1 \\
\underline{2x^3+2x^2+2x} & 2x-2 \\
-\;-2x^2-2x+3 & \\
\underline{-2x^2-2x-2} & \\
5 &
\end{array}
$$

Следовательно, неправильную дробь можно представить в виде:

$$\frac{2x^3+3}{x^2+x+1}=2x-2+\frac{5}{x^2+x+1}.$$

Значит, $\displaystyle\int\frac{2x^3+3}{x^2+x+1}dx=\int(2x-2+\frac{5}{x^2+x+1})dx=$

$$=\int 2xdx+\int(-2)dx+\int\frac{5}{x^2+x+1}dx=$$

$$=2\int xdx-2\int dx+5\int\frac{dx}{x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}=$$

$$=2\frac{x^2}{2}-2x+5\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=x^2-2x+5\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(x+\frac{1}{2})^2}=$$

$$=x^2-2x+5\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)+c=$$

$$=x^2-2x+\frac{10}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

Пример 9.15. Найдите $\displaystyle\int\frac{x^5-x^2-2}{x^2(x^2+1)}dx$.

Дробь $\displaystyle\frac{x^5-x^2-2}{x^2(x^2+1)}$ является неправильной (т.к. степень числителя — 5, а знаменателя — 4). Выделим целую часть:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^5-x^2-2 & x^4+x^2 \\
\underline{x^5+x^3} & x \\
-x^3-x^2-2 &
\end{array}
$$

Тогда,

$$\int\frac{x^5-x^2-2}{x^2(x^2+1)}dx=\int\left(x+\frac{-x^3-x^2-2}{x^2(x^2+1)}\right)dx=\int xdx-\int\frac{x^3+x^2+2}{x^2(x^2+1)}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^3+x^2+2}{x^2(x^2+1)}dx=(*).$$

Вычислим последний интеграл разложением на простейшие рациональные дроби:

$$\frac{x^3+x^2+2}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю, и приравняв числители, получим

$$x^3+x^2+2=Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2;$$

$$x^3+x^2+2=Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+Dx^2;$$

$$x^3+x^2+2=(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B;$$

Применим метод неопределенных коэффициентов, т.е. будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & 1=A+C \\ x^2: & 1=B+D \\ x: & 0=A \\ x^0: & 2=B \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} A=0 \\ B=2 \\ C=1 \\ D=-1 \end{array}.$$

Значит,

$$(*)=\frac{x^2}{2}-\int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2\int x^{-2}dx-\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+arctgx=$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+arctgx+c.$$

§ 5. Интегрирование тригонометрических функций

I. Если подынтегральная функция представляет собой произведение чётных степеней синуса и косинуса, то есть данный интеграл имеет вид

$$\boxed{\int\sin^m x\cos^n xdx},$$

где m и n — <u>четные неотрицательные</u>, то применяем формулы понижения степени

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

II. Если подынтегральная функция представляет собой произведение степеней синуса и косинуса, то есть данный интеграл имеет вид

$$\boxed{\int\sin^m x\cos^n xdx},$$

где хотя бы одно из чисел m и n — <u>нечетное неотрицательное</u>, то от нечетной степени отделяем множитель в первой степени и вносим его под знак дифференциала. Оставшуюся четную степень выражаем через дополнительную функцию с помощью формулы $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Пример 9.16. Найдите 1) $\int\sin^4 x\cdot\cos^3 xdx$; 2) $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 xdx$.

1) $$\int\sin^4 x\cdot\cos^3 xdx=\int\sin^4 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos xdx=$$

$$=\int\sin^4 x\cdot(1-\sin^2 x)\cos xdx=\left|\begin{array}{c}\sin x=t\\ d(\sin x)=dt\\ \cos xdx=dt\end{array}\right|=$$

$$=\int t^4(1-t^2)dt=\int t^4dt-\int t^6dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+c=$$

$$=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+c.$$

2) $$\int\sin^4 x\cdot\cos^2 xdx=\int\sin^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 xdx=$$

$$=\int\sin^2 x\cdot(\sin x\cdot\cos x)^2dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)\sin^2 2xdx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}dx-\frac{1}{16}\int\cos 4xdx-\frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3}+c=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{54}\sin^3 2x+c.$$

III. Для вычисления интегралов

$$\boxed{\int\sin ax\sin bxdx},\ \boxed{\int\cos ax\cos bxdx},\ \boxed{\int\sin ax\cos bxdx}$$

применяют формулы
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Пример 9.17. Найдите $\int \sin 4x \cdot \cos 2x dx$.

$$\int \sin 4x \cdot \cos 2x dx = \int \frac{1}{2}(\sin(4x-2x)+\sin(4x+2x))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(4x-2x)+\sin(4x+2x))dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \frac{1}{2}\int \sin 6x dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + c .$$

IV. В общем случае интегралы вида

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)dx},$$

где R — рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональной функции новой переменной t с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, при этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Пример 9.18. Найдите интеграл $\int \frac{dx}{2+3\sin x + 2\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(x/2) = t \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{2+3\dfrac{2t}{1+t^2}+2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{6t+4} = \int \frac{dt}{3t+2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3t+2)}{3t+2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3t+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right| + c .$$

§ 6. Интегрирование иррациональных функций

Интегралы вида

$$\boxed{\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)dx},$$

где R — рациональная функция, $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots, m_s, n_s$ — целые числа, вычисляются с помощью подстановки

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^k},$$

где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}, \ldots, \frac{m_s}{n_s}$.

Пример 9.19. Найдите интеграл. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{2x+3}-1\right)\sqrt{2x+3}}$.

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{2x+3}-1\right)\sqrt{2x+3}} = \int \frac{dx}{\left((2x+3)^{1/4}-1\right)(2x+3)^{1/2}} =$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{знаменатели дробей}: 4 \text{ и } 2\\ \text{НОК}(4;2)=4\\ 2x+3=t^4\\ x=\dfrac{t^4-3}{2}\\ dx=2t^3dt\end{array}\right|=\int\frac{2t^3dt}{\left(\left(t^4\right)^{1/4}-1\right)\left(t^4\right)^{1/2}}=$$

$$=\int\frac{2t^3dt}{(t-1)t^2}=2\int\frac{tdt}{t-1}=\left|\begin{array}{c|c}\underline{-t} & \underline{t-1}\\ \underline{t-1} & 1\\ 1 & \end{array}\right|=2\int(1+\frac{1}{t-1})dt=$$

$$=2\int dt+\int\frac{d(t-1)}{t-1}=2t+2\ln|t-1|+c=$$

$$=2\sqrt[4]{2x+3}+2\ln\left|\sqrt[4]{2x-3}-1\right|+c.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие первообразной функции.
2. Понятие неопределенного интеграла.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Таблица неопределенных интегралов.
5. Основные методы интегрирования (метод непосредственного интегрирования, интегрирование заменой переменной, интегрирование по частям).
6. Понятие правильной и неправильной рациональной дроби.
7. Интегрирование рациональных дробей, метод неопределенных коэффициентов.
8. Интегрирование простейших иррациональных и некоторых тригонометрических функций.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Интеграл $\int F'(x)dx$ равен:

а) $F'(x)+c$; б) $dF(x)$; в) $F(x)$; г) $f(x)+c$.

2. Формула интегрирования по частям в неопределённом интеграле имеет вид:

а) $\int udv=uv-\int udu$; б) $\int udv=uv-\int vdv$;

в) $\int udu=uv+\int vdu$; г) $\int udv=uv-\int vdu$.

3. Для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{3-\sqrt{x+2}}$ используется:

а) замена $t=3-\sqrt{x+2}$; б) замена $u=\sqrt{x+2}$; в) интегрирование по частям; г) замена $u=x+2$.

4. Интеграл от простейших рациональных дробей I типа $\frac{1}{x+a}$ ($a\in\mathbf{R}$) равен:

а) $(x+a)^{-2}+c$; б) $-(x+a)^{-2}+c$; в) $\ln|x+a|+c$;

г) $\ln|x|+\ln|a|+c$.

5. Неопределённый интеграл $\int f(x)dx$ равен:

а) $F(x)=f(x)+c$; б) $F(x)+c$, где $f'(x)=F(x)+c$;

в) $F(x)+c$, где $f'(x)=F(x)$; г) $F(x)+c$, где $F'(x)=f(x)$.

6. Вычислить $\int\sqrt{\cos x}\sin xdx$ можно:

а) преобразовав к виду $\int\sqrt{\cos x}dx\cdot\int\sin xdx$;

б) заменой $u=\cos x$; в) заменой $u=\sqrt{\cos x}$;

г) заменой $u=\sin x$.

7. Вычислить $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+4}dx$ можно:

а) преобразовав к виду $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx+\int\frac{\sqrt{x}}{4}dx$;

б) заменой $x=t^4$; в) заменой $x=t^2$; г) заменой $x=t^3$.

8. Интеграл $\int \cos 3x dx$ равен:

а) $\dfrac{\cos^2 3x}{2}+c$; б) $3\sin 3x+c$; в) $\dfrac{1}{3}\sin 3x+c$; г) $-\dfrac{1}{3}\sin x+c$.

9. Интеграл $\int xe^x dx$ можно найти:

а) преобразовав к виду $\int xdx\cdot\int e^x dx$;

б) преобразовав к виду $\int xdx+\int e^x dx$;

в) интегрируя по частям $u=x$, $dv=e^x dx$;

г) интегрируя по частям $u=e^x$, $dv=xdx$.

10. Интеграл $\int \dfrac{dx}{1+3\sin x}$ можно найти методом подстановки:

а) $u=\sin x$; б) $u=tgx$, тогда $\sin x=\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$;

в) $u=1+3\sin x$; г) $u=tg\dfrac{x}{2}$, тогда $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 9.1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int\left(5x+\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x^6}\right)dx$; д) $\int\left(\sin 5x-e^{-3x}+\dfrac{1}{\cos^2 4x}\right)dx$;

б) $\int\dfrac{3dx}{4-5x}$; е) $\int\dfrac{5dx}{16+x^2}$;

в) $\dfrac{dx}{(3x+5)\ln^2(3x+5)}$; ж) $\int\dfrac{3x-4}{25-x^2}dx$;

г) $\int\dfrac{tg5x}{\cos^2 5x}dx$.

Ответ:

а) $\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{1}{5x^5}+c$; д) $-\dfrac{1}{5}\cos 5x+\dfrac{1}{3}e^{-3x}+\dfrac{1}{4}tg4x+c$;

б) $-\dfrac{3}{5}\ln|4-5x|+c$; е) $\dfrac{5}{4}arctg\dfrac{x}{4}+c$;

в) $-\dfrac{1}{3\ln(3x+5)}+c$; ж) $-\dfrac{3}{2}\ln\left|25-x^2\right|-\dfrac{2}{5}\ln\left|\dfrac{x+5}{x-5}\right|+c$;

г) $\dfrac{1}{10}tg^2 5x+c$.

Задача 9.2. Найти неопределенные интегралы, применив метод интегрирования по частям:

а) $\int(2x+5)\cos xdx$; б) $\int(2-5x)\cdot e^{-x}dx$;

в) $\int\ln(x-1)dx$; г) $\int arctg2xdx$.

Ответ: а) $(2x+5)\sin x+2\cos x+c$; б) $(5x+3)e^{-x}+c$;

в) $(x-1)\ln(x-1)-x+c$; г) $xarctg2x-\dfrac{1}{4}\ln(1+4x^2)+c$.

Задача 9.3. Найдите неопределенные интегралы, применив метод разложения на простейшие дроби:

а) $\int\dfrac{x^3}{x^3-1}dx$; б) $\int\dfrac{x+2}{(x-1)x^2}dx$.

Ответ: а) $x+\dfrac{1}{3}\ln(x-1)-\dfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$;

б) $3\ln|x-1|-3\ln|x|+\dfrac{2}{x}+c$.

МОДУЛЬ 10. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определённый интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Выполним следующие действия.

1. Разобьём отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

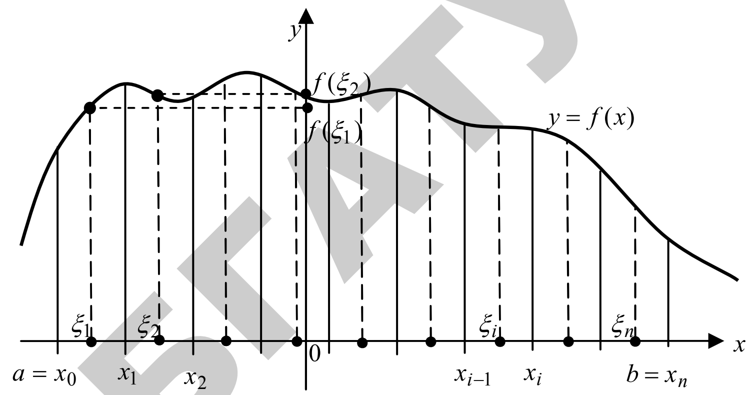
2. На каждом из полученных частичных отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};x_n]$ длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ произвольным образом выберем точку ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и вычислим значение функции в ней, т.е. величину $f(\xi_i)$.

3. Умножим найденное значение функции $f(\xi_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$.

4. Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.



Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при стремлении к нулю наибольшей из длин Δx_i, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i, то он называется ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Таким образом, $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .}$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*, отрезок $[a,b]$ — *областью (отрезком) интегрирования*.

Теорема Коши. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$, т.е. определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ существует.

Свойства определенного интеграла:

1. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

3. $\int\limits_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, где $c - const$.

4. $\int\limits_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$.

5. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ для любого $c \in \mathbf{R}$.

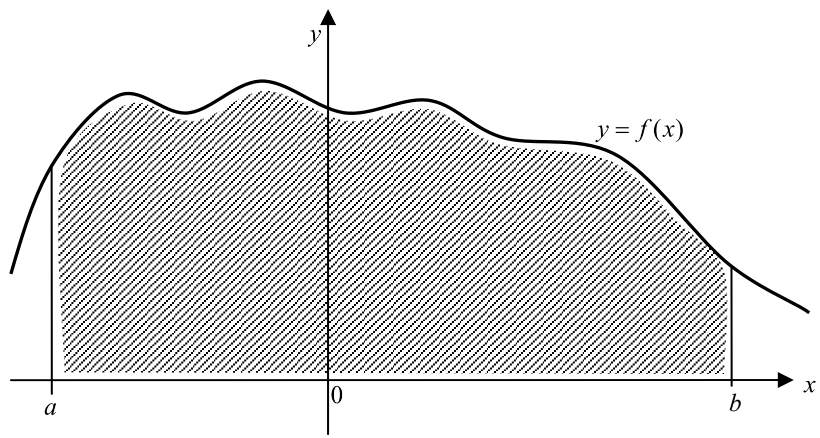
6. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, где $a < b$ и $f(x) \le \varphi(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдется хотя бы одна точка $c \in [a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

§ 2. Геометрический смысл определённого интеграла

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \ge 0$.

Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ox, сбоку — прямыми $x = a$, $x = b$, называется <u>*криволинейной трапецией*</u> (см. рисунок ниже).



Найдём площадь этой трапеции.
Для этого выполним следующие действия.

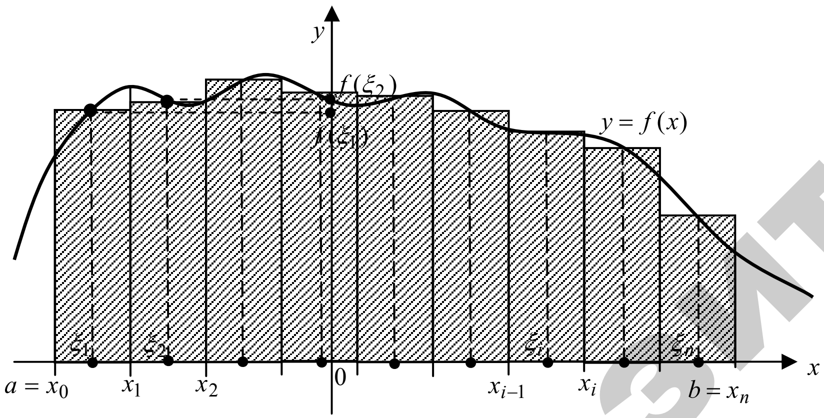
1. Разобьём отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

2. На каждом из полученных частичных отрезков $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$ длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ произвольным образом выберем точку ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и вычислим значение функции в ней, т.е. величину $f(\xi_i)$.
3. Умножим найденное значение функции $f(\xi_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.
4. Сумма S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

равна площади ступенчатой фигуры и приближённо равна площади S криволинейной трапеции (см. рисунок ниже):

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$



С уменьшением всех величин Δx_i точность приближения криволинейной трапеции ступенчатой фигурой и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел S, к которому

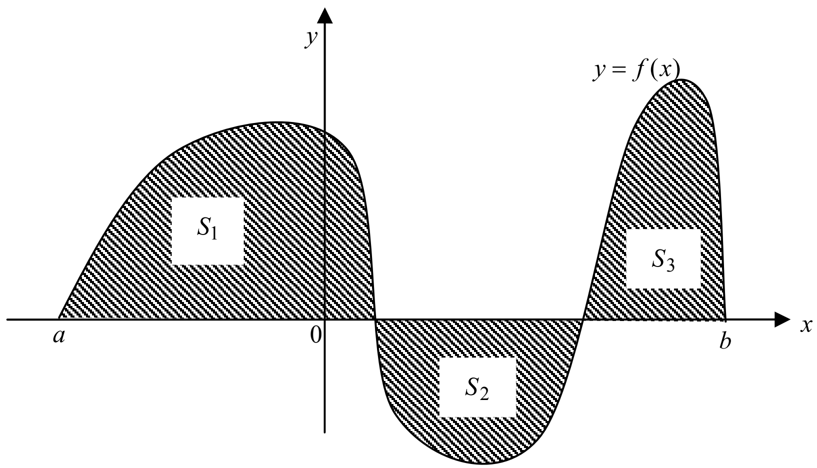
стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает так, что $\max \Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \text{, то есть.}$$

Определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}.$$

В общем случае, когда функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает значения разных знаков, определенный интеграл выражает разность площадей криволинейных трапеций, расположенных над осью Ox и под ней, так как площадям криволинейных трапеций, расположенных под осью Ox, присваивается знак «—». Например, для функции, график которой изображен на рисунке ниже, имеем



$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3}$$

§ 3. Методы вычисления определённого интеграла

Если $F(x)$ — одна из первообразных непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, то простым и удобным методом вычисления определённого интеграла является

❖ ***формула Ньютона-Лейбница***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}.$$

Пример 10.1. Вычислите интеграл $\int_1^4 x^2 dx$.

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3} = \frac{64-1}{3} = 21.$$

Пример 10.2. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1-0 = 1.$$

Пример 10.3. Вычислите $\int_0^1 \sqrt{3x+1}dx$.

Используем метод подведения под знак дифференциала (см. § 2, модуль 9)

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}dx = \int_0^1 (3x+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}d(3x+1) = \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}(4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}) =$$

$$= \frac{2}{9}(\sqrt{4^3}-1) = \frac{2}{9}(2^3-1) = \frac{14}{9}.$$

❖ ***Замена переменной в определенном интеграле*** осуществляется по формуле

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt},$$

где $x=\phi(t)$ имеет непрерывную производную, $a=\phi(\alpha)$, $b=\phi(\beta)$.

Решим пример 10.3 заменой переменной

Пример 10.4. Вычислите $\int_0^1 \sqrt{3x+1}dx$.

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}dx = \left|\begin{array}{c} \text{сделаем замену переменной} \\ 3x+1=t \\ d(3x+1)=dt \\ 3dx=dt \\ dx=\frac{1}{3}dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 4 \end{array} \end{array}\right| = \int_1^4 \sqrt{t}\frac{1}{3}dt =$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^4 t^{1/2}dt=\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4=\frac{2}{9}\sqrt{t^3}\Big|_1^4=\frac{2}{9}(\sqrt{64}-1)=\frac{14}{9}.$$

❖ ***Интегрирование по частям в определенном интеграле*** выполняется по формуле

$$\boxed{\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u}.$$

Пример 10.5. Вычислите $\int_1^e \ln x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int_1^e \ln x dx=\left|\begin{array}{ll} dv=dx & \rightarrow\quad v=\int dv=\int dx=x \\ u=\ln x & \rightarrow\quad du=u'dx=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx \end{array}\right|=$$

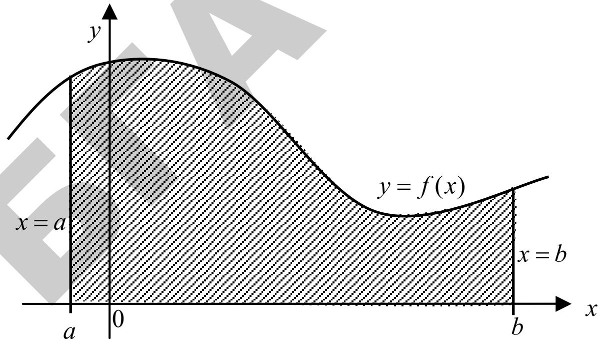
$$=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\frac{dx}{x}=e\ln e-1\ln 1-\int_1^e dx=e-x\Big|_1^e=e-(e-1)=e-e+1=1.$$

§ 4. Приложения определенного интеграла к задачам геометрии.

Площадь плоской фигуры

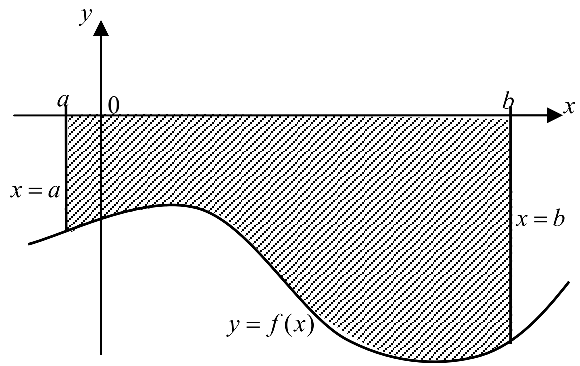
1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$), слева и справа соответственно прямыми $x=a$, $x=b$, снизу — отрезком $[a,b]$ оси Ox, вычисляется по формуле:

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx} \qquad (10.1)$$



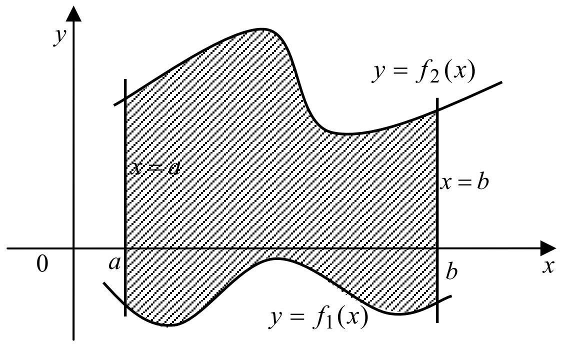
Если $f(x)\leq 0$ при $x\in[a;b]$, то

$$\boxed{S=-\int_a^b f(x)\,dx} \qquad (10.2)$$



2. Площадь фигуры, ограниченной сверху и снизу соответственно кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \le f_2(x)$), слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, определяется формулой:

$$\boxed{S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x} \qquad (10.3)$$

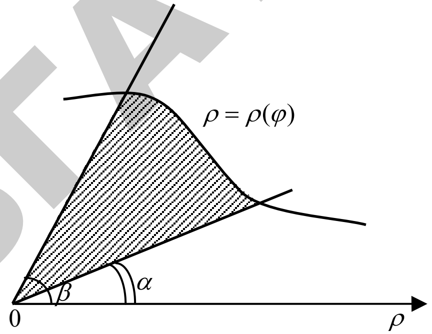


3. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y(t) \ge 0$, $t \in [t_1; t_2]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\mathrm{d}t} \qquad (10.4)$$

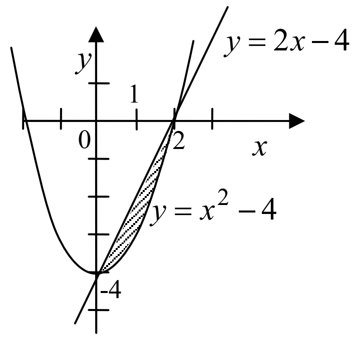
4. Площадь криволинейного сектора, ограниченного непрерывной кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi} \qquad (10.5)$$



Пример 10.6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$ и $y = 2x - 4$.

Построим фигуру, площадь которой необходимо вычислить. Данная фигура ограничена сверху прямой $y = 2x - 4$, а снизу — параболой $y = x^2 - 4$ (см. рис.).



Точки пересечения этих кривых можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow 2x - 4 = x^2 - 4$$

$$x^2 - 2x - 4 + 4 = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0,\ x = 2.$$

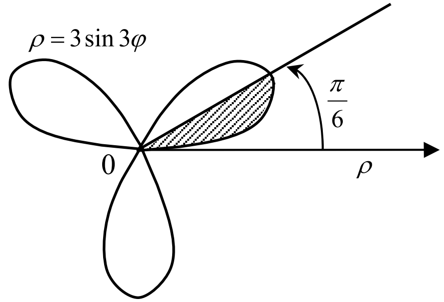
Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой (10.3).

$$S=\int_0^2 (2x-4-(x^2-4))\mathrm{d}x=\int_0^2 (2x-x^2)\mathrm{d}x=2\int_0^2 x\mathrm{d}x-\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=$$

$$=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=4-0-\left(\frac{2^3}{3}-0\right)=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

Пример 10.6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной «трёхлепестковой розой» $\rho=3\sin 3\varphi$.

Изобразим график функции $\rho=3\sin 3\varphi$ в полярной системе координат (см. рис.). Найдём сначала шестую часть искомой площади (выделена на рисунке). Используем формулу (10.5).



$$\frac{1}{6}S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(3\sin 3\varphi)^2 d\varphi=\frac{1}{2}\cdot 9\int_0^{\pi/6}\sin^2 3\varphi d\varphi=\frac{9}{2}\int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}(1-\cos 6\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{9}{4}(\varphi-\frac{1}{6}\sin 6\varphi)\Big|_0^{\pi/6}=\frac{9}{4}(\frac{\pi}{6}-0)=\frac{9\pi}{24}=\frac{3\pi}{8}.$$

Значит, $S=6\cdot\frac{3\pi}{8}=\frac{9\pi}{4}$.

Длина дуги кривой

1. Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y=f(x)$ или $x=\varphi(y)$. На кривой выбраны точки A и B с координатами: $A(a;c)$, $B(b;d)$. Длина l дуги кривой от точки A до точки B вычисляется по формуле

$$\boxed{l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x} \qquad (10.6)$$

$$\boxed{l=\int_c^d\sqrt{1+(x')^2}\mathrm{d}y} \qquad (10.7)$$

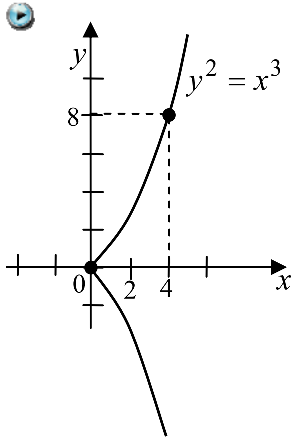
2. Если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t_1\le t\le t_2$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$\boxed{l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\mathrm{d}t} \qquad (10.8)$$

3. Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi \qquad (10.9)$$

Пример 10.7. Вычислите длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки $A(4;8)$.



$y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Воспользуемся формулой (10.6).

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx =$$

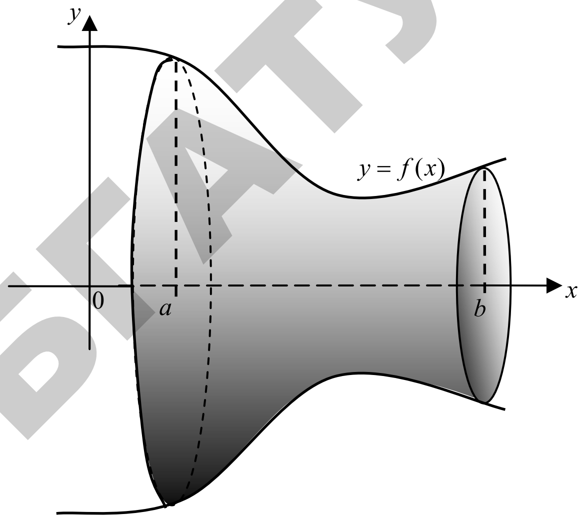
$$= \frac{4}{9}\int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

Объем тел вращения

1. Объемы тела, образованного вращением вокруг оси Ox (или оси Oy) криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \qquad (10.10)$$



$$V_y = 2\pi \int_a^b xy dx \qquad (10.11)$$

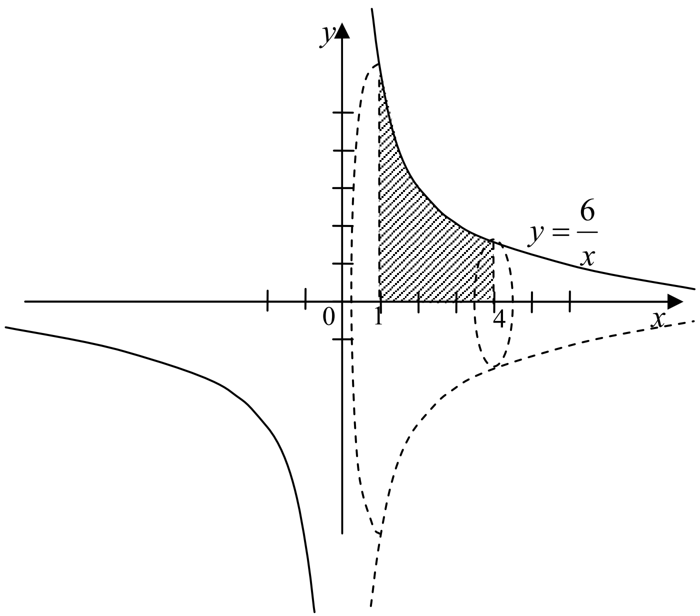
2. Если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$) и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, то объём тела вращения равен

3.

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy \qquad (10.12)$$

Пример 10.8. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

а)

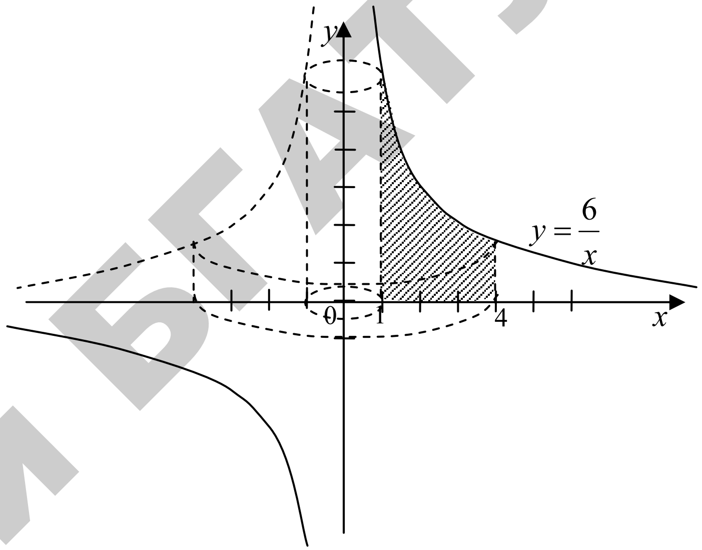


По формуле (10.10) находим

$$V_x=\pi\int_1^4\left(\frac{6}{x}\right)^2dx=36\pi\int_1^4\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=36\pi\int_1^4 x^{-2}dx=$$

$$=36\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4=-36\pi\left(\frac{1}{4}-1\right)=36\cdot\frac{3}{4}\pi=27\pi .$$

б)



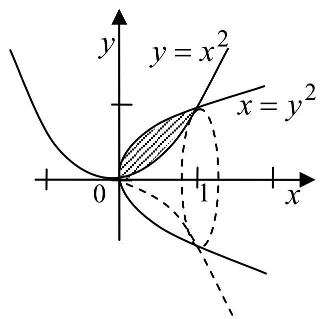
По формуле (10.11) находим

$$V_y=2\pi\int_1^4 x\cdot\frac{6}{x}dx=12\pi\int_1^4 dx=12\pi\cdot x\Big|_1^4=36\pi .$$

Пример 10.9. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $x=y^2$.

Найдем точки пересечения кривых из системы

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases}\Rightarrow x=x^4\Rightarrow x(1-x^3)=0\Rightarrow\begin{cases} x_1=0, & y_1=0 \\ x_2=1, & y_2=1 \end{cases}.$$



Искомый объем есть разность двух объемов: объема V_1, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $x = y^2$ $(0 \le x \le 1)$ и объема V_2, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ $(0 \le x \le 1)$.

Применим формулу (10.10) для вычисления V_1 и V_2, получим

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 (\sqrt{x})^2\,dx - \pi\int_0^1 (x^2)^2\,dx = \pi\int_0^1 x\,dx - \pi\int_0^1 x^4\,dx =$$

$$= \pi\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 - \pi\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\pi.$$

Площадь поверхности тел вращения

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$\boxed{Q_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + (y'_x)^2}\,dx} \qquad (10.13)$$

Если дуга $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, вращается вокруг оси Oy, то

$$\boxed{Q_y = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1 + (x'_y)^2}\,dy} \qquad (10.14)$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.
5. Геометрические приложения определенного интеграла.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ это:

   а) $F(x) + c$, где $F'(x) = f(x)$, $c - const$;
   б) $F(a) - F(b)$, где $F'(x) = f(x)$;
   в) $F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$;
   г) $F(a) + F(b)$, где $F'(x) = f(x)$.

2. Если $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$, то:

   а) $\int_a^b f(x)dx \ge 0$; б) $\int_a^b f(x)dx \le 0$; в) $\int_a^b f(x)dx = 0$;

   г) $\int_a^b f(x)dx$ принимает произвольное значение.

3. Площадь плоской фигуры, ограниченной графиками линий $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \ge f_2(x))$, $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле:

   а) $S = \int_a^b f_1(x)dx$; б) $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$;

в) $S=\int\limits_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$;   г) $S=\int\limits_b^a (f_1(x)-f_2(x))dx$.

4. Интеграл вида $\int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ вычисляет:

а) площадь криволинейной трапеции;   б) объём тела вращения;
в) длину дуги кривой, заданной уравнением $y=f(x)$;
г) площадь поверхности тела.

5. Геометрически значение определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ равно:
а) площади треугольника;   б) площади трапеции;
в) объёму тела;   г) площади криволинейной трапеции.

6. Значение определённого интеграла $\int\limits_0^1 (2x+3x^2)dx$ равно:

а) 0;   б) -2;   в) 2;   г) x^2+x^3+c.

7. Определённый интеграл $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx$ равен:

а) $(f(x)+g(x))\Big|_a^b$;
б) $F(x)+G(x)+c$, где $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$;
в) $\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx$;   г) $(f'(x)+g'(x))\Big|_a^b$.

8. Если $f(x)\ge g(x)$ для $x\in[a,b]$, то справедливо:
а) $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$;   б) $\int\limits_a^b f(x)dx < \int\limits_a^b g(x)dx$;
в) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$;   г) $\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx$.

9. Интеграл вида $\int\limits_a^b x^n \cos kx dx$ можно вычислить с помощью формулы:
а) $\int\limits_a^b udv = uv-\int\limits_a^b vdu$;   б) $\int\limits_a^b udv = uv+\int\limits_a^b vdu$;
в) $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$;   г) $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b+\int\limits_a^b vdu$.

10. Интеграл $\int\limits_a^b dx$ равен:

а) $b-a$;   б) $a-b$;   в) $a\cdot b$;   г) $a+b$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 10.1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \left(5+x^2\right)dx$;   б) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{7}} \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$;

в) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}dx$;   г) $\int\limits_2^7 \frac{dx}{5+\sqrt{x+2}}$;

д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$;   е) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2xdx$;

ж) $\int\limits_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx$;   з) $\int\limits_3^5 \frac{x^2+5}{x-2}dx$;

и) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+10}$;   к) $\int\limits_{-1}^0 xe^{-x}dx$.

Ответ: а) $\frac{22}{3}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$; г) $2-10\ln\frac{8}{7}$; д) $\frac{\pi}{4}$;
е) $\frac{1}{3}$; ж) $\ln\frac{16}{9}$; з) $12+9\ln 3$ и) $arctg 0.08$ к) -1.

Задача 10.2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

а) $y=x^2$ и $y=2x$; б) $y=5x-x^2$ и $y=x$;

в) $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=3$; г) $y=x^2-6$ и $y=-x^2+5x-6$.

Ответ: а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{32}{3}$; в) $\ln 3$; г) $5\frac{5}{24}$.

Задача 10.3. Найдите длину дуги кривой $y=\ln\sin x$ от $x_1=\frac{\pi}{3}$ до $x_2=\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $2\ln\sqrt{3}$.

Задача 10.4. Вычислите объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^3$, $x=0$, $y=8$ вокруг оси Ox;

б) $y^2=16-x$, $x=0$ вокруг оси Oy;

в) $y=2\sin x$, $0\le x\le\pi$ вокруг оси Ox;

г) $y=2x-x^2$, $y=-x+2$ вокруг оси Ox.

Ответ: а) $\frac{768}{7}\pi$; б) $\frac{16384}{15}\pi$; в) $\pi(3\pi+4)$; г) $\frac{1}{5}$.

МОДУЛЬ 11. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Если функция $y=f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, то *несобственные интегралы с бесконечными пределами* (или I рода) определяются следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \quad (11.1)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \quad (11.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx,$$

где c — произвольное число (обычно $c=0$).

Если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях формул (11.1), (11.2), то несобственные интегралы называются *сходящимися*, если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то несобственные интегралы называются *расходящимися*.

Пример 11.1. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

По определению (11.1) получаем

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}\right)-(-1)=0+1=1.$$

Пример 11.2. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$.

$$\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{e}^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{e}^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\ln|\ln x|\Big|_{e}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln|\ln b|-\ln|\ln e|=+\infty-0=+\infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

Пример 11.3. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{0}x\cos x dx$.

$$\int\limits_{-\infty}^{0}x\cos x dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}x\cos x dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=x & \to & du=dx\\ dv=\cos x dx & \to & v=\int\cos x dx=\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(x\sin x\Big|_{a}^{0}+\cos x\Big|_{a}^{0}\right)=0-\lim_{a\to-\infty}a\sin a+1-\lim_{a\to-\infty}\cos a.$$

Несобственный интеграл расходится, так как $\lim\limits_{a\to-\infty}a\sin a$, $\lim\limits_{a\to-\infty}\cos a$ не существуют.

§ 2.Интегралы от неограниченных функций (II рода)

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $a\le x<b$ и неограничена в окрестности точки b, т.е. $f(b)=\infty$, то *несобственный интеграл II рода* определяется следующим образом

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx. \qquad (11.3)$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (11.3), то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае *расходящимся*.

Аналогично, если $f(a)=\infty$, то

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx.$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна при $a\le x<c$ и $c<x\le b$, а $f(c)=\infty$, то

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1}f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b}f(x)dx.$$

Пример 11.4. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{9}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ или установите его расходимость.

Подынтегральная функция не определена в окрестности точки $x=1$ и неограниченно возрастает при $x\to1$. Следовательно, по определению несобственного интеграла II рода имеем

$$\int\limits_{1}^{9}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{9}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{9}(x-1)^{-1/3}d(x-1)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big|_{1+\varepsilon}^{9}=\frac{3}{2}\left(8^{2/3}-\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{2/3}\right)=\frac{3}{2}\left(2^2-0\right)=\frac{3}{2}\cdot4=6.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие несобственного интеграла с бесконечными пределами.
2. Понятие несобственного интеграла от неограниченной функции.
3. Понятие сходимости, расходимости несобственного интеграла.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Интеграл вида $\int\limits_1^{\infty} \frac{2}{x} dx$ является:

а) неопределённым; б) определённым;
в) несобственным I рода; г) несобственным II рода.

2. Какой из интегралов является несобственным интегралом I рода:

а) $\int\limits_a^b f(x)dx$; б) $\int f(x)dx \le 0$; в) $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$; г) $\int\limits_a^x f(t)dt$.

3. Какой из интегралов является несобственным интегралом II рода:

а) $\int\limits_1^5 x^2 dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$; в) $\int\limits_2^4 \sqrt{x-2}dx$; г) $\int\limits_3^5 \frac{dx}{x+2}$.

4. Значение несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ равно:

а) -1; б) $+\infty$; в) 1; г) $-\infty$.

5. Значение несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ равно:

а) 2; б) -2; в) $+\infty$; г) $-\infty$.

6. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ есть величина:

а) конечная; б) бесконечная; в) отрицательная; г) равная 0.

7. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ при $\alpha \le 1$ есть величина:

а) конечная; б) бесконечная; в) отрицательная; г) равная 0.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 11.1. Вычислите несобственные интегралы I рода или установите их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\ln^2(x+2)}$; б) $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12}$.

Ответ: а) $\frac{1}{\ln 2}$; б) ∞; в) -1; г) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Задача 11.2. Вычислите несобственные интегралы II рода или установите их расходимость: а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Ответ: а) 2; б) ∞.

МОДУЛЬ 12. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную *x*, неизвестную функцию *y* и ее производные различных порядков.

Порядком ДУ называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Решением ДУ называется любая функция $y=\varphi(x)$, определенная на интервале (*a, b*) и обращающая на этом интервале уравнение в тождество.

Пример 12.1. Определить порядок ДУ:

1) $y''-3y'+5y-2=0$;
2) $x(1-x)y'-(1+3x)y-x=0$

Первое уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, так как старшей, входящей в него производной равен 2 (y''), второе – уравнение первого порядка, так как оно содержит только первую производную (y').

Пример 12.2. Показать, что функция $y=e^{3x}$ является решением дифференциального уравнения $y'-3y=0$:

Найдем первую производную данной функции:

$$y'=\left(e^{3x}\right)'=e^{3x}\cdot(3x)'=3e^{3x}.$$

Подставляя выражения для y, y' в дифференциальное уравнение, получим тождество $3e^{3x}-3e^{3x}=0$. Это и означает, что функция $y=e^{3x}$ есть решение данного уравнения.

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Общий вид дифференциального уравнения *первого порядка*:

$$\boxed{F(x,y,y')=0} \qquad (12.1)$$

Например, $(y')^3\cdot y^2+2xy=0$, $\sqrt{x^2+y'}-3y=2xy^3$, $y'=2xy$, $y'=x^2+y^2$ – дифференциальные уравнения первого порядка.

Общим решением уравнения (12.1) называется функция $y=\varphi(x,c)$, которая при любом значении постоянной *c* обращает это уравнение в тождество.

Частным решением ДУ, называется решение, которое получается из общего решения при фиксированном значении постоянной *c*.

Например, общим решением ДУ $y'=-x$ является функция $y=-\dfrac{x^2}{2}+c$, где c – произвольная постоянная. При $c=2$ получим частное решение $y=-\dfrac{x^2}{2}+2$.

График решения ДУ называется *интегральной кривой.*

Например, общим решением ДУ $y'=4x$ является функция $y=2x^2+c$, где c – произвольная постоянная. Интегральными кривыми уравнения является семейство парабол $y=2x^2+c$

В теории дифференциальных уравнений основной задачей является вопрос о существовании и единственности решения. Ответ на него даёт теорема Коши, которую мы приводим без доказательства.

Теорема Коши (о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка).

Если в ДУ $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная f'_y непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, то для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует единственное решение $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Точки области D, в которых нарушается единственность решения задачи Коши, называются *особыми точками ДУ.*

Задача Коши. Найти решение $y = f(x)$ дифференциального уравнения (9.1), удовлетворяющее начальным условиям: $y = y_0$ при $x = x_0$.

Другими словами: найти интегральную кривую уравнения(12.1), проходящую через данную точку $N_0(x_0, y_0)$.

§ 3. Типы дифференциальных уравнений первого порядка

I. *ДУ с разделяющимися переменными*

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. называется уравнение вида

$$\boxed{M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0} \qquad (12.2)$$

Представляя y' в виде

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

перепишем уравнение (12.2) следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Далее *разделим переменные*, т.е. используя свойства пропорций, соберем справа функции, содержащие только переменную x, а слева – функции, содержащие переменную y:

$$\boxed{\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx}.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства, получим общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c.$$

Пример 12. 3. Найти общее решение ДУ

$$x\,dx + \frac{dy}{y+1} = 0.$$

Почленно проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int x\,dx + \int \frac{dy}{y+1} = c.$$

Находим первообразные: $\frac{x^2}{2} + \ln|y+1| = c$.

Пример 12. 4. Найти общее решение ДУ

$$y' = 4x^3.$$

Заменим $y' = \frac{dy}{dx}$ и преобразуем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3.$$

Разделив переменные, получим уравнение $dy = 4x^3 dx$. Интегрируя обе части последнего уравнения, запишем общий интеграл ДУ:

$$y = 4\cdot\frac{x^4}{4} + c \quad \text{или} \quad y = x^4 + c.$$

Пример 12. 5. Найти частное решение ДУ

$$y' = x \cdot y^2 + y^2$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и преобразуем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2(x+1).$$

Разделив переменные, используя свойства пропорций, получим уравнение $\dfrac{dy}{y^2} = (x+1)dx$. Интегрируем обе части уравнения, получим $\int \dfrac{dy}{y^2} = \int (x+1)dx \Rightarrow \int y^{-2}dy = \int x\,dx + \int dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{y^{-1}}{-1} = \dfrac{x^2}{2} + x + c$ или $y = \dfrac{-2}{x^2+2x+2c}$ – общее решение.

Найдем частное решение этого уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию. Подставив в формулу общего решения x=0 и y = 1, найдем значение постоянной c:

$$1 = \frac{-2}{0^2 + 2\cdot 0 + 2c} \Rightarrow 1 = -c \Rightarrow c = -1.$$

Следовательно, искомое частное решение ДУ имеет вид $y = \dfrac{-2}{x^2+2x-2}$.

II. *Однородное ДУ.*

Однородным называется, дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию

$$\boxed{f(tx,ty) = f(x,y)}, \quad \text{где } t \text{ – параметр.} \qquad (12.3)$$

Однородное ДУ сводится к ДУ с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$\boxed{y = u(x)\cdot x = u\cdot x, \quad y' = u'\cdot x + u},$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример 12. 6. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}.$$

Обозначив правую часть уравнения $f(x,y) = \dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y}{x}$,

находим $f(tx,ty) = \dfrac{ty}{tx} + \cos\dfrac{ty}{tx} = \dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y}{x} = f(x,y)$.

Следовательно, данное уравнение является однородным.

Для решения этого уравнения применяем подстановку $y = u(x)\cdot x = ux$, $y' = u'x + u$

Уравнение примет вид

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + \cos\frac{ux}{x}, \quad u'x + u = u + \cos u, \quad u'x = \cos u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим

$$\frac{du}{dx}\cdot x = \cos u, \quad \frac{du}{\cos u} = \frac{dx}{x}, \quad \int\frac{du}{\cos u} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\ln\left|tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \ln|x| + \ln|c|, \quad tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = cx,$$

$$u = 2arctgcx - \frac{\pi}{2}.$$

Так как $y = u\cdot x$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = 2x\cdot arctgcx - \dfrac{\pi}{2}$.

III. Линейное ДУ.

Линейным ДУ относительно y и y' называется дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)}, \qquad (12.4)$$

где $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$ – заданные функции.

При решении линейного ДУ можно применить *подстановку Бернулли*

$$\boxed{\begin{array}{l} y = u(x)\cdot v(x) = u\cdot v \\ y' = u'v + uv' \end{array}}, \qquad (12.5)$$

где $u = u(x), v = v(x)$ - новые неизвестные функции.

Метод решения:

1. Подставим формулы (12.5) в уравнение (12.4), получим:

$$u'v + uv' + \mathrm{P}(x)\cdot u\cdot v = \mathrm{Q}(x).$$

2. Группируем первый и третий члены уравнения и выносим v за скобки:

$$v(u' + \mathrm{P}(x)\cdot u) + uv' = \mathrm{Q}(x).$$

3. Выбираем функцию $u(x)$ таким образом, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль. Получаем систему:

$$\begin{cases} u' + P(x)\cdot u = 0, \\ uv' = Q(x). \end{cases}$$

4. Решая первое уравнение системы, находим одно из его частных решений $u(x)$ (здесь полагаем $c = 0$).

5. Подставляя затем $u(x)$ во второе уравнение системы и решая его, находим функцию $v(x)$.

Пример 12.7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - 4y = e^{2x}.$$

Перед нами уравнение вида $y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)$, где $\mathrm{P}(x) = -4$, $\mathrm{Q}(x) = e^{2x}$. Это линейное ДУ. Применим подстановку Бернулли

$$y = u\cdot v, \qquad y' = u'v + uv',$$

Подставив значения y, y' в преобразованное уравнение, получим:

$$\overbrace{u'v + uv'}^{y'} - 4\overbrace{uv}^{y} = e^{2x}$$

Группируем первый и третий члены и выносим v за скобки:

$$v\left(u' - 4u\right) + uv' = e^{2x}$$

Приравняем к нулю выражение, стоящее в скобках, и решаем систему уравнений $\begin{cases} u' - 4u = 0, \\ uv' = e^{2x}. \end{cases}$

Первое уравнение системы является уравнением с разделяющимися переменными. Найдем его решений:

$$u' = 4u; \quad \frac{du}{dx} = 4u; \quad \frac{du}{u} = 4dx; \quad \int\frac{du}{u} = 4\int dx; \quad \ln|u| = 4x;$$

$u = e^{4x}$. Подставляя $u = e^{4x}$ во второе уравнение системы, находим функцию v: $e^{4x}\cdot v' = e^{2x} \Rightarrow v' = \dfrac{e^{2x}}{e^{4x}} \Rightarrow v' = e^{2x-4x} \Rightarrow v' = e^{-2x}$,

$$\frac{dv}{dx} = e^{-2x} \Rightarrow dv = e^{-2x}dx \Rightarrow \int dv = \int e^{-2x}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

Получили общее решение исходного уравнения

$$y = u \cdot v = e^{4x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + c\right).$$

Пример 12.8. Определить тип ДУ 1-го порядка и указать метод его решения.

1) $xy' - y = 2x$; **2)** $y' = \dfrac{4}{x^2+16}$; **3)** $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

1) Разделим уравнение $xy' - y = 2x$ на x, получим $y' - \dfrac{y}{x} = 2$. Уравнение является линейным уравнением вида $y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)$, где $\mathrm{P}(x) = -\dfrac{1}{x}$, $\mathrm{Q}(x) = 2$.

Его решаем с помощью подстановки

$$y = u \cdot v, \quad y' = u'v + uv',$$

где $u = u(x), v = v(x)$ - новые неизвестные функции.

2) Данное уравнение $y' = \dfrac{4}{x^2+16}$ является уравнением с разделяющимися переменными. При его решении заменяем $y' = \dfrac{dy}{dx}$, разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^2+16}, \quad dy = \frac{4}{x^2+16}dx,$$

$$\int dy = \int \frac{4}{x^2+16}dx.$$

3) В уравнении $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ обозначим $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

Находим

$$f(tx,ty) = \frac{2tx \cdot ty}{t^2x^2 - t^2y^2} = \frac{2t^2x \cdot y}{t^2(x^2-y^2)} = \frac{2x \cdot y}{x^2-y^2} = f(x,y).$$

Следовательно, уравнение является однородным ДУ. Для его решения применим подстановку

$$y = u \cdot x, \quad y' = u' \cdot x + u,$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

§ 5. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Многие экономические задачи приводят к интегрированию дифференциальных уравнений. В таких задачах требуется найти зависимость между переменными величинами некоторого экономического процесса, найти функцию спроса, уравнение снабжения и др.

I. Эластичность и функция спроса.

Если известна эластичность спроса на некоторый товар, то можно найти <u>*функцию спроса*</u>.

Пример 12.9. Эластичность $\eta = -\dfrac{1}{3}$ для любых значений p. Найти функцию спроса.

Пользуясь определением эластичности

$$\eta = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp},$$

получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{3},$$

$$3\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{p}.$$

Интегрируем и получаем уравнение спроса:

$$3\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{dp}{p},$$

$$3\ln|x| = -\ln|p| + \ln C,$$

$$px^3 = C.$$

II. Уравнение снабжения.

Уравнением снабжения, или *логистики* называется уравнение вида

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = py(m-y),} \qquad (12.6)$$

где p и m – постоянные.

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y(m-y)} = pdt,$$

$$-\frac{dy}{y^2 - my} = pdt.$$

Выделяем полный квадрат в знаменателе левой части равенства и интегрируем:

$$-\int\frac{dy}{(y-\frac{m}{2})^2 - \frac{m^2}{4}} = pdt,$$

$$\frac{1}{m}\ln\left|\frac{y-m}{y}\right| = -pt - C,$$

$$\frac{y-m}{y} = e^{-mpt}e^{-C}.$$

Из последнего равенства находим y:

$$y = \frac{m}{1+e^{-mpt}e^{-C}}.$$

Если обозначить $k = mp,\ A = e^{-C}$, то получится функция, называемая *функцией снабжения* (*логистики*):

$$\boxed{y = \frac{m}{1+Ae^{-kt}}}, \qquad (12.7)$$

где значение A определяется из начального условия.

Уравнение снабжения используется для моделирования ограниченного роста населения, размножения бактерий в ограниченной среде обитания, динамику эпидемий внутри ограниченной общности биологических организмов, рост выпуска продукции в условиях конкуренции и др.

При $y = m$ имеем $\frac{dy}{dt} = 0$ и производная меняет знак с «+» на «–». Следовательно, $y = m$ – максимальное значение. Если $y << m$, то

$$\boxed{\frac{dy}{dt} \approx pmy = ky.}$$

Уравнение $\frac{dy}{dt} = ky$ имеет решение $y = e^{kt}$ и описывает неограниченный (экспоненциальный) рост населения, размножение бактерий, процесс радиактивного распада, модель естественного роста выпуска продукции при отсутствии конкуренции..

Пример12.10. Известно, что рост количества бактерий в сосуде удовлетворяет уравнению логистики с постоянной $k = pm = 0{,}2$.

Пусть в начальный момент времени количество бактерий составляло 1 % от максимально возможного значения m. За какое время количество бактерий достигнет 80 % от максимального?

$$\frac{dy}{dt} = py(m-y) = \frac{0{,}2y}{m}(m-y),$$

$$\frac{mdy}{y(m-y)} = 0{,}2dt.$$

Интегрируем и, используя условие $y < m$, получаем

$$\ln\frac{m-y}{y} = -0{,}2t - C.$$

Пользуясь начальным условием $y = 0{,}01m$ при $t = 0$, находим значение C и подставляем его в решение:

$$\ln\frac{0{,}99}{0{,}01} = -C,$$

$$C = -\ln 99,$$

$$\ln\frac{m-y}{99y} = -0{,}2t,$$

$$\frac{m-y}{99y} = e^{-0{,}2t},$$

$$y = \frac{m}{1+99e^{-0{,}2t}}$$ – решение задачи.

Найдём теперь значение t, при котором $y = 0{,}8m$:

$$0{,}8 = \frac{1}{1+99e^{-0{,}2t}},$$

$$e^{-0{,}2t} = \frac{1}{396},$$

$$-0{,}2t = -\ln 396,$$

$$t = 5\ln 396 \approx 29{,}91.$$

III. Функции спроса и предложения.

В простейших случаях предполагается, что спрос и предложение на рынке зависят только от цены товара. В более сложных моделях учитывается их зависимость и от изменения цены, т.е. от производной. При этом для определения равновесной цены используется дифференциальное уравнение.

Пример 12.11. Функции спроса и предложения на некоторый товар соответственно имеют вид:

$$x = 19 + p + 4\frac{dp}{dt}, \qquad x = 28 - 2p + 3\frac{dp}{dt}. \tag{12.8}$$

Найти зависимость равновесной цены от времени t, если в начальный момент времени цена $p = 20$.

Так как левые части уравнений (12.8) равны, то приравняем правые части: $19 + p + 4\frac{dp}{dt} = 28 - 2p + 3\frac{dp}{dt}$,

$$\frac{dp}{dt} = 9 - 3p,$$

$$\frac{dp}{9-3p} = dt,$$

$$-\frac{1}{3}\ln|9-3p| = t + C,$$

$$9 - 3p = \mathrm{e}^{-3t-3C},$$

$$p = \frac{9-\mathrm{e}^{-3t-3C}}{3}.$$

Подставляя начальные условие, находим C: $20 = \dfrac{9-\mathrm{e}^{-3C}}{3}$

$e^{-3C} = -51$, $\Rightarrow p = \dfrac{9+51e^{-3t}}{3} = 3+17e^{-3t}$ – решение задачи (рис.12.1)

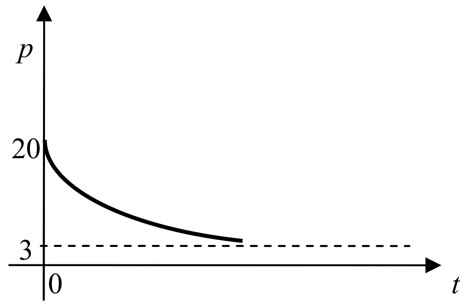


Рис. 12.1

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} p = 3$, имеет место устойчивость. Если $\lim\limits_{t\to\infty} p = \infty$, то равновесная цена растёт и имеет место инфляция.

§ 6. Дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид дифференциального уравнения *второго порядка*:

$$\boxed{F(x,y,y',y'')=0} \qquad (12.9)$$

Общим решением уравнения (12.9) называется функция

$$\boxed{y=\varphi(x,c_1,c_2)} \qquad (12.10)$$

которая при любых значениях постоянных c_1, c_2 является решением этого уравнения.

Частным решением ДУ второго порядка называется функция

$$\boxed{y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0)}, \qquad (12.11)$$

где c_1^0, c_2^0 – фиксированные числа, получается из общего решения (12.10) при фиксированных значениях c_1, c_2.

Примеры дифференциальных уравнений второго порядка:

$$y''+yy'-xy^3-\cos x=0;$$

$$y^2y''+xy'+x^2\cos x=0.$$

Теорема Коши (о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка). Если в ДУ $y''=f(x,y,y')$ функция $f(x,y,y')$ и ее частные производные $f'_y, f''_{y'}$ непрерывны в некоторой области D пространства, то для любой точки $(x_0;y_0;y'_0)\in D$ существует единственное решение $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$.

Задача Коши: найти частное решение ДУ (12.9), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$.

Геометрически задача Коши означает, что из множества интегральных кривых выбирается та, которая проходит через точку $(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке угловой коэффициент касательной y'_0.

§ 7. Типы дифференциальных уравнений второго порядка

I. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

К ДУ второго порядка, допускающим понижение порядка, относятся уравнения:

$$\boxed{y'' = f(x)} \qquad (12.12)$$

$$\boxed{y'' = f(x, y')} \qquad (12.13)$$

$$\boxed{y'' = f(y, y')} \qquad (12.14)$$

Методы решения:

1. Общее решение уравнения (12.12) находится двукратным интегрированием обоих частей уравнения.

Пример 12.12. Проинтегрировать уравнение $y'' = \sin x$.

Дважды интегрируя, находим: $\int y'' = \int \sin x \Rightarrow$

$y' = -\cos x + c_1 \Rightarrow \int y'dy = \int -\cos x dx + \int c_1 dx \Rightarrow y = -\sin x + c_1 x + c_2$.

2. Общее решение уравнения (12.13) находится при помощи подстановки

$$\boxed{y' = z},$$

которая сводит уравнение (12.13) к уравнению с разделяющимися переменными y и z.

Пример 12.13. Проинтегрировать уравнение $y'' = 3y'$.

Правая часть уравнения зависит только от y', поэтому полагаем $y' = z$, находим: $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dz}{dx}$. Подставляет эти выражения в первоначальное уравнение, получим $\dfrac{dz}{dx} = 3y' = 3z$. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dz}{z} = 3dx \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int 3dx \Rightarrow \ln|z| = 3x + c_1 \Rightarrow z = e^{3x+c_1},$$

т.к. $z = y' \Rightarrow y' = e^{3x+c_1} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^{3x+c_1}$, разделим переменные и проинтегрируем: $dy = e^{3x+c_1}dx \Rightarrow \int dy = \int e^{3x+c_1}dx \Rightarrow$

$y = 1/3\, e^{3x+c_1} + c_2$

3. Общее решение уравнения (12.14) находится при помощи подстановки

$$\boxed{y' = p(y),\ y'' = p\frac{dp}{dy}},$$

которая сводит уравнение (12.14) к уравнению с разделяющимися переменными x и p.

Пример 12.14. Проинтегрировать уравнение $y\,y'' - (y')^2 = 0$.

Полагаем $y' = p$, находим: $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Подставляет эти выражения в первоначальное уравнение, получим $y\,p\dfrac{dp}{dy} - p^2 = 0$.

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{p}{p^2}dp = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|p| = \ln|y| + \ln c_1,$$

$$\ln|p| = \ln|y\cdot c_1| \Rightarrow p = y\cdot c_1$$

т.к. $p = y' \Rightarrow y' = y\cdot c_1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y\cdot c_1$, разделим переменные и проинтегрируем: $\Rightarrow \dfrac{dy}{y} = c_1 dx \Rightarrow \ln|y| = c_1 x + c_2 \Rightarrow y = e^{c_1 x + c_2}$.

II. Однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0}, \tag{12.15}$$

где p и q – некоторые действительные числа.

Уравнение

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0} \tag{12.16}$$

называется *характеристическим уравнением* для уравнения (12.15).

В зависимости от корней k_1 и k_2 характеристического уравнения (12.16) получаем общее решение уравнения (12.14) в виде:

I

$$\boxed{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}}, \tag{12.17}$$

если $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{k_2}$ – действительные, причем $\boldsymbol{k_1} \neq \boldsymbol{k_2}$

II

$$\boxed{y = e^{k_1 x}(c_1 + c_2 x)}, \tag{12.18}$$

если $\boldsymbol{k_1} = \boldsymbol{k_2}$.

III

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)}, \tag{12.19}$$

если $\boldsymbol{k_1} = \alpha + i\beta$ и $\boldsymbol{k_2} = \alpha - i\beta$ – комплексные числа, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Пример12.15. Найти общее решение уравнения.

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k - 3 = 0.$$

Найдем его корни: $k_1 = -1$, $k_2 = 3$.

Так как корни вещественные и различные, то по (12.17) общее решение имеет вид:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Пример12.16. Проинтегрировать уравнение .

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$ имеет равные корни $k_1 = k_2 = -2$. В соответствии с формулой (12.18) общее решение имеет вид:

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x).$$

Пример12.17. Проинтегрировать уравнение .

$$y'' + 6y' + 25y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 25 = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = -3 + 4i, \quad k_2 = -3 - 4i$, (так как $\sqrt{-64} = \pm 8i$). В соответствии с формулой (12.19) общее решение имеет вид:

$$y = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$$

Пример12.18. Проинтегрировать уравнение .

$$y'' + 9y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 9k = 0 \Rightarrow k(k+9) = 0$ имеет действительные корни $k_1 = 0, \quad k_2 = 9$. В соответствии с формулой (12.17) общее решение имеет вид:

$$y = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{9x} = c_1 + c_2 e^{9x}.$$

Пример12.19. Проинтегрировать уравнение .

$$y'' + 9y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k^2 = -9$ имеет комплексные корни $k_1 = 3i, \quad k_2 = -3i$. В соответствии с формулой (12.19) общее решение имеет вид:

$$y = e^{0 \cdot x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

III. Неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x)}, \qquad (12.20)$$

где p и q – некоторые действительные числа.

Общее решение уравнения (12.20) находится по формуле

$$\boxed{y = \tilde{y} + y^*}, \qquad (12.21)$$

где $\tilde{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0,$$

а y^* – частное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим случаи, когда вид правой части $f(x)$ уравнения (12.20) позволяет найти частное решение y^* *методом неопределенных коэффициентов.*

Пусть $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$,

где $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ – многочлен степени n.

Частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

I где r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с α (r = 0, 1 или 2), $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами:

$Q_0(x) = A,\quad Q_1(x) = Ax + B,\quad Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ и т.д.

Пусть $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$,

где M и N – некоторые числа.

Частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r (A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

II где r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с βi (r = 0 или 1), A и B – неопределенные коэффициенты.

Рассмотрим общий случай, когда

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x),$$

где $P_l(x)$ и $R_m(x)$ – многочлены.

III Частное решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x),$$

где r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с $\alpha + i\beta$ (r = 0 или 1), $Q_n(x), S_n(x)$ – многочлены степени $n = \max(l, m)$ с неопределенными коэффициентами.

Для того, чтобы найти неопределенные коэффициенты, находим $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ и подставляем y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в левую часть уравнения (12.20). Приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях, составляем систему линейных уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов. Решив полученную систему, найдем решение y^*.

Пример12.20. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - y' - 6y = (2x - 1)e^{3x}.$$

Найдем общее решение $\tilde{y}$ однородного уравнения с теми же коэффициентами, что и в левой части заданного уравнения:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Так как корни его характеристического уравнения

$$k^2 - k - 6 = 0$$

действительны и различны (k_1 = -2, k_2 = 3), то общее решение однородного уравнения записывается в виде

$$\tilde{y} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Подбираем теперь частное решение исходного неоднородного уравнения в виде $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{\alpha x} P_n(x)$. Так как $\alpha = k_2$, $\alpha \neq k_1$, то число совпадений r = 1. Поэтому частное решение y^* ищем в виде

$$y^* = x^r \mathrm{e}^{\alpha x} Q_n(x) = x^1 \mathrm{e}^{3x} Q_1(x) = x\mathrm{e}^{2x}(Ax + B)$$

$$\text{или} \quad y^*(x) = (Ax^2 + Bx)e^{3x}.$$

Отсюда

$$(y^*)' = (2Ax + B)e^{3x} + (Ax^2 + Bx)3e^{3x},$$

$$(y^*)'' = 2Ae^{3x} + (2Ax + B)3e^{3x} + (2Ax + B)3e^{3x} +$$
$$+ (Ax^2 + Bx)9e^{2x}.$$

Подставляя $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение и сокращая все слагаемые на множитель $e^{3x} \neq 0$, получаем

$$2A + 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx) - (2Ax+B) -$$
$$- 3(Ax^2 + Bx) - 6(Ax^2 + Bx) = 2x - 1$$

или после упрощения

$$10Ax + 2A + 5B = 2x - 1.$$

Отсюда следуют равенства $10A = 2$, $2A + 5B = -1$, т.е. $A = 1/5$, $B = -7/25$.

Таким образом, общее решение заданного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = \tilde{y} + y^* = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} + \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{25}x\right)e^{3x}.$$

§8. Применение дифференциальных уравнений второго порядка в задачах экономики.

I. Модель рынка с прогнозируемыми ценами.

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависящими от текущей цены на товар. Однако спрос и

предложение в реальных ситуациях зависят ещё и от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены P и её производных:

$$\begin{aligned} D(t) &= 3P'' - P' - 2P + 18, \\ S(t) &= 4P'' + P' + 3P + 3. \end{aligned} \qquad (12.22)$$

Принятые в (12.22) зависимости вполне реальны: поясним это на слагаемых с производными функции цены.

1. Спрос «подогревается» темпом изменения цены: если темп растёт $(P'' > 0)$, то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус.

2. Предложение в ещё большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при P'' в функции $S(t)$, больше чем в $D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, поэтому слагаемое, содержащее P', входит в выражение для $S(t)$ со знаком плюс.

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D = S$, приравниваем правые части уравнений (12.22). После приведения подобных получаем

$$P'' + 2P' + 5P = 15. \qquad (12.23)$$

Соотношение (12.11) представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $P(t)$. Общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$P'' + 2P' + 5P = 0. \qquad (12.24)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Его корни – комплексно-сопряженные числа: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, и, следовательно, общее решение уравнения (12.12) даётся формулой

$$P(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\right),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В качестве частного решения неоднородного уравнения (12.11) возьмем решение $P = P_{st}$ – постоянную величину как установившуюся цену. Подстановка в уравнение (12.11) даёт значение P_{st}:

$$P_{st} = 3.$$

Таким образом, общее решение уравнения (12.11) имеет вид

$$P(t) = 3 + \mathrm{e}^{-t}\left(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\right). \qquad (12.25)$$

Нетрудно видеть, что $P(t) \to P_{st} = 3$ при $t \to \infty$, т.е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около неё. Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене P_{st} с колебаниями около неё, причём амплитуда этих колебаний затухает со временем. Если $P(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то отмечаем паническое состояние на рынке.

Решим задачу Коши. Пусть в начальный момент времени известна цена, а также тенденция её изменения:

$$t = 0; \quad P = 4, \quad P' = 1.$$

Подставляя первое условие в формулу (13), получаем $P(0) = C_1 + 3 = 4$, откуда $C_1 = 1$, т.е. имеем

$$P(t) = 3 + \mathrm{e}^{-t}\left(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\right). \qquad (12.26)$$

Дифференцируем, получаем

$$P'(t) = \mathrm{e}^{-t}\left[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t\right].$$

Теперь реализуем второе условие задачи Коши: $P'(0) = 2C_2 - 1 = 1$, откуда $C_2 = 1$. Окончательно, решение задачи Коши имеет вид

$$P(t) = 3 + \mathrm{e}^{-t}\left(\cos 2t + \sin 2t\right),$$

или в более удобной форме:

$$P(t) = 3 + \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (12.27)$$

Интегральная кривая, соответствующая решению (12.27) задачи Коши, изображена на рис. (12.2).

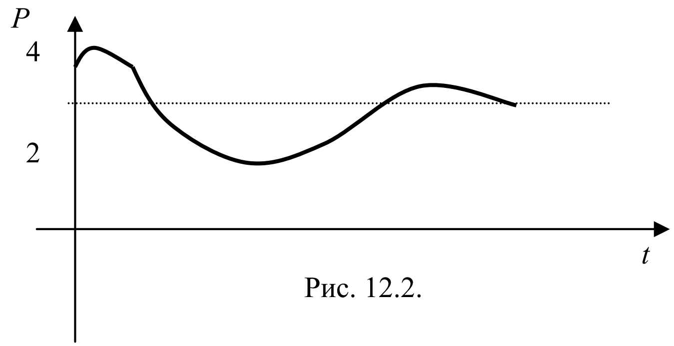


Рис. 12.2.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие дифференциального уравнения.
2. Общее и частное решения дифференциального уравнения.
3. Виды дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения, уравнения Бернулли) и методы их интегрирования.
4. Виды дифференциальных уравнений второго порядка (допускающие понижение порядка, линейные однородные и со специальной правой частью) и методы их интегрирования.
5. Экономические приложения дифференциальных уравнений.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Дифференциальное уравнение с разделяющимися коэффициентами имеет вид:

а) $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$; б) $f_1(x)dx = f_2(y)dy$;

в) $y' + p(x)y = q(x)$; г) $f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0$.

2. Дифференциальное уравнение $x^2yy' = x+1$ после разделения переменных примет вид:

а) $x^2y' = \dfrac{x+1}{y}$; б) $y' = \dfrac{x+1}{x^2y}$;

в) $x^2ydy = (x+1)dx$; г) $ydy = \dfrac{x+1}{x^2}dx$.

3. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в виде:

а) $y' + p(x)y = 0$; б) $y' + p(x)y = q(x)$;

в) $\dfrac{dy}{dx} = p(x)\cdot xy$; г) $y' = f_1(x)\cdot f_2(y)$.

4. Определить, какое из данных дифференциальных уравнений является с разделяющими переменными:

а) $xydx + dy = 0$; б) $(x+y)dx + ydy = 0$;

в) $y' + x^2y = \sin x$; г) $x^2y' + xy = y^2$.

5. Уравнение Бернулли имеет вид:

а) $y' + p(x)y = q(x)$; б) $y' + p(x)y = q(x)\cdot y$;

в) $y' + p(x)y = q(x)\cdot y^{\alpha}, \alpha \neq 1, \alpha \neq 0$; г) $y' + p(x)y = 0$.

6. Определить, какое из данных дифференциальных уравнений является однородным относительно переменных дифференциальных уравнений первого порядка:

а) $y' = xy$; б) $y' = xy + x^2$;

в) $x^2yy' = x^3 + y^3$; г) $x^2y' = 2xy + y^2$.

7. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' = x + e^x$ имеет вид:

а) $y = \dfrac{x^3}{6} + e^x + C_1x + C_2$; б) $y = \dfrac{x^3}{6} + e^x + C_1$;

в) $y = \dfrac{x^3}{6} + e^x$; г) $y = \dfrac{x^3}{6} + e^x + C_1$.

8. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка, не содержащие явно функцию y, имеет вид:

а) $F(y, y', y'') = 0$; б) $F(x, y', y'') = 0$;

в) $F(y, y') = 0$; г) $y'' = f(y, y')$.

9. Общее решение дифференциального уравнения $y'' + 5y' = 0$ имеет вид:

а) $y = C_1e^x + C_2e^{5x}$; б) $y = C_1 + C_2e^{-5x}$;

в) $y = C_1e^{-5x}$; г) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{5x}$.

10. Частное решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 5y' = x^2 - 4$ имеет вид :

а) $y^* = Ax + B$; б) $y^* = Ax^2 + Bx + C$;

в) $y^* = (Ax^2 + Bx + C)x$; г) $y^* = (Ax + B)e^x$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 12.1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = 4x^3$;

б) $\left(x^2+4\right)y' - 2xy = 0$;

в) $y' = y^2$;

г) $2xyy' = y^2 - 4x^2$;;

д) $y'x - y - x^2 = 0$;

е) $y' - 4y = e^{2x}$;

ж) $y' - y\,tg\,x = \dfrac{2x}{\cos x}$;

з) $xy' - 3y + x^4y^2 = 0$.

Ответ:

а) $y = x^4 + C$;

б) $y = C(x^2+4)$;

в) $y = -\dfrac{1}{x+C}$;

г) $y^2 + 4x^2 - 8Cx = 0$

д) $y = x^2 + Cx$;

е) $y = Ce^{4x} - 0{,}5e^{2x}$;

ж) $y = \dfrac{x^2+C}{\cos x}$;

з) $7x^3 = y(x^7 + C)$.

Задача 12.2. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$,

б) $y'' - 16y = 0$,

в) $y'' - 4y' + 13y = 0$,

г) $y'' + 4y = 0$,

д) $y'' + 3y' = 0$,

е) $y'' + 3y' - 4y - 12 = 0$.

Ответ:

а) $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$,

б) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}$,

в) $y = e^{2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$,

г) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$,

д) $y = C_1 + C_2e^{-3x}$,

е) $y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - 3$.

§ 1. Основные понятия и определения

Числовым рядом называется выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,, \qquad (13.1)$$

где $u_n \in R$. Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются членами ряда, число u_n – *общим членом ряда.*

Суммы

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\qquad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

называются *частичными суммами*, а S_n – *n*-й *частичной суммой ряда* (13.1).

Ряд (13.1) называется *сходящимся*, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и равен числу S, т.е. $\boxed{S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n}$, число S называется *суммой* данного ряда.

Ряд (13.1) называется *расходящимся*, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (в частности, бесконечен).

Сумма

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$$

называется *n-м остатком ряда* (13.1).

Если ряд (13.1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$$

Пример 13.1. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$. Установить сходимость этого ряда и найти его сумму.

Запишем *n*-ю частичную сумму данного ряда и преобразуем её:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Поскольку $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, то данный ряд сходится и его сумма $S = 1$.

Ряд вида:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (13.2)$$

представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем q.

Известно, что при $|q| < 1$ ряд (13.2) сходится и его сумма

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Если $|q| \ge 1$, то ряд (13.2) расходится.

Теорема (необходимый признак сходимости ряда).
Если числовой ряд (13.1) *сходится, то* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.}$

Обратное утверждение неверно. Например, в *гармоническом ряде*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

общий член стремится к нулю, однако ряд расходится.

Теорема (достаточный признак расходимости ряда).

Если $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \ne 0}$, *то ряд* (13.1) *расходится.*

Пример 13.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$.

Запишем общий член данного ряда:

$$u_n = \frac{n}{3n+1},$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \ne 0,$$

т.е. ряд расходится.

Сходимость или расходимость числового ряда не нарушается, если в нём отбросить любое конечное число членов. Но его сумма, если она существует, при этом изменится.

§ 2. Достаточные признаки сходимости для рядов с положительными членами

I. *Признак сравнения.*

Если даны два ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (13.3)$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \qquad (13.4)$$

и для всех $n > n_0$ выполняются неравенства $0 < u_n \le v_n$, то:

1) из сходимости ряда (13.4) следует сходимость ряда (13.3);
2) из расходимости ряда (13.3) следует расходимость ряда (13.4).

Пример 13.3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{11}+\frac{1}{30}+\ldots+\frac{1}{3^n+n}+\ldots.$$

Применим признак сравнения.

Так как $\dfrac{1}{3^n+n}<\dfrac{1}{3^n}$ для $\forall n\ge 1$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{1}{3}<1$, то сходится и заданный ряд.

В качестве рядов для сравнения целесообразно выбирать ряд, представляющий сумму членов геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$, а также гармонический (расходящийся) ряд.

II. *Признак сравнения в предельной форме.*

Если $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k}$, где $0<k<\infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Пример 13.4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5}}$.

Попробуем применить признак сравнения: $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+5}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}=\dfrac{1}{n}$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ является гармоническим и расходится. Поэтому признак сравнения в данном случае не решает вопрос о сходимости ряда.
Применим предельный признак сравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+5}}\sim\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{1}{n}\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится как гармонический, а значит исходный ряд также расходится.

III. *Признак Д'Аламбера.*

Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n>0$ (начиная с некоторого $n=n_0$) и существует предел

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q.}\qquad(13.5)$$

Тогда:

1) при $q<1$ данный ряд сходится;
2) при $q>1$ ряд расходится.

При $q=1$ признак Д'Аламбера не даёт ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда: он может и сходиться, и расходиться. В этом случае сходимость ряда исследуют с помощью других признаков.

Пример 13.5. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2^2}+\frac{\sqrt{3}}{2^3}+\ldots+\frac{\sqrt{k}}{2^k}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}.$$

Применим признак Д'Аламбера. Запишем n-ый и $(n+1)$-ый члены ряда:

$$u_n=\frac{\sqrt{n}}{2^n},\quad u_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}:\frac{\sqrt{n}}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Так как $q = \frac{1}{2} < 1$, то данный ряд сходится.

IV. *Радикальный признак Коши.*

Если, начиная с некоторого $n = n_0$, $u_n > 0$ и $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q}$, то если:

1) $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится,
2) $q > 1$ расходится.

При $q = 1$ радикальный признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Пример 13.6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-4}\right)^n$.

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3n-4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-4} = 0 < 1,$$

то данный ряд сходится по радикальному признаку Коши.

V. *Интегральный признак Коши.*

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ монотонно убывают и функция $y = f(x)$, непрерывная при $1 \le a \le x$, такова, что $f(n) = u_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Пример 13.7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{n^2}$.

Применим интегральный признак Коши, рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x+7}{x}, (x \ge 1)$. Так как

$$\int_1^{\infty}\frac{x+7}{x}dx = \int_1^{\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{7}{x}\right)dx = \int_1^{\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right) = (x + 7\ln x)\Big|_1^{\infty} =$$
$$= \infty + 7\ln\infty - (1 + 7\ln 1) = \infty,$$

т.е. данный интеграл расходится, а значит и заданный ряд расходится.

Поскольку $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ $(\alpha \in R)$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$, то

ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$

1) при $\alpha > 1$ сходится,
2) при $\alpha \le 1$ расходится.

Сходимость многих рядов можно исследовать путём сравнения их с соответствующим рядом Дирихле.

§ 3. Знакочередующиеся ряды

Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется <u>*знакопеременным*</u>. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \qquad (13.6)$$

сходится, если сходится ряд, составленный из модулей его членов, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots . \qquad (13.7)$$

Ряд (13.7) в этом случае называется <u>*абсолютно сходящимся*</u>.

Если ряд (13.7) расходится, а ряд (13.6) сходится, то ряд (13.6) называется <u>*условно сходящимся*</u>.

При исследовании ряда на абсолютную сходимость используются признаки сходимости рядов с положительными членами.

Теорема. *Если числовой ряд сходится условно, то, задав любое число а, можно так переставить члены ряда, что его сумма окажется равной а. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, будет расходящимся.*

<u>*Знакочередующимся рядом*</u> называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots , \qquad (13.8)$$

где $u_n \geq 0$.

При исследовании сходимости знакочередующихся рядов применяют признак Лейбница.

Теорема *(признак Лейбница). Знакочередующийся ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ *сходится, если выполнены условия:*

1) $u_n \geq u_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots)$,
2) $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

Следствие. Остаток r_n ряда (13.8) всегда удовлетворяет условию $|r_n| < u_{n+1}$.

Например, ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

сходится, так как выполнены условия признака Лейбница. Он сходится условно, так как ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится.

Пример 13.8. Исследовать числовой ряд с произвольными членами на сходимость (абсолютную и условную):

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n ; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^n}{(3n+2)^n} ; \quad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+1}} .$$

1) Данный числовой ряд является знакоотрицательным. Проверим необходимый признак сходимости.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (-1)^{2n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = -\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = -e \neq 0.$$

Необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}$ расходится.

2) Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}5^{n}}{(3n+2)^{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3n+2}\right)^{n} = \sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Исследуем числовой ряд с положительными членами с помощью признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5}{3n+2}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{3n+2} = 0 < 1.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}5^{n}}{(3n+2)^{n}}\right|$ сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

3) Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n}n}{\sqrt{n^3+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Для выяснения вопроса о его сходимости используем признак сравнения в предельной форме. В качестве эталонного ряда возьмём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3+1}} = 1.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1/2}}$ расходится, как ряд Дирихле при

$\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n}n}{\sqrt{n^3+1}}\right|$.

Исследуем теперь исходный ряд на сходимость. Поскольку он является знакочередующимся, применим признак Лейбница. Можно показать, что

$a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}} > a_{n+1} = \dfrac{n+1}{\sqrt{(n+1)^3+1}}$ для любого $n \in N$, так как

$$\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1/n^2}} > \frac{1}{\sqrt{n+1+\dfrac{1}{(n+1)^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(n+1)^3+1}{(n+1)^2}}} = \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^3+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}} = 0.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}n}{\sqrt{n^3+1}}$ сходится. Таким образом, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}n}{\sqrt{n^3+1}}$ сходится условно.

§ 4. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}, \qquad (13.9)$$

или

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n}, \qquad (13.10)$$

членами которого являются степенные функции x^n или $(x - x_0)^n$, действительные числа c_n называются *коэффициентами* степенного ряда.

Для степенных рядов справедлива следующая теорема.

Теорема *(Абеля).* *Если степенной ряд* (13.9) *сходится в точке* $x_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в любой точке* $x \in (-|x_0|, |x_0|)$. *Если же этот ряд расходится в некоторой точке* x_1, *то он расходится во всех точках* x *вне интервала* $(-|x_1|, |x_1|)$.

Радиусом сходимости степенного ряда называется неотрицательное число R, такое, что степенной ряд (13.9) сходится абсолютно в интервале $(-R, R)$, а интервал $(-R, R)$ – *интервалом сходимости* ряда.

Замечание. Если ряд (13.9) сходится в единственной точке x_0, то для него $R = 0$. Если же он сходится на всей числовой оси, то $R = \infty$.

Радиус сходимости R можно вычислить по одной из следующих формул:

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|} \qquad (13.11)$$

или

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{n->\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}}. \qquad (13.12)$$

Замечание. Для степенного ряда (13.10) формулы (13.11) и (13.12) сохраняются. Интервалом же сходимости ряда является интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ с центром в точке x_0.

Пример 13.9. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{7^n n}.$$

Найдём радиус сходимости данного степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n}{7^n n} : \frac{3^{n+1}}{7^{n+1}(n+1)} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \times 7^n \times 7 \times (n+1)}{7^n \times n \times 3^n \times 3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7n+7}{3n} = \frac{7}{3}.$$

Из теоремы Абеля следует, что интервал абсолютной сходимости ряда: $\left(-\frac{7}{3}; \frac{7}{3} \right)$.

Исследуем поведение данного степенного ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x=\pm\frac{7}{3}$.

а) полагая $x=-\frac{7}{3}$, получим числовой знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n n}\left(-\frac{7}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Общий член этого ряда, взятый по абсолютной величине, монотонно убывает и стремится к нулю при $n\to\infty$:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, а $a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1}$ для любого $n\in N$.

По признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится. Так как ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, является гармоническим, то он расходится. Следовательно, в точке $x=-\frac{7}{3}$ исходный степенной ряд сходится условно;

б) при $x=\frac{7}{3}$ получим числовой положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{7^n n}\left(\frac{7}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$

Это гармонический ряд, который, как известно, расходится.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является промежуток $\left[-\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$. В интервале $\left(-\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$ ряд сходится абсолютно, а в точке $x=-\frac{7}{3}$ – условно.

§ 5. Ряды Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет ограниченные производные любого порядка, то её можно разложить в ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (13.13)$$

Если $x_0=0$, то функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (13.14)$$

$\boxed{0!=1}$

Приведём разложения в ряд Тейлора (Маклорена) некоторых основных функций с указанием интервала сходимости.

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty);$ (13.15)

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ x \in (-\infty; +\infty);$ (13.16)

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\ x \in (-\infty; +\infty);$ (13.17)

4. $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \qquad x \in (-1;1) \qquad (13.18)$$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \qquad x \in (-1;1].$ (13.19)

Ряды Тейлора (Маклорена) применяются для приближенного вычисления определённых интегралов или значений функций в некоторых точках, решения дифференциальных уравнений.

Пример 13. 20. Вычислить $\sqrt[5]{34}$ с точностью до 10^{-4}.

Имеем $\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{32+2} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Воспользуемся теперь формулой (17) при $x = \frac{1}{16}, \alpha = \frac{1}{5}$. Сохранив те члены разложения, которые имеют значащие цифры до пятого знака после запятой, получим

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16} - \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{16^2} + \frac{6}{125}\cdot\frac{1}{16^3} - \ldots$$

Так как $\frac{6}{125}\cdot\frac{1}{16^3} << 10^{-5}$, то с указанной точностью

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1 + \frac{1}{80} - \frac{1}{32\,000} = 1{,}012\,2,$$

а $\sqrt[5]{34} \approx 2{,}024\,4$.

§ 6. Числовые ряды в задачах экономики.

В экономике бесконечные ряды и их суммы появляются в основном в теоретических исследованиях.

Пример 13. 21. Рассмотрим частные суммы S_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами u_n. Предположим, что предприятие при «устоявшемся» способе производства за произведённую продукцию получило прибыль $S_1 = u_1$ денежных единиц. При реализации своей продукции при этом же способе производства предприятие получит некоторую добавку к прибыли u_2, т.е. его доход имеет вид: $S_2 = u_1 + u_2$.

Ясно, что при «устоявшемся» способе производства на n-ом этапе реализации продукции у данного предприятия получится прибыль

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Отсюда, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то предприятие получает максимальную прибыль S, если оно не изменит способ производства.

Пример 13. 22. Предположим, рассматривается вопрос о рыночной цене бессрочной облигации номиналом $1000 и 3%-ым купоном. Это значит, что владелец этой облигации будет каждый год получать $30. Но как определить истинную цену всей этой бесконечной последовательности платежей?

Как правило, любая валюта подвержена инфляции (до Первой мировой войны экономисты считали инфляцию явлением исключительно вредным, однако после этой войны почти все стали признавать полезность небольшой инфляции – 1-2*%* в год). Если инфляция составляет 2*%* в год, то $30, которые получим через год, сейчас эквивалентны $30/(1 + 0,02). А те же $30, которые планируется получить через 2 года, сейчас эквивалентны $30/(1 + 0,02)^2 и т.д. Выходит, что бесконечный ряд платежей в $30, которые будем получать каждый год в будущем, сейчас эквивалентны сумме ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 30/(1+0{,}02)^n$, т.е. сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Воспользовавшись формулой нахождения суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, находим, что эта сумма равна $1500.

Такого рода дисконтирование, т.е. нахождение сегодняшних эквивалентов прошлых или будущих платежей, применяется и в других ситуациях. Пусть, например, рассматривается две стратегии действий фирмы в будущем. Для выяснения, какая из них лучше, приходится дисконтировать к сегодняшнему моменту будущие прибыли по каждой из этих стратегий. Сегодняшний эквивалент этих дисконтированных прибылей представляет сумму бесконечного ряда. Какая из этих сумм больше, ту стратегию, наверное, и нужно выбирать.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие числового ряда и его суммы.

2. Необходимый признак сходимости числового ряда.

3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов (признак сравнения, признак Д'Аламбера, радикальный и интегральный признаки Коши).

4. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.

5. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства.

6. Степенной ряд. Теорема Абеля.

7. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.

8. Ряды Тейлора и Маклорена.

9. Степенные ряды элементарных функций.

10. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Какое выражение является числовым рядом?

а) $1, 2, 3, ..., 312,...$; б) $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 312\cdot ...$;

в) $1-2+3+...-312+...$; г) $1+x+2\cdot x^2+...+n\cdot x^n+...$.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если

а) сходится последовательность частичных сумм;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$;

г) остаток ряда при $n\to\infty$ стремится к $a>0$.

3. Укажите числовой ряд, для которого не выполняется необходимый признак сходимости

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$; в) $\sum_{n=}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-11}$.

4. Если для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geq 0)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=5$, то этот ряд:

а) сходится; б) условно расходится;
в) расходится; г) условно сходится.

5. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ равен $R=1$, то интервалом сходимости этого ряда является интервал

а) $(-1;1)$; б) $(-1;0)$; в) $(0;1)$; г) $(-n;n)$.

6. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+2)^n$ равен $R=4$, то интервалом сходимости этого ряда является интервал

а) $(-4;4)$; б) $(-6;4)$; в) $(-4;2)$; г) $(--6;2)$.

7. Какой ряд сходится по признаку Лейбница?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)^5$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{5}{3}\right)^{2n}$.

8. Вычислить $\sqrt{17}$ с точностью до 10^{-4}:

а) 4, 1230; б) 0,1230; в) 1,987; г) 6.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 13.23. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{4n+2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{n!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n}{(n+1)7^n}$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3n+10}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+10n+29}$.

Ответы:

а) расходится; б) сходится; в) сходится; г) расходится;
д) сходится.

Задача 13.24. Установить абсолютную или условную сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.;

Ответ: а) сходится абсолютно ; б) сходится условно.

Задача 13.25. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+10}$, б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n4^n}{n}$.

Ответ: а) $[-1;1)$; б) $\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

МОДУЛЬ 14. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Случайные события

Событием в теории вероятностей называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате какого-то опыта (испытания).

Например, трактор проработал без капитального ремонта 7000 часов — это событие.

В теории вероятностей события обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C и т.д. или одной буквой, снабженной индексами: A_1, A_2, A_3 и т.д.

По возможности появления события делятся на достоверные, невозможные, случайные.

Достоверное событие — это такое событие, которое в результате данного испытания обязательно наступит.

Например, достоверное событие - удлинение железного стержня при нагревании.

Невозможное событие — это такое событие, которое в результате данного испытания не может произойти.

Например, извлечение из массы непротравленного зерна протравленного зерна — событие невозможное.

Случайное событие — это такое событие, которое в результате данного испытания может произойти, но может и не произойти.

Например, на колхозном поле работают 3 комбайна. Событие состоящее в том, что в данный момент неисправными окажутся все комбайны — случайное.

§ 2. Виды случайных событий

Несовместные события.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Например, механизатор может работать на тракторе и на комбайне. Пусть событие A — механизатор в данный момент работает на тракторе, событие B — на комбайне. События A и B — несовместные.

Равновозможные события.

События A_1, A_2, … A_n называются *равновозможными*, если условия их появления одинаковы.

Полная группа событий.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания обязательно наступит хотя бы одно из них.

На практике широкое применение находит полная группа несовместных событий.

Например, по цели производится три выстрела. Исходом испытания может быть одно из событий: A — промах, B — одно попадание, C — два попадания, D — три попадания. События A, B, C, D образуют полную группу несовместных событий.

Противоположные события.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными*. Событие, противоположное событию A, принято обозначать $\overline{A}$.

Например, событие A — деталь без брака, событие $\overline{A}$ — деталь бракованная.

§ 3. Вероятность события

Классическая вероятность.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, т.е.

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}},$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A; n — число всех возможных элементарных исходов испытания.

Пример 14.1. На полке 8 одинаковых по размерам и весу книг, из которых 3 тома А.Пушкина,
и 5 –Л.Толстого. С полки берут произвольным образом один том. Какова вероятность того, что этот том А.Пушкина?

Обозначим через А событие, состоящие в извлечении одного тома А.Пушкина. Данное событие имеет 8 равновозможных элементарных исходов, из которых 3 благоприятствуют наступлению события A. Значит,

$$P(A)=\frac{3}{8}.$$

Пример 14.2. Бросают игральный кубик. Какова вероятность того, что выпавшее очко меньше 7?

Обозначим через А событие, состоящее в выпадении очка меньшего 7, тогда число n равное числу всех исходов равно 6, т.к. кубик имеет 6 граней. Число m равное числу благоприятных исходов также равно 6, т.к. любое очко кубика меньше 7 (1,2,3,4,5,6). Следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}$, $P(A)=\frac{6}{6}=1$. Следует заметить, что событие А в данном примере является достоверным.

Геометрическая вероятность.

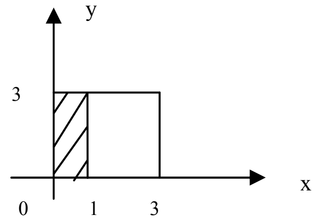
Геометрической вероятностью события А называется отношение меры (длина, площадь, объем) области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области.

Свойства вероятности:

1. Если A — достоверное событие, то $P(A)=1$.
2. Если A — невозможное событие, то $P(A)=0$.
3. Если A — случайное событие, то $0<P(A)<1$.

Следовательно, вероятность любого события удовлетворяет неравенствам $0\le P(A)\le 1$.

Пример 14.3. Найти вероятность попадания точки в не заштрихованную область квадрата, изображенного на рисунке.



Благоприятствующей областью является прямоугольник, площадь которого равна 6, а так как площадь всей области равна 9, то вероятность попадания в не заштрихованную область квадрата равна $P(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

§ 4. Элементы комбинаторики

При решении вероятностных задач используется раздел элементарной математики — комбинаторика. Приведем краткие сведения этой теории.

Соединениями называют различные группы, составленные из каких-либо объектов.

Элементами называются объекты, из которых составлены соединения.

Различают следующие три вида соединений: перестановки, размещения и сочетания.

Перестановками из n элементов называют соединения, содержащие все n элементов и отличающиеся между собой лишь порядком элементов.

Число перестановок из n элементов находится по формуле

$$\boxed{P_n = n!},$$

где $n!$ (читается "эн факториал") — произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

При этом полагают, что $0! = 1$.

Пример 14.4.

Сколькими способами можно разложить на 6 полок 6 различных деталей, так чтобы на каждой полке их было по одной.

Количество таких способов вычисляется по формуле:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 .$$

Размещениями из n элементов по k в каждом $(n \geq k)$ называют такие соединения, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k находят по формуле

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)},$$

или, пользуясь факториалами,

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}.$$

Пример 14.5.

На станции имеется 6 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?

Число способов вычисляется по формуле:

$$A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \text{ или } A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 360 \cdot$$

Сочетаниями из n элементов по k $(n \geq k)$ называют соединения, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов и, которые отличаются друг от друга, по крайней мере, одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по k находят по формуле

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}}$$

или, пользуясь факториалами,

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}}.$$

Для упрощения вычислений при $k > \frac{n}{2}$ полезно использовать следующее свойство сочетаний:

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}.$$

Пример 14.6.

Бригадир должен отправить на работу звено из 18 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 20 человек бригады?

Число звеньев определяется по формуле:

$$C_{20}^{18} = C_{20}^2 = \frac{A_{20}^2}{P_2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190 \cdot$$

Пример 14.7.

В ящике находится 10 шестерен, из них 3 нестандартных. Определить вероятность того, что среди взятых наугад 4 шестерен 2 окажутся нестандартными.

Основное событие A — из 4 взятых шестерен две оказались нестандартными. По классическому определению вероятности события $P(A)=\frac{m}{n}$. Число возможных способов взять 4 шестерни из десяти равно C_{10}^{4}. Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа 3 нестандартных шестерен взято 2 (это можно сделать C_3^2 способами), а остальные 2 шестерни стандартные будут взяты из 7 стандартных шестерен (количество способов C_7^2).

Поэтому $n=C_{10}^{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210$, $m=C_3^2\cdot C_7^2=63$,

$$P(A)=\frac{63}{210}\approx 0{,}3.$$

§ 5. Действия над событиями

Сумма и произведение событий.

<u>Суммой двух событий</u> A и B называется событие C, состоящее в наступлении события A или события B, или обоих событий вместе. Обозначается $A+B=C$.

Например, если событие A — попадание в цель при первом выстреле, событие B — попадание в цель при втором выстреле, то событие $C=A+B$ есть попадание в цель либо при первом выстреле, либо при втором, либо при обоих выстрелах.

Если события A_1 и A_2 — несовместные, то событие A_1+A_2 означает наступление одного из событий A_1 или A_2.

<u>Суммой нескольких событий</u> A_1, A_2, … A_n называется событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий. Обозначается $C=A_1+A_2+\ldots+A_n$.

<u>Произведением двух событий</u> A и B называется событие C, состоящее в совместном наступлении события A и события B. Обозначается $C=A\cdot B$.

Например, в саду высадили два дерева. Событие A — первое дерево в этом году даст плоды, событие B — второе дерево в этом

году даст плоды. Событие $C=A\cdot B$ означает, что оба дерева в этом году дадут плоды.

<u>Произведением нескольких событий</u> называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

§ 6. Теоремы сложения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Теорема. Вероятность суммы n несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)}.$$

Пример 14.8. В ящике 10 белых, 9 черных и 11 синих одинаковых по размеру и весу шаров. Наудачу вынимается один шар. Какова вероятность, что вынутый шар не белый?

Пусть событие А - «появился черный шар», В – «появился синий шар», вероятности этих событий соответственно равны $P(A)=\frac{9}{30}$, $P(B)=\frac{11}{30}$. Тогда событие С, которое состоит в вынимании не белого шара выражается как $C=A+B$, а так как события А и В несовместные, то $P(C)=P(A)+P(B)$. Следовательно, $P(C)=\frac{9}{30}+\frac{11}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

Следствие 1. Если события A_1, A_2, … A_n образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1}.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$\boxed{P(A)+P(\overline{A})=1}.$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий.

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}.$$

Пример 14.9. Проверяется на стандартность 25 изделий. Было установлено, что у 8 изделий не выдержан первый параметр, у 6 изделий – только второй, а у 3 изделий не выдержаны оба параметра. Наудачу берут одно изделие. Какова вероятность того, что оно не удовлетворяет стандарту?

Пусть событие А – «у изделия не выдержан первый параметр», В - «у изделия не выдержан второй параметр», С – « изделие не удовлетворяет стандарту». Тогда событие А·В состоит в том, что у выбранного изделия не выдержаны оба параметра.
Т.к. события А и В совместные, то

$$P(C)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Из условия задачи следует, что $P(A)=\frac{8+3}{25}=\frac{11}{25}$, $P(B)=\frac{6+3}{25}=\frac{9}{25}$, $P(AB)=\frac{3}{25}$.

$$P(C)=\frac{11}{25}+\frac{9}{25}-\frac{3}{25}=\frac{17}{25}.$$

§ 7. Теоремы умножения вероятностей

Независимые и зависимые событий.

Два события называются *__независимыми__*, если вероятность наступления одного из них (причем любого) не зависит от того, произошло или не произошло другое событие. В противном случае события называются *__зависимыми.__*

Например, фары трактора или автомобиля подсоединены параллельно. Отказ в работе левой фары событие *А,* отказ в работе правой фары событие *В.* События *А* и *В* независимые.

Пример 14.10. Вероятность поломки первого станка в течение смены равна 0,3, а второго – 0,12. Чему равна вероятность того, что в течение смены неисправными будут одновременно оба станка?

Так как станки работают независимо друг от друга, и если событие А – «поломка первого станка», событие В - «поломка второго станка», то событие А·В состоит в поломке обоих станков. Следовательно, вероятность события А·В находится по формуле

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

$$P(A\cdot B)=0{,}3\cdot 0{,}12=0{,}036.$$

События, независимые в совокупности.

Несколько событий называются *__независимыми в совокупности__*, если каждое из них и любая комбинация из остальных событий (содержащая либо все события, либо часть из них) есть события независимые.

Например, на каждом из трех стеллажей склада находится по 25 поршней первого и второго допуска. Из каждого стеллажа берут по одному поршню. Обозначим событие *А* — взятый с первого стеллажа поршень имеет первый допуск, *В* — взятый со второго стеллажа поршень имеет второй допуск, *С* — взятый с третьего стеллажа поршень имеет первый допуск. События *А, В, С* — независимые в совокупности.

Условная вероятность.

<u>*Условной вероятностью*</u> $P_B(A)$ или $P(A/B)$ называется вероятность события A, вычисленную в предположении, что событие B уже наступило.

Теорема. Вероятность произведения (совместного наступления) двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)}.$$

Следствие. Вероятность произведения (совместного наступления) нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)}.$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, ... A_n независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, ... $\overline{A_n}$, т.е.

$$\boxed{P(A)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_n})}.$$

Теорема. Вероятность произведения (совместного наступления) двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)} \text{ или } \boxed{P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A)}.$$

Пример 14.11. Для проверки на морозоустойчивость различных сортов яблони высажено 3 саженца. Вероятность выдержать испытание для первого саженца равна 0,9, для второго — 0,95. для третьего — 0,85. Какова вероятность того, что

а) все 3 саженца выдержат испытание,
б) хотя бы один из саженцев выдержит испытание,
в) не менее двух саженцев выдержат испытание?
г)

а) основное событие A — все 3 саженца выдержат испытание, $P(A)=?$ Введем вспомогательные события: A_1 — первый саженец выдержит испытание, A_2 — второй саженец выдержит испытание, A_3 — третий саженец выдержит испытание, тогда $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$.

События A_1, A_2, A_3 независимые в совокупности, поэтому $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}85\approx 0{,}7267$.

б) Основное событие B — хотя бы один из саженцев выдержит испытание, $P(B)=?$ Введем вспомогательные события: $\overline{A_1}$ — первый саженец не выдержит испытание (противоположное A_1), $P(\overline{A_1})=0{,}1$; $\overline{A_2}$ — второй саженец не выдержит испытание (противоположное A_2), $P(\overline{A_2})=0{,}05$; $\overline{A_3}$ — третий саженец не выдержит испытание (противоположное A_3), $P(\overline{A_3})=0{,}15$.

Событие $\overline{B}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$ означает, что ни один саженец не выдержит испытание.

$$P(\overline{A})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 0{,}15\approx 0{,}0008.$$

По теореме о вероятности противоположных событий

$P(A)=1-P(\overline{A})$ имеем $P(B)\approx 1-0{,}0008\approx 0{,}9992$.

в) Основное событие D — не менее двух саженцев выдержат испытание или 3 саженца выдержат испытание, $P(D)=?$

Введем вспомогательные события: E — два саженца выдержат испытание, C — три саженца выдержат испытание. Тогда $D=E+C$.

E и C — несовместные события, следовательно $P(D)=P(E)+P(C)$.

Событие $E = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$, события $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$; $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$; $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$ - несовместные, следовательно,

$$P(E) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}15 + 0{,}9 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}85 + 0{,}1 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}85 \approx 0{,}2472 .$$

Событие $C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, $P(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}85 \approx 0{,}7267$, $P(D) \approx 0{,}9739$.

Пример 14.12. Некоторая система состоит из трех узлов *B*, *C*, *D*, работающих независимо друг от друга. Дублируется только узел *C* (наименее надежный узел). Определить надежность работы системы, если надежность работы каждого элемента P_i указана на рисунке 2.1:

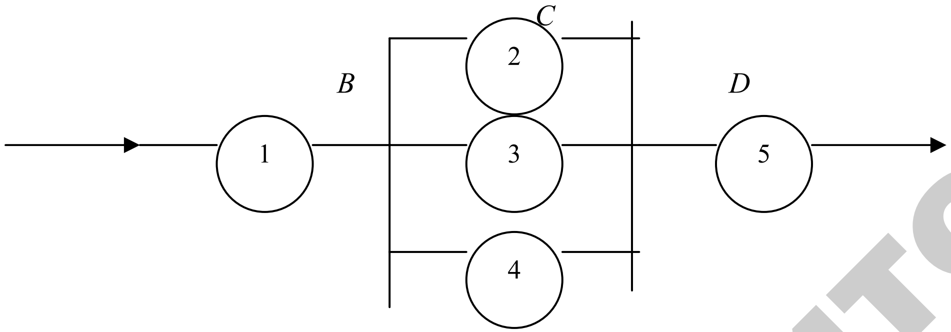


Рис. 14.1

$P_1 = 0{,}9$; $P_2 = 0{,}81$; $P_3 = 0{,}82$; $P_4 = 0{,}85$; $P_5 = 0{,}94$.

Основное событие *A* — цепь работает, $P(A) = ?$

$A = B \cdot C \cdot D$, $P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$.

A_1 — работает 1-й элемент, $P(A_1) = 0{,}9$; $P(\overline{A_1}) = 0{,}1$.

A_2 — работает 2-й элемент, $P(A_2) = 0{,}81$; $P(\overline{A_2}) = 0{,}19$.

A_3 — работает 3-й элемент, $P(A_3) = 0{,}82$; $P(\overline{A_3}) = 0{,}18$.

A_4 — работает 4-й элемент, $P(A_4) = 0{,}85$; $P(\overline{A_4}) = 0{,}15$.

A_5 — работает 5-й элемент, $P(A_5) = 0{,}94$; $P(\overline{A_5}) = 0{,}06$.

$P(B) = P(A_1) = 0{,}9$;

$P(C) = 1 - P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = 1 - 0{,}19 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}15 \approx 0{,}9949$;

$P(D) = P(A_5) = 0{,}94$;

$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}9949 \cdot 0{,}94 = 0{,}8417$.

§ 8. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Формула полной вероятности.

Пусть событие *A* может наступить при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, $\dots H_n$, образующих полную группу. Будем эти события называть гипотезами. Вероятность события *A* в этом случае вычисляется по формуле:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)},$$

которая носит название формулы полной вероятности.

Пример 14.13. На сборку поступают шестерни с 3-х автоматов. Первый дает 25%; второй — 30% и третий — 45% шестерен, поступающих на сборку. Первый автомат допускает 0,1% брака шестерен, второй 0,2%, третий — 0,3%. Найти вероятность поступления на сборку бракованной шестеренки.

Введем следующие обозначения событий:

Основное событие *A* — поступление на сборку бракованной шестерни.

H_1 — шестерня изготовлена первым автоматом,

H_2 — шестерня изготовлена вторым автоматом,

H_3 — шестерня изготовлена третьим автоматом.

Из условия задачи следует, что вероятность поступления на сборку бракованной шестерни, изготовленной первым, вторым или третьим автоматом соответственно равны:

$$P_{H_1}(A) = 0{,}001, \ P_{H_2}(A) = 0{,}002, \ P_{H_3}(A) = 0{,}003.$$

Так же известны вероятности того, что шестерня, поступившая на сборку изготовлена первым, вторым или третьим автоматом соответственно:

$$P(H_1)=0{,}25;\ P(H_2)=0{,}3;\ P(H_3)=0{,}45.$$

Используя формулу полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A),$$

имеем

$$P(A)=0{,}25\cdot 0{,}001+0{,}3\cdot 0{,}002+0{,}45\cdot 0{,}003\approx 0{,}0022.$$

Формула Байеса (вероятность гипотез).

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу. Вероятности этих гипотез до опыта известны и соответственно равны $P(H_1)$, $P(H_2)$, … $P(H_n)$. Произведен опыт, в результате которого появилось событие А. Вероятность $P_A(H_i)$ гипотезы H_i, после того, как событие A наступило, определяется по формуле Байеса

$$\boxed{P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)},\ i\in\overline{1,n}}\ .$$

Пример 14.14. Телеграфное сообщение состоит из сигналов ″точка″ и ″тире″, они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/3 сообщений ″точка″ и 1/3 сообщений ″тире″. Найти вероятность того, что принятый сигнал — ″тире″.

Обозначим через A событие — передаваемый сигнал принят. Рассмотрим гипотезы: H_1 — передаваемый сигнал — ″точка″,

H_2 — передаваемый сигнал ″тире″.

Вероятности гипотез: $P(H_1)=\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$; $P(H_2)=\frac{3}{5+3}=\frac{3}{8}$.

Вероятность того, что сигнал принят, если передаваемый сигнал ″точка″, равна $P_{H_1}(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$, т.е. вероятность того, что передаваемый сигнал ″точка″ не искажен. Вероятность того, что сигнал принят, если сигнал ″тире″, равна $P_{H_2}(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, т.е. вероятность того, что передаваемый сигнал ″тире″ не искажен.

По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{8}.$$

Тогда по формуле Байеса

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

§ 9. Формула Бернулли

Теорема. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна и равна p, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, определяется по формуле Бернулли.

$$\boxed{P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}},\quad где\quad q=1-p.$$

На практике формулой Бернулли удобно пользоваться, если n — не очень велико $(n<10)$.

Пример 14.15. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут:

а) четыре; б) не менее четырёх.

Воспользуемся формулой Бернулли. Если производится n независимых испытаний, при каждом из которых вероятность осуществления события A постоянна и равна p, а вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна $q = 1 - p$, то вероятность $P_n(m)$ того, что при этом событии A осуществляется ровно m раз, вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m.

а) По условию задачи вероятность всхожести семян $p = 0{,}9$; тогда $q = 0{,}1$; в данном случае $n = 5$ и $m = 4$. Подставляя эти данные в формулу Бернулли , получим

$$P_5(4) = C_5^4 (0{,}9)^4 (0{,}1) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 0{,}656 \cdot 0{,}1 = 0{,}328.$$

б) Искомое событие A состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут или четыре, или пять. Таким образом, $P(A) = P_5(4) + P_5(5)$. Первое слагаемое уже найдено. Для вычисления второго снова применяем формулу Бернулли:

$$P_5(5) = C_5^5 (0{,}9)^5 (0{,}1)^0 = 1 \cdot 0{,}591 \cdot 1 = 0{,}591.$$

Следовательно, $P(A) = 0{,}328 + 0{,}591 = 0{,}919.$

§ 10. Формула Пуассона

Теорема. Если производится достаточно большое число испытаний (n — велико), в каждом из которых вероятность наступления события A постоянна, но мала, то вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, определяется приближенно формулой

$$\boxed{P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}}, \quad \text{где } \lambda = n \cdot p.$$

Пример 14.16. Пусть известно, что на выпечку 1000 сдобных булочек с изюмом полагается $n = 10000$ изюмин. Найти вероятность того, что в купленной булочке будет: а) не менее 7 и не более 10 изюмин; б) ни одной изюмины.

Покупку булочки в магазине можно рассматривать как случайный выбор. Ясно, что при хорошем перемешивании теста с изюмом отдельные изюмины распределятся в нем статистически равномерно. Поскольку всего 1000 булочек, то вероятность каждой изюмины попасть в выбранную булочку есть $p = 0{,}001$. Условие статистической равномерности распределения изюмин и независимости числа изюмин в каждой булочке можно считать практически выполненным. Условие $n \cdot p \approx n \cdot p \cdot q$ тоже приближенно выполняется:

$$10000 \cdot 0{,}001 \approx 10000 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}999 \text{ или } 10 \approx 9{,}99.$$

Следовательно, имеется возможность применения формулы Пуассона.

Величина $\lambda = n \cdot p = 10$ – среднее число изюмин, приходящихся на одну булочку.

а) Вероятность того, что

$$P_{1000}(7 \le k \le 10) = P_{1000}(7) + P_{1000}(8) + P_{1000}(9) + P_{1000}(10) =$$

$$= \frac{10^7}{7!} e^{-10} + \frac{10^8}{8!} e^{-10} + = \frac{10^9}{9!} e^{-10} + \frac{10^{10}}{10!} e^{-10} \approx 0{,}499.$$

б) Вероятность купить булочку вовсе без изюма

$$P_{1000}(0) = \frac{10^0}{0!} e^{-10} = e^{-10} \approx 0{,}000045.$$

§ 11. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Теорема (локальная теорема Лапласа). Если производится n независимых испытаний (n — велико), и вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна p, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, определяется по формуле

$$\boxed{P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x)},$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$,

причем результат тем точнее, чем ближе значение p к $\frac{1}{2}$ и больше n.

Функция $\varphi(x)$ — четная. Значения функции $\varphi(x)$ находятся по таблице "Приложение №1", помещенной в конце методических указаний. Для $x \geq 5$ полагают $\varphi(x) = 0$.

Теорема (интегральная теорема Лапласа). Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее чем m_1 раз и не более чем m_2 раза, определяется по формуле

$$\boxed{P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$,

$$x_1 = \frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \qquad x_2 = \frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}.$$

Функция $\Phi(x)$ — нечетная. Значения находятся по таблице Приложения 2, помещенной в конце данного пособия. Для $x \geq 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$.

Пример 14.17. Вероятность наступления некоторого события при одном испытании равна 0,3. Найти вероятность того, что при 100 испытаниях:

а) событие появится 28 раз;

б) событие появится не менее 25 и не более 32 раз.

а) Воспользуемся локальной теоремой Лапласа.
Здесь $p = 0{,}3$; $n = 100$; $m = 28$; $q = 0{,}7$.

$$P_{100}(28) = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x);$$

$$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{28 - 0{,}3 \cdot 100}{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 100}} = -0{,}43;$$

$$P_{100}(28) = \frac{1}{4{,}58} \cdot \varphi(-0{,}43) = \frac{1}{4{,}58} \cdot 0{,}3637 = 0{,}079,$$

где $\varphi(-0{,}43) = 0{,}3637$ найдено по таблице Приложения 1

б) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа

$$P_{100}(25 \leq m \leq 32) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{25 - 30}{4{,}58} = -1{,}09;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{32 - 30}{4{,}58} = 0{,}43;$$

Значения $\Phi(0{,}43)$ и $\Phi(-1{,}09)$ найдены по таблице Приложения 2

$$P_{100}(25 \leq m \leq 32) = \Phi(0{,}43) - \Phi(-1{,}09) = \Phi(0{,}43) + \Phi(1{,}09) =$$
$$= 0{,}1664 + 0{,}3621 = 0{,}5285.$$

§ 12. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний

Наивероятнейшим числом m_0 появления события A в n независимых испытаниях называется число, для которого вероятность $P_n(m)$ превышает или, по крайней мере, не меньше вероятности каждого из остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число определяется по формуле

$$\boxed{n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p},$$

где n — число независимых испытаний;

p — вероятность наступления события A в одном испытании;

q — вероятность не наступления события A в одном испытании;

m_0 — наивероятнейшее число наступлений событий A.

§ 13. Дискретные и непрерывные случайные величины. Функции распределения случайной величины

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять одно, и только одно, возможное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Например, посеяно 100 зерен пшеницы для определения ее всхожести. Число взошедших зерен есть случайная величина, которая может принять одно из значений: 0, 1, 2, …, 100.

Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает отдельные, изолированные друг от друга возможные значения, которые можно перенумеровать.

Например, число взошедших зерен пшеницы есть дискретная случайная величина.

Непрерывной случайной величиной называется такая, случайная величина возможные значения которой, непрерывно заполняют какой-то промежуток, конечный или бесконечный.

Например, расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из оружия, есть непрерывная случайная величина. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку $[a,b]$.

Случайные величины обозначаются: X, Y, Z и т.д.

Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения можно задать в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

x_i — возможные значения случайной величины X,

p_i — соответствующие им вероятности.

Причем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Интегральной функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$ выражающая вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее чем x:

$$\boxed{F(x) = P(X < x).}$$

Свойства интегральной функции $F(x)$***:***

1. Значения интегральной функции принадлежат отрезку $[0;1]$.

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. $F(x)$ — неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$ если $x_2 > x_1$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1.$

4. Вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале (a,b), равна приращению интегральной функции на этом интервале:

$$\boxed{P(a<X<b)=F(b)-F(a).}$$

5. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно конкретное значение, равна нулю, т.е. $P(x=x_0)=0$. Поэтому, для непрерывной случайной величины справедлива формула

$$\boxed{P(a\le X\le b)=F(b)-F(a).}$$

Дифференциальной функцией распределения или плотностью вероятности случайной величины X в точке x называется отношение вероятности попадания непрерывной случайной величины на элементарный участок от x до $x+\Delta x$ к длине этого участка, когда $\Delta x\to 0$.

Обозначается плотность вероятности через $f(x)$. По определению имеем:

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Так как $P(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)$,

то $\boxed{f(x)=F'(x)}$.

Таким образом, если существует $F'(x)$, то существует $f(x)$, что обычно и предполагают.

Интегральная функция выражается через дифференциальную функцию формулой:

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt}.$$

Свойства дифференциальной функции:

1. $f(x)\ge 0$, т.е. дифференциальная функция не отрицательна.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty;\infty)$, равна единице.

3. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение в интервале (a,b), равна определенному интегралу от дифференциальной функции, взятому в пределах от a до b:

$$\boxed{P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx}.$$

§ 14. Числовые характеристики случайных величин

Математическим ожиданием случайной величины X называется ее среднее значение, вычисляемое по формулам:

$\boxed{M[X]=m=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$ — для дискретной случайной величины;

$$M[X] = m = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$ — для непрерывной случайной величины.

Для встречающихся на практике случайных величин, записанный несобственный интеграл сходится.

Свойства математического ожидания:

1. $M[C] = C$, где C — постоянная величина.
2. $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$.
3. $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$, если X и Y независимые случайные величины.
4. $M[X+Y] = M[X] + M[Y]$.

Разность между значением случайной величины X и ее математическим ожиданием $M[X]$ называется <u>*отклонением*</u> случайной величины X, т.е. по определению отклонение — это

$$X - M[X].$$

Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M[X - M[X]] = 0.$$

<u>*Дисперсией*</u> случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2].$$

Дисперсия вычисляется по формулам:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 \cdot p_i$$ — для дискретной случайной величины;

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 \cdot f(x)dx$$ — для непрерывной, случайной величины.

Свойства дисперсии:

1. $D[C] = 0$, где C — постоянная величина.
2. $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$.
3. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$,

если X и Y — независимые случайные величины.

<u>*Средним квадратическим отклонением*</u> случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma_x = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

Пример 14.18. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,75 и четвертого — 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа, если станки работают независимо.

Здесь $p_1 = 0{,}9$; $q_1 = 0{,}1$;

$p_2 = 0{,}8$; $q_2 = 0{,}2$;

$p_3 = 0{,}75$; $q_3 = 0{,}25$;

$p_4 = 0{,}7$; $q_4 = 0{,}3$.

Случайная величина X может принимать значения

$$x_0 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 4.$$

Соответствующие вероятности будут:

$$P(x=0) = P_0 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 = 0{,}0015;$$

$$P(x=1) = P_1 = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 \cdot q_4 +$$
$$+ q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot p_4 = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 +$$
$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}0265;$$

$$P(x=2) = P_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + p_1 \cdot p_3 \cdot q_2 \cdot q_4 + p_1 \cdot p_4 \cdot q_2 \cdot q_3 +$$
$$+ p_2 \cdot p_3 \cdot q_1 \cdot q_4 + p_2 \cdot p_4 \cdot q_1 \cdot q_3 + p_3 \cdot p_4 \cdot q_1 \cdot q_2 =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 +$$

$+0{,}8\cdot 0{,}75\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3+0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1\cdot 0{,}25+0{,}75\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}1675$

.

$P(x=3)=P_3=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot q_4+p_1\cdot p_2\cdot q_3\cdot p_4+p_1\cdot q_2\cdot p_3\cdot p_4+$

$+q_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}75\cdot 0{,}3+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}25\cdot 0{,}7+$

$+0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}75\cdot 0{,}7+0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}75\cdot 0{,}7=0{,}4265$;

$P(x=4)=P_4=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}75\cdot 0{,}7=0{,}3780$.

Закон распределения имеет вид:

x	0	1	2	3	4
p	0,0015	0,0265	0,1675	0,4265	0,3780

Для проверки правильности вычислений рекомендуется убедиться в том, что сумма всех вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=0}^{4}p_i=0{,}0015+0{,}0265+0{,}1675+0{,}4265+0{,}3780=1.$$

$$M[X]=\sum_{i=0}^{4}x_i\cdot p_i=0\cdot 0{,}0015+1\cdot 0{,}0265+2\cdot 0{,}1675+$$
$$+3\cdot 0{,}4265+4\cdot 0{,}3780=3{,}15.$$

$$M[X^2]=\sum_{i=0}^{4}x_i^2\cdot p_i=0\cdot 0{,}0015+1\cdot 0{,}0265+2^2\cdot 0{,}1675+$$
$$+3^2\cdot 0{,}4265+4^2\cdot 0{,}3780=10{,}5.$$

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=0{,}665.$$

Пример 14.19. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ \dfrac{x}{2}-1, & 2\le x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Найти $f(x)$ — плотность распределения случайной величины X, $M[X]$ — математическое ожидание и $D[X]$ — дисперсию. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

График распределения $F(x)$ показан на рис.14.2.

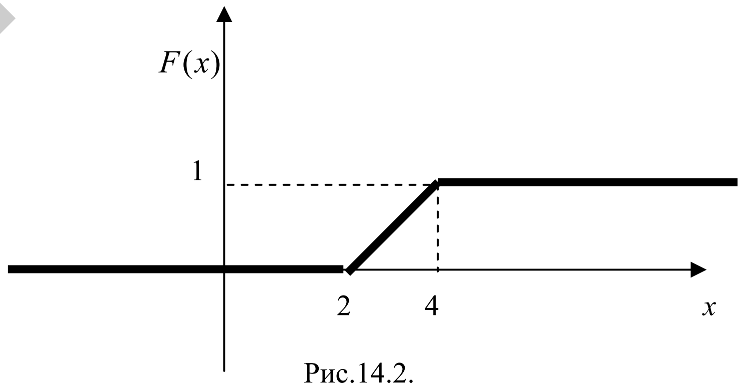


Рис.14.2.

Плотность распределения найдем из выражения:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}0, & x<2,\\ \dfrac{1}{2}, & 2\le x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Ее график

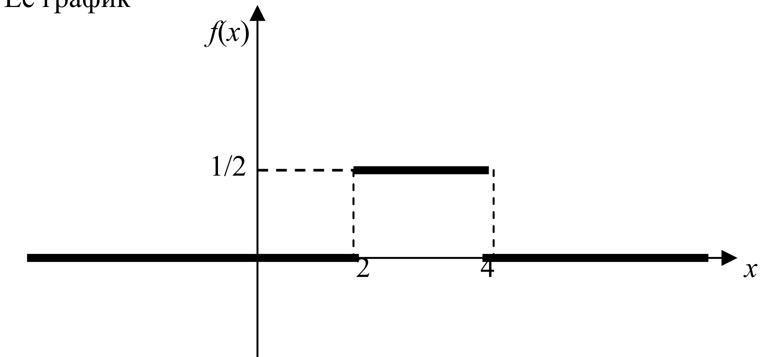


Рис.14.3

Следует, что случайная величина X имеет равномерное распределение на участке от 2 до 4, следовательно $a=2$; $b=4$,

откуда $M[X]=\dfrac{b+a}{2}=\dfrac{2+4}{2}=3;$

$$D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(4-2)^2}{12}=\frac{1}{3}.$$

Эти же результаты можно получить по формуле для нахождения математического ожидания для непрерывных случайных величин

$$M[X]=\int_2^4\frac{x}{2}dx=3;$$

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\int_2^4\frac{x^2}{2}dx-9=\frac{1}{3}.$$

§ 15. Биномиальный закон распределения

Случайная величина X называется распределенной по *биномиальному закону*, если ее возможные значения 0, 1, 2, … n, а вероятность того, что $X=m$ выражается формулой:

$$\boxed{P(X=m)=P_{m,n}=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}},$$

где $0<p<1$ есть вероятность наступления события A при одном испытании, $q=1-p$.

Числовые характеристики биномиального закона распределения:

$$\boxed{M[X]=n\cdot p},\quad \boxed{D[X]=n\cdot p\cdot q}.$$

§ 16 Закон Пуассона

Дискретная случайная величина X называется распределенной по *закону Пуассона*, если ее возможные значения 0, 1, 2, …, m, …, а вероятность того, что $X=m$ выражается формулой:

$$\boxed{P(X=m)=P_m=\frac{\alpha^m}{m!}\cdot e^{-\alpha}},$$

где $\alpha>0$ - параметр закона Пуассона.

Числовые характеристики закона Пуассона:

$$\boxed{M[X]=\alpha},\qquad \boxed{D[X]=\alpha}.$$

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени. Доказано, что если известна постоянная интенсивность потока λ, то вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой:

$$\boxed{P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k\cdot e^{-\lambda t}}{k!}}.$$

Пример 14.20. Среднее число заявок, поступающих на предприятие бытового обслуживания за 1 ч., равно трем. Найти вероятность того, что за 2 ч. поступит 5 заявок. Предполагается, что поток заявок простейший.

По условию $\lambda = 3$, $t = 2$, $k = 5$. Воспользуемся формулой

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Искомая вероятность того, что за 2 ч. поступит 5 заявок, равна

$$P_2(5) = \frac{6^5 \cdot e^{-6}}{5!} = \frac{6^5 \cdot 0{,}00248}{120} \approx 0{,}268.$$

§ 17. Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина называется *равномерно распределенной* в интервале (α, β), если ее плотность распределения в этом интервале постоянна, а вне его равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \alpha; \\ \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha < x \le \beta; \\ 0, & x > \beta. \end{cases}$$

Числовые характеристики равномерного закона распределения:

$$\boxed{M[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}}, \qquad \boxed{D[X] = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}}.$$

График дифференциальной функции равномерного распределения.

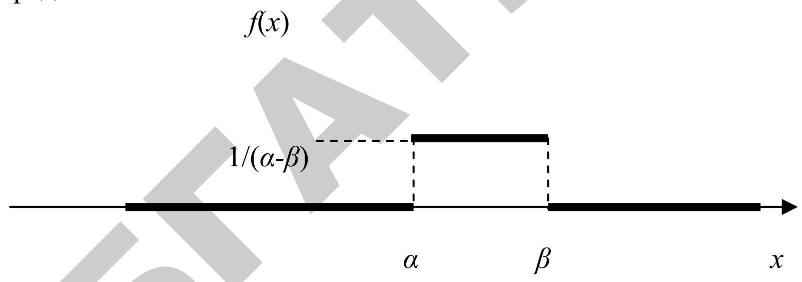


Рис.14.4.

§ 18. Показательный закон распределения

Показательным называется распределение, дифференциальная функция которого имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \ge 0; \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ — параметр показательного распределения.

График дифференциальной функции показательного распределения:

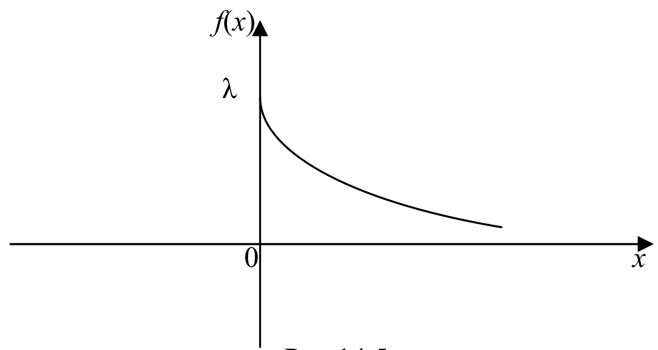


Рис.14.5.

Числовые характеристики показательного распределения:

$$\boxed{M[X]=\frac{1}{\lambda}};\qquad \boxed{D[X]=\frac{1}{\lambda^2}}.$$

Интегральная функция $\boxed{F(x)=1-e^{-\lambda x}}$.

§ 19. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения играет исключительную роль в теории вероятностей. Это наиболее часто встречающийся закон распределения. Главная его особенность в том, что он является предельным законом, к которому, при определенных условиях, приближаются другие законы распределения.

Непрерывная случайная величина называется *нормально распределенной*, если ее плотность распределения равна:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}},$$

где m — математическое ожидание;
σ — среднее квадратическое отклонение.

График дифференциальной функции $f(x)$ нормального закона распределения (нормальная кривая или кривая Гаусса) имеет вид:

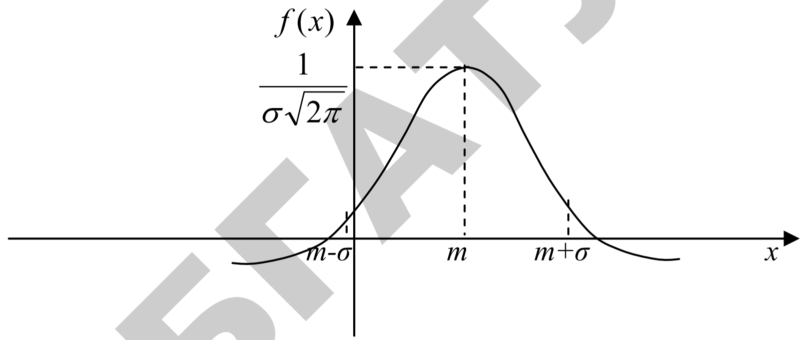


Рис.14.6.

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значение в интервале (a,b), выражается формулой:

$$\boxed{P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)},$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

§ 20. Функция надежности

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(t)=P(T>t),$$

где T — длительность времени безотказной работы элемента.

Для показательного закона распределения вероятность безотказной работы элемента за время t вычисляется по формуле:

$$\boxed{R(t) = e^{-\lambda t}}.$$

Пример 14.21. Автомат изготовляет шарики для подшипника. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально, где $\sigma[X] = 0{,}4$ мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

Так как X — отклонение диаметра от проектного размера, то

$M[X] = a = 0$. Тогда $P(|X| < \delta) = P(|X| < 0{,}7) =$

$$= 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right) = 2\Phi(1{,}75) = 0{,}92.$$

Таким образом, вероятность того, что диаметр шарика отклонится от проектного меньше чем на 0,7 мм, равна 0,92. Отсюда следует, что примерно 92 шарика из 100 окажутся годными.

§ 21. Закон больших чисел. Локальные предельные теоремы

Неравенство Чебышева.

Нормальный закон является универсальным в том смысле, что при сложении большого числа достаточно произвольных случайных величин получаем нормально распределенную случайную величину. Этот факт устанавливают законы больших чисел.

Теорема. Пусть X — произвольная случайная величина со средним MX и конечной дисперсией D, тогда

$$\boxed{P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}}. \qquad (14.1)$$

Закон больших чисел в форме Чебышева.

Теорема Чебышева. Пусть случайные величины X_1, $X_2, \ldots X_n, \ldots$ попарно независимы и их дисперсии ограничены одним и тем же числом c, тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| < \varepsilon\right\} \to 1.} \qquad (14.2)$$

В частном случае если все X_k одинаково распределены и $MX_k = a$, то из (5.2) получим

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right\} \to 1.} \qquad (14.3)$$

Если выполняется (18.3), то говорят, что последовательность случайных величин $\{Y_n\} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right\}$ сходится к своему среднему значению a по вероятности, или, что к этой последовательности применим закон больших чисел.

Теорема Бернулли.

Теорема. Пусть имеется n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p, m — число успехов, а $q=1-p$, тогда для любого $\varepsilon > 0$.

$$\boxed{P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1}, \text{ если } n \to \infty, \qquad (14.4)$$

т.е. частота события A стремиться к его вероятности при неограниченном увеличении числа испытаний.

Эта теорема дает обоснование статистическому определению вероятности, т.е. при больших n за вероятность события можно принять его частоту.

Пример 14.22. При штамповке пластинок из пластмассы по данным ОТК брак составляет 3%. Оценить вероятность того, что при просмотре партии в 1000 пластинок, выявится отклонение от установленного процента брака меньше, чем на 1%.

Здесь следует найти

$$P_0 = P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \text{ при } p = 0{,}03,\ \varepsilon = 0{,}01,\ n = 1000.$$

По теореме Бернулли искомая вероятность

$$P_0 > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \text{ где } \frac{pq}{n\varepsilon^2} = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}97}{1000 \cdot 0{,}01^2} = 0{,}291.$$

Получаем $p_0 \geq 0{,}709$.

Усиленный закон больших чисел.

Закон больших чисел (14.2) утверждает, что

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k \to 0} \qquad (14.5)$$

по вероятности. Усиленный закон больших чисел утверждает, что соотношение (18.5) выполняется с вероятностью 1, т.е.

$$\boxed{P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k \to 0\right\} = 1.} \qquad (14.6)$$

Центральная предельная теорема.

Эта теорема устанавливает предельное распределение сумм большого числа случайных величин.

Теорема. Пусть $X_1, \ldots, X_i, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины; $MX_i = a,\ DX_i = \sigma^2\ (i = 1, 2, \ldots);\ Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_n.$ Тогда при $n \to \infty$ равномерно по α и β имеем

$$\boxed{P\left(\alpha \leq \frac{Y_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq \beta\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{\frac{x^2}{2}}\, dx.} \qquad (14.7)$$

Это значит, что закон распределения случайной величины $\dfrac{Y_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ неограниченно приближается к нормальному закону с параметрами 0; 1.

Итак, универсальность нормального закона заключается в том, что *при соответствующей нормировке распределение последовательности сумм независимых случайных величин сходится к нормальному закону.*

Пример 14.23. Количество тонн цемента, взятое за день с цементного склада, является случайной величиной с рядом распределения

0	20	40
1/4	1/2	1/4

С какой вероятностью 2000 т цемента хватит на квартал (90 дней)?

Пусть X_1— случайное количество цемента, взятое в i-й день со склада. Считаем, что эти величины независимы и одинаково распределены с указанным выше рядом распределения. Тогда $MX_i = 20$, $DX_i = 200$. В соответствии с ЦПТ закон распределения их суммы за квартал Y_{90} — приближенно нормальный с параметрами

$M(Y_{90}) = 90 \cdot 20 = 1800, \quad D(Y_{90}) = 90 \cdot 200 = 18000$ и

$\sigma_{Y_{90}} = \sqrt{180000} \cong 134.$

Следовательно, $P(Y_{90} \le 2000) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{2000 - 1800}{134}\right) = 0{,}93,$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt.$$

§ 22. Системы случайных величин

Часто результат опыта описывается не одной случайной величиной X, а несколькими случайными величинами $X_1, X_2, \ldots, X_n$. В этом случае говорят, что указанные *случайные величины образуют систему* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Систему двух случайных величин (X, Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости.

Событие, состоящее в попадании случайной точки $(X; Y)$ в область D, обозначим в виде $(X; Y) \subset D$.

Закон распределения системы двух дискретных случайных величин можно задать в виде табл. 1.

Y / X	y_1	y_2	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
x_1	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

Здесь $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$; p_{tj} — вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i, Y = y_j$, т.е. $p_{ij} = P\{X = x_i; Y = y_j\}$, при этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Закон распределения системы непрерывных случайных величин (X, Y), будем задавать с помощью плотности вероятности $f(x, y)$.

Вероятность попадания случайной точки $(X; Y)$ в область D определяется равенством

$$\boxed{P\{(X;Y) \subset D\} = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.}$$

Функция $f(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $f(x, y) \ge 0.$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$

Если все случайные точки $(X; Y)$ принадлежат некоторой конечной области D_0, то свойство 2 примет вид $\iint_{D_0} f(x, y) dx dy = 1.$

Математические ожидания дискретных случайных величин X и Y, входящих в систему, определяются так:

$$\boxed{m_X = MX = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, m_Y = MY = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i p_{ij},} \qquad (14.8)$$

а соответствующие характеристики непрерывных случайных величин – по формулам

$$m_X = MX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy, \quad m_Y = MY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy \qquad (14.9)$$

Точку $(m_X; m_Y)$ называют <u>*точкой рассеивания системы случайных величин*</u> (X, Y).

Дисперсии дискретных случайных величин X и Y определяются формулами

$$DX = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i - m_X)^2, \quad DY = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(y_i - m_Y)^2 \qquad (14.10)$$

а дисперсии непрерывных случайных величин X, Y определяются формулами

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 \, f(x,y)\, dx\, dy, \qquad (14.11)$$

$$DY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_Y)^2 \, f(x,y)\, dx\, dy.$$

Средние квадратические отклонения случайных величин X и Y определяются так:

$$\sigma_X = \sqrt{DX}, \quad \sigma_Y = \sqrt{DY}. \qquad (14.12)$$

Для дисперсии можно использовать также формулу

$$DX = M(X^2) - (MX)^2, \quad DY = M(Y^2) - (MY)^2.$$

Пример 14.24. Пусть (X, Y) имеет следующую таблицу распределения:

X \ Y	-1	0	1
0	0	0,1	0,5
1	0,2	0,1	0,1

Найти математическое ожидание и дисперсии случайных величин X и Y.

Имеем:

$$m_X = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}4;$$

$$m_Y = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

От системы величин (X, Y) перейдем к системе центрированных величин $(\tilde{X}, \tilde{Y})$, где

$$\tilde{X} = X - m_X = X - 0{,}4, \quad \tilde{Y} = Y - m_Y = Y - 0{,}4,$$

Составим таблицу

$\tilde{X}$ \ $\tilde{Y}$	-1,4	-0,4	0,6
-0,4	0	0,1	0,5
0,6	0,2	0,1	0,1

Получаем

$$DX = (-0{,}4)^2 \cdot 0 + (0{,}6)^2 \cdot 0{,}2 + (-0{,}4)^2 \cdot 0{,}1 + (0{,}6)^2 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ (-0{,}4)^2 \cdot 0{,}5 + (0{,}6)^2 \cdot 0{,}1 = (0{,}6)^2 \cdot 0{,}4 + (0{,}4)^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}24;$$

$$DY = (-1{,}4)^2 \cdot 0{,}2 + (0{,}4)^2 \cdot 0{,}2 + (0{,}6)^2 = 0{,}392 + 0{,}032 + 0{,}216 = 0{,}064.$$

§ 23. Ковариация и корреляция

Важную роль в теории систем случайных величин играет *корреляционный момент (ковариация)*

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=K_{XY}=M\left[\left(X-m_X\right)\left(Y-m_Y\right)\right]}$$

Для дискретных случайных величин корреляционный момент находится по формуле

$$\boxed{K_{XY}=\sum_m\sum_n (x_n-m_X)(y_m-m_X)\,p_{nm},},$$

а для непрерывных

$$\boxed{K_{XY}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)(y_m-m_Y)\,f(x,y)\,dx\,dy.}$$

Случайные величины X и Y называются *некоррелированными*, если их корреляционный момент K_{XY} равен нулю, и *коррелированными* — в противном случае.

По свойствам математического ожидания

$$K_{XY}=M\left[\left(X-m_X\right)\left(Y-m_Y\right)\right]=M(XY-m_XY-m_YX+m_Xm_Y)=$$
$$=M(XY)-m_XMY-m_YMX+m_Xm_Y=M(XY)-m_Xm_Y.$$

Такое выражение для корреляционного момента иногда удобнее для вычислений, и отсюда следует, что *независимые случайные величины некоррелированные.*

Если корреляционный момент положителен, то случайные величины называются *положительно коррелированными*, если отрицателен — то *отрицательно коррелированными*.

Вместо корреляционного момента часто используется *коэффициент корреляции*

$$\boxed{r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y},}$$

являющийся безразмерной величиной.

Если случайные величины X и Y связаны точной линейной зависимостью $Y=aX+b$, то $r_{XY}=\operatorname{sgn}a$, т.е. $r_{XY}=1$ при $a>0$ и $r_{XY}=-1$ при $a<0$.

Легко видеть, что коэффициент корреляции удовлетворяет условию $-1\le r_{XY}\le 1$.

Пример 14.25. Найти коэффициент корреляции r_{XY} для случайных величин *X, Y* из примера 14.24.

Найдем *M(X Y)*. Для этого переберем все клетки таблицы, перемножим значения компонент *X, Y* и вероятности, записанные в этих клетках, и все эти произведения сложим. Тогда $M(XY)=0+0+0+(-1)\cdot 0{,}2+0+1\cdot 0{,}1=-0{,}1$. Значит, $K_{XY}=M(XY)-m_Xm_Y=-0{,}1-0{,}16=-0{,}26$. Теперь получаем $r_{XY}=\dfrac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\dfrac{-0{,}26}{\sqrt{0{,}64\cdot 0{,}24}}\approx -0{,}66.$

Закон распределения двумерной случайной величины *(X, Y)*, задаваемый плотностью

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r_{XY}^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-r_{XY}^2)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\left(\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2+\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2-2r_{XY}\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\right),$$

называют <u>*нормальным законом распределения на плоскости*</u>. Здесь $m_X, m_Y, \sigma_X > 0, \sigma_Y > 0, r_{XY} \left(\left|r_{XY}\right| \le 1\right)$ — параметры этого распределения, вероятностный смысл которых ясен из обозначений, $\exp(u) = e^u$.

<u>В случае нормального распределения системы</u> (*X, Y*) <u>некоррелированность</u> $K_{XY} = r_{XY} = 0$ <u>означает независимость случайных величин</u> *X, Y*. <u>При</u> $\left|r_{XY}\right| = 1$ <u>случайные величины</u> *X, Y* <u>связаны линейной зависимостью</u>, поэтому значение коэффициента корреляции r_{XY} есть мера линейной зависимости нормально распределенных на плоскости случайных величин *X, Y*.

§ 23. Функции случайных величин

Пусть X — случайная величина, а $y = \varphi(x)$ — обычная функция, область определения которой содержит множество значений случайной величины *X*. Тогда $Y = \varphi(x)$ — случайная величина, являющаяся функцией от случайной величины *X*.

Говорят также, что X есть *аргумент функционально зависимой случайной величины Y*.

Возникает задача: как, зная распределение случайного аргумента *X*, определить закон распределения функции $Y = \varphi(X)$? Если X — дискретная случайная величина, то это сделать нетрудно; а если X — непрерывная случайная величина, то это сложнее, и справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть X — непрерывная случайная величина с плотность распределения $f(x)$, а $\varphi(x)$ — монотонная дифференцируемая функция; тогда плотность распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$ есть

$$g(y) = f(\psi(y))\left|\psi'(y)\right|,$$

где $\psi(y)$ функция, обратная к φ.

Математическое ожидание случайной величины $Y = \varphi(X)$ находится так: $\boxed{MY = \sum_i \varphi(x_i) p_i}$,если случайная величина X дискретна; $\boxed{MY = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx}$, если X непрерывна и ее плотность есть $f(x)$.

Пример 14.25. За каждый процент перевыполнения плана полагается 40 тыс. руб., а за каждый процент недовыполнения заработок уменьшается на 30 тыс. руб., но не более, чем на 100 тыс. руб. Найти ожидаемый размер премии, если прогноз выполнения плана следующий:

96	97	98	99	100	101	102	103
0,01	0,02	0,03	0,2	0,2	0,2	0,2	0,14

Каков ожидаемый размер премии, если известно, что план выполнен?

Найдем ожидаемый размер премии *Y*. Это есть функция от процента выполнения плана. К прогнозу выполнения плана снизу пристраиваем еще одну строку значений *Y* (тыс. руб.)

96	97	98	99	100	101	102	103
0,01	0,02	0,03	0,2	0,2	0,2	0,2	0,14
-100	-90	-60	-30	0	40	80	120

Имеем

$MY = (-100 - 180 - 600 + 800 + 1600 + 1680)/100 = 302$ тыс. руб.

В заключении отметит, что зависимость между случайными величинами подробно будет рассмотрена позже.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие события. Пространство элементарных событий.
2. Достоверное и невозможное событие.

3. Совместные и несовместные события.
4. Классическое определение вероятности события.
5. Геометрическое определение вероятности события.
6. Сочетания, размещения, перестановки.
7. Система двух случайных величин.
8. Числовые характеристики системы двух случайных величин.
9. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции.
10. Сумма и произведение двух событий.
11. Противоположные события.
12. Зависимые и независимые события.
13. Теоремы сложения вероятностей для несовместных и совместных событий.
14. Условная вероятность.
15. Теоремы умножения вероятностей для независимых и зависимых событий.
16. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
17. Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли.
18. Формула Пуассона.
19. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
20. Наивероятнейшее число наступивших событий в схеме Бернулли.
21. Понятие случайной величины.
22. Виды случайных величин.
23. Способы задания дискретной случайной величины.
24. Интегральная и дифференциальная функции распределения случайной величины: определения, свойства, графики.
25. Числовые характеристики случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение) их свойства, формулы для вычисления.
26. Биномиальный закон распределения.
27. Закон Пуассона.
28. Показательный закон распределения.
29. Равномерный закон распределения.
30. Нормальный закон распределения.
31. Функция надежности.
32. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева.
33. Теорема Бернулли. Центральная предельная теорема.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

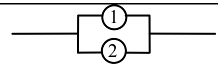
1. Если игральную кость бросают 7 раз, то вероятность выпадения очка равного 5 в 4 случаях вычисляется по формуле:

а) $C_7^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^7$;**б)** $C_7^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^3$; **в)** $C_7^5\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^3$;**г)** $C_7^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^2$.

2. Какое свойство справедливо для функции распределения $F(x)$ случайной величины X?

а) $F(-\infty)=1$; **б)** $F(+\infty)=0$; **в)** $F(+\infty)=1$; **г)** $F(+\infty)=-1$.

3. Если плотность случайной величины вычисляется по формуле $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}}$, то математическое ожидание $M[X]$ данной случайной величины равно…

4. Цепь работает по схеме 

. Работа каждого элемента является независимым событием, вероятность которого равна 0,5. Найти вероятность работы системы.

а) 0,75; **б)** 0,25; **в)** 0,125; **г)** 1,25.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Комбинаторика

Задача 14.1. В магазине имеется 10 видов тортов. Очередной покупатель выбил чек на три торта. Считая, что любой набор товаров равновозможен, определить число возможных заказов.

Задача 14.2. Девять человек размещается в четырехместный, трехместный и двухместный номера. Сколько существует способов их размещения?

Вероятность события

Задача 14.3. Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры и, помня лишь, что они различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Задача 14.4. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на обеих костях появится одинаковое число очков;
б) хотя бы на одной кости появится два очка;
в) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение шести;
г) сумма очков не превосходит 6;
д) произведение числа очков не превосходит 6;
е) произведение очков делится на 6.

Задача 14.5. В коробке 5 красных, 3 зеленых, 2 синих карандаша. Наугад без возвращения извлекают 3 карандаша. Найти вероятность следующих событий:

A — все извлеченные карандаши разного цвета,
B — все извлеченные карандаши одного цвета,
C — среди извлеченных карандашей 1 зеленый,
D — среди извлеченных карандашей в точности 2 одного цвета.

Задача 14.6. Лифт начинает движение с четырьмя пассажирами и останавливается на 10 этажах. Какова вероятность, что никакие два пассажира не выйдут на одном этаже?

Задача 14.7. В круг радиуса 5 вписан равносторонний треугольник. Определить вероятность попадания в треугольник точки, случайно брошенной в круг.

Задача 14.8. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5?

Задача 14.9. В партии из 15 однотипных стиральных машин пять машин изготовлены на заводе *A*, а 10 — на заводе *B*. Случайным образом отобрано 5 машин. Найти вероятность того, что две из них изготовлены на заводе *A*.

Действия над событиями

Задача 14.10. Монета подбрасывается три раза. Рассматриваются события — появление герба при i-ом подбрасывании (i = 1,2,3). Представить в виде сумм, произведений и сумм произведений событий A_i следующие события: *A* — появились все три герба; *B* — появились все три цифры; *C* — появился хотя бы один герб; *D* — появилась хотя бы одна цифра; *E* — появился только один герб; *F* — появилась только одна цифра.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Задача 14.11. Контролер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,9. Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными, если события появления стандартных изделий независимы? Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

Задача 14.12. Вероятность правильного оформления счета на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счета. Какова вероятность того, что только один из них оформлен правильно?

Формулы полной вероятности и Байеса

Задача 14.13. Предприятие обеспечивает регулярный выпуск продукции при безотказной поставке комплектующих от двух смежников. Вероятность отказа в поставке продукции от первого из смежников равна 0,05, а от второго — 0,08. Найти вероятность сбоя в работе предприятия.

Задача 14.14. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго — 6, от третьего — 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7. Какова вероятность того, что установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока; проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе?

Задача 14.15. Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй — 35, третий — 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03, у второго — 0,02, у третьего — 0,01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

Задача 14.16. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому покупателю потребуется холодильник марки *A*, равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется: двум покупателям; не менее чем двум покупателям; не более чем трем покупателям; всем четырем покупателям.

Задача 14.17. Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено: ровно три изделия; более трех изделий.
Задача 14.18. Станок автомат делает детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.
Задача 14.19. Вероятность получения отличной оценки на экзамене равна 0,2. Найти наивероятнейшее число отличных оценок и вероятность этого числа, если сдают экзамен 75 студентов.
Задача 14.20. Известно, что 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеет: не менее 70; от 65 до 90 человек.
Задача 14.21. Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Найти закон распределения вероятностей числа выигрышных билетов среди купленных. Найти и построить функцию распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.
Задача 14.22. В партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 куртки. Найти закон распределения числа дефектных курток среди купленных. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.
Задача 14.23. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}0, & если \quad x\le 1\\ x-0{,}5, & если \quad 1<x\le 2\\ 0, & если \quad x>2\end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.
Задача 14.24. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = x/2$ в интервале (0; 2), вне этого интервала $f(x)$ = 0. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.
Задача 14.25. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0; 4]. Найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение величины X.

Задача 14.26. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & если \ x\le 0\\ 1-e^{-0,1x}, & если \ x>0\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.
Задача 14.27. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $M(X)$ = 5, дисперсия равна $D(X)$ = 9. Написать выражение для плотности вероятности.
Задача 14.28. Номинальное значение диаметра втулки равно 5 мм, а дисперсия, вследствие погрешностей изготовления, не превосходит 0,01. Оценить вероятность того, что размер втулки будет отличаться от номинала не более чем на 0,5 мм.
Задача 14.29. Имеется таблица распределения двумерной случайной величины (X, Y):

X \ Y	1	2	3
2	0.07	0.16	0.10
4	0.13	0.09	0.18
6	0.10	0.05	0.12

Составить таблицы распределения вероятностей для каждой из величин X и Y. Найти коэффициент корреляции между величинами X и Y.

МОДУЛЬ 15
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1 Выборочный метод

Рассмотрим некоторый объект, у которого имеется какой-либо случайный параметр X. Например, деталь, которая имеет размер X.

Выборочной совокупностью (или выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов.

В данном примере — случайно отобранных деталей. Генеральной совокупностью называется совокупность всех объектов, из которых производится выборка.

Генеральная и выборочная совокупности характеризуются объемами, которые будем обозначать N и n соответственно.

Например, если из 500 деталей отобрано 200 для измерения размера X, то объем генеральной совокупности $N = 500$, а объем выборки будет $n = 200$.

Допустим, что в выборке случайный параметр X принял следующие значения: x_1, x_2, …, x_i, …, x_k.

При этом значение x_1 встречалось n_1 раз,

x_2 встречалось n_2 раз,

----

x_i встречалось n_i раз,

----

x_k встречалось n_k раз.

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. $\sigma_в = \sqrt{D_в}$

В примере с деталью это означает, что размер x_1 был зафиксирован n_1 раз, размер x_2 — n_2 раз и т.д.

Наблюдаемые значения случайной величины X: x_1, x_2, …, x_i, …, x_k, называются *вариантами.*

Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называется *вариационным рядом*, числа наблюдений n_i вариант x_i называются *частотами*, а их отношения к объему выборки n — *относительными частотами* $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$.

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} \dfrac{n_i}{n} = 1$.

Статистическим распределением выборки (или распределением выборки) называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i или относительных частот ω_i.

Пример 15.1.

Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

Найти распределение относительных частот.

Найдем объем выборки: $n = 1 + 3 + 6 = 10$.

Найдем относительные частоты:

$$\omega_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1\ ; \quad \omega_2 = \frac{3}{10} = 0{,}3; \quad \omega_3 = \frac{6}{10} = 0{,}6\,.$$

Напишем искомое распределение относительных частот:

x_i	2	5	7
ω_i	0,1	0,3	0,6

Контроль: $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1$.

§ 2 Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x (из возможных значений случайной величины X) относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x — число вариант меньших x;

n — объем выборки.

Эмпирическая функция распределения обладает теми же свойствами, что функция распределения $F(x)$:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку $[0,\ 1]$;

2) $F^*(x)$ — неубывающая функция;

3) если x_1 — наименьшая варианта, а x_k — наибольшая, то

$$F^*(x)=0 \text{ при } x \le x_1 \text{ и } F^*(x)=1 \text{ при } x > x_k .$$

Пример 15.2.

Найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Найдем объем выборки: $n=10+15+25=50$.

Наименьшая варианта равна единице, следовательно, $F^*(x)=0$ при $x \le 1$.

Значение $x<4$, а именно $x_1=1$, наблюдалось 10 раз, следовательно, $F^*(x)=\frac{10}{50}=0{,}2$ при $1<x\le 4$.

Значения $x<6$, а именно $x_1=1$ и $x_2=4$, наблюдались 10+15=25 раз, следовательно, $F^*(x)=\frac{25}{50}=0{,}5$ при $4<x\le 6$.

Так как $x=6$ — наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$ при $x>6$. Напишем искомую эмпирическую функцию распределения:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 1, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 1<x\le 4, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 4<x\le 6, \\ 1 & \text{при} \quad x>6. \end{cases}$$

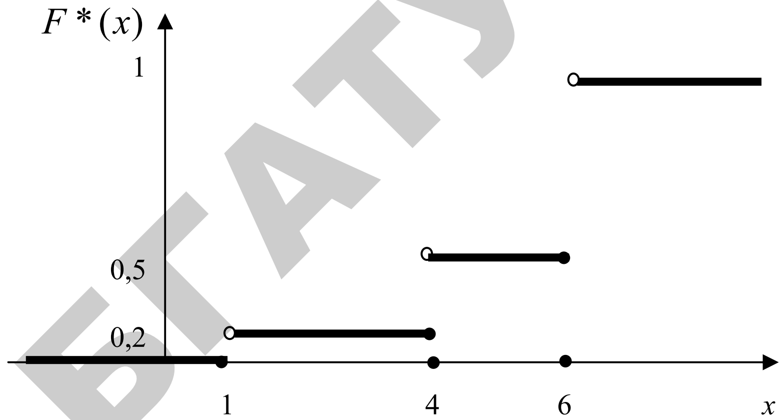


Рис. 15.1

§ 3 Полигон и гистограмма

Полигоном частот называют ломаную на плоскости $x0n$, отрезки которой соединяют точки (x_1,n_1), (x_2,n_2), …, (x_k,n_k), где x_i — варианты выборки и n_i — соответствующие им частоты.

Полигоном относительных частот называют ломаную на плоскости $x0\omega$, отрезки которой соединяют точки (x_1,ω_1), (x_2,ω_2), …, (x_k,ω_k), где x_i — варианты выборки и ω_i — соответствующие им относительные частоты.

Полигон частот и полигон относительных частот строят в том случае, если случайная величина X, значение которой наблюдается, является *дискретной случайной величиной.*

Если наблюдается значение непрерывной случайной величины X, то интервал, в котором заключены все наблюденные значения случайной величины X, разбивается на ряд частичных интервалов длиною h и находят n_i — сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (плотность частоты). Площадь частичного i-ого прямоугольника равна $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ — сумме частот вариант, попавших в i-й интервал.

Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки n.

__Гистограммой относительных частот__ называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{\omega_i}{h}$ (плотность относительной частоты). Площадь частичного i-ого прямоугольника равна $h \cdot \frac{\omega_i}{h} = \omega_i$ — относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал.

Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть единице.

Пример 15.3.

Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	5	7	10
ω_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

Отложим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат соответствующие относительные частоты ω_i. Соединив точки (x_i, ω_i) отрезками прямых, получим искомый полигон относительных частот (рис.15.2).

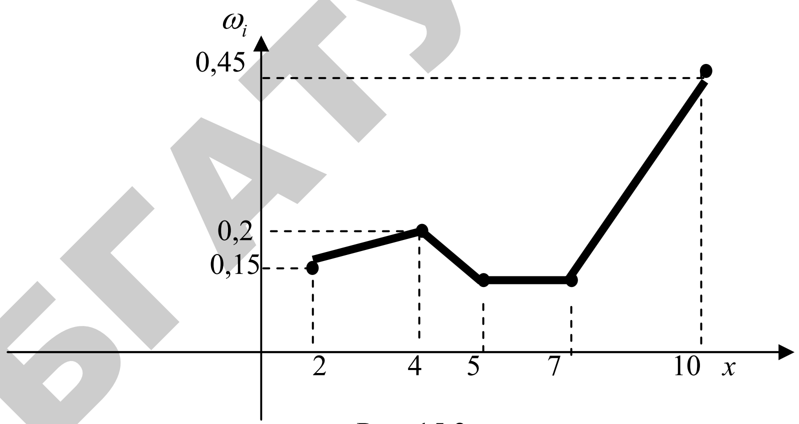


Рис. 15.2

Пример 15.4.

Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки объема n=100.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты
	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / n
1	1 – 5	10	2,5
2	5 – 9	20	5
3	9 – 13	50	12,5
4	13 – 17	12	3
5	17 – 21	8	2

Построим на оси абсцисс заданные интервалы длиною $h = 4$. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельно оси абсцисс и находящихся от нее на расстояниях, равных соответствующим плотностям частоты n_i / n. Например над интервалом (1;5) построим отрезок параллельный оси абсцисс на расстоянии $\frac{n_i}{n} = \frac{10}{4} = 2{,}5;$ аналогично строятся остальные отрезки (см. рис.15.3).

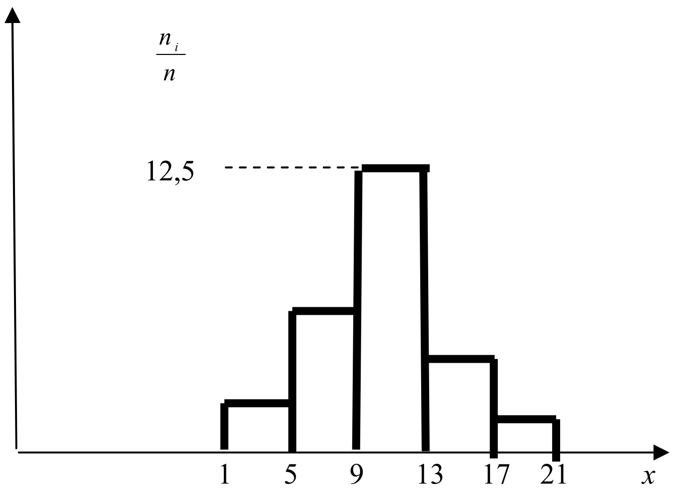


Рис.15.3

§ 4 Точечные оценки

Статистической оценкой неизвестного параметра случайной величины X называется функция вариант x_1, x_2, …, x_i, …, x_n.

Несмещенной называют статистическую оценку, математическое ожидание которого равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Смещенной называют статистическую оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Выборочной средней (оценкой математического ожидания) называют среднее арифметическое наблюдаемых значений количественного признака X:

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i}{n}.$$

Вспомним, что x_i — варианта выборки, n_i — частота варианты, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ — объем выборки, k — число наблюдаемых различных значений случайного параметра X.

Таким образом, *выборочная средняя* есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Допустим, что все наблюдаемые значения количественного признака (случайной величины) X выборки разбиты на несколько групп. Рассматривая каждую группу как самостоятельную, можно найти ее среднюю арифметическую.

Групповой средней называют среднее арифметическое значений признака, принадлежащих группе.

Зная групповые средние и объемы группы, можно найти общую среднюю**:** *общая средняя равна средней арифметической групповых средних, взвешенной по объемам групп.*

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X совокупности вокруг своего среднего значения $\overline{x}_в$, вводят характеристику — *выборочную дисперсию.*

Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений количественного признака X от выборочного среднего $\overline{x}_в$:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \overline{x}_в)^2}{n},$$

то есть выборочная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Кроме выборочной дисперсии для характеристики рассеяния значений количественного признака X вокруг своего выборочного среднего значения пользуются характеристикой — выборочным средним квадратическим отклонением.

Выборочным средним квадратическим отклонением (выборочным стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\boxed{\sigma_в = \sqrt{D_в}}.$$

Вычисление дисперсии можно упростить, используя формулу:

$$\boxed{D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2}, \quad \text{где} \quad \boxed{\overline{x_в^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i}{n}}.$$

Выборочная дисперсия $D_в$ является смещенной оценкой дисперсии. Для того чтобы получить несмещенную оценку дисперсии, нужно "исправить" величину $D_в$.

Исправленной выборочной дисперсией S^2 называется величина:

$$\boxed{S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в}.$$

Исправленным выборочным средним квадратическим отклонением называется величина:

$$\boxed{S = \sqrt{S^2}}.$$

Все рассмотренные выше статистические оценки называются точечными, так как они определяются одним числом.

Пример 15.6.

Распределение выборки задано таблицей

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную дисперсию.

Найдем выборочную среднюю:

$$\overline{x_в} = \frac{20 \cdot 1 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$D_в = \frac{20 \cdot (1-2)^2 + 15 \cdot (2-2)^2 + 10 \cdot (3-2)^2 + 5 \cdot (4-2)^2}{50} = 1.$$

Можно расчеты произвести и по другим формулам:

$$\overline{x_в^2} = \frac{20 \cdot 1^2 + 15 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2}{50} = 5,$$

откуда

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = 5 - 2^2 = 1.$$

Пример 15.7.

Найти средний улов дальневосточного краба, приходящегося на одно контрольное траление, используя статистические данные двух количественных съемок (интервал между съемками 1,5 месяца).

Съемка 1	$\overline{x}_{в_1} = 57{,}90$	$n_1 = 179$
Съемка 2	$\overline{x}_{в_2} = 39{,}75$	$n_2 = 167$

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{2} \overline{x}_{в_i} \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{2} n_i} = \frac{57{,}9 \cdot 179 + 39{,}75 \cdot 167}{179 + 167} = 49{,}1.$$

§ 5 Интервальные оценки

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал длиной 2δ, который с заданной вероятностью (надежностью) γ покрывает оцениваемый параметр.

Величина δ, равна половине доверительного интервала, называется *точностью оценки.*

Для оценки математического ожидания a нормально распределенного количественного признака (случайной величины) X по выборочной средней $\bar{x}_в$ при *известном среднем квадратическом отклонении* σ служит доверительный интервал:

$$\boxed{\bar{x}_в - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

где $t_\gamma \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ — точность оценки;

n — объем выборки;

t_γ — есть такое значение аргумента функции Лапласа (Гмурман В.Е., Приложение 2), при котором $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$.

При неизвестном σ (и объеме выборки $n > 30$) — доверительный интервал получаем из выражения:

$$\boxed{\bar{x}_в - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}},$$

где S — исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение;

t_γ находим по таблице (Гмурман В.Е., Приложение 3) по заданным h и γ.

Пример 15.8.

Найти точность оценки δ средней длины тела сардинеллы $\bar{x}_в = 19{,}96$ и вычислить доверительный интервал с надежностью $\gamma = 0{,}95$ для математического ожидания длины тела сардинеллы, если среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = 0{,}69$. Объем выборки $n = 100$. Считать, что длина тела сардинеллы есть случайная величина X, распределенная по нормальному закону.

$2\Phi(t_\gamma) = 0{,}95$, $\quad \Phi(t_\gamma) = 0{,}475$.

По таблице (Приложение 2) находим $t_\gamma = 1{,}96$.

Следовательно,

$$\delta = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}69}{10} = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}69}{10} = 1{,}96 \cdot 0{,}069 = 0{,}14.$$

Доверительный интервал для математического ожидания длины тела сардинеллы с надежностью $\gamma = 0{,}95$ определяется так:

$$19{,}96 - 0{,}14 < a < 19{,}96 + 0{,}14$$

$$19{,}82 < a < 20{,}10. \qquad (а)$$

Упрощенная оценка приближенного доверительного интервала может быть получена с помощью правила трех сигм; с большей вероятностью (если распределение нормально, то вероятностью большей чем 0,99) можно ожидать, что

$$\bar{x}_в \pm 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 19{,}96 \pm 3 \cdot \frac{0{,}69}{10} = 19{,}96 \pm 0{,}2.$$

Следовательно,

$$19{,}76 < a < 20{,}16 \qquad (б)$$

Полученный интервал (б), как и следовало ожидать, немного шире, чем интервал (а).

§ 3 Отыскание параметров уравнения прямой линии по опытным данным. Метод наименьших квадратов

Пусть производится опыт, цель которого является исследование зависимости некоторой физической величины y от физической величины x (например, зависимости пути, пройденного телом, от времени). Предполагается, что величины x и y связаны функциональной зависимостью: $y=\varphi(x, a, b, c, \ldots)$, где $a, b, c, \ldots$ - параметры функциональной зависимости. Вид этой зависимости и требуется определить из опыта, то есть требуется найти параметры $a, b, c, \ldots$.

Предположим, что в результате опыта мы получили ряд экспериментальных точек (рис. 15.4). Обычно экспериментальные точки на таком графике располагаются не совсем правильным образом — дают некоторый "разброс",

то есть обнаруживают случайные отклонения от видимой общей закономерности. Эти отклонения связаны с неизбежными при всяком опыте *ошибками измерения* и другими случайными причинами.

Возникает вопрос, как по этим экспериментальным данным наилучшим образом воспроизвести зависимость y от x?

Желательно обработать экспериментальные данные так, чтобы по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x.

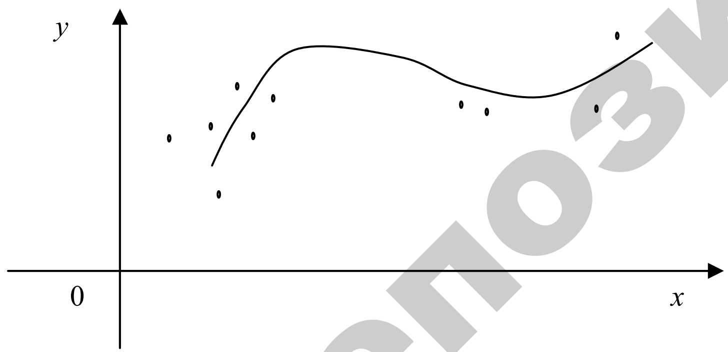


Рис. 15.4

Для решения подобных задач обычно применяется расчетный метод, известный под названием *"метода наименьших квадратов"*. Этот метод дает возможность при заданном виде зависимости $y=\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ так выбрать числовые параметры, $a, b, c, \ldots$, чтобы кривая $y=\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ в известном смысле наилучшим образом соответствовала экспериментальным данным.

Часто этот вид кривой определяется непосредственно по внешнему виду экспериментальной зависимости. Например, экспериментальные точки, изображенные на рис. 15.5, явно наводят на мысль о прямолинейной зависимости вида $y=a\cdot x+b$. Зависимость, изображенная на рис. 15.6, хорошо может быть представлена полиномом второй степени $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ и т.д.

Метод наименьших квадратов имеет перед другими методами существенные преимущества: он приводит к сравнительно простому математическому аппарату определения неизвестных параметров a, b, c, … .

Рассмотрим подробнее случай линейной зависимости $y=a\cdot x+b$.

Результаты измерений величины x и y записывают в виде статистической таблицы:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_1	y_2	…	y_n

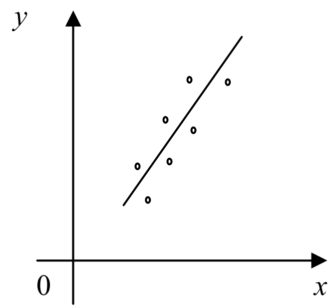


Рис. 15.5

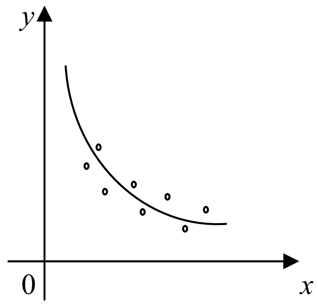


Рис. 15.6

Угловой коэффициент a искомой прямой называется выборочным коэффициентом регрессии y на x и обозначается ρ_{yx}:

$$y = \rho_{yx} \cdot x + b.$$

Параметры a и b можно найти из системы двух линейных уравнений. Предполагается, что значения x_1, x_2, … , x_n и соответствующие им значения y_1, y_2, … , y_n наблюдались по одному разу.

$$\left.\begin{array}{r} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array}\right\}, \text{ откуда}$$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad (15.1)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \qquad (15.2)$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение регрессии x на y: $x = \rho_{xy} \cdot y + c$, где ρ_{xy} - выборочный коэффициент регрессии x на y.

Пример 15.9.

Рассмотрим пример отыскания параметров уравнений прямой по опытным данным, приведенным в таблице:

x_i	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y_i	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Для определенности будем искать уравнение $y = a \cdot x + b$. Поскольку различные данные значения x признака X и соответствующие им значения y признака Y наблюдались по одному разу, то группировать данные нет необходимости.

Составим расчетную таблицу для вычисления параметров a и b по формулам (15.1) и (15.2):

Таблица 15.1

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,00	1,25	1,00	1,250
2	1,50	1,40	2,25	2,100
3	3,00	1,50	9,00	4,500
4	4,50	1,75	20,25	4,875
5	5,00	2,25	25,00	11,250
	$\sum_{i=1}^{n} x_i = 15$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 8{,}15$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 57{,}50$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 26{,}975$

Найдем искомые параметры a и b, для чего подставим вычисленные по таблице 15.1 суммы в формулы (15.1) и (15.2).

$$a = \frac{5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} = 0{,}202;$$

$$b = \frac{57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975}{62{,}5} = 1{,}024.$$

Напишем искомое уравнение прямой $y = 0{,}202x + 1{,}024$, которое называется также уравнением линейной регрессии Y на X.

На рис. 15.7 показаны результаты статистических измерений, взятых из табл. 1, и прямая $y = 0{,}202x + 1{,}024$.

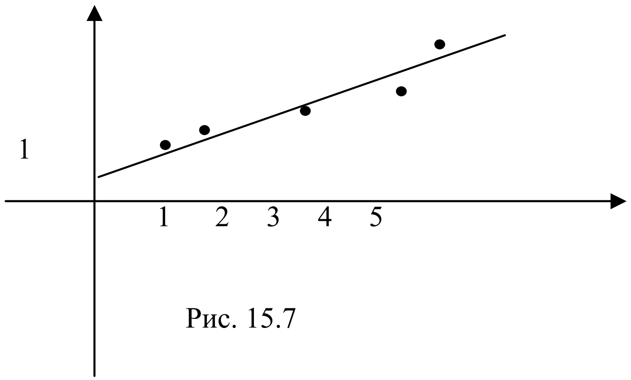


Рис. 15.7

§ 6 Вычисление выборочного коэффициента корреляции

В случае небольшого числа испытаний выборочный коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}_в \bar{y}_в}{nS_x S_y} \qquad (15.3)$$

А уравнения выборочных прямых регрессий по формулам:

$$y - \bar{y}_в = r\frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x}_в) \qquad (15.4)$$

и прямой регрессии X на Y

$$x - \bar{x}_в = r\frac{S_x}{S_y}(y - \bar{y}_в) \qquad (15.5)$$

Если число испытаний велико, то для упрощения вычислений данные можно сгруппировать в виде, так называемой, корреляционной таблицы:

y / x	y_1	y_2	…………………	$.x_t$	$\sum$
x_1	n_{11}	n_{12}	…………………	n_{1l}	m_1
x_2	n_{21}	n_{22}	…………………	n_{2l}	m_2
.	.	.			.
.	.	.			.
.	.	.			.
.	.	.			.
.	.	.			.
.	.	.			.
x_k	n_{11}	n_{11}	…………………	n_{kl}	m_k
$\sum$	n_1	n_2	…………………	n_l	n

где $m_i = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}, \quad n_j = \sum_{j=1}^{k} n_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{k} m_i = \sum_{j=1}^{l} n_j = n.$

Тогда формула (15.3) принимает вид

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij} x_i y_j - n\bar{x}_в \bar{y}_в}{nS_x S_y} \qquad (15.6)$$

Пример 15.10.

В результате $n = 10$ независимых испытаний над (X, Y) получена таблица значений

x_k	y_k
2,1	3,0
2,1	2,8
2,0	3,0
2,5	2,0
2,8	1,8
2,2	2,5

3,2	1,5
3,2	1,1
3,2	1,0
4,7	1,3

Найти оценки основных числовых характеристик для X, Y; для пары (X, Y).

Записать уравнение линейной регрессии Y на X и X на Y.

Построить графики полученных прямых регрессий.

Для удобства вычислений составим таблицу

№	x_k	y_k	$x_k\, y_k$	x_k^2	y_k^2
1	2,1	3,0	6,30	4,41	9,00
2	2,1	2,8	5,88	4,41	7,84
3	2,0	3,0	6,00	4,00	9,00
4	2,5	2,0	5,00	6,25	4,00
5	2,8	1,8	5,04	7,84	3,24
6	2,2	2,5	5,50	4,84	6,25
7	3,2	1,5	4,80	10,24	2,25
8	3,2	1,1	3,52	10,24	1,21
9	4,7	1,0	3,20	10,24	1,00
10		1,3	6,11	22,09	1,69
Сумма	28	20	51,35	84,56	45,48

Используя данные таблицы, находим:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k = \frac{28}{10} = 2{,}8, \qquad \overline{y}_в = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} y_k = \frac{20}{10} = 2{,}0;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k^2 - \overline{x}_в^2 = \frac{1}{10}\cdot 84{,}56 - 2{,}8^2 = 0{,}616;$$

$$S_y^2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} y_k^2 - \overline{y}_в^2 = \frac{1}{10}\cdot 45{,}48 - 2^2 = 0{,}548;$$

$$S_x \approx 0{,}785, \qquad S_y \approx 0{,}74;$$

$$r = \frac{\sum_{k=1}^{10} x_k y_k - n\overline{x}_в \overline{y}_в}{nS_x S_y} = \frac{51{,}36 - 10\cdot 2{,}8\cdot 2}{10\cdot 0{,}785\cdot 0{,}74} \approx -0{,}8;$$

$$r\frac{S_y}{S_x} = -0{,}8\cdot\frac{0{,}74}{0{,}785} = -0{,}75, \qquad r\frac{S_x}{S_y} = -0{,}8\cdot\frac{0{,}785}{0{,}74} = -0{,}85.$$

Подставляя полученные результаты в уравнение прямой регрессии Y на X, получаем

$$y - 2 = -0{,}75(x - 2{,}8),$$
$$y = -0{,}75x + 4{,}1.$$

и в уравнение прямой регрессии Y на X

$$x - 2{,}8 = -0{,}85(y - 2),$$
$$x = -0{,}85y + 4{,}5.$$

См. рис. 15.8.

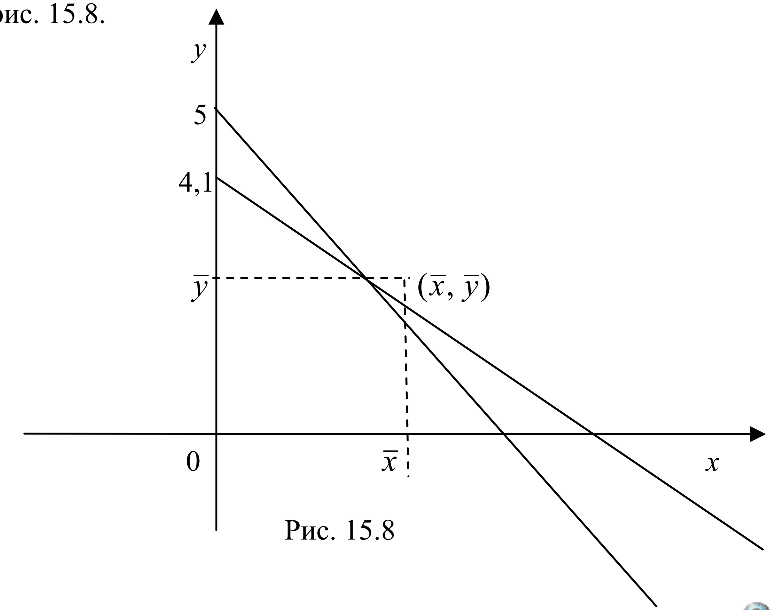


Рис. 15.8

Пример 15.11. В таблице даны результаты измерений массы (x кг) и роста (y см) 50 учеников.

x \ y	117,5-122,5	122,5-127,5	127,5-132,5	132,5-137,5	137,5-142,5	142,5-147,5	147,5-152,5	m_i
22,5-25,5	1	-	-	-	-	-	-	1
25,5-28,5	3	2	1	1	-	-	-	7
28,5-31,5	-	6	5	6	1	-	-	18
31,5-34,5	-	1	5	7	4	1	-	18
34,5-37,5	-	-	-	2	2	1	1	6
n_i	4	9	11	16	7	2	1	50

Определить коэффициент корреляции признаков Y и X. Записать уравнение прямой регрессии Y на X.

Перепишем корреляционную таблицу, принимая за варианты середины исходных интервалов.

$x_1 = 24,\quad x_2 = 27,\quad x_3 = 30,\quad x_4 = 33,\quad x_5 = 36;$

$y_1 = 120,\quad y_2 = 125,\quad y_3 = 130,\quad y_4 = 135,\quad y_5 = 140,$

$y_6 = 145,\quad y_7 = 150.$

x \ y	120	125	130	135	140	145	150	m_i
24	1	-	-	-	-	-	-	1
27	3	2	1	1	-	-	-	7
30	-	6	5	6	1	-	-	18
33	-	1	5	7	4	1	-	18
36	-	-	-	2	2	1	1	6
n_i	4	9	11	16	7	2	1	50

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} m_i x_i = \frac{1}{50}(1\cdot 24 + 7\cdot 27 + 18\cdot 30 + 18\cdot 33 + 6\cdot 36) = 31,26;$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} m_i x_i^2 = \frac{1}{50}(1\cdot 24^2 + 7\cdot 27^2 + 18\cdot 30^2 + 18\cdot 33^2 + 6\cdot 36^2) = 985,14;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} m_i x_i^2 - \overline{x}_в = 985,14 - 31,26^2 = 7,9524; \quad S_x = 2,82.$$

$$\overline{y}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i y_i = \frac{1}{50}(4\cdot 120 + 9\cdot 125 + 11\cdot 130 + 16\cdot 135 +$$
$$+ 7\cdot 140 + 2\cdot 145 + 1\cdot 150) = 132,3;$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i y_i^2 = \frac{1}{50}(4\cdot 120^2 + 9\cdot 125^2 + 11\cdot 130^2 + 16\cdot 135^2 +$$
$$+ 7\cdot 140^2 + 2\cdot 145^2 + 1\cdot 150^2) =$$
$$= 17549,5;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i y_i^2 - \overline{y}_в = 17549,5 - 132,3^2 = 46,21;$$
$$S_y = 6,8.$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{7} n_{ij} x_i y_j = 1\cdot 24\cdot 120 + 3\cdot 27\cdot 120 + 2\cdot 27\cdot 125 +$$
$$+1\cdot 27\cdot 130 + 6\cdot 30\cdot 125 + 5\cdot 30\cdot 130 + 6\cdot 30\cdot 135 + 1\cdot 30\cdot 140 +$$
$$+1\cdot 33\cdot 125 + 5\cdot 33\cdot 130 + 7\cdot 33\cdot 135 + 4\cdot 33\cdot 140 + 1\cdot 33\cdot 145 +$$
$$2\cdot 36\cdot 135 + 2\cdot 36\cdot 140 + 1\cdot 36\cdot 145 + 1\cdot 36\cdot 150 = 207450;$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{7} n_{ij} x_i y_i - n\bar{x}_в \bar{y}_в}{nS_x S_y} = \frac{207450 - 50 \cdot 31,26 \cdot 132,3}{50 \cdot 2,82 \cdot 6,8} \approx 0,694 \text{ —}$$

коэффициент корреляции;

$$r\frac{S_x}{S_y} = 0,694 \cdot \frac{2,82}{6,8} = 0,288.$$

Подставляя полученные данные в уравнение прямой регрессии Y и X.

имеем:

$$x - \bar{x}_в = r\frac{S_x}{S_y}(y - \bar{y}_в),$$

$$x - 31,26 = 0,288\,(y - 132,3),$$

$$x = 0,288\,y - 6,842\ .$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Выборочная совокупность.
2. Генеральная совокупность.
3. Варианта.
4. Вариационный ряд.
5. Частота.
6. Относительная частота.
7. Статистическое распределение выборки.
8. Эмпирическая функция распределения.
9. Полигон частот, полигон относительных частот.
10. Гистограмма частот, гистограмма относительных частот.
11. Статистическая оценка.
12. Несмещенная и смещенная статистическая оценка.
13. Выборочная средняя.
14. Групповая средняя.
15. Общая средняя.
16. Выборочная дисперсия.
17. Выборочное среднее квадратическое отклонение.
18. Исправленная выборочная дисперсия.
19. Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.
20. Интервальная оценка.
21. Доверительный интервал.

22. Точность оценки.
23. Метод наименьших квадратов

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Если из 1000 деталей отобрано 450 для измерения массы X, то чему равен объем генеральной совокупности N?

2. Если из 800 растений отобрано 100 для определения всхожести Y, то объем выборки n равен?

3. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 60$, представленная статистическим рядом

x_i	4	8	9
n_i	30	12	18

Чему равно значение $F^*(3)$?

а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{7}{10}$; г) 1.

4. Каким свойством не обладает эмпирическая функция распределения $F^*(x)$?

а) $F^*(x)$ - убывающая; б) $F^*(x)$ - неубывающая;

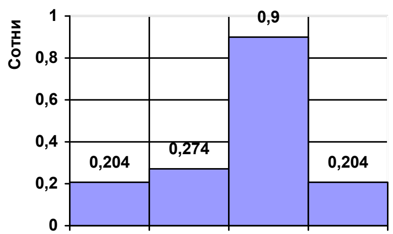
в) $F^*(x)$ принимает положительные значения;

г) $F^*(x)$ принимает значения из отрезка $[0;1]$.

5. Если ломаная образована отрезками, которые соединяют точки (x_1, ω_1), (x_2, ω_2), …, (x_k, ω_k), то она называется

а) гистограммой частот; б) полигоном частот;
в) гистограммой относительных частот;
г) полигоном относительных частот.

6. На рис. изображена



а) гистограммой частот;
б) полигоном частот;
в) гистограммой относительных частот;
г) полигоном относительных частот.

7. Выборочная средняя

находится по формуле

а) $\overline{x_в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i}{n}$; б) $\overline{x_в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i}{n_i}$;

в) $\overline{x_в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x}{n}$; г) $\overline{x_в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n \cdot x_i}{n_i}$.

8. Если выборочное среднее квадратическое отклонение равно 3, то чему равно значение выборочной дисперсии?

а) 6; б) 9; в) 0; г) $\sqrt{3}$.

9. По выборке объема $n = 51$ найдена выборочная дисперсия $D_в$. Чему равна несмещенная оценка дисперсии?

а) 3,51; б) 3,06; в) 3,05; г) 0.

10. Если $\overline{x}_в$ - выборочная средняя, то выражение $\overline{x_в^2} - \left(\overline{x}_в\right)^2$ находит

а) генеральную среднюю;

б) выборочное среднее квадратическое отклонение;

в) выборочную дисперсию; г) объем выборки.

11. В определении доверительного интервала термин надежность γ означает

а) выборочную дисперсию; б) объем выборки;

в) вероятность; г) среднее квадратическое отклонение.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 15.1. В супермаркете проводились наблюдения над числом X покупателей, обратившихся в кассу за один час. Наблюдения в течение 30 часов (15 дней в период с 9 до 10 и с 10 до 11 часов) дали следующие результаты:

70, 75, 100, 120, 75, 60, 100, 120, 70, 60, 65, 100, 65, 100, 70, 75, 60, 100, 100, 120, 70, 75, 70, 120, 65, 70, 75, 70, 100, 100.

Число X является дискретной случайной величиной, а полученные данные представляют собой выборку из n = 30 наблюдений. Требуется составить ряд распределения частот (вариационный ряд) и полигон частот.

Задача 15.2. Построить гистограмму относительных частот по данным распределениям выборки объема n = 100:

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	3 – 5	20
2	5 – 7	25
3	7 – 9	15
4	9 – 11	13
5	11 – 13	12
6	13 – 15	8
7	15 – 17	7

Задача 15.3. Из генеральной совокупности

x_i	1	3	7	12
n_i	8	16	6	10

Найти выборочную среднюю.

Задача 15.4. Найти несмещенную оценку дисперсии случайной величины X на основании данного распределения выборки:

x_i	1	5	6	8
n_i	6	4	7	3

Задача 15.5. Выручка в магазине от продажи обуви составила соответственно по месяцам следующие значения (млн. руб.):

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0,2	0,5	0,4	0,2	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,4	0,2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

МОДУЛЬ 16. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.

§ 1. Основные понятия математического программирования

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и методы решения задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Математическая модель экономической задачи – это совокупность математических соотношений (функций, уравнений, неравенств и т.д.), описывающих рассматриваемый экономический процесс. В математическую модель экономической задачи включают: 1) неизвестные переменные величины задачи; 2) систему ограничений; 3) целевую функцию.

Переменными задачи называют совокупность неизвестных переменных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти переменные называют *планом (решением) задачи* и обычно записывают в виде вектора

$$X=(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (16.1)$$

Системой ограничений называют совокупность уравнений и неравенств, налагаемых на неизвестные переменные величины:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le (\ge, =) 0. \qquad (16.2)$$

Условия (16.2) являются следствием ограниченности ресурсов, необходимости удовлетворения ряда условий технологических или производственных процессов и т.д.

Целевой функцией называют функцию $F = F(X)$, посредством которой осуществляется выбор наилучшего решения (наилучшего плана) из множества возможных:

$$F(X) = F(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max\ (\min) \qquad (16.3)$$

Выбирая те или другие значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, можно изменять значения целевой функции.

Наилучший план доставляет целевой функции наибольшее или наименьшее значение.

Совокупность переменных задачи, удовлетворяющих системе ограничений (16.2), называют *областью допустимых решений* и обозначают буквой Ω.

Таким образом, задачей математического программирования является следующая задача: найти план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, доставляющий экстремальное значение целевой функции $F(X)$ при ограничениях вида (16.2). В ряде случаев на план задачи или некоторые его компоненты (координаты) из экономических или физических соображений налагают условия неотрицательности или целочисленности.

План (решение) X, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется *допустимым* ($X \in \Omega$). Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется *оптимальным*. Оптимальный план (решение) обозначают X^*, $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, экстремальное значение целевой функции обозначают $F(X^*)$. Оптимальное решение, вообще говоря, не обязательно единственно, возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бесконечное число оптимальных решений.

§ 2. Понятие задачи линейного программирования

Линейное программирование – раздел математического программирования, изучающий методы решения оптимизационных задач, в которых целевая функция и функции системы ограничений являются линейными относительно переменных задачи.

Общей задачей линейного программирования (ЗЛП) называется задача нахождения значений переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, доставляющих экстремальное (максимальное или минимальное) значение линейной целевой функции F

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\ (\min) \qquad (16.4)$$

и удовлетворяющих системе линейных ограничений

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \ldots + a_{k,n}x_n \le b_k, \\
a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \ge b_{k+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{l,1}x_1 + a_{l,2}x_2 + \ldots + a_{l,n}x_n \ge b_l, \\
a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + \ldots + a_{l+1,n}x_n = b_{l+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases} \tag{16.5}
$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{16.6}$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины.

Модели и методы линейного программирования применяются при решении разнообразных экономических задач: задач использования и экономии ресурсов (задач планирования производства), задач о составлении рациона (задач о диете, задач о смесях), задач об использовании мощностей (задач о загрузке оборудования), транспортной задачи и т.д.

Пример 16.1 Предприятие производит изделия двух видов: $И_1$ и $И_2$. При этом используется три вида сырья: $С_1$, $С_2$ и $С_3$. Запасы каждого вида сырья ограничены. Количество сырья, используемого для изготовления одного изделия каждого вида, объем запасов каждого вида сырья и величина прибыли от реализации одного изделия каждого вида приведены в табл.16.1. Составить математическую модель этой задачи.

Таблица 16.1

Вид сырья	Изделия		Запасы сырья
	$П_1$	$П_2$	
$С_1$	1	2	470
$С_2$	5	4	1600
$С_3$	7	2	2060
Прибыль от реализации одного изделия	9	7	

Пусть x_1 – количество изготовленных изделий первого вида, x_2 – второго вида. Прибыль от реализации всей продукции составляет $F(X) = 9x_1 + 7x_2$ и ее нужно максимизировать:

$$F(X) = 9x_1 + 7x_2 \to \max. \tag{16.7}$$

Ограничения на затраты ресурсов представимы в виде следующей системы неравенств:

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 \le 470, \\
5x_1 + 4x_2 \le 1600, \\
7x_1 + 2x_2 \le 2060,
\end{cases} \tag{16.8}
$$

Кроме того, по смыслу задачи должны выполняться неравенства

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{16.9}$$

§ 3. Основные виды записи ЗЛП

Наряду с основной ЗЛП широко используются еще два вида записи ЗЛП: симметричная и каноническая.

Симметричной (или стандартной, нормальной) задачей линейного программирования называется следующая задача:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min), \tag{16.10}$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m.
\end{cases} \tag{16.11}
$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{16.12}$$

т.е. задача, в которой все переменные неотрицательны, и ограничения заданы неравенствами со знаком $\le$. В рассмотренном выше примере 16.1 математическая модель задачи была записана в симметричной форме.

Канонической (или основной) задачей линейного программирования называется следующая задача:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min), \tag{16.13}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{16.14}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{16.15}$$

т.е. задача, в которой все переменные неотрицательны, а ограничения заданы уравнениями.

Любую из указанных выше трех форм записи ЗЛП можно преобразовать в другую, а требование максимизации целевой функции можно заменить требованием минимизации новой целевой функции $F'(X) = -F(X)$.

Для записи ЗЛП могут использоваться различные способы обозначений. Так например, целевую функцию (16.4) можно записать с помощью знака суммирования

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max(\min) \tag{16.16}$$

или с помощью скалярного произведения

$$F(X) = C \cdot X \to \max(\min), \tag{16.17}$$

где C и X – векторы коэффициентов $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и переменных $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Систему ограничений (16.11) можно кратко переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i\,,\ i = \overline{1,m}\,, \tag{16.18}$$

а систему ограничений (16.14) – в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,,\ i = \overline{1,m}\,. \tag{16.19}$$

§ 4. Решение ЗЛП геометрическим методом

Рассмотрим наиболее наглядный метод решения ЗЛП – геометрический. Геометрический метод решения ЗЛП удобен для решения задач, содержащих две переменные (x_1 и x_2). Целевая функция в этом случае имеет вид

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2\,. \tag{16.20}$$

Алгоритм решения ЗЛП геометрическим методом:

1. Построить область допустимых решений. Для этого:
   - заменить в системе ограничений знаки неравенств на знаки равенств;
   - на плоскости x_1Ox_2 построить прямые, соответствующие этим равенствам (такие прямые определяют границы области допустимых решений);
   - определить полуплоскости, соответствующие исходным неравенствам системы ограничений;
   - найти пересечение всех таких полуплоскостей (построенный многоугольник и является областью допустимых решений Ω).
2. Графически отыскать оптимальный план. Для этого:
   - на плоскости x_1Ox_2 отложить вектор $C = (c_1,\ c_2)$, где $c_1,\ c_2$ – коэффициенты целевой функции (16.20) (век-

тор C указывает направление наискорейшего возрастания целевой функции);

- построить прямую, перпендикулярную вектору $C = (c_1, c_2)$; для определенности можно выбрать прямую, проходящую через точку (0; 0); такая прямая задается уравнением

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0; \tag{16.21}$$

линии, вдоль которых целевая функция сохраняет одно и то же постоянное значение Z_0, называются *линиями уровня целевой функции;*

- перемещать линию уровня параллельно себе в направлении вектора C (при решении задач на максимум) или в противоположном направлении (при решении задач на минимум) до того момента, когда она пройдет либо через крайнюю точку (x_1^*, x_2^*) области Ω, либо через крайнее ребро этой области; такое положение линии уровня называется *разрешающим положением*.

3. Найти оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ и вычислить экстремальное значение целевой функции $F^* = F(X^*)$. Для этого:

- графически определить пересечением каких прямых является крайняя точка (x_1^*, x_2^*);
- найти координаты крайней точки (x_1^*, x_2^*), решив систему, состоящую из уравнений двух прямых, пересекающихся в этой точке.

Замечание. Если установить крайнюю точку области допустимых решений только графическими средствами сложно, то можно вычислить значение целевой функции в нескольких угловых точках, после чего сравнить их между собой и выбрать оптимальное.

При построении области допустимых решений возможно несколько различных случаев.

1. Область допустимых решений является пустым множеством (рис. 16.1).

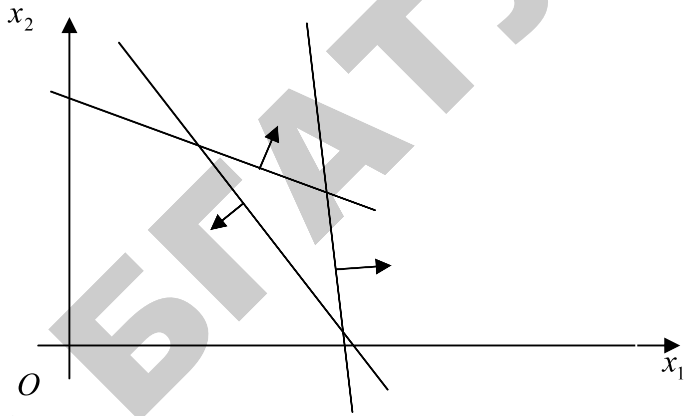


Рисунок 16.1

В этом случае ЗЛП решений не имеет. С экономической точки зрения этот случай соответствует ситуации, когда система экономических требований несовместна. Для нахождения решения задачи ограничения должны быть ослаблены.

2. Областью допустимых решений является единственная точка (рис. 16.2).

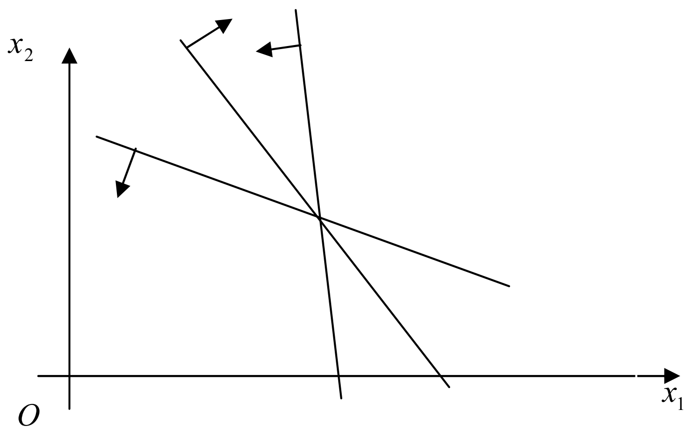


Рисунок 16.2

В этом случае ЗЛП имеет единственный план (не зависящий от целевой функции), который и является оптимальным. Компоненты оптимального плана определяются как координаты точки пересечения. границ полуплоскостей.

3. Область допустимых решений является многоугольником (рис. 16.3).

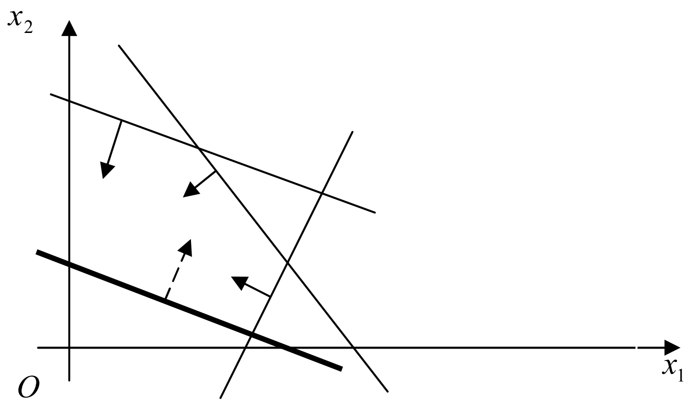


Рисунок 16.3

В этом случае решение ЗЛП существует и совпадает с одной из вершин (или с одним из ребер) этого многоугольника.

4. Область допустимых решений является неограниченной фигурой. В этом случае возможны различные ситуации. Решение задачи может существовать (рис. 16.4), а может и не существовать (рис. 16.5).

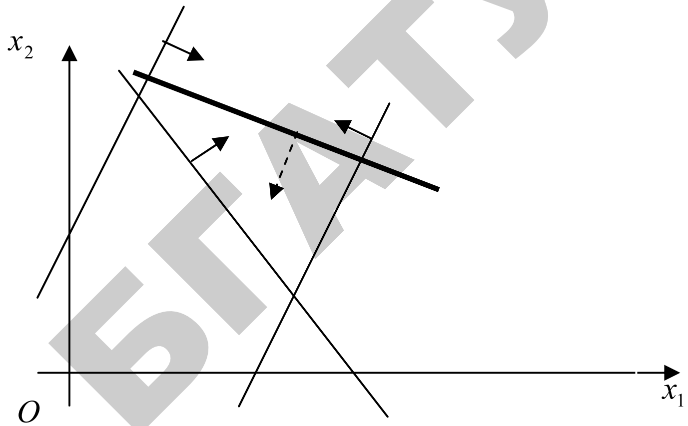


Рисунок 16.4

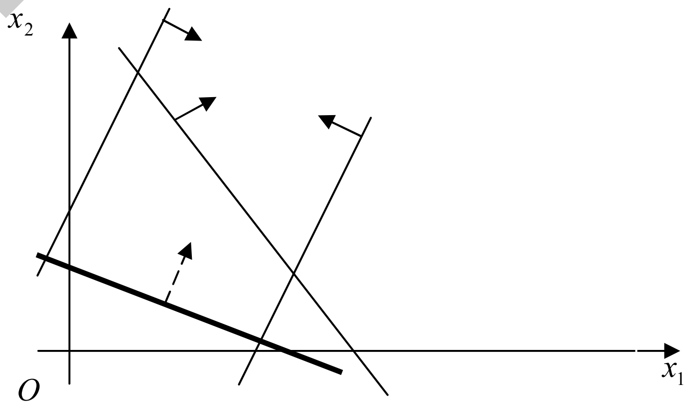


Рисунок 16.5

С экономической точки зрения эта ситуация означает, как правило, что в модели задачи не учтено какое-то условие, ограничивающее возможность изменения значения целевой функции.

Пример 16.2 С помощью графического метода определить сколько нужно произвести изделий каждого вида согласно условию задачи из примера 16.1, чтобы предприятие получило максимальную прибыль.

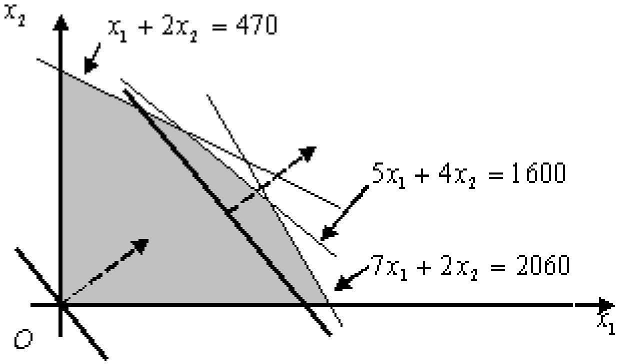


Рисунок 16.6

Построим область допустимых решений, соответствующую ограничениям (16.8)-(16.9).

Заменяем в системе ограничений знаки неравенств на знаки равенств и строим прямые

$$x_1 + 2x_2 = 470, \quad 5x_1 + 4x_2 = 1600, \quad 7x_1 + 2x_2 = 2060.$$

Эти прямые схематично изображены на рис. 16.6.

Чтобы определить полуплоскость, соответствующую исходному неравенству системы ограничений, возьмем произвольную точку, не лежащую на граничной прямой, и проверим, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству.

Возьмем, например, точку (1, 1). Координаты этой точки удовлетворяют и первому, и второму, и третьему неравенству системы (16.8). Действительно,

$$1 + 2\cdot 1 \le 470, \quad 5\cdot 1 + 4\cdot 1 \le 1600, \quad 7\cdot 1 + 2\cdot 1 \le 2060.$$

Следовательно, все три неравенства выполняются в полуплоскостях, содержащих точку (1, 1).

С учетом неравенств (16.9) находим, что областью допустимых решений задачи является многоугольник, заштрихованный на рисунке 16.6.

В точке $O(0, 0)$ строим вектор $C = (9, 7)$. Перпендикулярно вектору C проводим линию уровня $F = 0$, проходящую через начало координат. Параллельным перемещением прямой $F = 0$ находим крайнюю точку области решений, в которой целевая функция достигает максимума.

В данной задаче по чертежу может быть не вполне ясно, какая из точек является крайней точкой области. В таком случае следует решить системы, включающие уравнения прямых, точки пересечений которых являются потенциально крайними, вычислить значения целевой функции в этих точках и сравнить результаты.

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 470, \\ 5x_1 + 4x_2 = 1600 \end{cases}$$

и находим координаты точки пересечения этих прямых: $x_1 = 220$, $x_2 = 125$. Значение целевой функции в этой точке равно $F = 9\cdot 220 + 7\cdot 125 = 2855$.

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 1600, \\ 7x_1 + 2x_2 = 2060 \end{cases}$$

и находим координаты точки пересечения этих прямых: $x_1 = 280$, $x_2 = 50$. Значение целевой функции в этой точке равно $F = 9\cdot 280 + 7\cdot 50 = 2870$.

Так как во втором случае получено большее значение целевой функции, то оптимальным является план $X^* = (x_1^*; x_2^*) = (280;50)$.

Для канонической ЗЛП может быть рассмотрена ***вторая геометрическая интерпретация***. В этом случае столбцы матрицы системы ограничений $A = (a_{ij})$ рассматривают как векторы пространства R^m. Тогда каждому допустимому плану канонической

ЗЛП — n-мерному вектору x — соответствует неотрицательная линейная комбинация столбцов матрицы A, равная столбцу $b \in R^m$.

§ 5. Симплекс-метод решения ЗЛП

Графический метод решения ЗЛП удобно применять в случае двух или трех переменных. Если число переменных в задаче больше трех, то для решения такой ЗЛП применяют *симплексный метод (симплекс-метод)*.

Симплекс-метод включает в себя два основных этапа: построение начального опорного плана и последовательное улучшение опорного плана.

Построение начального опорного плана

Пусть дана ЗЛП в нормальной форме. Требуется найти максимальное значение функции

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,. \qquad (16.22)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} . \qquad (16.23)$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.. \qquad (16.24)$$

Сделаем допущение:

$$b_j \ge 0, \quad j = \overline{1,m}.. \qquad (16.25)$$

Перейдем к канонической системе записи. Для этого к левым частям неравенств (16.23) следует добавить дополнительные

переменные $x_{n+j} \ge 0$, $j = \overline{1,m}$. В результате получится эквивалентная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} . \qquad (16.26)$$

$$x_i \ge 0, \quad b_j \ge 0, \quad i = \overline{1, n+m}, \quad j = \overline{1,m}.. \qquad (16.27)$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$c_{n+j} = 0, \quad j = \overline{1,m}. \qquad (16.28)$$

Система ограничений (16.26)-(16.27) имеет канонический вид. Кроме того, каждое равенство в (16.26) содержит одну переменную, которая входит в данное уравнение с коэффициентом, равным единице, а во все остальные уравнения с коэффициентом, равным нулю. Такой вид системы ограничений называется *предпочтительным*.

Теорема. Если система ограничений имеет симметричный вид, то она всегда может быть приведена к предпочтительному виду.

Переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ в данном случае соответствуют базису и называются *базисными переменными*, а переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *свободными*. Если свободные переменные приравнять нулю, а базисные переменные примут при этом неотрицательные значения, то полученное частное решение системы ограничений (16.26) называется *опорным решением (планом)*.

Экономический смысл вводимых дополнительных переменных состоит в том, что они показывают объемы (запасы) неизрасходованного сырья каждого вида.

Признак оптимальности опорного плана. Симплекс-таблицы

Рассмотрим ЗЛП (16.26)-(16.27), записанную в предпочтительном виде. Введем обозначения:

$$\Delta_0 = z_0 = c_{n+1}b_1 + c_{n+2}b_2 + \cdots + c_{n+m}b_m . \qquad (16.29)$$

$$z_j = c_{n+1}a_{1j} + c_{n+2}a_{2j} + \cdots + c_{n+m}a_{mj} . \qquad (16.30)$$

$$\Delta_j = z_j - c_j = (c_{n+1}a_{1j} + c_{n+2}a_{2j} + \cdots + c_{n+m}a_{mj}) - c_j \qquad (16.31)$$

где $(c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots, c_{n+m})$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $(b_1, b_2, \cdots, b_m)$ – вектор-столбец свободных членов; $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})$ – вектор-столбец коэффициентов при переменных x_j, $j = \overline{1, n}$

Теперь можно сформулировать теоремы, которые позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Теорема. *Опорный план задачи* (16.26)-(16.27) *является оптимальным, если все оценки* $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$.

Теорема. *Если для некоторого* $j = k$ *оценка* $\Delta_k < 0$ *и среди чисел* a_{ik} $(i = \overline{1, m})$ *нет положительных, то целевая функция* (16.22) *задачи* (16.26)–(16.27) *не ограничена на множестве ее планов.*

На практике исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейшие вычисления проводят, записав условия задачи и первоначальный опорный план в таблицу, которая называется *симплексной* (таблица 16.2).

Таблица 16.2

c	Базисные переменные	b	c_1	c_2	…	c_n	0	…	0
			x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}
0	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	…	0
0	x_{n+2}	b_1	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	…	1
	z_j	z_0	z_1	z_2	…	z_n	z_{n+1}	…	z_{n+m}
	$z_j - c_j$	Δ_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	Δ_{n+1}	…	Δ_{n+m}

В верхней строке укажем коэффициенты целевой функции, а в первом (левом) столбце (c) этой таблицы еще раз запишем коэффициенты целевой функции, но теперь уже только те, которые стоят при базисных переменных.

В третьем столбце (b) будем записывать компоненты исходного опорного плана. В этом же столбце в результате вычислений получатся компоненты оптимального плана. В столбцы $x_1, x_2, ..., x_n$ будем записывать столбцы коэффициентов при свободных переменных, а в столбцы $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ – столбцы коэффициентов при базисных переменных.

Таким образом, в таблице 16.2 первые m строк определяются исходными данными задачи, а элементы двух последних строк вычисляются. Нижняя $(m+2)$-я строка называется <u>*индексной строкой*</u>. В индексной строке Δ_0 – значение целевой функции, которое она принимает при данном опорном плане, оценки Δ_j вычисляются по формуле (16.31) и называются <u>*оценками*</u> соответствующих переменных.

После заполнения таблицы 16.2 исходный опорный план проверяют на оптимальность. Для этого анализируют элементы нижней строки таблицы. Если все оценки $\Delta_j \geq 0$, то исходный план является оптимальным. Если существует такой столбец, в котором оценка $\Delta_j < 0$ и при этом в *j*-том столбце все элементы $a_{ij} \leq 0$, то целевая функция не ограничена на множестве допустимых решений. В остальных случаях осуществляется переход от исходного опорного плана к новому опорному плану по симплекс-методу. Известно, что значение целевой функции после симплексного преобразования не уменьшается.

Алгоритм преобразования симплекс-таблиц:

Найти разрешающий элемент. Для этого:

- в нижней (индексной) строке таблицы выбрать наименьшее отрицательное число $\Delta_k < 0$, $k = \overline{1, n+m}$. *Столбец*, в котором находится это число, называется *разрешающим (ключевым).* Если такого числа нет, то полученное базисное решение является оптимальным и таблица далее не преобразуется;
- в разрешающем столбце найти положительные коэффициенты a_{ik}. Если таких коэффициентов нет, то целевая функция неограниченна на области допустимых решений и задача решений не имеет;
- среди выбранных коэффициентов столбца выбрать тот, для которого абсолютная величина отношения соответствующего свободного члена b_i (находящегося в столбце свободных членов) к этому элементу минимальна, т.е. $\min\left(\dfrac{b_i}{a_{ik}}\right)$ для всех $a_{ik} > 0$. Этот *элемент* называется *разрешающим (ключевым)*, а *строка,* в которой он находится, – *разрешающей (ключевой).*

Преобразовать базис. Для этого:

- базисную переменную x_p, отвечающую строке разрешающего элемента, вывести из числа базисных и перевести в разряд свободных;
- свободную переменную x_k, отвечающую столбцу разрешающего элемента, ввести в число базисных.

Пересчитать элементы таблицы. Для этого:

- построить новую таблицу, содержащую новые названия базисных переменных и соответствующие им значения коэффициентов целевой функции (первый и второй столбец таблицы);
- разделить каждый элемент ключевой строки на разрешающий элемент, полученные значения записать в строку с измененной базисной переменной новой симплекс-таблицы (в таблице эта строка занимает прежнее место, но соответствует новой базисной переменной);
- все элементы ключевого столбца в новой таблице положить равными нулю, кроме разрешающего элемента, который положить равным единице;
- в остальные клетки новой таблицы записать результаты преобразований элементов старой таблицы по формулам:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{pk} - a_{pj}a_{ik}}{a_{pk}} \tag{16.32}$$

$$b'_i = \frac{b_i a_{pk} - b_p a_{ik}}{a_{pk}} \tag{16.33}$$

$$\Delta'_j = \frac{\Delta_j a_{pk} - a_{pj}\Delta_k}{a_{pk}} \tag{16.34}$$

$$\Delta'_0 = \frac{\Delta_0 a_{pk} - b_p \Delta_k}{a_{pk}} \tag{16.35}$$

Замечание 1. Формулы (16.32) – (16.35) удобны для запоминания, однако ведут к избыточным вычислениям. Для практических целей лучше использовать упрощенный вариант этих формул:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{pj} a_{ik}}{a_{pk}} \qquad (16.36)$$

$$b'_i = b_i - \frac{b_p a_{ik}}{a_{pk}} \qquad (16.37)$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{a_{pj} \Delta_k}{a_{pk}} \qquad (16.38)$$

$$\Delta'_0 = \Delta_0 - \frac{b_p \Delta_k}{a_{pk}} \qquad (16.39)$$

Замечание 2. Если в ключевой строке некоторого столбца содержится 0, то в новой таблице этот столбец не изменится.

Замечание 3. Если в ключевом столбце некоторой строки содержится 0, то в новой таблице эта строка не изменится.

В результате применения алгоритма будет получена новая симплекс-таблица, отвечающая новому базисному решению. Если в индексной строке новой симплекс-таблицы нет отрицательных значений, то получено оптимальное решение. В противном случае снова применяется алгоритм преобразования симплекс-таблиц.

Итак, решение задач линейного программирования симплекс-методом включает следующие этапы:

- нахождение начального опорного плана;
- составление симплекс-таблицы;
- проверка опорного плана на оптимальность;
- преобразование (в случае необходимости) симплекс-таблицы и построение нового опорного плана.

Пример 16.3 С помощью симплекс-метода определить сколько нужно произвести изделий каждого вида согласно условию задачи из примера 16.1, чтобы предприятие получило максимальную прибыль.

В примере 16.1 была построена математическая модель и сформулирована ЗЛП в симметричной форме:

$$F(X) = 9x_1 + 7x_2 \to \max . \qquad (16.40)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 470, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 1600, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 2060, \end{cases} \qquad (16.41)$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \qquad (16.42)$$

Приведем задачу к канонической форме. Для этого к левым частям каждого неравенства системы ограничений (16.41) прибавим дополнительную переменную, после чего все неравенства преобразуются в равенства:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 470, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 1600, \\ 7x_1 + 2x_2 + x_5 = 2060. \end{cases} \qquad (16.43)$$

Полученная система ограничений имеет предпочтительный вид, начальный опорный план можно записать в виде

$$X = (0, 0, 470, 1600, 2060) .$$

Экономический смысл первоначального опорного плана состоит в том, что согласно этому плану будет выпускаться 0 изделий первого вида и 0 изделий второго вида. При этом останется неиспользованными 470 единиц первого сырья, 1600 единиц второго сырья и 2060 единиц третьего сырья. Очевидно, что такой план далек от оптимального, однако он является допустимым опорным планом.

Составим симплексную таблицу для первого шага (таблица 16.3). В первые три строки заносим данные из условия. При заполнении четвертой и пятой строк производим вычисления:

$$z_0 = 470 \cdot 0 + 1600 \cdot 0 + 2060 \cdot 0 = 0 ,$$

$$z_1 = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0 ,$$

$$z_2 = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 ,$$

$$z_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 ,$$

$$z_4 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 ,$$

$$z_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 ,$$

$$\Delta_0 = z_0 = 0,$$
$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9,$$
$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = 0 - 7 = -7,$$
$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = 0 - 0 = 0,$$
$$\Delta_4 = z_4 - c_4 = 0 - 0 = 0,$$
$$\Delta_5 = z_5 - c_5 = 0 - 0 = 0.$$

Таблица 16.3

c	Базис	b	9	7	0	0	0	Отношения
			$x_1\downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	470	1	2	1	0	0	470
0	x_4	1600	5	4	0	1	0	320
0	$\leftarrow x_5$	2060	7	2	0	0	1	$294\frac{2}{7}$
	z_j	0	0	0	0	0	0	
	$z_j - c_j$	0	–9	–7	0	0	0	

В нижней строке содержатся два отрицательных числа. Следовательно, полученный план не является оптимальным. Для перехода к новому опорному плану выполним преобразования симплекс-таблицы.

Находим в нижней строке наибольшее по абсолютной величине отрицательное число. Это число –9, расположенное в первом столбце. Выделяем первый столбец как разрешающий и вводим в базис переменную x_1.

Вычисляем отношения $\frac{b_i}{a_{ij}}$ для положительных элементов первого столбца и выбираем наименьшее:

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{470}{1} = 470; \ \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{1600}{5} = 320; \ \frac{b_3}{a_{31}} = \frac{2060}{7} = 294\frac{2}{7};$$

$$\min\left(470; 320; 294\frac{2}{7}\right) = 294\frac{2}{7}.$$

Наименьшее отношение находится в третьей строке, следовательно, эта строка является разрешающей, а разрешающим элементом является элемент 7, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца. Из базиса исключаем переменную x_5.

Составляем симплекс-таблицу для второго шага (таблица 16.4). Все элементы разрешающей (третьей) строки делим на разрешающий элемент (т.е. 7). Элементы разрешающего (первого) столбца заполняем нулями, кроме $a_{13} = 1$. Другие базисные столбцы можно переписать без изменений. Все остальные элементы таблицы пересчитываем по формулам (16.36)-(16.39).

Таблица 16.4

c	Базис	b	9	7	0	0	0	Отношения
			x_1	$x_2\downarrow$	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	$\frac{1230}{7}$	0	$\frac{12}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$	102,5
0	$\leftarrow x_4$	$\frac{900}{7}$	0	$\frac{18}{7}$	0	1	$-\frac{5}{7}$	50
9	x_1	$\frac{2060}{7}$	1	$\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	1030
	z_j	$\frac{18540}{7}$	9	$\frac{18}{7}$	0	0	$\frac{9}{7}$	
	$z_j - c_j$	$\frac{18540}{7}$	0	$-\frac{31}{7}$	0	0	$\frac{9}{7}$	

Заполняем две нижние строки:

$$z_0 = \frac{1230}{7}\cdot 0 + \frac{900}{7}\cdot 0 + \frac{2060}{7}\cdot 9 = \frac{18540}{7},$$

$$z_1 = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 9 = 9,$$

$$z_2 = \frac{12}{7}\cdot 0 + \frac{18}{7}\cdot 0 + \frac{2}{7}\cdot 9 = \frac{18}{7},$$

$$z_3 = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 9 = 0,$$

$$z_4 = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 9 = 0,$$

$$z_5 = -\frac{1}{7}\cdot 0 - \frac{5}{7}\cdot 0 + \frac{1}{7}\cdot 9 = \frac{9}{7},$$

$$\Delta_0 = z_0 = \frac{18540}{7},$$

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = 9 - 9 = 0,$$

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = \frac{18}{7} - 7 = -\frac{31}{7},$$

$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_4 = z_4 - c_4 = 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_5 = z_5 - c_5 = \frac{9}{7} - 0 = \frac{9}{7}.$$

В нижней строке остается один отрицательный элемент. В связи с этим выполняем еще одно преобразование симплекс-таблицы.

Разрешающим столбцом теперь является второй (он содержит отрицательное число в индексной строке), а индексную строку находим из величины соотношений $\frac{b_i}{a_{ij}}$ для положительных элементов второго столбца:

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{1230}{7} : \frac{12}{7} = \frac{1230}{12} = 102{,}5; \quad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{900}{7} : \frac{18}{7} = \frac{900}{18} = 50;$$

$$\frac{b_3}{a_{32}} = \frac{2060}{7} : \frac{2}{7} = \frac{2060}{2} = 1030;$$

$$\min(102{,}5; 50; 1030) = 50.$$

Минимальное отношение находится во второй строке и эту строку мы берем в качестве разрешающей. Разрешающий элемент равен $\frac{18}{7}$. Переменную x_4 выводим из базиса, а переменную x_2 вводим в него. Снова пересчитываем все элементы симплекс-таблицы и получаем таблицу 16.5.

Таблица 16.5

c	Базис	b	9	7	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	90	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
7	x_2	50	0	1	0	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$
9	x_1	280	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
	z_j	2870	9	$\frac{18}{7}$	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{9}{7}$
	$z_j - c_j$	2870	0	0	0	$\frac{31}{18}$	$\frac{1}{18}$

В последней строке полученной таблицы 16.5 нет отрицательных оценок Δ_j. Следовательно, полученный опорный план исходной задачи $X^* = (280;50)$ является оптимальным. При этом плане значение целевой функции равно 2870. Полученный результат полностью согласуется с результатом, полученным для этой задачи графическим методом.

Ячейки симплекс-таблицы имеют определенный экономический смысл. Так третья и вторая колонки показывают, что оптимальный план выпуска продукции состоит в том, что должно быть выпущено 50 изделий первого вида и 280 изделий второго вида, при этом останутся неизрасходованными 90 единиц сырья первого вида, а прибыль предприятия составит 2870 единиц.

§ 6. Двойственность в линейном программировании

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую ЗЛП, называемую *двойственной* по отношению к исходной (прямой) задаче. Пара симметричных двойственных задач имеет следующий вид:

Прямая задача.

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max . \qquad (16.44)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \ i=\overline{1,m}, \qquad (16.45)$$

$$x_j \ge 0, \ \ j=\overline{1,n}, \qquad (16.46)$$

Двойственная задача

$$\hat{O}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min . \qquad (16.47)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \ge c_j, \ \ j=\overline{1,n}, \qquad (16.48)$$

$$y_i \ge 0, \ \ i=\overline{1,m}. \qquad (16.49)$$

Переменные y_i $(i=\overline{1,m})$ двойственной задачи называются *двойственными переменными или оценками, а также учетными (неявными, теневыми) ценами*.

Прямая и двойственная задачи образуют *пару взаимно двойственных задач* линейного программирования.

Правила составления двойственной задачи:

- исходная задача должна быть преобразована следующим образом: если в исходной задаче требуется найти максимум целевой функции, то ограничения должны иметь знак $\le$, если же в исходной задаче нужно найти минимум, то ограничения должны иметь знак $\ge$;
- каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие двойственная переменная y_i, $i=\overline{1,m}$; каждому ограничению двойственной задачи соответствует переменная исходной задачи (число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной, а число ограничений двойственной – числу переменных прямой задачи);
- если в исходной задаче требуется найти максимум целевой функции (и ее система ограничений имеет знаки $\le$), то в двойственной задаче – минимум (и ее система ограничений должна иметь знаки $\ge$), и наоборот;
- коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи;
- свободные члены b_i системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной задачи;
- матрицы коэффициентов ограничений прямой и двойственной задачи являются транспонированными по отношению друг к другу;
- все переменные в обеих задачах неотрицательны.

Пример. 16.4. Составить двойственную задачу к задаче

$$F(X)=9x_1+7x_2 \to \max ,$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 470, \\ 5x_1+4x_2 \le 1600, \\ -7x_1-2x_2 \ge -2060, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

Так как исходная задача решается на максимум, то все ограничения должны иметь знак $\le$. Умножим обе части третьего неравенства системы ограничений $-7x_1 - 2x_2 \geq -2060$ на –1 и получим неравенство $7x_1 + 2x_2 \leq 2060$. Таким образом, исходной задачей является задача с системой ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 470, \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 1600, \\ 7x_1 + 2x_2 \leq 2060. \end{cases}$$

Каждому ограничению исходной задачи ставим в соответствие переменную y_i, $i = \overline{1,3}$.

Так как в исходной задаче требовалось найти максимум, то в двойственной задаче нужно искать минимум.

Коэффициентами целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы ограничений исходной задачи:

$$\Phi(Y) = 470y_1 + 1600y_2 + 2060y_3 \to \min$$

Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции исходной задачи.

Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи получается путем транспонирования матрицы коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Таким образом, система ограничений имеет вид

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 9, \\ 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 7, \end{cases}$$

где знак $\geq$ выбран в силу того, что двойственная задача является задачей на минимум.

Все переменные двойственной задачи неотрицательны.

Таким образом, двойственная задача имеет вид

$$\Phi(Y) = 470y_1 + 1600y_2 + 2060y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 9, \\ 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 7, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Двойственные симметричные задачи имеют важный экономический смысл. Рассмотрим пример задачи оптимального использования отходов сырья основного

производства.

Пусть на предприятии имеются отходы сырья m видов в объемах b_i единиц $(i = \overline{1,m})$. Из этих отходов можно наладить выпуск n видов дополнительной продукции. Обозначим через a_{ij} норму расхода сырья i-го вида на единицу j-й продукции $(j = \overline{1,n})$, через c_j – цену реализации единицы j-й продукции. Неизвестные величины задачи: x_j – объемы выпуска j-й продукции, обеспечивающие предприятию максимум выручки.

Математическая модель задачи имеет вид (16.44) - (16.46).

Предположим, что у этого предприятия есть и альтернатива: продать отходы основного производства некоторой другой организации. Необходимо установить прикидочные оценки (цены) на эти отходы. Обозначим их $y_1, y_2, ..., y_m$. Оценки должны быть установлены исходя из следующих требований, отражающих несовпадающие интересы продавца и покупателя:

1) покупатель стремится минимизировать общую стоимость отходов сырья;

2) продавец согласен уступить отходы только по таким ценам, которые обеспечат получение выручки не меньшей, чем выручка, которая была бы получена в результате организации собственного производства.

Эти требования приводят к следующей ЗЛП.

Требование покупателя – минимизация стоимости покупки:

$$\Phi(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

Требование продавца можно сформулировать в виде системы ограничений. Предприятие откажется от выпуска каждой единицы продукции первого вида, если

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1,$$

где левая часть означает выручку за сырье, идущее на производство единицы дополнительной продукции первого вида; правая – ее цену.

Аналогичные рассуждения можно провести в отношении выпуска продукции каждого вида. Кроме того, по смыслу задачи все оценки должны быть неотрицательными. Таким образом мы получили двойственную задачу (16.47) - (16.49).

Связь между решениями прямой и двойственной задачи

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач (16.44) - (16.46) и (16.47) - (16.49). Каждая из этих задач является отдельной ЗЛП и может быть решена независимо от другой. Однако между оптимальными планами этих задач существует связь, которая позволяет находить решение одной задачи, зная решение другой.

Теорема. *Для любых допустимых планов $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ прямой и двойственной ЗЛП справедливо неравенство $F(X) \le \Phi(Y)$, т. е.*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i . \qquad (16.50)$$

Теорема (критерий оптимальности Канторовича) *Если для некоторых допустимых планов X^* и Y^* пары двойственных задач выполняется равенство*

$$F(X^*) = \hat{O}\left(Y^*\right), \qquad (16.51)$$

то X^* – оптимальный план исходной задачи, а Y^* – оптимальный план двойственной задачи.

Экономическое содержание этой теоремы состоит в том, что план производства X и вектор оценок ресурсов Y являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

Теорема. (первая теорема двойственности. *Если одна из пары двойственных (16.44) - (16.46) или (16.47) - (16.49) имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т. е.*

$$F(X^*) = \hat{O}\left(Y^*\right). \qquad (16.52)$$

Теорема (вторая теорема двойственности). *Для того чтобы планы X^* и Y^* пары двойственных задач были*

оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} & x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ & y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \qquad (16.53)$$

Из второй теоремы двойственности следует, что двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положительную оценку, а ресурс избыточный (используемый не полностью) имеет нулевую оценку.

Теорема. *Двойственные оценки показывают приращение целевой функции, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения задачи линейного программирования, точнее*

$$\frac{\partial F(X^*)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad (i = \overline{1, m}). \qquad (16.54)$$

Из равенства (16.54) следует, что величина двойственной оценки численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу.

Применение двойственности в линейном программировании позволяет расширить множество методов решения задач. Отметим, что симплекс-метод применим в тех случаях, когда в системе ограничений ЗЛП свободные члены b_j неотрицательны, в то время как коэффициенты целевой функции могут иметь любой знак. Однако в ряде случаев легче найти базис, в котором все $c_j \ge 0$, но не все $b_i \ge 0$. Вариант симплекс-метода, применяемый для решения таких задач. называется <u>*двойственным симплекс-методом*</u>.

Двойственный симплекс-метод применим для решения ЗЛП вида

$$F(X) = -\sum_{j=1}^{n} c'_j x_j \to \max ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1, m},$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1, n},$$

где система ограниченны имеет предпочтительный вид и все коэффициенты целевой функции $c'_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$.

§ 7. Транспортная задача

Постановка задачи

Пусть имеется m пунктов отправления (поставщиков) A_1, $A_2,\dots,$ A_m, у которых находятся запасы некоторого однородного груза в количестве соответственно $a_1, \dots, a_m$ единиц. Этот груз необходимо доставить в пункты назначения (потребителям) $B_1, \dots, B_n$, спрос (потребности) которых выражается величинами $b_1, \dots, b_n$ единиц. Стоимость (тариф) перевозки единицы груза из i-го пункта отправления $(i = \overline{1,m})$ в j-ый пункт назначения $(j = \overline{1,n})$ равна c_{ij}. Пусть x_{ij} – количество единиц груза, доставляемого из i-го пункта отправления A_i в j-ый пункт назначения B_j. Требуется составить такой план перевозок груза, который полностью удовлетворяет спрос потребителей и обеспечивает наименьшую стоимость суммарных транспортных издержек.

Математическая постановка транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{16.55}$$

при выполнении условий:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \tag{16.56}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \tag{16.57}$$

$$x_{ij} \ge 0, \tag{16.58}$$

где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Экономический смысл условий (16.56)–(16.58) состоит в том, что спрос всех потребителей должен быть удовлетворен, весь груз, имеющийся у поставщиков, должен быть вывезен (обратные перевозки исключаются), размеры поставок должны выражаться неотрицательными числами.

Исходные данные транспортной задачи удобно записывать в виде *матрицы* или *распределительной таблицы* (таблица 16.6), строки которой соответствуют поставщикам (пунктам отправления), а столбцы – потребителям (пунктам потребления). В последнем столбце таблицы указывают запас груза каждого поставщика, а в последней строке – величину спроса потребителей. В клетках таблицы в выделенных правых верхних углах будем указывать тарифы, в левых нижних углах – объемы перевозок.

Таблица 16.6

Поставщики	Потребители B_1	B_2	…	B_n	Запасы
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	… …	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	… …	x_{2n} c_{2n}	a_2
…	… …	… …	… …	… …	
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	… …	x_{mn} c_{mn}	a_m

Потребности	b_1	b_2	…	b_n

Пример 16.5. Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице 16.6.

Таблица 16.7

Поставщики	Потребители B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	18	23	14	20	34
A_2	12	21	25	15	35
A_3	15	25	21	17	58
Потребности	21	49	26	31	127

Целевая функция (16.55) в данном случае имеет вид

$$F = 18x_{11} + 23x_{12} + 14x_{13} + 20x_{14} + 12x_{21} + 21x_{22} + $$
$$+ 25x_{23} + 15x_{24} + 15x_{31} + 25x_{32} + 21x_{33} + 17x_{34}.$$

Ограничения (16.56) принимают вид

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 34, \\ x_{21} + x_{21} + x_{23} + x_{24} = 35, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 58, \end{cases}$$

а ограничения (16.57) принимают вид

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 21, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 49, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 26, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 31. \end{cases}$$

Выполнение этих условий означает, что все запасы поставщиков будут вывезены, а спрос потребителей будет полностью удовлетворен.

Матрица $X = (x_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, в которой все элементы $x_{ij} \geq 0$, называется <u>*допустимым планом*</u> транспортной задачи. Допустимый план $X = (x_{ij})$, при котором целевая функция (16.55) достигает минимального значения, называется <u>*оптимальным планом*</u> и обозначается $X^* = (x^*_{ij})$.

Транспортная задача называется <u>*закрытой (с закрытой моделью)*</u>, если суммарная потребность в грузе в пунктах назначения равна суммарному запасу груза в пунктах отправления, т.е. выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (16.59)$$

В противном случае транспортная задача называется <u>*открытой*</u>.

Рассмотренная в примере 6.5 задача является задачей с закрытой моделью.

Теорема. *Для того, чтобы транспортная задача имела допустимые планы, необходимо и достаточно, чтобы она была транспортной задачей с закрытой моделью, т. е., чтобы выполнялось равенство (16.59)*

Для нахождения оптимального плана транспортной задачи с открытой моделью осуществляется преобразование этой модели в закрытую модель. Такое преобразование осуществляется следующим образом:

если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. запасы груза превышают потребности, то вводят фиктивный пункт назначения B_{n+1} с потребностью

$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, при этом соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{i,n+1} = 0 \ \ (i = \overline{1,m})$;

если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. потребности превышают запасы, то вводят фиктивного поставщика A_{m+1} с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, при этом соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{m+1,j} = 0 \ \ (j = \overline{1,n})$.

Таким образом, нахождение оптимального плана задачи с открытой моделью сводится к нахождению оптимального плана задачи с закрытой моделью.

Если в допустимом плане транспортной задачи содержится не более $m+n-1$ ненулевых элементов x_{ij}, то такой план называется *опорным* или *базисным планом* транспортной задачи. При этом если число ненулевых элементов x_{ij} равно $m+n-1$, то такой опорный план называется *невырожденным*, а если это число меньше $m+n-1$, то опорный план называется *вырожденным*.

Транспортная задача может быть решена симплексным методом, однако в силу ее исключительно большой практической значимости и специфики ограничений для определения оптимального плана транспортной задачи разработаны специальные методы.

Решение транспортной задачи включает в себя:

- построение начального опорного плана задачи;
- проверку опорного плана на оптимальность;
- последовательное улучшение плана в случае построения неоптимального плана.

Построение начального опорного плана

Существует несколько различных методов построения начального опорного плана транспортной задачи. Далее будут рас-

смотрены метод северо-западного угла и метод минимального элемента. При построении начального опорного плана любым из этих методов осуществляется последовательное занесение некоторых значений в клетки распределительной таблицы (загрузка клеток). При этом в каждую загружаемую клетку должно заноситься наибольшее возможное значение поставки $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$. После занесения в клетку (i, j) числа x_{ij}, необходимо скорректировать соответствующие величины a_i и b_j, помещая вместо них числа $a'_i = a_i - x_{ij}$ и $b'_j = b_j - x_{ij}$ соответственно. Очевидно, что хотя бы одно из этих чисел окажется нулем. Таким образом, при каждой загрузке очередной клетки либо будет исчерпан весь запас груза поставщика, либо будет полностью удовлетворен спрос потребителя. Строка или столбец распределительной таблицы, в которых появляется нуль, далее исключаются из рассмотрения (закрываются). Далее вся процедура повторяется для следующей невычеркнутой клетки. Соблюдение этого требования обеспечит заполнение ровно $m+n-1$ клеток.

Метод северо-западного угла. Загрузка клеток распределительной таблицы начинается с левого верхнего («северо-западного») угла, т.е. с клетки (1; 1). Если при этом закрывается строка, то следующей загружается клетка (2; 1); если закрывается столбец, то следующей загружается клетка (1; 2). Дальнейшая загрузка либо по строке вправо, либо по столбцу вниз. При этом в каждую клетку загружается максимально возможное для нее значение, не превосходящее скорректированные значения a_i и b_j.

Отметим, что метод северо-западного угла не учитывает значения тарифов c_{ij}, что часто приводит к начальному опорному плану, достаточно далекому от оптимального.

Пример 16.6. Методом северо-западного угла построить начальный опорный план для задачи, исходные данные которой приведены в таблице 16.7.

Сначала убедимся, что рассматриваемая задача является задачей с закрытой моделью. Для этого находим $\sum_{i=1}^{m} a_i$ и $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Так как $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 127$, то можем приступать к нахождению начального опорного плана.

Первой заполняем (загружаем) клетку (1,1). Так как $a_1 = 34$, а $b_1 = 21$, то $x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(34{,}21) = 21$. Загружаем в клетку (1,1) число 21 (см. таблицу 16.8). При этом спрос потребителя B_1 оказывается полностью удовлетворенным (закрываем первый столбец), а исходное значение запаса $a_1 = 34$ корректируем на 21, заменяя его на $a'_1 = a_1 - x_{11} = 34 - 21 = 13$.

Так как первый столбец закрыт, то перемещаемся вправо, в клетку (1,2). В эту клетку загружаем число $x_{12} = \min(a'_1, b_2) = \min(13{,}49) = 13$, Теперь запас поставщика A_1 исчерпан полностью, закрываем первую строку. Величину потребностей $b_2 = 49$ потребителя B_2 корректируем на $x_{12} = 13$, получаем $b'_2 = b_2 - x_{12} = 49 - 13 = 36$.

Смещаемся вниз, в клетку (2,2). Вычисляем число $x_{22} = \min(a_2, b'_2) = \min(35{,}36) = 36$ и помещаем его в клетку (2,2). При этом происходит исчерпание запасов поставщика A_2. Закрываем вторую строку и снова смещаемся вниз, в клетку (3,2). Величину спроса потребителя B_2 корректируем повторно, теперь $x_{12} = 35$. Получаем $b''_2 = b'_2 - x_{22} = 36 - 35 = 1$.

В клетку (3,2) загружаем $x_{32} = \min(a_3, b''_2) = \min(58{,}1) = 1$. Спрос потребителя B_2 теперь удовлетворен, закрываем второй столбец. Корректируем значение запаса $a'_3 = a_3 - x_{32} = 58 - 1 = 57$.

Смещаемся вправо, в клетку (3,3). Находим $x_{33} = \min(a'_3, b_3) = \min(57{,}26) = 26$. Закрываем третий столбец. Корректируем значение $a''_3 = a'_3 - x_{33} = 57 - 26 = 31$.

В оставшуюся клетку (3,4) заносится единственно возможное число $x_{34} = 31$, после чего закрываются и третья строка, и четвертый столбец.

Так как в данной задаче $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$, а заполненных клеток тоже 6, то мы можем констатировать, что полученный план является невырожденным.

Значение целевой функции при использовании полученного опорного плана равно

$$F = 18 \cdot 21 + 23 \cdot 13 + 21 \cdot 35 + 25 \cdot 1 + 21 \cdot 6 + 17 \cdot 31 = 2510.$$

Таблица 16.8

Поставщики	Потребители B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	18 21	23 13	14	20	34
A_2	12	21 35	25	15	35
A_3	15	25 1	21 26	17 31	58
Потребности	21	49	26	31	127

Метод минимального элемента. Этот метод, как правило, обеспечивает более эффективное построение начального опорного плана, так как при его использовании учитываются величины тарифов c_{ij}.

В соответствии с методом минимального элемента просматривают распределительную таблицу и находят клетку (i, j) с наименьшим тарифом c_{ij} (если таких клеток несколько, то выбирают любую из них). В клетку загружают наибольшее возможное значение поставки. После этого из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. Затем из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом и т.д.. В результате получают опорный план, который содержит $m + n - 1$ загруженных клеток.

Пример 16.7. Методом минимального элемента построить начальный опорный план для задачи, исходные данные которой приведены в таблице 16.7.

При решении примера 16.6 мы уже убедились, что рассматриваемая задача является задачей с закрытой моделью. Приступаем теперь к нахождению начального опорного плана.

Находим клетку с наименьшим тарифом. Это клетка (1,2). Так как $a_2 = 35$, а $b_1 = 21$, то $x_{21} = \min(a_2, b_1) = \min(35,21) = 21$. Загружаем в клетку (1,2) число 21 (см. таблицу 16.9). При этом спрос потребителя B_1 оказывается полностью удовлетворенным и мы закрываем первый столбец. Исходное значение запаса $a_2 = 35$ корректируем на 21 и получаем $a'_2 = a_2 - x_{21} = 35 - 21 = 14$.

Просматриваем множество оставшихся незакрытых клеток (т.е. все клетки кроме первого столбца) и находим клетку с наименьшим тарифом. Это клетка (1,3). В эту клетку загружаем число $x_{13} = \min(a_1, b_3) = \min(34,26) = 26$ Теперь спрос потребителя B_3 исчерпан полностью и мы закрываем третий столбец. Величину запаса поставщика A_1 корректируем на $x_{13} = 26$` и получаем $a'_1 = a_1 - x_{13} = 34 - 26 = 8$.

Из множества оставшихся незакрытых клеток снова выбираем клетку с наименьшим тарифом. Это клетка (2,4). Загружаем ее числом $x_{24} = \min(a'_2, b_4) = \min(14,31) = 14$. Закрываем вторую строку и корректируем величину спроса потребителя B_4, получая $b'_4 = b_4 - x_{24} = 31 - 14 = 17$.

Из четырех оставшихся незакрытых клеток наименьший тариф у клетки (3,4). Загружаем $x_{34} = \min(a_3, b'_4) = \min(58,17) = 17$. Четвертый столбец закрываем, корректируем значение запаса $a'_3 = a_3 - x_{34} = 58 - 17 = 41$.

Остались клетки (1,2) и (3,2). Наименьший тариф у клетки (1,2). Находим $x_{12} = \min(a'_1, b_2) = \min(8,49) = 8$. Закрываем первую строку. Корректируем значение $b'_2 = b_2 - x_{12} = 49 - 8 = 41$.

В оставшуюся клетку (3,2) заносим число $x_{32} = 41$, после чего закрываются третья строка, и второй столбец.

Полученный план является невырожденным, так как число заполненных клеток 6 совпадает с числом $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Значение целевой функции при использовании полученного опорного плана равно

$$F = 23 \cdot 8 + 14 \cdot 26 + 12 \cdot 21 + 15 \cdot 14 + 25 \cdot 41 + 17 \cdot 17 = 2324.$$

Очевидно, это значение меньше, чем значение целевой функции, полученное при использовании начального опорного плана, найденного методом северо-западного угла.

Таблица 16.9

Поставщики	Потребители B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	18	23 8	14 26	20	34
A_2	12 21	21	25	15 14	35
A_3	15	25 41	21	17 17	58
Потребности	21	49	26	31	127

Замечание. При заполнении таблицы могут возникать ситуации, когда одновременно закрываются и строка, и столбец. В этом случае в свободную клетку записывают число 0 и считают такую клетку загруженной (чтобы отличать нулевую загрузку от свободной клетки иногда пишут 0*). Число 0* может быть записано только в те свободные клетки, которые не образуют циклов с ранее занятыми клетками (о понятии цикла будет сказано далее).

Метод потенциалов

После нахождения начального опорного плана необходимо проверить является ли найденный план транспортной задачи оптимальным и, если нет, улучшить его.

Проверка построенного опорного плана на оптимальность

Потенциалами опорного плана называют такие числа u_i и v_j, что $u_i + v_j = c_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, для всех заполненных клеток. Каждому пункту отправления ставят в соответствие потенциал u_i, $i = \overline{1,m}$, а каждому пункту назначения – потенциал v_j, $j = \overline{1,n}$.

Оценкой свободной клетки называется число

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \tag{16.60}$$

Соотношения $u_i + v_j = c_{ij}$ являются системой, в которую входит $m+n-1$ линейных уравнений с $m+n$ неизвестными. Эта система является совместной, причем одно из неизвестных можно положить равным нулю (обычно $u_1 = 0$). После этого все переменные определяются однозначно. В большинстве задач нахождение потенциалов может быть осуществлено устно.

Теорема. *Если для опорного плана $X = (x_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, транспортной задачи существует система из $m+n$ чисел u_i и v_j, удовлетворяющих условиям*

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ для } x_{ij} > 0 \tag{16.61}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0, \tag{16.62}$$

то $X = (x_{ij})$ – оптимальный план транспортной задачи.

Таким образом, для установления оптимальности опорного плана требуется:

- для всех заполненных клеток ($x_{ij} > 0$) из соотношений $u_i + v_j = c_{ij}$ вычислить потенциалы поставщиков u_i, $i = \overline{1,m}$, и потенциалы потребителей v_j, $j = \overline{1,n}$.
- для всех незаполненных клеток $(i;j)$ проверить выполнение условия $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \ge 0$, где s_{ij} — характеристика каждой свободной клетки таблицы. Если для всех свободных клеток таблицы условие $s_{ij} \ge 0$ выполнено, то, в соответствии с теоремой, построенный опорный план транспортной задачи является оптимальным и решение задачи завершено. В противном случае переходят к следующему шагу алгоритма – улучшению опорного плана.

Улучшение опорного плана

С целью улучшения опорного плана из множества всех свободных клеток с отрицательными оценками $s_{ij} < 0$ нужно выбрать наименьшее (наибольшее по абсолютной величине). Для клетки, в которой находится это число s_{ij}, нужно построить цикл.

Циклом в распределительной таблице называется замкнутая ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем к каждой вершине подходят ровно два ребра, одно по строке, а другое – по столбцу (если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами).

Если существует несколько свободных клеток таблицы, в которых выполняется неравенство $s_{ij} \le 0$, то клетку с наименьшим значением $s_{ij} \le 0$ будем называть перспективной и выполним следующие действия.

В таблице строим цикл, одна вершина которого находится в перспективной клетке (r, p), а все остальные вершины – в заполненных клетках. Каждой вершине цикла присваиваем поочередно знаки плюс или минус, при этом вершине в перспективной клетке (r, p) присваиваем знак плюс, следующей за ней вершине цикла – знак минус, следующей вершине – знак плюс и т.д.

Следующий шаг – перераспределение груза по циклу.

Пусть Q – наименьшее из чисел x_{ij}, стоящих в клетках, которым присвоен знак минус, и пусть это число находится в клетке (k,l), $Q = x_{kl}$ (в случае существования нескольких клеток, содержащих одно и то же число Q, можно выбрать любую из них). Далее транспортная таблица преобразуется следующим образом:

- клетки, не содержащие вершины цикла, остаются без изменения;
- в клетки цикла, отмеченные знаком плюс, записывается число $x_{ij} + Q$;
- клетка (k,l) считается незаполненной, а в остальные клетки (i, j), отмеченные знаком минус, записывается число $x_{ij} - Q$.

В результате указанных перемещений грузов в пределах клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, определяют новый опорный план транспортной задачи.

Если в минусовых клетках имеется два (или более) одинаковых чисел x_{ij}, то освобождают лишь одну из таких клеток, а остальные оставляют занятыми (с нулевыми поставками).

Полученный новый опорный план транспортной задачи проверяют на оптимальность. Для этого снова определяют потенциалы пунктов отправления и назначения и находят числа s_{ij} для всех свободных клеток. Если среди этих чисел не окажется отрицательных, то это свидетельствует о получении оптимального плана. Если же отрицательные числа имеются, то следует перейти к новому опорному плану. В результате итерационного процесса после конечного числа шагов получают оптимальный план задачи.

Пример 16.8. Построить оптимальный план для задачи, исходные данные которой приведены в таблице 16.7.

В качестве опорного плана возьмем план, построенный в примере 16.7 методом минимального элемента.

Проверим, является ли этот план оптимальным. Для этого составим систему уравнений вида (16.61), используя значения тарифов c_{ij} в занятых клетках:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 23, \\ u_1 + v_3 = 14, \\ u_2 + v_1 = 12, \\ u_2 + v_4 = 15, \\ u_3 + v_2 = 25, \\ u_3 + v_4 = 17. \end{cases}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим, что $v_2 = 23$, $v_3 = 14$, $u_3 = 2$, $v_4 = 15$, $u_2 = 0$, $v_1 = 12$. Найденные значения потенциалов показаны в таблице 16.10 (дополнительная строка сверху и столбец слева).

Таблица 16.10

	v_j	12	23	14	15	
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	18	23 8	14 26	20	34
0	A_2	12 21	21	25	15 14	35
2	A_3	15	25 41	21	17 17	58
		21	49	26	31	127

Вычислим оценки свободных клеток по формуле $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$s_{11} = 18 - (0+12) = 6$, $s_{14} = 20 - (0+15) = 5$

$s_{22} = 21 - (0+23) = -2$, $s_{23} = 25 - (0+14) = 11$,

$s_{31} = 15 - (2+12) = 1$, $s_{33} = 21 - (2+14) = 5$.

Так как одна из оценок s_{ij} отрицательная, то построенный опорный план не является оптимальным.

Отметим, что при решении практических задач находить все оценки свободных клеток не обязательно, достаточно устно сравнить сумму потенциалов $u_i + v_j$ и тариф c_{ij}. Значение оценки вычисляется только в тех случаях, когда $u_i + v_j > c_{ij}$.

Отрицательная оценка получена для клетки (2,2).

Строим для этой клетки цикл. Кроме клетки (2,2) в этот цикл входят клетки (2,4), (3,4), (3,2). Расставляем знаки в клетках, включенных в цикл: клеткам (2,4) и (3,2) соответствует минус, клетке (3,4) – плюс.

Из клеток, помеченных знаком минус, выбираем ту, в которую загружено меньше число. В данном случае это число $Q = 14$, загруженное в клетку (2,4). Проведем перераспределения груза по циклу: в клетки (2,2) и (3,4) добавляем 14, значение 41, стоящее в клетке (3,2). уменьшаем на 14, а клетку (2,4) далее считаем свободной. В результате получаем новый опорный план (таблица 16.11).

Таблица 16.11

u_i \ v_j		14	23	14	15	
		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	18	23 8	14 26	20	34
-2	A_2	12 21	21 14	25	15	35
2	A_3	15	25 27	21	17 31	58
		21	49	26	31	127

Проверяем полученный опорный план на оптимальность. Для этого снова составляем систему уравнений вида (16.61), используя значения тарифов c_{ij} в занятых клетках:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 23, \\ u_1 + v_3 = 14, \\ u_2 + v_1 = 12, \\ u_2 + v_2 = 21, \\ u_3 + v_2 = 25`, \\ u_3 + v_4 = 17. \end{cases}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим, что $v_2 = 23$, $v_3 = 14$, $u_3 = 2$, $v_4 = 15$, $u_2 = -2$, $v_1 = 14$. Новые значения потенциалов указаны в таблице 16.11.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$s_{11} = 18 - (0 + 14) = 4$, $s_{14} = 20 - (0 + 15) = 5$,

$s_{23} = 25 - (-2 + 14) = 13$ $s_{24} = 15 - (-2 + 15) = 2$,

$s_{31} = 15 - (2 + 14) = -1$, $s_{33} = 21 - (2 + 15) = 4$.

Как видно, полученный опорный план снова не является оптимальным, так как одна из оценок свободных клеток является отрицательной.

Значение целевой функции при использовании полученного опорного плана равно

$F = 23 \cdot 8 + 14 \cdot 26 + 12 \cdot 21 + 21 \cdot 14 + 25 \cdot 27 + 17 \cdot 31 = 2296$.

Так как отрицательная оценка получена для клетки (3,1), то строим для этой клетки цикл. В цикл входят клетки (3,1), (3,2), (2,2) и (2,1). Клеткам (3,2) и (2,1) ставим в соответствие минус, клеткам (3,1) и (2,2) – плюс.

Из клеток, помеченных знаком минус, выбираем ту, в которую загружено меньше число. В данном случае это число Q=21, загруженное в клетку (2,1). Проведем перераспределения груза по циклу: в клетки (3,1) и (2,2) добавляем 21, в клетке (3,2). вычитаем 21, а клетку (2,1) далее считаем свободной. В результате получаем новый опорный план (таблица 16.12).

Таблица 16.12.

u_i \ v_j		13	23	14	15	
		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	18	23	14	20	34

			8	26		
−2	A_2	12	35 21	25	15	35
2	A_3	21 15	6 25	21	31 17	58
		21	49	26	31	127

Проверяем полученный опорный план на оптимальность. Составляем систему уравнений вида (16.61):

$$\begin{cases} u_1+v_2=23, \\ u_1+v_3=14, \\ u_2+v_2=21, \\ u_3+v_1=15, \\ u_3+v_2=25`, \\ u_3+v_4=17. \end{cases}$$

Полагаем $u_1=0$ и находим, что $v_2=23$, $v_3=14$, $u_3=2$, $v_4=15$, $u_2=-2$, $v_1=13$. Новые значения потенциалов указаны в таблице 16.12.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$s_{11}=18-(0+13)=5$, $s_{14}=20-(0+15)=5$,

$s_{21}=12-(-2+13)=1$, $s_{23}=25-(-2+14)=13$,

$s_{24}=15-(-2+15)=2$, $s_{33}=21-(2+15)=4$.

Так как все оценки свободных клеток являются неотрицательными, то полученный план является оптимальным.

Значение целевой функции при использовании полученного оптимального плана равно

$$F=23\cdot8+14\cdot26+21\cdot35+15\cdot21+25\cdot6+17\cdot31=2275.$$

Экономические приложения транспортной задачи не исчерпываются решением задач, связанных с перевозкой грузов. Модель транспортной задачи применима также при решении задач оптимизации размещения объектов производства, составлении модели топливно-энергетического баланса, составлении планов распределения сельскохозяйственных культур по участкам различного плодородия и др.

§ 8. Целочисленное программирование

Задача математического программирования, переменные которой принимают только целочисленные значения, называется задачей целочисленного программирования (ЗЦП).

В математической модели ЗЦП как целевая функция, так и функции в системе ограничений могут быть линейными, нелинейными и смешанными. Рассмотрим случай, когда целевая функция и система ограничений задачи являются линейными. Тогда математическая постановка ЗЦП формулируется следующим образом:

$$L=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \;\to\; \max\ (\min), \tag{16.63}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{16.64}$$

$$d_j\le x_j\le D_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{16.65}$$

где $x_j=0,1,2,\ldots$ – целые ($j=\overline{1,n_1}$, $n_1\le n$), $d_j\ge0$. Если $n_1=n$, то задачу называют полностью целочисленной; если $n_1<n$, то частично-целочисленной.

Существуют различные способы решения ЗЦП.

1 способ. Решить ЗЦП как непрерывную ЗЛП; округлить полученные значения переменных; проверить приемлемость округленного решения. Если решение приемлемо, то оно принимается как решение ЗЦП.

2способ. Если необходимо найти точное решение ЗЦП, а множество решений ЗЦП невелико, то может быть применен полный перебор возможных значений целочисленных переменных с последующим выбором наилучшего с точки зрения целевой функции. При большом количестве переменных и значительной области допустимых значений метод неприменим из-за своей трудоемкости.

3 способ. Для нахождения точного решения ЗЦП в общем случае применяют специальные методы, такие как метод Гомори, метод ветвей и границ и др.

§ 9. Параметрическое программирование

Задача параметрического программирования имеет следующий вид:

$$L = \sum_{j=1}^{n} (c'_j + c''_j\, t) x_j \;\to\; \max\ (\min), \tag{16.66}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{16.67}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{16.68}$$

где c'_j, c''_j, a_{ij}, b_i – заданные постоянные числа.

Может быть поставлена и обобщенная параметрическая задача, в которой от параметра *t* линейно зависят коэффициенты при неизвестных в целевой функции (цены изделий от спроса на них), в системе уравнений (нормы расхода ресурсов от применяемых технологий), свободные члены системы уравнений (наличие ресурсов от предложений поставщиков):

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} (c'_j + c''_j\, t) x_j \;\to\; \max\ (\min), \tag{16.69}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a'_{ij} + a''_{ij}) x_j = b'_i + b''_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{16.70}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{16.71}$$

$$\alpha \le t \le \beta,. \tag{16.72}$$

где α, β – промежуток изменения значений параметра *t*.

Решение задач (16.66)-(16.68), (16.69)-(16.72) можно найти методами линейного программирования.

Предположим, что в задаче (16.66)-(16.68) множество неотрицательных решений системы линейных уравнений (16.67) (многогранник решений) не пустое и включает более чем одну точку. Тогда исходная задача состоит в определении при каждом параметре $t \in [\alpha, \beta]$ такой точки многогранника решений, в которой функция (16.66) принимает максимальное значение. Чтобы найти эту точку, будем считать, что $t = t_0$ и найдем решение полученной ЗЛП (16.66)-(16.68), т. е. определим вершину многогранника решений, в которой функция (16.66) имеет максимум, либо устанавливаем, что при данном значении t_0 задача неразрешима.

После нахождения точки, в которой при $t = t_0$ функция (16.66) принимает максимальное значение, ищут множество значений *t*, для которых координаты этой точки определяют оптимальный план задачи (16.66)-(16.68). Найденные параметры *t* исключают из рассмотрения и берут некоторое новое значение *t* из промежутка $[\alpha, \beta]$.

Для выбранного значения параметра *t* из промежутка $[\alpha, \beta]$ либо находят оптимальный план, либо устанавливают неразрешимость задачи.

§ 10. Дробно-линейное программирование

Общая задача дробно-линейного программирования формулируется в следующем виде:

$$L = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \frac{L_1}{L_2} \to \max, \qquad (16.73)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (16.74)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, . \qquad (16.75)$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} – некоторые постоянные числа, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$.

При $n = 2$:

$$L = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \to \max, \qquad (16.76)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (16.77)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, . \qquad (16.78)$$

где $d_1 x_1 + d_2 x_2 > 0$.

Алгоритм решения ЗДЛП при $n = 2$.

1. Построить область (многоугольник) допустимых решений Для этого:

- в неравенствах (16.77) и (16.78) заменить знаки неравенств на знаки равенств;
- построить прямые, определяемые этими равенствами;
- найти полуплоскости, определяемые каждым из неравенств системы ограничений задачи;.
- найти область (многоугольник) допустимых решений задачи.

2. Построить прямую уровня. Для этого:

- положить значение целевой функции равным некоторому постоянному числу L_0;
- построить прямую $L_0 = \dfrac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2}$.

3. Определить точку максимума или установить неразрешимость задачи.

4. Найти значение целевой функции в точке максимума.

Алгоритм решения ЗДЛП при $n > 2$.

Решение задачи дробно-линейного программирования при $n > 2$ может быть сведено к решению задачи линейного программирования.

1. Обозначить $y_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \right)^{-1}$.

2. Ввести новые переменные $y_j = y_0 x_j$, ($j = \overline{1,n}$).

При этом исходная задача ЗДЛП сводится к следующей ЗЛП:

$$L^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \to \max, \qquad (16.79)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (16.80)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1, \qquad (16.81)$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad y_0 \ge 0. \qquad (16.82)$$

3. Решить полученную ЗЛП средствами линейного программирования.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Целевая функция.
2. Система ограничений.
3. Первая (вторая) интерпретация задачи линейного программирования.
4. Симплекс метод.
5. Допустимый план. Оптимальный план.
6. Каноническая и неканоническая модель линейного программирования.
7. Закрытая (открытая) транспортная задача.
8. Опорное решение.
9. Потенциал.
10. Граф (ориентированный и неориентированный), цепь и цикл, дерево, транспортная сеть, поток.
11. Метод Гомори.
12. Оптимальное решение.
13. Ключевая строка, ключевой элемент.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Фирма производит два продукта A и B. Каждый продукт должен быть обработан на каждом из станков C_1 и C_2. Время на обработку каждого из продуктов A и B на каждом из станков C_1 и C_2, число часов работы каждого станка в неделю и величина прибыли от реализации одного продукта каждого вида приведены в таблице. Фирме надо определить недельные нормы выпуска изделий A и B, максимизирующие прибыль. Какая из математических моделей соответствует этой задаче?

Станки	Продукты		Время работы станка в неделю
	A	B	
C_1	3	5	23
C_2	4	7	27
Прибыль от реализации одного изделия	6	8	

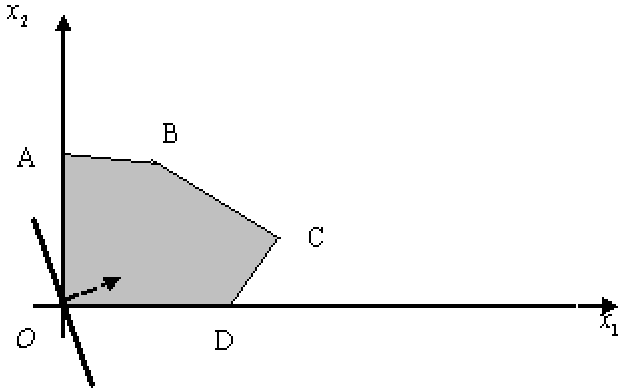
а) $z(x) = 6x_1 + 8x_2 \to \max$,
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 23, \\ x_1 + 7x_2 \ge 27, \\ x_1, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

б) $z(x) = 6x_1 + 8x_2 \to \max$,
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 23, \\ x_1 + 7x_2 \le 27, \\ x_1, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $z(x) = 23x_1 + 27x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 23, \\ x_1 + 7x_2 \ge 27, \\ x_1, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

г) $z(x) = 23x_1 + 27x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 23, \\ x_1 + 7x_2 \le 27, \\ x_1, x_2 \ge 0; \end{cases}$$

2. В какой точке множества допустимых решений достигается максимум целевой функции?



а) в точке А; б) в точке В; в) в точке С; г) в точке D.

3. Указать какая из ЗЛП приведена в канонической форме:

а) $z(x) = 3x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 \le 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 7x_4 \le 11, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}; \end{cases}$$

б) $z(x) = 3x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 \ge 5. \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 7x_4 \ge 11. \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}; \end{cases}$$

в) $z(x) = 3x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 7x_4 = 11, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}; \end{cases}$$

г) $z(x) = 3x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 \ge 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 7x_4 \ge 11, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

4. Признаком получения оптимального плана при решении ЗЛП симплекс-методом является:

а) отсутствие в индексной строке симплекс-таблицы отрицательного элемента;
б) отсутствие в индексной строке симплекс-таблицы положительного элемента;
в) наличие в индексной строке симплекс-таблицы отрицательного элемента;
г) наличие в индексной строке симплекс-таблицы положительного элемента.

5. Коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются:
а) коэффициентами целевой функции двойственной задачи;
б) свободными членами системы ограничений двойственной задачи;
в) угловыми точками многогранника области решений;
г) оптимальным планом.

6. Методом северо-западного угла найти опорный план транспортной задачи, заданной следующей таблицей, и вычислить соответствующие транспортные издержки (значение целевой функции).

Поставщики	Потребители B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	5	9	2	7	90
A_2	4	3	4	5	60
A_3	6	8	3	2	140
Потребности	40	70	80	60	

а) 1110; б) 1100; в) 1210; г) 1000

7. Метод Гомори применяется для решения:
а) транспортной задачи;
б) задач целочисленного программирования;
в) задач дробно-линейного программирования;
г) задач параметрического программирования.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 16.1. Решить графически задачу

$$F(X) = 4x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0.$$

Ответ: X^* = (10/3; 20?3), $F(X^*)$ = 60.

Задача 16.2. Решить графически и симплекс-методом задачу

$$F(X) = 5x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 90, \\ 8x_1 + 2x_2 \le 400, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 560, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0.$$

Ответ: X^* = (30;0), $F(X^*)$ = 150.

Задача 16.3. Решить транспортную задачу.

Поставщики	Потребители B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	1	5	6	1	90
A_2	4	1	3	4	100
A_3	3	3	5	4	90
Потребности	70	60	80	70	

Ответ: $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 60 & 40 & 0 \\ 50 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}$, $F(X^*) = 620$.

ПРИМЕРНЫЕ ОБРАЗЦЫ ИТОГОВЫХ ТЕСТОВ

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ № 1

1. Если функция $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, то какова ее первообразная $F(x)$?

а) $-\dfrac{1}{(x+1)^2}$; б) $\ln|x+1|$; в) $\dfrac{(x+1)^2}{2}$; г) $\ln|x|+1$.

2. Формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле имеет вид:

а) $\int udv = uv - \int vdu$; б) $\int udu = uv + \int vdu$;
в) $\int udv = uv - \int vdv$; г) $\int udv = uv - \int udu$.

3. Интеграл $\int \dfrac{\sqrt[5]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})}$ можно найти с помощью замены:

а) $x = t^5$; б) $x = t^3$; в) $x = t^{30}$; г) $x = t^{15}$.

4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка $x = c$, $a \le c \le b$, что выполняется равенство:

а) $\int_a^b f(x)dx = f'(c)$; б) $\int_a^b f(x)dx = f(c)$;

в) $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$; г) $\int\limits_a^b f(x)dx = c(f(a)-f(b))$.

5. Длина дуги кривой $y = f(x)$ между точками $A(a;b)$ и $B(c;d)$ вычисляется по формуле:

а) $l = \int\limits_0^1 \sqrt{1+y^2}\,dx$; б) $l = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f(x))^2}\,dx$;

в) $l = \int\limits_a^c \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$; г) $l = \int\limits_c^d \sqrt{1-(f'(x))^2}\,dx$.

6. Интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{2x-1}$ является:

а) неопределенным; б) несобственным интегралом I-го рода;
в) несобственным интегралом II-го рода; г) определенным.

7. Решением дифференциального уравнения $y'' + 7y - 7x^2 = 2$ является функция:

а) $y = x^2$; б) $y = x^3 + 1$; в) $y = 7x$; г) $y = 7x^2$.

8. Дифференциальное уравнение $xyy' = y + 1$ после разделения переменных примет вид:

а) $y' = \frac{y+1}{xy}$; б) $xydy = (y+1)dx$;

в) $\frac{ydy}{y+1} = \frac{dx}{x}$; г) $xy' = \frac{y+1}{y}$.

9. Частное решение ДУ второго порядка $y'' + 25y = \cos 5x$ имеет вид:

а) $y^* = A\cos 5x + B\sin 5x$; б) $y^* = Ax\cos 5x$;

в) $y^* = A\cos 5x$; г) $y^* = x(A\cos 5x + B\sin 5x)$.

10. Какой из числовых рядов сходится?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^5$.

11. Какой из указанных рядов является знакочередующимся?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{7}\right)^{2n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-3)^{2n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{1}{2^n}$.

12. Какой из указанных интервалов может быть интервалом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$?

а) (2; 3); б) (-2; 2); в) [-5; 2); г) [-3; 1).

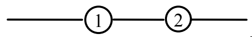
ИТОГОВЫЙ ТЕСТ № 2

1. Вероятность Р случайного события А удовлетворяет условию

а) $P(A)=0$; б) $P(A)=1$; в) $P(A)>1$; г) $0<P(A)<1$.

2. Какова вероятность выпадения очка равного 3 при одном бросании игрального кубика?

а) 1; б) 1/6; в) 1/3; г) 2/3.

3. Цепь работает по схеме . Работа

каждого элемента является независимым событием, вероятность которого равна 0,8. Найти вероятность работы цепи.

4. Вероятность события А при наступлении хотя бы одного события H_i (i=1, 2, …,n) из полной группы событий находится по формуле:

а) $P(A)=\sum_{i=1}^{\infty} H_i P(A)$; б) $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A)$;

в) $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)$; г) $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)+P_{H_i}(A)$.

5. Если монету бросают 7 раз, то вероятность выпадения герба в 5 случаях вычисляется по формуле:

а) $C_7^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^7$; б) $C_7^5\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^7$; в) $C_7^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5$; г) $C_7^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

6. Какое свойство математического ожидания не выполняется?

а) $M[X+Y]= M[X]+M[Y]$; б) $M[X\cdot Y]= M[X]\cdot M[Y]$;

в) $M[CX]= CX$; г) $M[X- M[X]]= 0$.

7. Заполните пустую клетку ряда распределения случ. величины X

x_i	-2	3	7	9
p_i	0,1	0,2	0,1	

8. Вычислите математическое ожидание случайной величины из задания 7.

9. Если случайная величина X – число выпадения герба при 3 бросаниях монеты, то ее дисперсия $D[X]$ равна

а) 1; б) 0,5; в) 0,75; г) 0,8.

10. Станок изготавливает за смену 100000 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали рана 0,0001. Если случайная величина X-число бракованных деталей за смену среди 5 отобранных деталей, то ее дисперсия $D[X]$ равна

а) 1; б) 10; в) 12; г) 18.

11. При решении ЗЛП на максимум графическим методом линию уровня целевой функции перемещают параллельно себе

а) вдоль оси OY;

б) в направлении вектора коэффициентов целевой функции C;

в) в направлении, противоположном вектору коэффициентов целевой функции C;

г) вдоль оси OX

12. Указать, какая из ЗЛП приведена в симметрической форме:

а) $z(x) = 5x_1 - x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 7x_3 \le 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 11, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

б) $z(x) = 5x_1 - x_2 + 6x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 7x_3 \le 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

в) $z(x) = 5x_1 - x_2 + 6x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 7x_3 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 11, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

г) $z(x) = 5x_1 - x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 7x_3 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}; \end{cases}$$

13. Методом северо-западного угла найти опорный план транспортной задачи, заданной следующей таблицей, и вычислить соответствующие транспортные издержки (значение целевой функции).

Поставщики	Потребители B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	3	2	4	8	80
A_2	7	5	3	6	90
A_3	9	4	1	3	70
Потребности	60	30	100	50	

а) 600; б) 660; в) 640; г) 680.

ОТВЕТЫ К ИТОГОВЫМ ТЕСТАМ

тест №1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ответ	б	а	в	в	в	в	а	в	г	в	в	г

тест №2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ответ	г	б	0,64	в	г	в	0,6	6,5	0,75	100	б	а	Г

СОДЕРЖАНИЕ

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс

В 2-х частях

Часть 2

Ответственный за выпуск *И.М. Морозова*
Компьютерный набор и верстка *О.В. Рыкова*

Издано в редакции авторов

Подписано в печать 14.08.2009 г. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14,41. Уч.-изд. л. 11,27. Тираж 315 экз. Заказ 733.

Издатель и полиграфическое исполнение Учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет»
ЛИ № 02330/0131734 от 10.02.2006. ЛП № 02330/0131656 от 02.02.2006.
220023, г. Минск, пр. Независимости, 99, к. 2.