МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л.В. Лобанок, Ж.И. Покляк

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

*Учебно-методическое пособие
для иностранных слушателей
подготовительного отделения*

Минск
БГАТУ
2009

УДК 51(07)
ББК 22.1я7
К 78

Рекомендовано научно-методическим советом факультета предпринимательства и управления БГАТУ

Протокол № 7 от 28 мая 2009 г.

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теории функций БГУ *Н.В. Бровка;*
старший преподаватель ФДП и ПОМ БГАТУ *Т.Н. Прохорович*

К78 **Краткий курс математики**: учебно-методическое пособие/ Л.В. Лобанок, Ж.И. Покляк. – Минск: БГАТУ, 2009. – 204 с.

ISBN 978-985-519-144-6.

Учебно-методическое пособие охватывает содержание всех разделов дисциплины «Математика», изучаемых в школе и соответствующих требованиям программы для поступления в вуз.

Предназначено для обучения иностранных абитуриентов на факультетах довузовской подготовки, а также может быть использовано для самостоятельной работы учащихся при подготовке к поступлению в вуз.

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-519-144-6

ВВЕДЕНИЕ

Цель пособия – помочь иностранным абитуриентам адаптировать знания по математике, полученные в учреждениях образования своих государств, к математике с русским языком изложения, систематизировать математические знания, повысить математическую подготовку путем интенсивного повторения курса.

Каждая тема, изложенная в пособии, имеет следующую структуру: перечень новых слов, используемых в данной теме; основные понятия и определения, помогающие раскрыть данную тему; задания для решения в аудитории с преподавателем или по приведенному в тексте образцу решения; задания для самостоятельной подготовки; домашние задания.

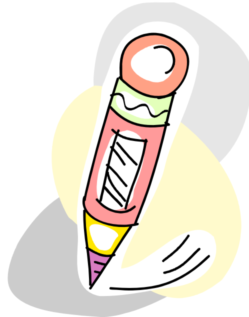
В пособии также предлагаются примеры вариантов типовых промежуточных самостоятельных и контрольных работ для закрепления и контроля усвоенных знаний, примеры вариантов письменного итогового экзамена и билетов устного экзамена по дисциплине математика.

Глава 1 Алгебра

§ 1 *Множества*

I. Новые слова:

1. *Множество* $(A; B; N; Z)$.
2. *Элемент множества* $\{a; b; c\}$.
3. *Пустое множество* $\varnothing$.
4. *Принадлежит* $\in$.
5. *Не принадлежит* $\notin$.
6. *Включает(ся)* $\subset$.
7. *Объединение* $\cup$.
8. *Пересечение* $\cap$.



II. Новые понятия, определения, обозначения

Если рассматривают несколько предметов как одно целое, то употребляют слова *«совокупность»*, *«собрание»*, *«множество»*. Обозначают множества большими буквами алфавита: $A; B; N; Z; \ldots$

Пример 1.1. Множество страниц книги. Множество букв русского алфавита.

Если рассмотреть объекты, из которых состоят множества, то их называют *элементами*. Обозначаются элементы малыми буквами алфавита: $a; b; c; d$ **…**

Пример 1.2. Запись $A = \{a; b; c\}$ обозначает, что множество A состоит из элементов $a; b; c$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*, обозначается $\varnothing$.

Если a – элемент множества A, то пишут $a \in A$, а читают «a *принадлежит* множеству A».

Если k – не является элементом множества A, то пишут $k \notin A$, а читают «k *не принадлежит* множеству A».

Если множество A (включает) содержит несколько элементов множества B, то пишут $A \subset B$, а читают «множество A *включается* в множество B».

Пример 1.3. $B = \{1; 3; 5\}$. Тогда $1 \in B$, $2 \notin B$.

$C = \{1; 5\}$. Тогда $C \subset B$.

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*.

Пример 1.4. Число студентов в аудитории – конечное множество. Множество натуральных чисел – бесконечное множество.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Пример 1.5. $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{2; 4; 6\}$. Значит $A = B$.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих или множеству A или множеству B, называется *объединением* множеств A и B, обозначается $A \cup B$.

Пример 1.6. $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\} \Rightarrow A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A и множеству B, называется *пересечением* множеств A и B, обозначается $A \cap B$.

Пример 1.7. $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\} \Rightarrow A \cap B = \{2; 3\}$.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Прочитать записи.

а) $b \in B$; $c \in B$; $d \notin B$; $C \subset B$, в) $A = \varnothing$,

б) $f \in D$; $q \in D$; $e \notin D$; $D \subset B$, г) $A = \{a; k; d\}$.

№ 2 Найти пересечение множеств:

а) $A = \{1; 3; 5; 7; 11\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$,

б) $A = \{1; 3; 5\}$, $B = \{2; 4; 6\}$.

№ 3 Найти объединение множеств:

а) $A = \{1; 3; 5\}$, $B = \{2; 4; 6\}$, б) $A = \{2; 4\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$.

№ 4 Проверить: верны ли записи.

а) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 1\}$ и $A = B$,

б) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2\}$ и $A = B$,

в) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 3\}$ и $A \subset B$,

г) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 3\}$ и $B \subset A$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Рассмотрим два множества:

$A = \{0; 1; 3; 5\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Найти: а) $A \cup B$, б) $A \cap B$.

№ 2 Рассмотрим два множества:

$A = \{0; 1; 3; 5\}$, $B = \{2; 4; 6\}$. Найти: а) $A \cup B$, б) $A \cap B$.

№ 3 Рассмотрим два множества:

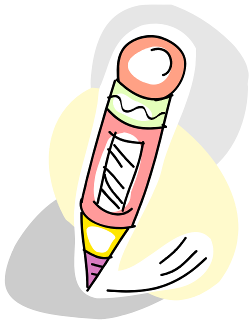
$A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$, $B = \{5; 7; 9\}$.

Проверить верность: а) $A = B$, б) $A \subset B$, в) $B \subset A$.

§ 2 *Числовые множества.*
Числовая прямая

I. Новые слова:

1. *Натуральные числа* (N).
2. *Целые числа* (Z).
3. *Рациональные числа.* (Q).
4. *Действительные числа* (R).
5. *Числовая прямая.*
6. *Координатная прямая.*
7. *Положительный* $(+)$.
8. *Отрицательный.* $(-)$.
9. *Интервал, промежуток* $(\quad)$.
10. *Отрезок* $[\quad]$.
11. *Бесконечность* (∞).



II. Новые понятия, определения, обозначения

Множество, состоящее из чисел, называется *числовым множеством*.

$N = \{1; 2; 3; \ldots\}$ – множество *натуральных чисел*. Числа, используемые при счете, называются *натуральными*.

$Z = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$ – множество *целых чисел*.

$Q = \left\{\dfrac{m}{n};\ \text{где } m \in Z, n \in N\right\}$ – множество *рациональных чисел*.

$R = \{x;\ \text{где } x - \text{любое число}\}$ – множество *действительных чисел*.

Действительные числа изображают точками на прямой, она называется *числовой прямой* или *координатной прямой* (рис. 1).

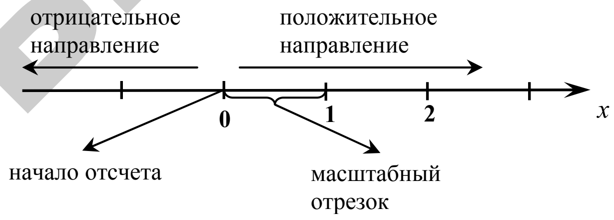


Рис. 1

Точка O разбивает координатную прямую на два *луча*, один из них имеет *положительное* направление, другой – *отрицательное*.

Координата любой точки на координатной прямой имеет вид (рис. 2):

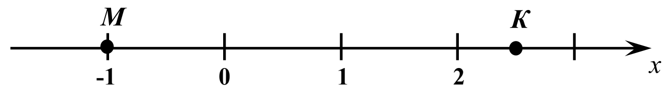
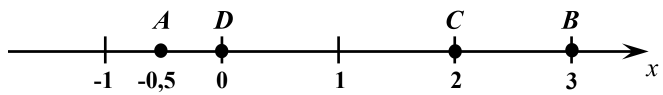


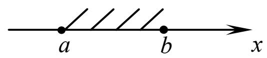
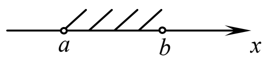
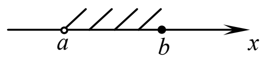
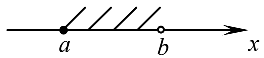
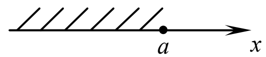
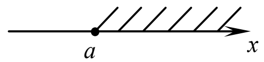
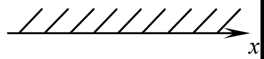
Рис. 2

Координата M равна –1. Записывается $M(-1)$

Координата K равна 2,5. Записывается $K(2{,}5)$

Пример 2.1. Изобразите точки на числовой прямой по их координатам. $A(-0{,}5)$, B(3), $C(2)$, $D(0)$.



Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
Отрезок от *a* до *b*	$a \le x \le b$	$[a;b]$	
Интервал от *a* до *b*	$a < x < b$	$(a;b)$	
Открытый слева промежуток от *a* до *b*	$a < x \le b$	$(a;b]$	
Открытый справа промежуток от *a* до *b*	$a \le x < b$	$[a;b)$	
Числовой промежуток от *–бесконечности* до *a*	$-\infty < x \le a$	$(-\infty;a]$	
Числовой промежуток от *a* до *+бесконечности*	$A \le x < +\infty$	$[a;+\infty)$	
Числовая прямая	$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty;+\infty)$	

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Найти пересечение двух интервалов:

а) $(-2;3)$ и $(0;5)$.

Решение: Изобразим эти интервалы на числовой прямой (рис. 3).

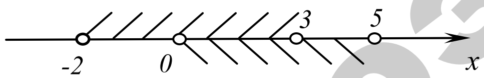


Рис. 3

Мы видим, что $(-2;3) \cap (0;5) = (0;3)$.

б) $[-1;1] \cap [3;5]$, в) $(-3;1) \cap [0;4]$, г) $(-2;3) \cap (-3;4)$,

д) $(-1;4) \cap \{2\}$.

№ 2 Найти объединение двух интервалов:

а) $(-2;3)$ и $(0;5)$.

Решение: Изобразим эти интервалы на числовой прямой (рис. 4).

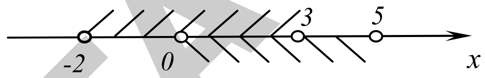


Рис. 4

Мы видим, что $(-2;3) \cup (0;5) = (-2;5)$.

б) $[0;1] \cup [2;3)$, в) $(-2;1) \cup \{1\}$, г) $(-2;4) \cup (-1;2]$,

д) $(-2;4) \cup \varnothing$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Найти объединение и пересечение числовых промежутков. Сделать чертеж:

а) $[-3;7]$ и $[-1;8]$,

б) $(2;7)$ и $(-1;6)$ и $(-2;3)$,

в) $(-2;5]$ и $[5;10)$,

г) $(-1;3)$ и $(3;7]$,

д) $[-4;-1)$ и $(1;5]$.

№ 2 Выполнить операции над множествами:

а) $(A \cap B) \cup C$ если $A = \{-1; 0; 1; 2\}$, $B = \{-2; -1; 0\}$, $C = \{-3\}$,

б) $[2;5] \cap ((-\infty;3) \cup (4;+\infty))$. Сделать рисунок.

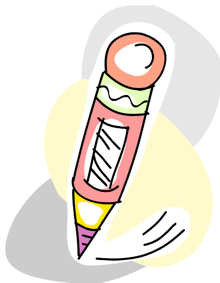
в) $((-3;1) \cap (-1;2)) \cup (0;3)$. Сделать рисунок.

№ 3 Подготовиться к диктанту по новым словам.

§ 3 *Множество натуральных чисел*

I. Новые слова:

1. Натуральные числа.
2. Простые натуральные числа.
3. Составные натуральные числа.
4. Множители.
5. Разложение числа на простые множители.
6. НОД – наибольший общий делитель.
7. НОК – наименьшее общее кратное.
8. Сумма, слагаемые.
9. Разность, уменьшаемое, вычитаемое.
10. Произведение, множители.
11. Частное, деление, делимое, делитель.



II. Новые понятия, определения, обозначения

$N = \{1; 2; 3; \ldots\}$ – *множество натуральных чисел* (числа, которые используем при счете). Наименьшее натуральное число 1.

$\{2; 3; 5; 7; \ldots\}$ – <u>*простые*</u> натуральные числа, потому что делятся на 1 и на себя.

$\{4; 6; 8; 9; \ldots\}$ – <u>*составные*</u> натуральные числа, потому что делятся на 1 и на себя и еще на какое-то число.

Действия над числами:

Сумма

$$\boxed{a + b = c}$$

слагаемые сумма

Пример 3.1. 1 + 8 = 9 (один плюс восемь равно девять).

Пример 3.2. 2 + 14 = 16.

слагаемые сумма

Разность

$$\boxed{a - b = c}$$

уменьшаемое вычитаемое разность

Пример 3.3. 9 – 2 = 7 (девять минус два равно семь).

Пример 3.4. 13 – 0 = 13.

уменьшаемое вычитаемое разность

Произведение

$$\boxed{a \cdot b = c}$$

множители произведение

Пример 3.5. 1 · 10 = 10 (1 умножить на 10 равно десять).

множители произведение

Деление

$$\boxed{\frac{a}{b} = c}$$

делимое   делитель   частное

Пример 3.6. $\frac{10}{2} = 5 \Rightarrow 10:2 = 5$ (10 разделить на 2 равно 5).

делимое   делитель   частное

Пример 3.7. $\frac{3}{0}$ – нельзя делить на ноль.

Нахождение НОД и НОК.

Наибольшим общим делителем (НОД) двух натуральных чисел a и b называется наибольшее натуральное число, на которое оба числа a и b делятся без остатка.

Наименьшим общим кратным (НОК) двух натуральных чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится без остатка на все данные числа.

Пример 3.8. Найдите НОД и НОК чисел 12 и 54.

Разложим числа на простые множители.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \cdot 3$ $54 = 2 \cdot 3^3$

НОД $(12;54) = 2 \cdot 3 = 6$, НОК $(12;54) = 2^2 \cdot 3^3 = 108$

При вычислении пользуемся следующим правилом: вначале выполняем действие в скобках, затем умножение и деление, и затем только сложение и вычитание.

Пример 3.9. $\overset{1}{(2+3)}\underset{2}{\cdot}5\underset{4}{-}8\overset{3}{:}2 = 5 \cdot 5 - 8:2 = 25 - 8:2 = 25 - 4 = 21$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Вычислите:

1) $2+3$,	4) $13-7$,	7) $12 \cdot 6$,	11) $\frac{100}{5}$,
2) $101+12$,	5) $108-0$,	8) $7 \cdot 8$,	12) $124:2$,
3) $0+8$,	6) $10-1$,	9) $11 \cdot 14$,	13) $169:13$,
		10) $12 \cdot 0$,	14) $25:0$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Какие числа называются натуральными?
- Какие числа называются простыми, составными?
- Назвать все члены суммы, разности, умножения, деления.
- Что такое НОД и НОК?

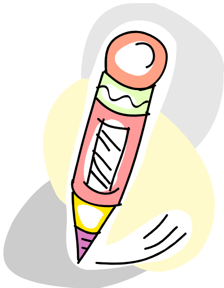
№ 2 Вычислите:

а) $4+7$,	г) $34-12$,	ж) $3 \cdot 16$,	к) $\frac{80}{4}$,
б) $12+2$,	д) $81-0$,	з) $4 \cdot 11$,	л) $123:3$,
в) $4+0$,	е) $5-2$,	и) $19 \cdot 2$,	м) $121:11$.

§ 4 *Множество целых чисел*

I. Новые слова:

1. *Положительные числа* (>0).
2. *Неположительные числа* (≤ 0).
3. *Отрицательные числа* (<0).
4. *Неотрицательные числа.* (≥ 0)



II. Новые понятия, определения, обозначения

Изобразим данные числа на числовой прямой (рис.5).

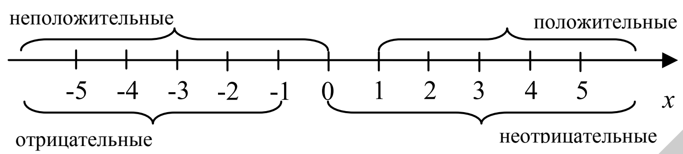


Рис. 5

<u>Действия с целыми числами.</u>

1) $a+(-b)=a-b$
2) $-a+(-b)=-a-b=$
$=-(a+b)$

– <u>*сложение*</u> чисел с разными и одинаковыми знаками

Примеры 4.1. $1-3=-2$. **4.2.** $-2+1=-1$.

4.3. $-2-4=-6$. **4.4.** $-1+1=0$.

4.5. $-5-0=-5$.

1) $a\cdot(-b)=-a\cdot b$
2) $-a\cdot(-b)=a\cdot b$

– <u>*умножение*</u> чисел с разными и одинаковыми знаками.

Примеры 4.6. $(-1)\cdot(-3)=3$. **4.7.** $7\cdot(-1)=-7$.

4.8. $(-2)\cdot 2=-4$. **4.9.** $(-3)\cdot 0=0$.

1) $\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$
2) $\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$
3) $\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b}$

– <u>*деление*</u> чисел с разными и одинаковыми знаками.

Примеры 4.10. $\dfrac{-6}{-2}=3$. **4.11.** $\dfrac{9}{-3}=-3$.

4.12. $\dfrac{-4}{1}=-4$. **4.13.** $\dfrac{0}{-5}=0$.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решите, проговаривая примеры:

1) $-8+6$, 2) $-9+10$, 3) $-8-9$, 4) $8+1$,

5) $9-13$, 6) $(-4)\cdot 2$, 7) $8\cdot(-11)$, 8) $(-31)\cdot 4$,

9) $(-5)\cdot(-10)$, 10) $\dfrac{-48}{-6}$, 11) $\dfrac{-25}{5}$, 12) $\dfrac{24}{-8}$,

13) $(-2)\cdot(-11)\cdot 3$, 14) $\dfrac{-12}{3}\cdot 2$, 15) $(-2)\cdot 14:(-7)$,

16) $(-2+4)\cdot 5$, 17) $(-19+10):3$ 18) $-3\cdot 2+9\cdot(-1)$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Вычислите:

а) $-17+14$, б) $-28-16$, в) $54-96$, г) $-14+80$,

д) $(-17)\cdot 2$, е) $(-4)\cdot(-12)$, ж) $\frac{-80}{-4}$, з) $\frac{90}{-15}$.

Повторение темы НОК и НОД.

НОД (*наибольший общий делитель*) – произведение простых множителей, взятых в <u>наименьшей</u> степени.

НОК (*наименьшее общее кратное*) – произведение простых множителей, взятых в <u>наибольшей</u> степени.

НОД $(8;12)=2^2=4$ НОК $(8;12)=2^3\cdot 3=24$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$8=2^3$ $12=2^2\cdot 3$

№ 2 Найти НОК и НОД чисел $(16;20);(18;36);(40;96)$.

V. Обобщающие задачи

№ 1 Вычислите:

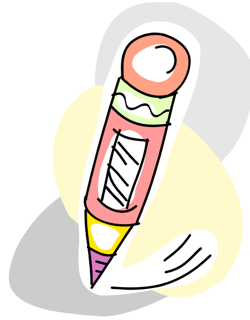
1) $(33+12):9+8\cdot 2$, 2) $\frac{(18-13):5+10\cdot 8}{9}$,

3) $\frac{15-18}{3}\cdot 5$, 4) $\frac{18+2}{-4}+\frac{7-2}{5}$.

§ 5 *Множество рациональных чисел*

I. Новые слова:

1. *Обыкновенные дроби.*
2. *Правильные дроби.*
3. *Неправильные дроби.*
4. *Десятичные дроби.*
5. *Целая часть числа.*
6. *Дробная часть числа.*
7. *Периодические дроби.*
8. *Числитель.*
9. *Знаменатель.*
10. *Общий знаменатель.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

<u>Обыкновенной дробью</u> называется число вида $\frac{m}{n}$, где $m\in Z, n\in N$. m называется *<u>числителем</u>*, n – *<u>знаменателем</u>*.

$Q=\left\{\frac{m}{n};\text{где } m\in Z, n\in N\right\}$ – множество *<u>рациональных чисел</u>*.

<u>Правильной дробью</u> называется дробь вида: $A\frac{r}{n}$, где $r<n$, A – это *целая часть,* соответственно *<u>неправильной</u>,* если $r>n$.

<u>Целой частью</u> дроби называется число A удовлетворяющее условию: $m=A\cdot n+r$, где $r<n$.

Значит, от неправильной дроби $\frac{m}{n}$ можно перейти к правильной $A\frac{r}{n}$, при условии что $m=A\cdot n+r$.

Пример 5.1. $\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$, т.к. $20=6\cdot 3+2$.

Число $\frac{r}{n}$ называется *дробной частью* числа.

Дробь вида $\frac{m}{n}$, где n кратно 10 называется *десятичной дробью*. Записывается в следующем виде: $\frac{2}{10}=0,2$, $-\frac{35}{10}=-3,5$, $\frac{17}{1000}=0,0017$.

В десятичной дроби целая часть записывается до запятой, а дробная после запятой.

Десятичная дробь вида $A,ppppp\ldots$ называется периодической, записывается $A,(p)$, читается «*A целых и p в периоде*».

Пример 5.2. $3,71717171\ldots=3,(71)$; $5,3514444\ldots=5,351(4)$.

Свойства дробей:

Сокращение

Если числитель и знаменатель дроби разделить (умножить) на одно и тоже число не равное нулю, получится дробь равная данной.

$$\boxed{\frac{m}{n}=\frac{m\cdot p}{n\cdot p},\ \text{где } p\neq 0}$$

Пример 5.3. $\frac{12}{21}=\frac{4\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{4}{7}$; $\frac{2}{9}=\frac{2\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{4}{18}$.

Сложение

Для того чтобы сложить две дроби, необходимо привести их к общему знаментателю, за общий знаменатель можно взять $n\cdot b$. Перемножим числитель первой дрооби на знаменатель второй

дроби, а числитель второй на знаменатель первой и сложимих. Аналогично выполняется вычитание.

$$\boxed{\frac{m}{n}\pm\frac{a}{b}=\frac{m\cdot b\pm a\cdot n}{n\cdot b}}$$

Если у дробей знаменатели равны, то можем просто сложить (вычесть) числители, а в знаменатель записать первоначальный знаменатель.

Пример 3.5. $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}+\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 4+5\cdot 9}{9\cdot 4}=\frac{8+45}{36}=\frac{53}{36}$.

Умножение

Для того, чтобы умножить дробь на дробь, необходимо числитель первой дроби умножить на числитель второй дроби, а знаменатель первой дроби умножить на знаменатель второй дроби.

$$\boxed{\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}=\frac{m\cdot a}{n\cdot b}}$$

Пример 3.6. $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$; $\frac{3}{8}\cdot 5=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{1}=\frac{3\cdot 5}{8\cdot 1}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$.

Деление

Для того, чтобы разделить дробь на дробь, необходимо вторую дробь перевернуть, а знак деления заменить знаком умножения.

$$\boxed{\frac{m}{n}:\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a}=\frac{m\cdot b}{n\cdot a}}$$

Пример 3.7. $\frac{1}{2}:\frac{4}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4}=\frac{5}{8}$; $\frac{2}{3}:2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 2}=\frac{\cancel{2}\cdot 1}{3\cdot\cancel{2}}=\frac{1}{3}$.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Вычислите:

1) $\frac{3}{6}+\frac{1}{4}$, 4) $\frac{4}{7}-\frac{1}{14}$, 7) $\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3}$, 11) $\frac{3}{7}:\frac{4}{3}$,

2) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}$, 5) $\frac{2}{9}-\frac{2}{3}$, 8) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$, 12) $\frac{2}{5}:\frac{8}{7}$,

3) $\frac{9}{2}+\frac{5}{4}$, 6) $\frac{5}{3}-\frac{2}{3}$, 9) $\frac{2}{7}\cdot\frac{14}{6}$, 13) $\frac{3}{4}:\frac{15}{20}$,

10) $\frac{4}{9}\cdot 3$, 14) $\frac{1}{7}:4$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Какая дробь называется неправильной дробью?
- Какие дроби называются правильными?
- Приведите примеры правильной, неправильной, десятичной и бесконечной дробей.
- Что называется целой частью числа?
- Что такое общий знаменатель?

№ 2 Вычислите:

а) $\frac{3}{6}+\frac{1}{4}-\frac{5}{12}$, б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$,

в) $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}:\left(-\frac{2}{14}\right)$, г) $-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}:\left(-\frac{3}{50}\right)$,

д) $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{14}\right)$, е) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{14}\right)$.

§ 6 *Степень числа. Ее свойства*

I. Новые слова:

1. *Степень числа.*
2. *Основание степени.*
3. *Показатель степени.*
4. *Свойства степени.*

II. Новые понятия, определения, обозначения

a^n – <u>*степень*</u> числа a (читаем «*a в степени n*»), где a – <u>*основание*</u> степени, n – <u>*показатель*</u> степени.

$$\boxed{a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}}}$$

Читаем «*а в степени n равно произведению чисел а n раз*»

Пример 6.1. $2^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$, где 2 это основание, 4 это показатель степени. $(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -27$, где –3 это основание, 3 это показатель степени. $(-5)^4 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = 625$, где –5 это основание, 4 это показатель степени.

Легко заметить, что при возведении отрицательного числа в четную степень, число становится положительным, а в нечетную, то остается отрицательным.

Любое число в нулевой степени равно 1.

Пример 6.2. $4^0 = 1$, где 4 это основание, 0 это показатель степени.

Свойства степени, т.е. правила, по которым будем вычислять.

Выучить наизусть!	1° $a^0 = 1$ (число в 0-ой степени равно 1).
	2° $a^1 = a$ (число в 1-ой степени равно самому себе).
	3° $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (если степень умножаем на степень с одинаковыми основаниями, то показатели складываем).
	4° $\left(a^n\right)^m = a^{m \cdot n}$ (если степень возводим в степень, то показатели перемножаем).
	5° $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (если степень делим на степень с одинаковыми основаниями, то показатели вычитаем).
	6° – 7° $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ и $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (если основания разные, а показатели степени равны, то общий показатель степени вынесем за скобку).
	8° $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (если показатель степени отрицательный, то переворачиваем основание и показатель степени станет положительным).
	9° $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (если показатель степени дробь, то степень можно заменить корнем).

Запомнить!	Свойства 3°,4°, 5° – справедливы при одинаковых основаниях. Свойства 6° и 7° – справедливы для разных оснований, но одинаковых показателях степеней.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Вычислить:

а) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^{-7}$, б) $\dfrac{3^2 \cdot \left(3^5\right)^2}{3^{12}}$, в) $\dfrac{3^0 \cdot 2^5 \cdot 8^4}{2^0 \cdot 2^4 \cdot 8^3}$, г) $3^2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$.

№ 2 Вычислить:

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \left(-\dfrac{6}{7}\right)^0 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 : 2$,

б) $\left(\left(0{,}1\right)^2\right)^0 + \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2} \cdot \dfrac{1}{49} - \left(2^2\right)^3 : 2^5$,

в) $\left(5^{-5}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 10^{-5}$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Выучить наизусть свойства степеней.

№ 2 Вычислите:

а) $25 \cdot 5^{-1} \cdot 5^3$, б) $2^{-1} \cdot 4 \cdot 16 \cdot 2^{-2} \cdot 2^3$,

в) $9 \cdot 3^0 \cdot \dfrac{1}{81} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$, г) $\dfrac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$,

д) $\dfrac{2^2 \cdot 4 \cdot \left(2^2\right)^4}{2^2 \cdot 5^5}$, е) $3^3 \cdot 4 : \left(6^2\right)^2$.

V. Обобщающие задачи

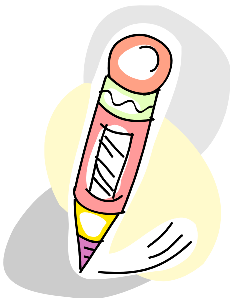
№ 1 Вычислите и определите к какому из множеств (N, Z, Q, R) принадлежит результат.

$$\frac{2^6 \cdot 3^2 - 40}{4^2 \cdot 3 - 7^2}.$$

§ 7 *Степени с дробным показателем. Свойства корней*

I. Новые слова:

1. *Корень.*
2. *Иррациональное выражение.*
3. *Знак радикала.* ($\sqrt[n]{\ }$).
4. *Подкоренное выражение.*
5. *Степень корня.*
6. *Извлечение корня.*
7. *Модуль числа.* ($|a|$).



II. Новые понятия, определения, обозначения

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=b \Rightarrow b^n=a}$$

$a\ge 0$, если n-четное, $a\in R$,если n- нечетное.

Символ $\sqrt[n]{\ }$ – читаем «*корень n-ой степени*», это *знак корня* или *радикала, а – подкоренное число (выражение), n – степень* корня.

Действие нахождения *арифметического корня* называется <u>*извлечением корня*</u>.

Примеры 7.1. $\sqrt[4]{16}=2$, потому что $2^4=16$.

7.2. $\sqrt[7]{1}=1$, потому что $1^7=1$.

7.3. $\sqrt[5]{-1}=-1$, потому что $(-1)^7=-1$.

7.4. $\sqrt[3]{0}=0$, потому что $0^3=0$.

Свойства корней:

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$
$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=\sqrt[n\cdot m]{a^{n+m}}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\sqrt[2n]{a^{2n}}=\|a\|$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$
$\sqrt[n\cdot k]{a^k}=\sqrt[n]{a}$	$\sqrt{a^2}=\|a\|$	$\|a\|=\left[\begin{array}{l}a,\ a\ge 0\\ -a,\ a<0\end{array}\right.$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$		

III. Учимся произносить, проговаривать свойства.

$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $\rightarrow$ корень n-ой степени из произведения чисел a и b равен произведению корней той же степени из этих чисел a и b.
$\leftarrow$ читаем справа налево как правило умножения корней.

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\rightarrow$ корень n-ой степени из частного двух чисел a и b равен частному корней той же степени из этих чисел a и b.
$\leftarrow$ читаем справа налево как правило деления корней.

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}$ $\rightarrow$ корень n-ой степени из корня k-ой степени равен корню, показатель которого равен произведению показателей корней.

IV. Рассмотрим свойства на примерах.

$$\boxed{\sqrt[n\cdot k]{a^k}=\sqrt[n]{a}}$$

Пример 7.5. $\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt{5}$ (мы сократили показатель корня и степени числа 5 на 3, т.к. НОД(6; 3) = 3).

Пример 7.6. $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$ (мы сократили показатель корня и степени на 4, т.к. НОД(8;12) = 4).

Пример 7.7. Сравнить: $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$

Приведем корни к общему показателю корня 6, т.к. НОК(3;2) = 6.

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}\\ \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}\end{array}\right. \Rightarrow \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}}$$

Примеры 7.8. $\sqrt{1600} = \sqrt{16\cdot 100} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{100} = 4\cdot 10 = 40$ (извлекли корни из произведения).

7.9. $\sqrt[3]{24\cdot 9} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3\cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3} = 2\cdot 3 = 6$.

7.10. $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8\cdot 2} = \sqrt[4]{2^3\cdot 2} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ (нашли произведение корней).

7.11. $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9} = \sqrt[3\cdot 2]{9^2}\cdot\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{9^2}\cdot\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{9^3} = \sqrt[6]{3^6} = 3$.

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

Примеры 7.12. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{3}{4}$ (извлекли корень из дроби).

7.13. $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{3}{2}$.

7.14. $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{48}{6}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ (выполнили деление корней).

7.15. $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[6]{5}} = \frac{\sqrt[4\cdot 3]{3^3}}{\sqrt[6\cdot 2]{5^2}} = \frac{\sqrt[12]{27}}{\sqrt[12]{25}} = \sqrt[12]{\frac{27}{25}} = \sqrt[12]{1,08}$.

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

Примеры 7.16. $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3 = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{\left(2^2\right)^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

7.17. $\left(\sqrt[10]{a}\right)^5 = \sqrt[10]{a^5} = \sqrt{a}$.

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a}}$$

Примеры 7.18. $\sqrt[5]{\sqrt{7}} = \sqrt[5\cdot 2]{7} = \sqrt[10]{7}$.

7.19. $\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8}$.

V. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Выполнить действия и прочитать:

1) $\sqrt[3]{64}$, 4) $\sqrt[3]{27000}$, 7) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$,

2) $\sqrt[4]{625}$, 5) $\sqrt[3]{40}\cdot\sqrt[3]{25}$, 8) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$.

VI. Домашнее задание:

№ 1 Выполнить действия и прочитать:

1) $\sqrt[5]{243}$ 2) $\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{625}$ 3) $\sqrt[3]{\frac{54}{2}}$,

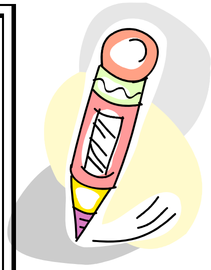
4) $\sqrt[4]{256}$, 5) $\sqrt[5]{27\cdot 9}$, 6) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt[4]{2^2}}$,

7) $\sqrt[4]{3125}$ 8) $\sqrt[3]{16\cdot 4}$ 9) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^3}}$.

§ 8 *Преобразование корней*

I. Новые слова:

1. Вынесение множителя за знак корня (или из-под знака корня).
2. Внесение множителя под знак корня.
3. Освобождение от иррациональности.
4. Степень с рациональным показателем.



II. Новые понятия, определения, обозначения

$\boxed{\sqrt[n]{a^n\cdot b} = a\cdot\sqrt[n]{b}}$ – *вынесение множителя* из-под знака корня, если n четное.

$\boxed{\sqrt[n]{a^n\cdot b} = |a|\cdot\sqrt[n]{b}}$ – *вынесение множителя* из-под знака корня, если n нечетное.

Примеры. Вычислить:

8.1. $\sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

8.2. $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3\cdot a} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a} = a\sqrt[3]{a}$.

8.3. $\sqrt[3]{8a^2b^4} = \sqrt[3]{2^3b^3a^2b} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{b^3}\cdot\sqrt[3]{a^2b} = 2b\sqrt[3]{a^2b}$.

Примеры. Упростить выражения:

8.4. $\sqrt{8} - 2\sqrt{32} + \sqrt{200} = 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

1) $\sqrt{8} = \sqrt{2^2\cdot 2} = 2\sqrt{2}$.

2) $2\sqrt{32} = 2\sqrt{2^5} = 2\sqrt{2^4\cdot 2} = 2\cdot 2^2\cdot\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

3) $\sqrt{200} = \sqrt{2\cdot 100} = \sqrt{2\cdot 10^2} = 10\sqrt{2}$.

$\boxed{a\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\cdot b}}$ – *внесение множителя* под знак корня.

Читаем: «*а умноженное на корень n-ой степени из b равно корню n-ой степени из произведения a в степени n на b*»

Примеры. Внесите под знак корня.

8.5. $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2\cdot 2} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{18}$.

8.6. $a^2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{\left(a^2\right)^3\cdot a} = \sqrt[3]{a^6\cdot a} = \sqrt[3]{a^7}$.

8.7. $2x^2\cdot\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\left(2x^2\right)^3\cdot x} = \sqrt[3]{8\cdot x^6\cdot x} = \sqrt[3]{8x^7}$.

8.8. $ab^2\cdot\sqrt[8]{\dfrac{5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{\dfrac{\left(ab^2\right)^8\cdot 5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{\dfrac{a^8b^{16}\cdot 5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{5ab^{19}}$.

Освободить от иррациональности знаменатель – это значит преобразовать дробь так, чтобы в знаменателе не было корней, то есть нужно умножить и числитель, и знаменатель на выражение с корнем так, что бы корень исчез.

Примеры 8.9. $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

8.10. $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}$.

$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$ – степень с *дробным показателем*.

Читаем: «*корень n-ой степени из a в степени m равен a в степени m деленное на n*»

Примеры 8.11. $\sqrt[3]{5} = 5^{1/3}$.

8.12. $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$.

8.13. $\frac{1}{\sqrt[5]{81}}=\frac{1}{\sqrt[5]{3^4}}=\frac{1}{3^{\frac{4}{5}}}=3^{-\frac{4}{5}}$.

8.14. $\sqrt[4]{16^{-3}}=\sqrt[4]{\left(2^4\right)^{-3}}=\sqrt[4]{2^{-12}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$.

8.15. $\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{9}:\sqrt[6]{3}=\sqrt{3^{-1}}\cdot\sqrt[3]{3^2}:\sqrt[6]{3}=3^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}:3^{\frac{1}{6}}=3^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=3^0=1$.

8.16. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\left(2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(2^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Привести корни к одинаковым показателям степени:

а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{5}$,

б) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[6]{5}$.

№ 2 Вынесите множитель из-под знака корня (за знак корня):

$\sqrt{120}$; $\sqrt{245}$; $\sqrt[3]{32}$; $\sqrt[4]{80}$.

№ 3 Внести множитель под знак корня:

$4\sqrt{3}$; $5\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}\sqrt{15}$; $2\sqrt[3]{5}$.

№ 4 Найти значения выражений:

а) $\sqrt{176}-2\sqrt{275}+\sqrt{1584}-\sqrt{891}$,

б) $\sqrt[4]{0,0003}-\sqrt[4]{0,0048}+\sqrt[4]{0,0243}$.

№ 5 Освободить от иррациональности знаменатель дроби: $\frac{2}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; $\frac{2}{\sqrt[5]{8}}$.

№ 6 Записать корни как степени с дробным показателем:

$\sqrt{3}$; $\sqrt{5^3}$; $\sqrt[5]{16}$; $\sqrt{3\sqrt{3}}$; $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a}}$.

№ 7 Записать степень как корни:

$7^{4/7}$; $4^{1,5}$; $2^{-0,5}$; $8^{2/3}$; $2a^{\frac{1}{2}}$.

№ 8 Вычислить:

1) $16^{\frac{3}{4}}$; 2) $243^{0,4}$; 3) $8^{1\frac{1}{3}}$; 4) $81^{0,25}$; 5) $1,44^{-\frac{1}{2}}$;

6) $\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt{25^{0,75}}:5\sqrt[8]{5^5}$, 7) $\sqrt[7]{\frac{1}{9}}:243^{\frac{1}{7}}\cdot\left(7\sqrt{7}\right)^{2/3}=$.

№ 9 Сравнить числа:

$3\sqrt{4}$ и $\sqrt{35}$; $2\sqrt{7}$ и $3\sqrt{4}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$ и $\sqrt[7]{\frac{1}{32}}$.

№ 10 Упростить:

а) $27^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}-25^{0,5}$,

б) $81^{0,75}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Выучить формулы наизусть.

№ 2 Упростить:

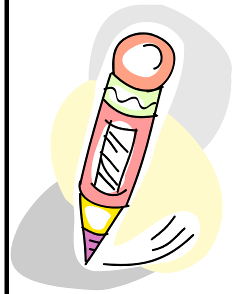
а) $9^{0,5}+\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{3}{4}}-64^{\frac{2}{3}}$,

б) $243^{\frac{2}{5}}+\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75}-9^{1,5}$.

§ 9 *Алгебраические выражения*

I. Новые слова:

1. *Выражения.*
2. *Одночлены.*
3. *Многочлены.*
4. *Область допустимых значений.*
5. *Тождество.*
6. *Переменная.*
7. *Коэффициент.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Числовые выражения: $2,5+7\cdot\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\right)$, содержат в себе числа, знаки действий, скобки.

Выражения с переменными: $4\cdot(3a+2b)$, содержат в себе числа, знаки действий, скобки и буквы.

Одночлены: $-2; a; 4ab; -5x^2$ – содержат в себе числа, переменные, а также их степени, произведение и частное.

Коэффициент: – числовой множитель, стоящий перед переменной.

Переменные: – буквы в выражении.

Примеры 9.1. $a^2; -x^3; -5ax^2; 2ac^3$.

9.2. Одночлен $4a^2$ имеет *степень « a » равную 2, коэффициент 4*.

9.3. Одночлен $4a^3c$ имеет общую *степень равную 4=3+1*.

Действия над одночленами:

Умножение одночленов:

Чтобы умножить одночлены, надо умножить их коэффициенты и сложить показатели степеней с одинаковыми основаниями.

Пример 9.4. $3a^2b^4\cdot\left(-2ab^2\right)=-6a^3b^6$.

Возведение одночлена в степень:

Чтобы возвести одночлен в степень, нужно возвести в степень каждый множитель, включая коэффициент.

Пример 9.5. $\left(2a^2b^3\right)^2=4a^4b^6$.

Действия над многочленами:

Многочлен – алгебраическая сумма одночленов.

Если многочлен содержит *два* слагаемых (члена), то он называется *двучлен*, если *три* слагаемых – *трехчлен* и так далее.

Пример 9.6. $6ax^2+3a-4x^3+2ax^2$

Подобные слагаемые – одинаковые слагаемые или слагаемые, отличающиеся только коэффициентами.

Приведение подобных членов – объединение подобных членов в один.

Наибольшая степень многочлена – *старшая степень*.

Пример 9.7. $4ax^2-6ax^2+5ax^2=ax^2(4-6+5)=3ax^2$.

9.8. $\underline{4a}+\underline{\underline{5ax}}-\underline{3a}+\underline{\underline{7ax}}=a+12ax$.

Тождество – равенство верное при любых значениях переменных.

Примеры 9.9. $3 \equiv 3$ – тождество.

9.10. $x^2 + x \equiv x \cdot (x+1)$ – тождество, т.к. $x^2 + x \equiv x^2 + x$.

9.11. $a^2 + 2ab \equiv a(a+2b)$ – тождество, т.к. $a^2 + 2ab \equiv a^2 + 2ab$.

Сложение многочленов:

Чтобы сложить многочлены, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены. (Скобки просто опускаем).

Пример 9.12. $(5x^2 - 2x + 3) + (3x^2 + 4x + 7) = 8x^2 + 2x + 10$.

Вычитание многочленов:

Чтобы вычесть многочлены, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены. (Опускаем скобки, меняем знаки у слагаемых, стоящих во второй скобке).

Пример 9.13. $(3x^2 + 5x + 2) - (7x^2 - 8x + 4) =$

$= 3x^2 + 5x + 2 - 7x^2 + 8x - 4 = -4x^2 + 13x - 2$.

Умножение многочлена на одночлен:

Чтобы умножить многочлен на одночлен, необходимо каждый член в скобке умножить на одночлен и сложить их произведения.

$$\boxed{(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c}$$

Умножение многочлена на многочлен

Чтобы умножить многочлен на многочлен, необходимо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и сложить их произведения

Пример 9.14. $(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d$.

Пример 9.15. $(x+y)\cdot(x-y+1) = x\cdot x - x\cdot y + x + y\cdot x - y\cdot y + y$.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Приведите подобные члены:

а) $a^2 - b^2 + 3a^2 - 2b^2$,

б) $5ab + 4ab^2 - ab - 12ab^2$.

№ 2 Выполнить сложение:

а) $(4x+2)+(-x-3)$, б) $(x^2+4x-5)+(x^2+3x+2)$.

№ 3 Выполнить вычитание:

а) $3a-(a+2b)$, б) $(2m+3n)-(5m-6n)$.

№ 4 Выполнить умножение:

а) $(a+3)\cdot 4$, б) $(2x^2-5x+3)\cdot(-4x)$,

в) $(6a^3-7ab+b^2)\cdot(-3ab^3)$.

№ 5 Выполнить действия:

а) $4\cdot(3p+4q)-8\cdot(5p-q)+(p-q)$,

б) $2\cdot(x-y+z)-2\cdot(x+y-z)-3\cdot(-x-y-z)$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Научиться читать правила.

№ 2 Выполнить действия:

а) $(3x^3+2x^2-x+5)+(2x^3+6x^2-3)$,

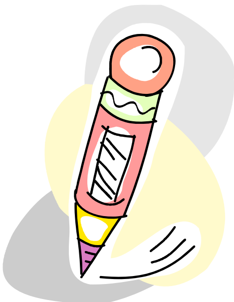
б) $(2a^3+3a^2-5a+4)-(a^3-a^2+a+1)$,

в) $(2a^2b+3ab-b^2)(a^2-a+b)$.

§ 10 *Формулы сокращенного умножения*

I. Новые слова:

1. *Сокращенное умножение (быстрое умножение).*
2. *Раскрыть скобки.*
3. *Упростить.*
4. *Выполнить действия.*
5. *Разложить на множители.*
6. *Общий множитель.*
7. *Группировка.*
8. *Вспомогательные члены.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Разность квадратов:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$$

Разность квадратов a и b равна произведению разности a и b на их сумму.

Квадрат суммы:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

a плюс b в квадрате равно квадрату первого слагаемого плюс удвоенное произведение первого на второе плюс квадрат второго слагаемого.

Квадрат разности:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

a минус b в квадрате равно квадрату первого слагаемого минус удвоенное произведение первого на второе плюс квадрат второго слагаемого.

Куб суммы:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

a плюс b в кубе равно кубу первого слагаемого плюс утроенное произведение квадрата первого на второе плюс утроенное произведение первого на квадрат второго плюс куб второго слагаемого.

Куб разности:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

a минус b в кубе равно кубу первого слагаемого минус утроенное произведение квадрата первого на второе плюс утроенное произведение первого на квадрат второго минус куб второго слагаемого.

Сумма кубов:

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

a в кубе плюс b в кубе равно произведению суммы первого и второго на неполный квадрат разности a и b (квадрат первого слагаемого минус произведение первого на второе плюс квадрат второго слагаемого).

Разность кубов:

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}$$

a в кубе минус b в кубе равно произведению разности первого и второго на неполный квадрат суммы a и b (квадрат первого слагаемого плюс произведение первого на второе плюс квадрат второго слагаемого).

Квадрат трехчлена:

$$\boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ac+2bc+2ab}$$

сумма a, b, и c в квадрате равно сумме квадратов каждого слагаемого и плюс их удвоенные смешанные произведения.

Разложить многочлен на множители: – значит записать этот многочлен как произведение двух или нескольких многочленов.

Способы разложения на множители:

Вынесение общего множителя за скобки:

Примеры 10.1. $x^2+x=x(x+1)$.

10.2. $6a^2-4a=2a(3a-2)$.

10.3. $10x^2y^3-15x^3y^2+20xy^4=5xy^2\left(2xy-3x^2+4y^2\right)$.

10.4. $(a+b)x-(a+b)y=(a+b)(x+y)$.

Метод группировки:

Примеры 10.5. $ax+bx+ay+by=(ax+bx)+(ay+by)=$
$=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)\cdot(x+y)$.

10.6. $2a-2b+ax-bx=(2a-2b)+(ax-bx)=$

$=2(a-b)+x(a-b)=(a-b)\cdot(2+x)$.

10.7. $5-5a+a^2-a^3=\left(5+a^2\right)-\left(5a+a^3\right)=$
$=\left(5+a^2\right)-a\left(5+a^2\right)=(1-a)\cdot\left(5+a^2\right)$.

Разложение на множители по формулам сокращенного умножения:

Примеры 10.8.

$9a^4-25b^2=\left(3a^2\right)^2-(5b)^2=\left(3a^2-5b\right)\left(3a^2+5b\right)$

10.9. $1+2a+a^2=(a+1)^2=(a+1)(a+1)$.

10.10. $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)\left(x^2-3x+9\right)$.

Введение вспомогательных членов:

Пример 10.11. $x^2+2x-3=\underbrace{x^2+2x+1}-4=(x+1)^2-2^2=$

$=(x+1-2)(x+1+2)=(x-1)(x+3)$.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Выполнить действия, применив формулы сокращенного умножения:

1) $(2-c)(2+c)$, 2) $(x+4)^3$, 3) $(x+y)^2$,

4) $(2a+3b)(2a-3b)$, 5) $(x-2)^3$, 6) $(c-d)^2$,

7) $(x+1)\left(x^2-x+1\right)$, 8) $\left(a^2-1\right)^2$,

9) $\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b\right)^3$, 10) $(2-y)\left(4+2y+y^2\right)$.

№ 2 Упростить выражения:

1) $(x+y)^2-(x-y)^2$, 2) $-(4-a)^2-8(1-a)^2+5(3+a)(3-a)$,

3) $(2+a)(2-a)\left(4-a^2\right)$, 4) $(x-1)\left(x^2+x+1\right)-x\left(x^2+2\right)$,

5) $5(3-5a)^2-(3a-7)(3a+7)$.

№ 3 Выполнить деление:

1) $(4a+2ac):a$, 2) $\left(3x^2y-6xy^2\right):(-3xy)$,

3) $\left(6c^2x^3-12c^4x^2+18c^3x^4\right):\left(-6c^2x^2\right)$.

№ 4 Разделить многочлен на многочлен с помощью формул сокращенного умножения:

1) $\left(x^2-a^2\right):(x-a)$, 5) $\left(x^3+y^3\right):(x+y)$,

2) $\left(a^2-9\right):(a-3)$, 6) $\left(1-a^3\right):(1-a)$,

3) $\left(x^2-2xy+y^2\right):(x-y)$, 7) $\left(a^3+27\right):\left(a^2-3a+9\right)$,

4) $\left(8-a^3\right):\left(a^2+2a+4\right)$, 8) $\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right):(x+y)$.

№ 5 Разделить многочлен на многочлен:

а) $\left(a^3-3a^2+2a-6\right):(a-3)$,

б) $\left(4x^4-5+19x^2\right):\left(x^2+5\right)$,

в) $\left(2c^3-2c^2-8c+8\right):\left(c^2+c-2\right)$,

г) $\left(6x^3-19x^2+12x-5\right):(2x-5)$.

№ 6 Разделить многочлен на многочлен:

1) $(x+y)^2-(x-y)^2$, 2) $2a^2b^3-3a^3b^2$, 3) $3x^3-6x^2+x$,

4) $3y-x^2-3x-xy$, 5) $a^2-0{,}01x^2$, 6) x^6-y^6,

7) $5a^2-5ax+7x-7a$, 8) a^2-4, 9) $64-96x+48x^2-8x^3$.

№ 7 Разложить на множители:

1) $4ax+9-x^2-4a^2$, 4) a^2+4a+3,

2) $x^3-x^2-x^6+x^5$, 5) x^2-2x-8,

3) $(x+c)^3-x^2(x+c)$, 6) $a^2+2a+1-c^2$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Научиться читать формулы сокращенного умножения.

№ 2 Упростить выражения:

а) $(x+1)^2-(1-x)^2$ б) $(3+2a)(3-2a)\left(9-4a^2\right)$

в) $(x-1)\left(x^2+x-1\right)-x(x-1)$

V. Обобщающие задачи

№ 1 Упростите, а затем вычислите:

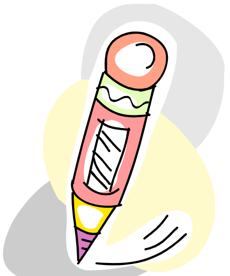
а) $\dfrac{2ab(3a-2b)\cdot(3a-2b)}{4{,}5a^2-2b^2}$ при $a=1, b=-2$,

б) $\dfrac{a^2-4b^4}{a^2-4ab^2+4b^2}+1$ при $a=-1, b=1$.

§ 11 Алгебраические дроби

I. Новые слова:

1. *Алгебраическая дробь.*
2. *Область допустимых значений.*
3. *Частное.*
4. *Остаток.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Алгебраическая дробь – это выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B – одночлены или многочлены.

Область допустимых значений (ОДЗ) *алгебраической дроби* – это множество всех значений переменной, при которых знаменатель не равен нулю $(\neq 0)$.

Пример 11.1. ОДЗ дроби $\frac{2a^2x}{5c}$, все $a, x, c \in \mathrm{R}$, кроме $c = 0$, т.е $c \neq 0$. ОДЗ дроби $\frac{a-c}{a+c} \Rightarrow a+c \neq 0, a \neq -c$.

Действия с алгебраическими дробями:

Сокращение дробей:

Пример 11.3. $\frac{5ab}{10a^3} = \frac{5\cdot a\cdot b}{2\cdot 5\cdot a\cdot a^2} = \frac{b}{2a^2}$.

Пример 11.4. $\frac{7x^2-7y^2}{2x+2y} = \frac{7\left(x^2-y^2\right)}{2(x+y)} = \frac{7(x-y)(x+y)}{2(x+y)} = \frac{7(x-y)}{2}$.

Приведение дробей к общему знаменателю:

Пример 11.5. $\frac{1}{3c}$ и $\frac{1}{2c^2} \Rightarrow \text{НОК} = 6c^2 \Rightarrow \frac{1}{3c} = \frac{2c}{6c^2}$ и $\frac{1}{2c^2} = \frac{3}{6c^2}$.

Выделение целой части у дроби (деление уголком):

Пример 11.6. Выделите целую часть $\frac{x^2-3}{x+2}$.

Решаем делением уголком:

$x^2 - 3 \mid \underline{x+2}$

$\underline{x^2+2x} \mid x-2$ (*частное* – целая часть)

$-2x-3$

$\underline{-2x-4}$

1 (*остаток* – числитель дробной части)

$$\frac{x^2-3}{x+2} = x-2+\frac{1}{x+2}$$

Сложение и вычитание алгебраических дробей:

Пример 11.7. $\frac{a}{x+y} + \frac{b}{x+y} - \frac{c}{x+y} = \frac{a+b-c}{x+y}$ (сложение дробей с одинаковыми знаменателями).

Пример 11.8. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{2a}{c} = \frac{bc}{abc} - \frac{ac}{abc} + \frac{2a^2b}{abc} = \frac{bc-ac+2a^2b}{abc}$

(сложение дробей с разными знаменателями)

Умножение дробей:

Пример 1.9. $\frac{2x}{3a}\cdot\frac{a^2}{5x} = \frac{2\cancel{x}\cdot a^{\cancel{2}}}{3\cancel{a}\cdot 5\cancel{x}} = \frac{2a}{15}$ (выполнили сокращение одинаковых выражений).

Пример 11.10. $\frac{3a^2}{4a^2-b^2}\cdot\frac{2a+b}{5a} = \frac{3a^{\cancel{2}}\cancel{(2a+b)}}{5\cancel{a}(2a-b)\cancel{(2a+b)}} = \frac{3a}{5(2a-b)}$.

Деление алгебраических дробей:

Пример 11.11. $\frac{15a}{2c}:\frac{10a}{3c}=\frac{15a}{2c}\cdot\frac{3c}{10a}=\frac{9}{4}$ (вспомним: чтобы разделить дробь на дробь надо первую дробь умножить на перевернутую вторую дробь).

Пример 11.12. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}:(x+y)=\frac{(x-y)(x+y)}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{x-y}{x^2+y^2}\cdot$

Степень алгебраической дроби:

Пример 11.13. $\left(\frac{5x^2y^2}{x+y}\right)^2=\frac{(5x^2y^2)^2}{(x+y)^2}=\frac{5^2(x^2)^2(y^2)^2}{(x+y)^2}=\frac{25x^4y^4}{(x+y)^2}\cdot$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Найти ОДЗ дробей:

1) $\frac{2x+y}{x}$, 2) $\frac{x+5}{x+1}$, 3) $\frac{2a-6}{a-2}$, 4) $\frac{x(x-3)}{x-4}$.

№ 2 Сократить дроби:

1) $\frac{10a}{15x}$, 2) $\frac{4ab^2}{8ab}$, 3) $\frac{3(a+b)^2}{9a(a+b)}$, 4) $\frac{a-2}{2-a}$,

5) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ 6) $\frac{x^2-ax+a^2}{x^3+a^3}$.

№ 3 Привести дроби к общему знаменателю.

а) $\frac{a}{3x}$ и $\frac{x}{4a^2}$, б) $\frac{3}{a+2}$ и $\frac{3c}{a^2-4}$,

в) $\frac{a}{2x+2c}$ и $\frac{3}{x^2+2cx+c^2}$, г) $\frac{3}{9-a^2}$ и $\frac{5}{6+2a}$ и $\frac{a}{a-3}$.

№ 4 Выделить целое выражение из дроби.

1) $\frac{x+1}{x}$, 2) $\frac{x^2}{x+1}$, 3) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$, 4) $\frac{x^2+x+3}{x^2+3}$.

№ 5 Выполнить действие:

1) $\frac{5x}{6a}-\frac{x}{6b}$, 2) $\frac{x+4}{a-2}+\frac{x-4}{a-2}$, 3) $\frac{a+1}{a^2-b^2}-\frac{a-1}{b-a}$,

4) $\frac{5}{2a-3}+\frac{2}{2a+3}-\frac{a-1}{9-4a^2}$, 5) $a+\frac{a-2}{x^2-4}+\frac{a-3}{x+2}$.

№ 6 Выполнить действие:

1) $\left(\frac{x}{x+1}+1\right)\cdot\frac{1-x^2}{4x^2-1}$, 2) $\frac{x-y}{4y}\cdot\frac{8y^2}{x^2-xy}-\frac{3}{x^2}$

3) $1+\frac{24}{(x-2)^2}\cdot\frac{4x-x^2-4}{3(x+6)}=$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Выучить определения и новые слова.

№ 2 Упростить:

а) $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+x}$ б) $\left(\frac{c+1}{c}-\frac{1}{c-c^2}\right)\cdot\left(c-\frac{c^2}{c-1}\right)^{-1}$

в) $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{2ab}{b^2-a^2}\right)\cdot\frac{a}{a-b}+\left(\frac{b}{b-a}+\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$

V. Обобщающие задачи

№ 1 Выделите целую часть у дроби:

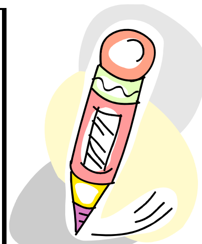
а) $\frac{x^5-3x^4+7x^3-x^2+8x-2}{2x-3}$,

б) $\frac{x^5-5x^4-6x^3+2x^2+3x+1}{x^2-x+3}$.

§ 12 *Тождественные преобразования выражений с корнями*

I. Новые слова:

1. *Степень с дробным показателем.*
2. *Освобождение от иррациональности.*
3. *Преобразовать тождественно.*
4. *Упростить.*
5. *Сопряженное выражение.*



II. Новые определения, действия с выражениями

Переход от степени с целым показателем к степени с дробным показателем.

$$a^m = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^m = a^{\frac{m\cdot n}{n}}$$

Пример 12.1. $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$; $x=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; $x^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{x}\right)^3 = x\sqrt{x}$.

Освобождение от иррациональности в знаменателе:

Для того чтобы избавится от иррациональности необходимо знаменатель умножить на сопряженное число. $3+\sqrt{5}$ и $3-\sqrt{5}$ – *сопряженные числа*.

Пример 12.2. $\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-5}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Пример12.3. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$.

Пример 12.4.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{2\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{xy}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{xy}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right)}=\frac{2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{x-y}.$$

<u>Упростить выражение</u> – значит выполнить действия, указанные в выражении по очередности.

Пример 12.5. $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6-\sqrt{a^4}+6\sqrt[5]{a^5}-a^4=$

$=\underline{\underline{a}}^4-a^2+6a-\underline{\underline{a}}^4=-a^2+6a$.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Упростите выражения:

а) $\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$, б) $\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2-\sqrt{x}\right)^{-1}}{\left(x+\sqrt{x}+x\sqrt{x}\right)^{-1}}$,

в) $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1=$, г) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{x}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}=$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Выполнить примеры, объясняя действия словами:

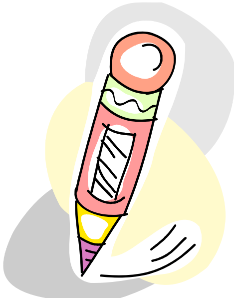
а) $\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-\sqrt{xy}+y}:\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}-x+y$,

б) $\frac{a+b+3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+2\sqrt[3]{ab}}-\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$.

§ 13 *Функция*

I. Новые слова:

1. *Функция.*
2. *Соответствие.*
3. *Координатная плоскость.*
4. *Плоскость.*
5. *Координаты точки.*
6. *Абсцисса (x).*
7. *Ордината (y).*
8. *Координатные четверти.*
9. *Область определения.*
10. *Область значения.*
11. *Аргумент.*
12. *Симметрия.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Функция – это соответствие между двумя множествами, где каждому элементу одного множества соответствует один элемент второго множества.

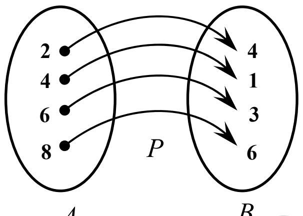


Рис. 6

Р: $2 \to 4;\ 4 \to 16;\ 6 \to 36;\ 8 \to 64$

Соответствие можно записать стрелками или другим способом (рис. 6):

$P(2) = 4;\ P(4) = 16;\ P(6) = 36;\ P(8) = 64$

Пример 13.1.

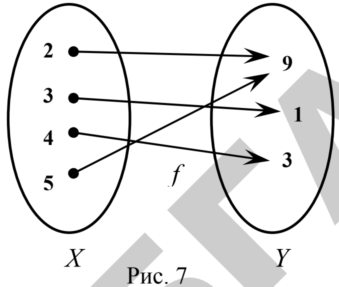


Рис. 7

Описать соответствия (рис. 7).

Является ли это функцией?

Р: $2 \to 9;\ 3 \to 1;\ 4 \to 3;\ 5 \to 9$

Ответ: Да.

Пример 13.2.

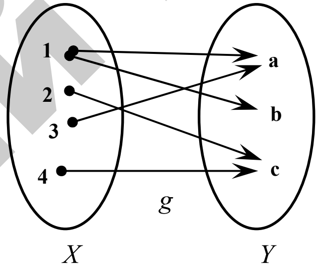


Рис. 8

Является ли соответствие функцией?

Ответ: Нет.

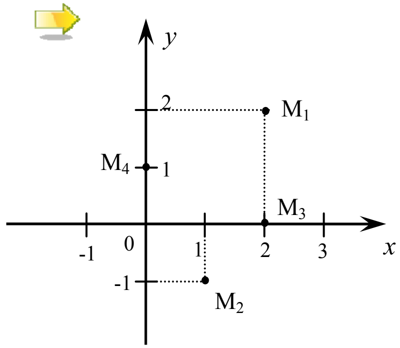


Рис. 9

Проведем на плоскости две перпендикулярные прямые Ox и Oy (рис. 9).

Ox и Oy – ***оси координат.***

Ox – ***ось абсцисс.***

Oy – ***ось ординат.***

Каждая точка на плоскости имеет свои координаты

$M_1(2;2), M_2(1;-1), M_3(2;0), M_4(0;1)$

$O(0;0)$ – начало координат.

<u>*Координаты точки*</u> – это пара чисел, которые определяют ее положение на координатной плоскости (рис. 10).

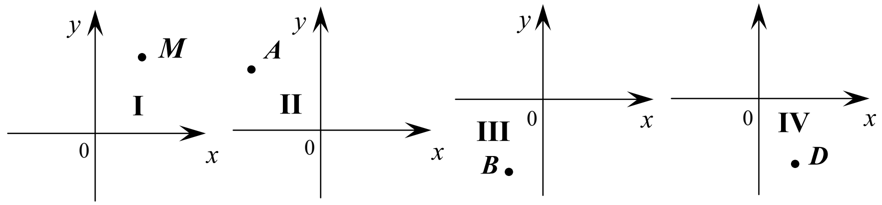


Рис. 10

Говорим: *точка* M *лежит в* I *четверти.* $M(x;y)$, *тогда*

$x>0,\ y>0$

Проговорить другие рисунки аналогично (самостоятельно).

A и B <u>симметричные точки</u> относительно оси OX (рис. 11).

Координаты точек: $\begin{cases} A(x_1;y_1) \\ B(x_1;-y_1) \end{cases}$

M и N <u>симметричные точки</u> относительно оси OY (рис. 12)

Координаты точек: $\begin{cases} M(x_1;y_1) \\ N(-x_1;y_1) \end{cases}$

Q и P <u>симметричные точки</u> относительно начала координат $O(0;0)$ (рис. 13)

Координаты точек: $\begin{cases} Q(x_1;y_1) \\ P(-x_1;-y_1) \end{cases}$

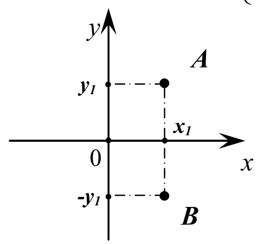


Рис. 11

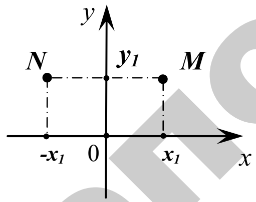


Рис. 12

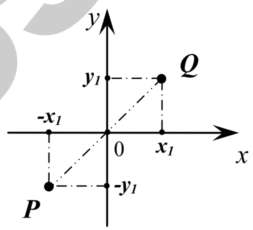


Рис. 13

Соответствие между множеством X и множеством Y называем <u>*функцией*</u> или <u>*отображением*</u>.

X – область определения функции f.

Y – область значения функции f.

X – значение аргумента.

Y – значение функции.

III. Домашнее задание:

№ 1 Выучить слова.

№ 2 Придумать и построить соответствия между множествами.

№ 3 Построить соответствия, которые являются функциями.

№4 Найти отличия в придуманных соответствиях и функциях.

№ 5 Построить точки:

$A(2;-3),\ B(-1;5),\ C(-3{,}5;6),\ D(0;-2),\ E(-4;0),\ P(0;5),\ K(1;4)$

№ 6 Построить симметричные точки для $A(3;1),\ B(-2;3)$:

1) относительно оси OX.
2) относительно оси OY.
3) относительно начала координат.

№ 7* Построить произвольный треугольник, четырехугольник. Определить координаты вершин этих фигур, и построить для них симметрические точки, относительно начала координат.

§ 14 *Числовые функции*

I. Новые слова:

1. *Числовые функции.*
2. *Методы задания функции.*
3. *Аналитический метод (формула).*
4. *Табличный метод (таблица).*
5. *Графический метод (график).*
6. *Четность функции.*
7. *Нечетность функции.*
8. *Прямо пропорциональная зависимость.*
9. *Линейная функция.*
10. *Обратно пропорциональная зависимость.*
11. *Гипербола, ветви гиперболы.*

II. Новые понятия, определения, обозначения

Функция $y = f(x)$ называется <u>*числовой функцией*</u>, если ее *область определения* $D(f)$ и *область значения* $E(f)$ – числовые множества.

<u>*Методы задания функции*</u>:

<u>Аналитический метод</u>. Функцию можно задать формулой $y = 5x + 1$, $f(1) = 6$, $f(2) = 11$, $f(-2) = -9$. Формула $y = 5x + 1$ устанавливает соответствие между множествами X и Y.

Пример 14.1. $y = \frac{4}{2-x}$, $D(f) = (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$ – ОДЗ (область допустимых значений переменной x)

$y(0) = 2$, $y(1) = 4$, $y(-2) = 1$ и т. д.

<u>Табличный метод</u>. Функцию можно задать таблицей.

Пример 14.2.

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

– таблица квадратов натуральных чисел.

<u>Графический метод</u>. Функцию можно задать графком (рис. 14).

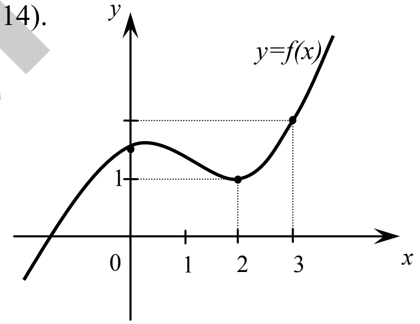


Рис. 14

$y(0) = \frac{1}{2}$,

$y(2) = 1$,

$y(3) = 2$.

<u>*Свойства функций*</u>:

Функция $f(x)$ называется <u>*четной*</u>, если

1) ее $D(f)$ область определения симметрична относительно нуля.

2) $f(x) = f(-x)$, (четная функция симметрична относительно оси OY)

Функция $f(x)$ называется <u>*нечетной*</u>, если

1) ее $D(f)$ область определения симметрична относительно нуля.

2) $f(-x) = -f(x)$, (нечетная функция симметрична относительно начала координат)

Если у $f(x)$ $D(f)$ не симметрична относительно нуля, то $f(x)$ называется *функцией общего вида*.

Пример 14.3. Выясните четными либо нечетными являются функции: $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$, $y=\dfrac{x}{x-2}$.

1) $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ – четная функция.

2) $f(-x)=(-x)^3=x^3=f(x)$ – нечетная функция.

3) $y=f(x)=\dfrac{x}{x-2}\Rightarrow f(-x)=\dfrac{-x}{-x-2}\neq f(x)$ – функция общего вида.

Прямая пропорциональность – это зависимость между x и y, которую можно записать $y=kx$, где k – это *коэффициент пропорциональности*.

Пример 14.4. $y=2x$ (рис. 15).

1) Графический способ

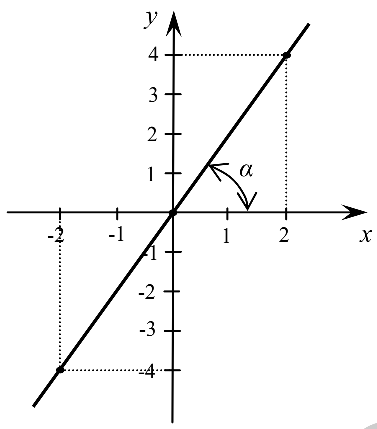


Рис. 15

2) Табличный способ

X	0	1	2	-1	-2
Y	0	2	4	-2	-4

Графиком функции $y=kx$ является прямая

1. если $k>0$, график лежит в I и III четвертях.
2. если $k<0$, график лежит в II и IV четвертях.

$k=tg\alpha$, α – угол наклона графика.

Обратно пропорциональная зависимость – это зависимость между x и y, которую можно записать $y=\dfrac{k}{x}$.

$D(f)=\{x\in R,\quad x\neq 0\}$, $E(f)=\{y\in R,\quad y\neq 0\}$.

Пример 14.5. $y=\dfrac{4}{x}$ Построим график функции (рис. 16).

x	1	4	2	-1	-4	-2
y	4	1	2	-4	-1	-2

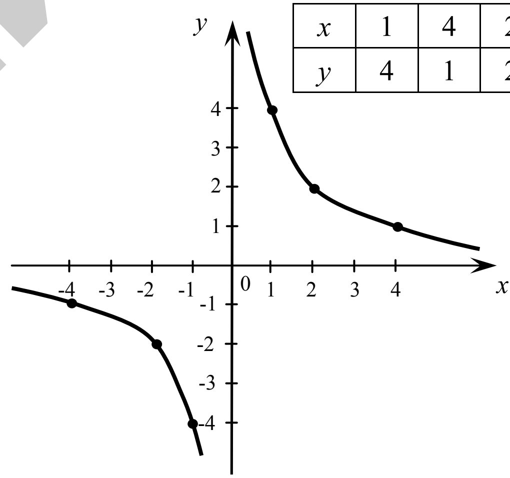


Рис. 16

Графиком функции $y=\dfrac{k}{x}$ является гипербола (рис. 16).

1. если $k>0$, ветви лежат в I и III четвертях.
2. если $k<0$, ветви лежат в II и IV четвертях.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Построить график функции $y = x$.

№ 2 Построить графики функций:

$$y = -3x, \quad y = 3, \quad x = 2, \quad y = -\frac{1}{x}.$$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Построить графики функций:

1) $y = 4x$, 2) $y = \frac{1}{2}x$, 3) $y = -x$, 4) $y = \frac{2}{x}$, 5) $y = -\frac{3}{x}$,

6) $y = 2x$, 7) $y = -x$.

№ 2 Определить четность и нечетность для функций:

1) $y = 2x$, 2) $y = x + 2$, 3) $y = -x^2$, 4) $y = -x^3$,

5) $y = x^4 + x^2$, 6) $y = x^3 - x$, 7) $y = \frac{1}{x}(x+1)^2 - (1-x)^2$.

V. Обобщающие задачи

№ 1 Упростите:

а) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$,

б) $\dfrac{x-1}{x+x^{0,5}+1} : \dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1} + \dfrac{2}{x^{-0,5}}$,

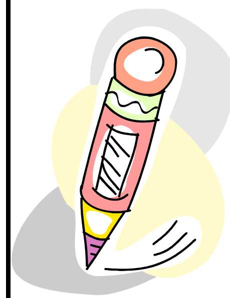
в) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) : \left(1 + \sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right)$.

§ 15 *Уравнения.*

Линейные уравнения

I. Новые слова:

1. *Равенство.*
2. *Левая часть равенства.*
3. *Правая часть равенства.*
4. *Тождества.*
5. *Уравнение.*
6. *Корень уравнения.*
7. *Удовлетворяет уравнению.*
8. *Решения уравнения.*
9. *Равносильные уравнения* $(\Leftrightarrow)$.
10. *Эквивалентные уравнения.*
11. *Область допустимых значений (ОДЗ).*
12. *Пропорция, свойство пропорций.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Равенство – выражение, соединенное знаком *«равно»* *«=»*.

Пример 15.1. $3+7=10$ – числовое равенство, $a+2a=3a$ – равенство с переменной a.

Пример 15.2. $2x-6 \; = \; 5x+7$ – равенство с переменной x.

Левая часть равенства	Правая часть равенства

Свойства равенств:

- части равенств можно переставлять местами: $a = b, \Leftrightarrow b = a$.
- транзитивность: если $a = b$, и $b = c$, $\Rightarrow$ $a = c$
- равные числа можно прибавлять (вычитать) к обеим частям, равенства: если $a = b$, то $a + c = b + c$
- обе части равенства можно умножать и делить на одно и то же число: если $a = b$, то $a \cdot c = b \cdot c$, если $a = b$, $c \neq 0$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Тождество – это равенство верное при всех значениях переменной.

Примеры 15.3. $3 + 5 \equiv 8$ (числовое тождество).

15.4. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (тождество с переменными).

Уравнение – это равенство, содержащее переменную или несколько переменных. *Переменная* называется *неизвестной*.

Пример 15.5. $2x - 1 = 3x + 6$

$3x - 2x = -1 - 6$

$x = -7$ *– корень уравнения.*

Решение (корень) уравнения – это значение неизвестной, которое при подстановке обращает уравнение в верное числовое равенство (тождество).

Если значение неизвестного *является корнем* уравнения, то говорят, что это значение *удовлетворяет уравнению*.

Если значение неизвестного *не является корнем* уравнения, то говорят, что это значение *не удовлетворяет уравнению*.

Пример 15.6. Рассмотрим уравнение с двумя неизвестными $3x - y = 5$.

Пара значений $x = 2, y = 1$ обращает уравнение в верное числовое равенство: $3 \cdot 2 - 1 = 5$, $5 \equiv 5$, то пара чисел $(2;1)$ – решение уравнения.

Решить уравнение – это значит найти множество всех его решений.

Два уравнения называются *равносильными*, если их множества решений совпадают.

Пример 15.7. а) $x^2 = 1$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}\right.$ б) $|x| = 1$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}\right.$

Множества решений одинаковы, поэтому: $x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1$.

Пример 15.8. а) $4x = 8$ $x_1 = 2$ б) $x^2 = 4$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array}\right.$

Множества решений не совпадают, значит уравнения *неравносильны*.

Пример 15.9. а) $x^2 + 4 = -5$ $\varnothing$ б) $3x = 3x + 7$ $\varnothing$

Множество решений $\varnothing$ – совпадают, значит, уравнения равносильные $x^2 + 4 = -5 \Leftrightarrow 3x = 3x + 7$

Множество значений неизвестного, при которых обе части уравнения имеют смысл, называется *областью допустимых значений (ОДЗ)*.

Пример 15.10. $\frac{1}{x-1} = 2x - 3$, ОДЗ: $x \in R$, $x \neq 1$.

Пример 15.11. $\frac{1}{x^2+1} = x^3 - 8$, ОДЗ: $x \in R$.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Привести примеры равносильных уравнений.

№ 2 Найти ОДЗ:

а) $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{3}{x-3}$,

б) $\dfrac{3x}{x^2-25}+\dfrac{12}{1-x}=8$.

№ 3 Какие равенства являются тождествами; уравнениями?

1) $2(a-x)=2a-2x$ 2) $a+2=5$

3) $(x+3)(x-3)=x^2-9$ 4) $0\cdot x+0\cdot y=0$

5) $4y-5y=-y$ 6) $5x-2y=7$

№ 4 Какие уравнения равносильны?

а) $a-4x=0$ и $3x=0$

б) $x-2=5$ и $2x=14$

в) $x+1=4$ и $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{4}{3}$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Выучить основные определения и новые слова.

№ 2 Привести примеры тождественных равенств.

№ 3 Найти ОДЗ:

а) $\dfrac{3+x}{x-4}=\dfrac{2x}{x+5}$ б) $\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{5}{x}$.

§ 16 *Решение линейного уравнения*

I. Новые слова:

1. *Единственное решение.*
2. *Бесконечное множество решений.*
3. *Пустое множество решений $\varnothing$.*
4. *Абсолютная величина, модуль $|\;|$.*
5. *Линейная функция (прямая).*
6. *График функции.*
7. *Прямая линия (прямая).*

II. Новые понятия, определения, обозначения

Линейное уравнение с одним неизвестным имеет вид: $ax+b=0$, где x – *переменная*, a – *коэффициент*, b – *свободный член.*

Уравнение $ax+b=0$ имеет *единственное решение*. $x=-\dfrac{b}{a}$, если $a\neq 0$.

Уравнение $ax+b=0$ имеет *бесконечное множество решений* $x\in\mathrm{R}$, если $a=0$ и $b=0$.

Уравнение $ax+b=0$ *не имеет решений*, если $a=0$, $b\neq 0$ ($0\cdot x=-b$, нет решений).

Пример 16.1. $2x+3=-5x+10 \Leftrightarrow 2x+5x=10-3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7x=7 \Leftrightarrow x=1$

Ответ: $x=1$.

Пример 16.2. $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-3}$ ОДЗ $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$,

$x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$, $\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-3}=0$.

$$\frac{2(x-3)-(x+1)}{(x+1)(x-3)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3)-(x+1)=0 \Leftrightarrow x=7 \\ (x+1)(x-3)\neq 0 \end{cases} \quad x=7\in \text{ОДЗ}$$

<u>Ответ:</u> $\{7\}$

Пример 16.3. $|x|=4 \Leftrightarrow x_1=4,\ x_2=-4$. <u>Ответ:</u> $\{-4;4\}$

Пример 16.4. $|x|=-2 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Пример 16.5. $|x+2|+|2x-6|=7$.

1 шаг. Найдем критические точки, в которых модуль меняет знак.

$x+2=0,\quad 2x-6=0$

$x=-2\quad\quad x=3$

2 шаг. Строим таблицу, определяем знаки на промежутках.

	I	II	III
x	-2	3	
$\lvert x+2\rvert$	–	+	+
$\lvert 2x-6\rvert$	–	–	+

3 шаг. Раскрываем модули по таблице.

I. Пусть $x\in(-\infty;-2)$

$-(x+2)-(2x-6)=7$

$-x-2-2x+6=7$

$-3x=3$

$x=-1\notin(-\infty;-2)$

II. Пусть $x\in[-2;3)$

$(x+2)-(2x-6)=7$

$x+2-2x+6=7$

$-x=-1$

$x=1\in(-2;3)$

III. Пусть $x\in[3;+\infty)$

$(x+2)+(2x-6)=7$

$x+2+2x-6=7$

$3x=11,\ x=\frac{11}{3}\in[3;+\infty)$

<u>Ответ:</u> $\left\{1;\frac{11}{3}\right\}$

Функция $y=ax+b$, где a, b – постоянные величины, x – аргумент, называется <u>*линейной функцией*</u>. График – прямая линия.

$a\neq 0,\quad b=0 \quad\Rightarrow\quad y=ax$ (рис. 17).

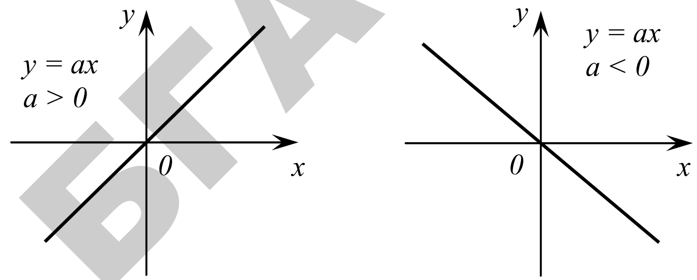


Рис. 17

$a\neq 0,\quad b\neq 0 \quad\Rightarrow\quad y=ax+b$ (рис. 18).

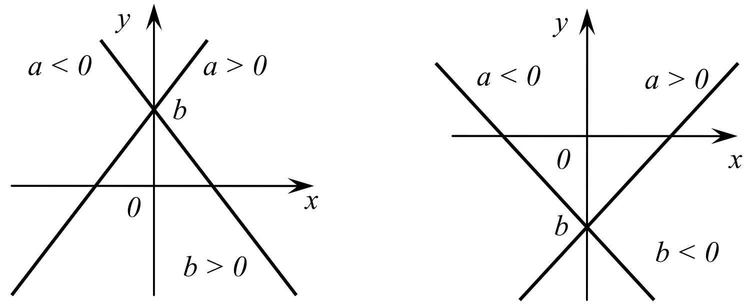


Рис. 18

$a=0,\quad b\neq 0 \quad\Rightarrow\quad y=b$ (рис. 19).

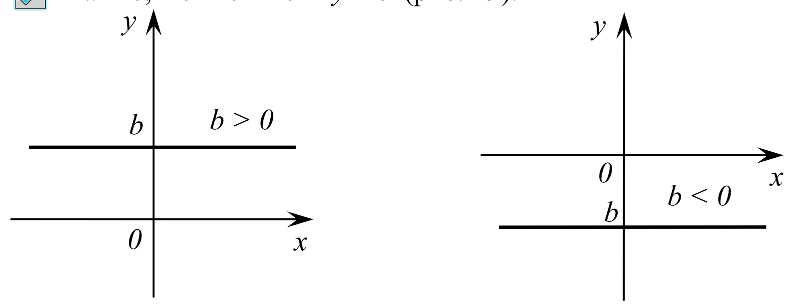


Рис. 19

$a = 0, \quad b = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ (рис. 20).

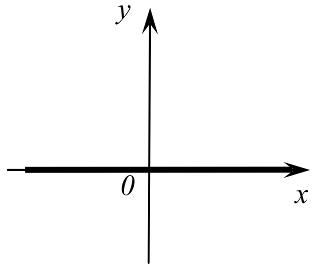


Рис. 20

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить уравнения:

1) $x+3=5$,

2) $3x-2=10$,

3) $2x-3=5x+2$,

4) $2(x-2)=3(2x+1)$,

5) $(3x+5)(3x-5)-(3x-5)^2=10$,

6) $\dfrac{x-2}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+7}{6}$.

№ 2 Решить уравнения:

а) $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x-2}$,

б) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{4}{1+x}=\dfrac{3-x^2}{1-x^2}$.

№ 3 Решить уравнения:

а) $|2x-3|=5$,

б) $5-|x|=3$,

в) $|2x-4|-|x|=12$.

№ 4 Построить графики функций:

а) $y=3x-6$,

б) $y=-3x+6$,

в) $y=3x+6$,

г) $y=-3x-6$.

№ 5 Построить графики функций:

1) $2x-y=1$,

2) $3x+y=6$,

3) $y=|2x-3|$,

4) $y=|x|-3$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Выучить слова и символы.

№ 2 Построить графики:

а) $y=2x$,

б) $y=-3x$,

в) $y=x+5$,

г) $y=-x-3$,

д) $y=4x+2$,

е) $y=|x|+|x-4|$.

№ 3 Решить:

$$\frac{8}{3p-3}-\frac{2+p}{p-1}=\frac{5}{2-2p}-\frac{5}{18}$$

V. Обобщающие задачи

№ 1 Вычислите:

а) $\left(\left(\dfrac{7}{9}-\dfrac{47}{72}\right):1,25+\dfrac{7}{40}\right):(0,358-0,108)\cdot 1,6-\dfrac{19}{25}$,

б) $\left(\dfrac{(2,7-0,8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2-1,7):\frac{3}{70}}+0,125\right):2\dfrac{1}{2}+0,43$,

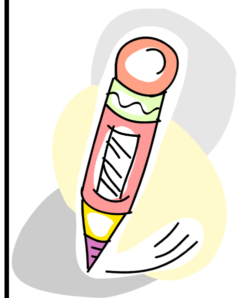
в) $((21,85:43,7+8,5:3,4):4,5):1\dfrac{2}{5}+1\dfrac{11}{21}$,

г) $\dfrac{(0,6)^0-(0,1)^{-1}}{\left(3:2^3\right)^{-1}\cdot(1,5)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$.

§ 17 *Системы линейных уравнений*

I. Новые слова:

1. *Система уравнений.*
2. *Равносильные системы.*
3. *Метод подстановки.*
4. *Метод сложения, вычитания.*
5. *Метод умножения, деления.*
6. *Метод введения новой переменной.*
7. *Графический метод.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Два уравнения с двумя переменными образуют *системy уравнений*.

Решением системы уравнений называется *пара чисел* $(x\,;y)$, которая удовлетворяет системе, т.е. при подстановке обращает уравнения в числовые тождества.

Решить систему – это значит найти множество всех решений системы.

Две системы называются *равносильными*, если их множества решений *совпадают*. Свойства равносильных систем совпадают со свойствами уравнений.

Методы решения систем:

***Метод подстановки*:**

Пример 17.1. Решите систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 5x-2y=4 \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения y, получим:

$$\begin{cases} y=7-2x \\ 5x-2y=4 \end{cases}$$

Подставим первое уравнение во второе уравнение:

$$\begin{cases} y=7-2x \\ 5x-2(7-2x)=4 \end{cases}$$

Решим второе уравнение: $9x=18 \Leftrightarrow x=2$

Подставим $x=2$ в первое уравнение: $y=7-2\cdot 2=3$

Ответ: $(2;3)$ – решение.

***Метод сложения*:**

Пример 17.2. Решите систему уравнений методом сложения:

$$\left.\begin{cases} 2x+3y=14 \\ 4x-3y=10 \end{cases}\right| +$$

Сложим первое и второе уравнения:

$$\begin{cases} 6x=24 \\ 4x-3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 4x-3y=10 \end{cases}$$

Подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} x=4 \\ 4\cdot 4-3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

Ответ: $(4;2)$ – решение.

Метод умножения:

Пример 17.3. Решите систему уравнений методом умножения:

$$\begin{cases} x^2y^3 = 16 \\ x^3y^2 = 2 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на второе уравнение и разделим первое на второе уравнение, получим два новых уравнения системы:

$$\begin{cases} x^5y^5 = 32 \\ \dfrac{y}{x} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy)^5 = 2^5 \\ y = 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ y = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 = 2 \\ y = 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{2} \\ y = \pm 4 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2}; -4\right)$; $\left(\dfrac{1}{2}; 4\right)$ – решение.

Метод введения новых переменных:

Пример 17.4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 51 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{y} = 8 \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = a \\ \dfrac{1}{y} = b \end{cases}$, получим

$$\begin{cases} 5a + 4b = 51 \\ a - 8b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8b + 8 \\ 5(8b+8) + 4b = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8b + 8 \\ 44b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = 10 \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{10} \\ y = 4 \end{cases}$

Ответ: $(0{,}1; 4)$ – решение.

Графический метод:

Пример 17.5. Решите систему уравнений графическим методом:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

Построим графики функций (рис. 21):

$x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$

$2x - 3y = 9 \Leftrightarrow 3y = 9 - 2x \Leftrightarrow y = 3 - \dfrac{2}{3}x$

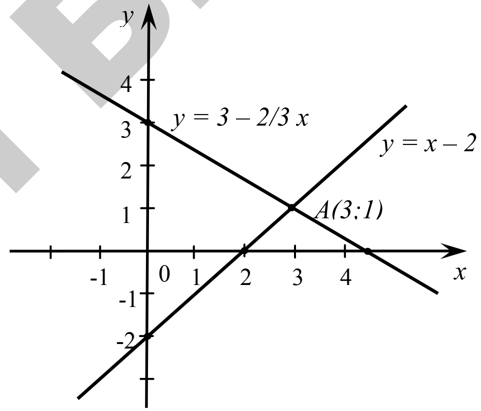


Рис. 21

$y = x - 2$ $\qquad$ $y = 3 - \frac{2}{3}x$

x	0	2
y	–2	0

x	0	4,5
y	3	0

Данный метод дает не всегда точный ответ.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить, применив метод подстановки:

1) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 5x + 6y = -7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

№ 2 Решить, применив метод сложения:

1) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 5x+6y=-7 \end{cases}$

№ 3 Решить, применив введение новых переменных.

1) $\begin{cases} \dfrac{15}{x}-\dfrac{7}{y}=9 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=35 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} \dfrac{10}{x-5}+\dfrac{1}{y+2}=1 \\ \dfrac{25}{x-5}+\dfrac{3}{y+2}=2 \end{cases}$, 3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{3}{8} \end{cases}$

№ 4 Решить системы графически.

1) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ y=3x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=5 \\ 3x-3y=15 \end{cases}$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Повторить слова, подготовится к диктанту.

№ 2 Решить:

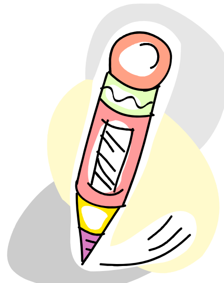
а) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=8, \\ \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-5=0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} y^2-xy=-12, \\ x^2-xy=28. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5, \\ x^{-2}+y^{-2}=13. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9, \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20. \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8. \end{cases}$

§ 18 *Квадратное уравнение*

I. Новые слова:



1. *Квадратное уравнение.*
2. *Коэффициенты.*
3. *Свободный член.*
4. *Дискриминант (D).*
5. *Корни уравнения.*
6. *Кратные(повторяющиеся) корни.*
7. *Теорема Виета.*
8. *Приведенное уравнение.*

II. Новые понятия, определения, обозначения

$ax^2+bx+c=0$ – *квадратное уравнение*. a, b – *коэффициенты*, c – *свободный член*.

Чтобы решить квадратное уравнение надо найти

$D=b^2-4ac$ – *дискриминант*, тогда если

$D>0$, $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ $(x_1 \neq x_2)$

$D=0$, $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$, (равные корни $x_1=x_2$)

$D<0$, нет корней.

Пример 18.1. $2x^2+x+3=0$

$D=1^2-4\cdot 2\cdot 3=-23<0 \Rightarrow$ нет решений.

Упрощенные квадратные уравнения, ***<u>способы их решения</u>***.

I. $ax^2+bx=0$

$x(ax+b)=0$

$x=0$ или $ax+b=0$

$x=-\dfrac{b}{a}$

II. $ax^2+c=0$

$ax^2=-c$

$x^2=-\dfrac{c}{a}$

если $-\dfrac{c}{a}\geq 0$: $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

если $-\dfrac{c}{a}<0$: $\varnothing$

Если в квадратном уравнении b кратное 2, то можно находить

$$D_1=\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac\text{, тогда }x_1=\frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{D_1}}{a},\quad x_2=\frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{D_1}}{2a}$$

$x^2+px+q=0$ – <u>*приведенное квадратное уравнение*</u>.

<u>Теорема Виета</u>: Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то справедливы равенства:

$$\boxed{\begin{cases}x_1\cdot x_2=c/a\\ x_1+x_2=-b/a\end{cases}}$$ (в полном квадратном уравнении)

<u>или</u>

$$\boxed{\begin{cases}x_1\cdot x_2=q\\ x_1+x_2=-p\end{cases}}$$ (в приведенном квадратном уравнении)

Если известны корни x_1 и x_2 квадратного уравнения, то квадратное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить уравнения:

1) $x^2=16$ 2) $x^2+9=0$ 3) $x^2+2x=0$

4) $(x-2)^2=0$ 5) $x^2+6x+9=0$ 6) $x^2-3x+2=0$

7) $3x^2+x-4=0$ 8) $7x^2-3=4x$

№ 2 Решить уравнения:

1) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{2x}{3}=\dfrac{x+5}{6}$ 2) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{5}{8}$

3) $\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{14}{x}=3$ 4) $\dfrac{1}{2-x}-1=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6-x}{3x^2-12}$

№ 3 Составить квадратное уравнение, если

а) $x_1=3;\ \ x_2=-1$ б) $x_1=\dfrac{3}{5};\ \ x_2=-\dfrac{3}{2}$

б) $x_1=2+\sqrt{3};\ \ x_2=2-\sqrt{3}$

№ 4 Разложить на множители:

а) $x^2+3x-10=$ $5x^2+x-4=$ б) $a^2-2ab-3b^2=$

№ 5 Разложить на множители:

1) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$ 2) $\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-1}$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Какое уравнение называется квадратным? Приведенным?
- Что называется дискриминантом?
- Сколько корней имеет квадратное уравнение и когда?
- О чем говорит теорема Виета?

№ 2 Решить:

1) $x^2-11x+10=0$ 3) $2x^2+5x+2=0$

2) $x^2-10x+25=0$ 4) $3x^2+2x+8=0$

№ 3 Решить:

$$\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$$

№ 4 Разложить на множители и сократить дроби.

1) $\dfrac{3a^2+2ab-b^2}{5a^2+6ab+b^2}$ 2) $\dfrac{a^2+3a-10}{a^2-3a+2}$

V. Обобщающие задачи

№ 1 Не решая уравнения $x^2-3x+2=0$, найти $x_1^2+x_2^2$, $x_1^2-x_2^2$, $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$, $x_1^3+x_2^3$, $\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$.

№ 2 В уравнении $(k-2)x^2+(k-5)x-5=0$ определить значения k так, чтобы:

а) $x_1+x_2=3$ б) $x_1\cdot x_2=-3$.

№ 3 Решите уравнения:

а) $\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{28}{15}$

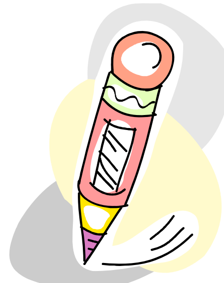
б) $3\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$

в) $(x+3)^3-(x+1)^3=56$

§ 19 Уравнения, приводящиеся к квадратным. Графики квадратичной функции

I. Новые слова:

1. Биквадратное уравнение.
2. Приводящееся уравнение.
3. Парабола.
4. Вершина параболы.
5. Координаты вершины.



II. Новые понятия, определения, обозначения

$ax^4+bx^2+c=0$ – биквадратное уравнение.

Чтобы его решить, введем новую вспомогательную переменную $y=x^2$ – замена, далее решить квадратное уравнение.

Пример 19.1. $4x^4-5x^2+1=0$

Пусть $x^2=y$ $(y\ge 0)$, тогда $x^4=y^2 \Rightarrow$ $4y^2-5y+1=0$

$$D=25-4\cdot4=9 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} y_1=\dfrac{5+3}{8}=1 \\ y_2=\dfrac{5-3}{8}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

Вернемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm1 \\ x=\pm\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-1; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 1\right\}$

Приводящиеся уравнения к квадратным.

Пример 19.2. $\left(x^2-2x\right)^2-7\left(x^2-2x\right)-8=0$

Пусть $x^2-2x=t$, тогда $t^2-7t-8=0$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=8 \\ t_2=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=8 \\ x^2-2x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-8=0 \ (1) \\ x^2-2x+1=0 \ (2) \end{array}\right.$$

$(1)\quad x^2-2x-8=0 \qquad\qquad (2)\quad x^2-2x+1=0$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=-2 \end{array}\right. \qquad\qquad x_{3,4}=1$$

Ответ: $\{1;-2;\ 4\}$

Пример 19.3. $x^4-\dfrac{50}{2x^4-7}=14$

Пусть $2x^4-7=t$, тогда $\dfrac{t+7}{2}-\dfrac{50}{t}=14 \Rightarrow t^2-21t-100=0$, при условии, что $t\neq 0$.

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-4 \\ t_2=25 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^4-7=-4 \\ 2x^4-7=25 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^4=3 \\ 2x^4=32 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^4=\dfrac{3}{2} \\ x^4=16 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}} \\ x=\pm\sqrt[4]{16} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}} \\ x=\pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{\frac{3}{2}},\quad x_{3,4}=\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$$

Ответ: $\left\{-2;-\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}};\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}};2\right\}$

Квадратичная функция и ее график.

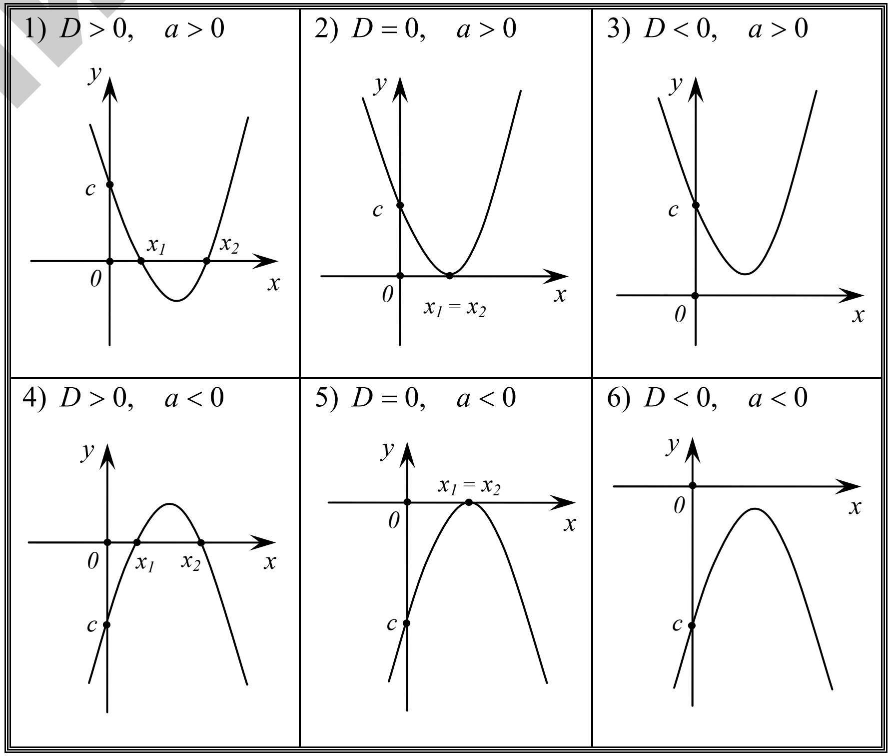
Пусть задана функция:

$$\boxed{y=ax^2+bx+c}.$$

Если b четное число, то корни уравнения проще находить по следующим формулам:

$$D_1=\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac\text{, тогда}\quad x_1=\frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{D_1}}{a},\quad x_2=\frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{D_1}}{a}$$

Графиком данной функции будет *парабола*, которая выглядит следующим образом.



Построение графиков.

Пример 19.4. Построить график функции $y=-x^2+4x-3$

Найдем точки пересечения с осями:

OX: $y=0$, $-x^2+4x-3=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$

OY: $x=0$, $y=-3$. Получим точки $(1;0);(3;0);(0;-3)$

Найдем вершину параболы, используя формулы:

$$\boxed{x_{b.n}=\frac{-b}{2a}=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_{b.n}=c-\frac{b^2}{4a}}$$

$$x_{b.n}=\frac{1+3}{2}=2 \qquad y_{b.n}=-3-\frac{4^2}{4\cdot(-1)}=1$$

Получим точку $(2;1)$

Найдем промежутки монотонности (убывания и возрастания)

$(-\infty;2)$ – возрастает, $(2;+\infty)$ – убывает

По полученным точкам строим график функции (рис. 22).

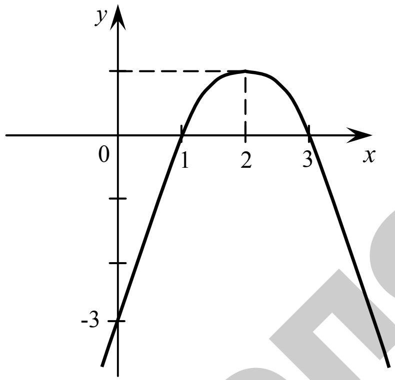


Рис. 22

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить уравнения:

1) $(x^2-1)^2-4(x^2-1)+3=0$

2) $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)-3=0$

3) $5x^4+2x^2-2=0$

4) $7x^4+6x^2-1=0$

№ 2 Построить графики:

1) $y=x^2+1$

2) $y=(x+2)^2$

3) $y=(x-1)^2-4$

4) $y=x^2-x+2$

5) $y=-x^2+4x-4$

6) $y=2x^2-4x+5$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Какая функция называется квадратичной?
- Как называется график квадратичной функции?
- Как найти координаты вершины параболы?

№ 2 Построить графики:

1) $y=x^2-7$

2) $y=(x+3)^2+2$

3) $y=\frac{1}{4}x^2+x+1$

4) $y=x^2-5|x|+4$

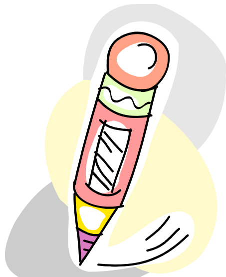
5) $y=|x^2-6x-7|$

6) $y=|x^2-3|x|-4|$

§ 20 *Иррациональные уравнения*

I. Новые слова:

1. *Иррациональные уравнения.*
2. *Уравнения с корнем.*
3. *Корень n-ой степени.*
4. *Возвести в n-ю степень.*
5. *Проверка корней.*
6. *Подстановка.*
7. *Область допустимых значений.*
8. *Ложный корень.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ – *иррациональное уравнение*.

Чтобы решить иррациональное уравнение, необходимо:

- Возвести обе части уравнения в степень корня и решить.
- Проверить полученные значения
  - подстановкой или
  - по ОДЗ.

Пример 20.1. $\sqrt{\dfrac{x^2-3}{4}} = x-1$ – иррациональное уравнение.

Пример 20.2. $x^2-4=x$ – не иррациональное уравнение.

Пример 20.3. $\sqrt{x} = \dfrac{x^4-1}{x}$ – иррациональное уравнение.

Способы решения иррациональных уравнений.

1-ый способ

$\sqrt{f(x)} = g(x)$

1) $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = g^2(x)$

$f(x) = g^2(x)$

Найдем корни $x_1,\ x_2 \ldots$

2)Проверим подстановкой в исходное уравнение.

2-ый способ

$\sqrt{f(x)} = g(x)$

1) ОДЗ: $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

2) $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = g^2(x)$

Найдем корни $x_1,\ x_2 \ldots$

3) $x_1 \in$ ОДЗ, $x_2 \notin$ ОДЗ (ложный корень) и т.д.

3-ый способ

$\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \\ \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = g^2(x) \end{cases}$

Решить систему.

Пример 20.4. $\sqrt{2-x} = x$

$\left(\sqrt{2-x}\right)^2 = x^2 \Rightarrow 2-x = x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=1 \end{array}\right.$

Проверим: $x_1=-2 \Rightarrow \sqrt{2-(-2)} \ne -2$ – ложный корень.

$x_2=1 \Rightarrow \sqrt{2-1}=1$ – корень

Ответ : $x=1$

Пример 20.5. $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=2$

$\sqrt{x+4} = 2-\sqrt{x} \Rightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2 = \left(2-\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x+4 = 4-4\sqrt{x}+x \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$

Проверим: $\sqrt{0}+\sqrt{0+4}=2$ – верно.

Ответ: $\{0\}$

Пример 20.6. $\sqrt[3]{x-1}=2$

$\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 = 2^3 \Rightarrow x-1=8 \Rightarrow x=9$

Здесь нет ложных корней. т.к. ОДЗ $=\{x \in R\}$

Ответ: $x = 9$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить уравнения:

1) $\sqrt{1+x-x^2} = x-1$

2) $\sqrt{7x-3}+3 = x$

3) $x+\sqrt{x-1}-3=0$

4) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-6}=1$

5) $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1$

6) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-12}=5$

7) $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1$

8) $\sqrt{11+\sqrt[3]{x^2+61}}=4$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Какое уравнение называется иррациональным?
- Какой корень называется ложным?
- Что такое ОДЗ для уравнения?
- Как выполнить проверку для корней?

№ 2 Решить уравнения:

1) $x-\sqrt{x}-6=0$

2) $\sqrt{x-7}-\dfrac{6}{\sqrt{x-7}}=1$

3) $\sqrt{x}+\sqrt{x-24}=6$

4) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$

5) $\sqrt[5]{(5x+2)^3}-\dfrac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}}=6$

V. Обобщающие задачи

№ 1 При каком $a>0$ уравнение $x^2+2(a-2)x+9=0$ имеет равные корни?

№ 2 Найдите c в уравнении $-2x^2+3x-c=0$, если один из его корней равен 2.

№ 3 При каких a уравнение $2ax-6=3a+5x$ не имеет решений?

№ 4 При каком a система $\begin{cases} x+27y=4,5 \\ 2x+(a+1)y=-1 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

Подсказка!

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

1) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ – система имеет бесконечное множество решений.

2) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ – система не имеет решений.

3) $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ – система имеет единственное решение.

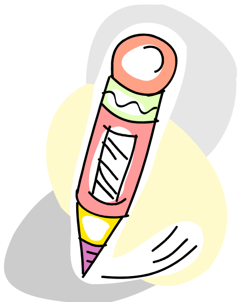
№ 5 Решите и найдите $x+y$

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \\ \sqrt{xy}=2 \end{cases}$$

§ 21 *Неравенства*

I. Новые слова:

1. *Неравенство.*
2. *Больше (>).*
3. *Больше либо равно (≥).*
4. *Меньше (<).*
5. *Меньше либо равно (≤).*
6. *Положительные числа (> 0).*
7. *Отрицательные числа (< 0).*
8. *Двойное неравенство.*
9. *Штриховка.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Выражение, связанные знаком $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, называется <u>*неравенством*</u>.

- $a < b$, если $a - b < 0$ (разность a и b отрицательна).
- $a > b$, если $a - b > 0$ (разность a и b положительна).

Свойства неравенств.

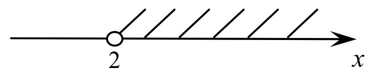
- $a > b \;\Rightarrow\; b < a$
- $a > b,\; b > c \;\Rightarrow\; a > c$
- $a > b,\; c > 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$
- $a > b,\; c < 0 \;\Rightarrow\; ac < bc$ (При умножении и делении на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный)

- $\left[\begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array}\right. \;\Rightarrow\; a + c > b + d$
- $\left[\begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array}\right. \;\Rightarrow\; a - c > b - d$
- $a > b \;\Rightarrow\; a^n > b^n$
- $a > b \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Решить неравенство, значит найти множество решений.

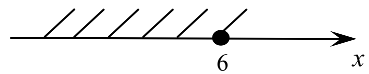
Решить неравенство можно <u>***аналитически и графически***</u>.

1. $2x > 4 \;\Rightarrow\; x > 2$



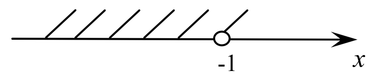
$x \in (2; +\infty)$

2. $3x \leq 18 \;\Rightarrow\; x \leq 6$



$x \in (-\infty; 6]$

3. $-4x > 4 \;\Rightarrow\; x < -1$

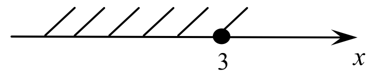


$x \in (-\infty; -1)$

Решение *линейных неравенств, систем неравенств.*

Пример 21.1. $x + 2 \geq 3x - 4$

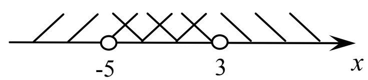
$x - 3x \geq -4 - 2 \Rightarrow -2x \geq -6 \Rightarrow x \leq 3$



Ответ: $x \in (-\infty; 3]$

Пример

21.2. $\begin{cases} -2x + 1 > -3x - 4 \\ x - 4 < -2x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3x > -4 - 1 \\ x + 2x < 5 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x < 3 \end{cases}$



Ответ: $x \in (-5; 3)$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить неравенства и найти наибольшее целое x:

а) $0,01(1-3x)>0,02+3,01$ б) $3-7x\ge x-5$

в) $\dfrac{7-6x}{2}-\dfrac{8x+1}{3}<-12-10x$ г) $|5-x|\le 12$

д) $2<\dfrac{6-4x}{5}<10,8$

№ 2 Найти область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{4-2x}$ б) $f(x)=\sqrt[6]{4-x}-\sqrt{5x-20}$

в) $f(x)=\sqrt[3]{x+7}-\dfrac{2}{\sqrt{x+2}}$

№ 3 Решить систему неравенств:

$$\begin{cases}5x-3>1+x\\ 0,5x-3x<\dfrac{2x}{3}-5\end{cases}$$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Какое выражение называется неравенством?
- Какие вы знаете свойства неравенств?

№ 2 Решить неравенства:

а) $6,5<\dfrac{7x+6}{2}\le 20,5$ б) $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{3x-1}{2}>1$

в) $-4<-2x+4\le 10$

§ 22 *Дробно-рациональные неравенства, неравенства с модулем*

I. Новые слова:

1. *Дробно-рациональное неравенство.*
2. *Метод интервалов.*
3. *Нули функции.*
4. *Повторяющиеся (кратные) нули.*
5. *Чередование знака.*
6. *Старшая степень.*

II. Новые понятия, определения, обозначения

Дробно-рациональные неравенства.

1. $\dfrac{ax+b}{cx+d}>0$

2. $\dfrac{ax+b}{cx+d}>k \;\Rightarrow\; \dfrac{ax+b}{cx+d}-k>0 \;\Rightarrow\; \dfrac{ax+b-k(cx+d)}{cx+d}>0$

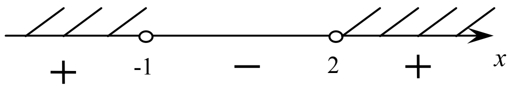
Решаем данные неравенства *методом интервалов*.

Запомнить!

1. Находим нули, т.е.точки в которых функция обращается в 0 и точки в которых функция не существует.
2. Расставляем эти точки на числовую прямую.
3. Раскрашиваем согласно знака неравенства полученные точки.
4. Проверяем наличие кратных нулей. (повторяющиеся корни)
5. Расставляем знак чередования функции (исключения в чередовании знаков составляют кратные нули)
6. Штриховкой отвечаем на вопрос неравенства (смотрим на последнее неравенство)

Пример 22.1. $\dfrac{x+1}{x-2}>0$

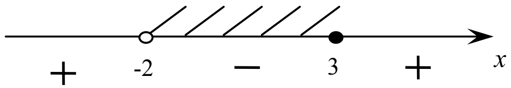
$x_1=-1,\ \ x_2=2$



$x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$

Пример 22.2. $\dfrac{x-3}{x+2}\le 0$

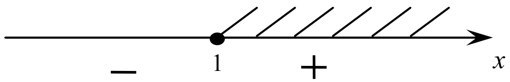
$x_1=3,\ \ x_2=-2$



$x\in(-2;3]$

Пример 22.3. $\dfrac{x+1}{x-1}\ge 1$

$\dfrac{x+1}{x-1}-1\ge 0\Rightarrow$



$\Rightarrow\dfrac{x+1-x+1}{x-1}\ge 0\Rightarrow\dfrac{2}{x-1}\ge 0$

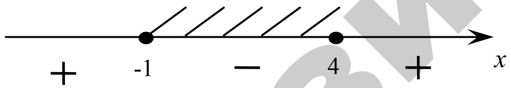
$x\in(1;+\infty)$

Рациональные неравенства.

Решаем тем же методом интервалов.

Пример 22.4. $x^2-3x-4\le 0$

$x_1=4,\ \ x_2=-1$

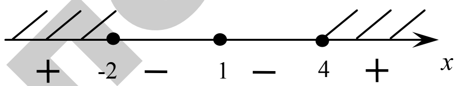


$x\in[-1;4]$

Пример 22.5. $(x-1)^2(x+2)(x-4)\ge 0$

$x_{1,2}=1,\ \ x_3=-2,\ \ x_4=4$

кратный



$x\in(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$

Неравенства с модулем.

Решаем по следующим свойствам:

1. $|a|\le b\Rightarrow\begin{cases}a\le b\\ a\ge -b\end{cases}$ (пересечение решений)

2) $|a|\ge b\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\ge b\\ a\le -b\end{array}\right.$ (объединение решений)

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить квадратные неравенства методом интервалов и графически:

а) $x^2-3x+2<0$ б) $x^2+x-6\ge 0$

в) $x^2-6x+9<0$ г) $4x^2+4x+1\ge 0$

д) $5x^2-3x-2>0$

№ 2 Решить методом интервалов:

а) $(x^2-1)(x+3)\ge 0$, б) $(x-3)(x+1)^3(x-2)^2>0$,

в) $(x^2-5x+6)(x^2+5x+4)\le 0$, г) $(x^2-2x+5)(x^2-x-6)>0$,

д) $(x-1)(x+2)^3(x-3)^2<0$.

№ 3 Решить дробно-рациональные неравенства:

а) $\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-2}>0$ б) $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-4x+3}\le 0$

в) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$ г) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\ge 1$

д) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+3}\ge 0$

№ 4 Решить системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ 2x - 6 > 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 > 0 \\ x^2 - 9 \le 0 \end{cases}$

№ 5 Решить системы неравенств:

а) $|x+1| < 2$ б) $|x-3| > 5$

в) $|2x+1| < -5$ г) $-|x+2| > 3$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Что такое неравенство?
- Как читаются знаки $>, <, \ge, \le$?
- Что такое метод интервалов?

№ 2 Решить неравенства:

а) $\dfrac{2x+1}{x-3} < 0$ б) $\dfrac{4x+7}{x+1} \ge 0$

в) $\dfrac{1}{2}(x+2)^2 > 0$ г) $\dfrac{1}{3}(x-5)^2 \ge 0$

д) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 4} \le 0$ е) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2 - 1} < 1$

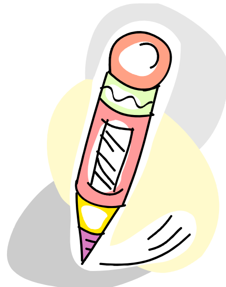
№ 3 Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} |x-1| > 2, \\ 3x^2 - 2x - 1 < 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} > 1, \\ x^2 < 49. \end{cases}$

§ 23 *Иррациональные неравенства*

I. Новые слова:

1. *Иррациональное неравенство.*
2. *Схема решения.*
3. *Система неравенств.*
4. *Совокупность систем.*
5. *Общее решение.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

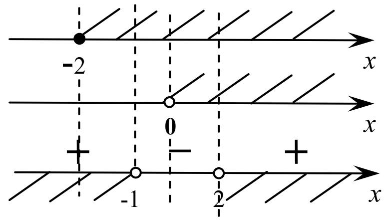
Иррациональные неравенства.

1. $\sqrt{f(x)} < g(x)$	2. $\sqrt{f(x)} > g(x)$
$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 < g^2(x) \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 > g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Решаем иррациональные неравенства с помощью данных схем.

Пример 23.1. $\sqrt{x+2} < x$

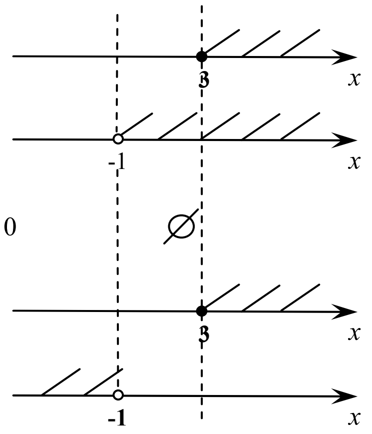
$\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ x > 0 \\ (x+2)^2 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \\ x_1 = 2, \ x_2 = -1 \end{cases}$



Общее решение: $x \in (2; +\infty)$

Пример 23.2. $\sqrt{x-3}<x+1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\ge 0\\ x+1>0\\ \left(\sqrt{x-3}\right)^2>(x+1)^2\end{cases}\\ \begin{cases}x-3\ge 0\\ x+1<0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3\\ x>-1\\ x^2+x+4<0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3\\ x<-1\end{cases}\end{array}\right.$$



Из рисунка следует, что общее решение: $\varnothing$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить неравенства.

а) $\sqrt{x^2-x-12}<x$ б) $8-2x-\sqrt{x+1}<4$

в) $\sqrt{3x+1}+2x>4$

№ 2 Решить смешанные неравенства.

а) $\left(x^2-4x-5\right)\sqrt{x^2-x-12}\ge 0$ б) $(x-1)\sqrt{-x^2+x+2}\le 0$

в) $\left(x^2-6x+5\right)\sqrt{x^2-10x-24}\ge 0$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Решить неравенства.

а) $\sqrt{9x-20}<x$ б) $\sqrt{3x+1}+2x<4$

№ 2 Повторить слова по теме «Неравенства».

§ 24 *Показательная функция*

I. Новые слова:

1. *Показательная функция.*
2. *Основание.*
3. *Показатель степени.*
4. *Возрастающая функция.*
5. *Убывающая функция.*
6. *Вынесение общего множителя за скобку.*
7. *Сведение к квадратному уравнению.*
8. *Переход к новому основанию.*

II. Новые понятия, определения, обозначения

$y=a^x$, a – <u>*основание*</u>, x – <u>*показатель степени*</u>.(рис. 23)

ОДЗ: $a\ne 1$, $a>0$.

ПОДСКАЗКА!

$x_2>x_1$, а $f(x_2)>f(x_1)$
возрастающая функция

$x_2>x_1$, а $f(x_2)<f(x_1)$
убывающая функция

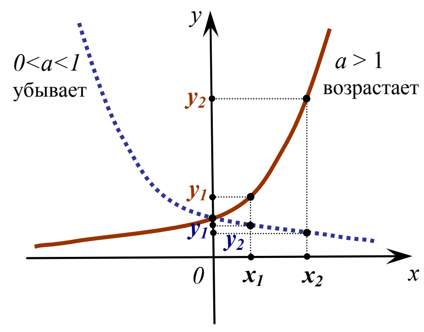


Рис. 23

Свойства показательной функции.

$1^\circ\ a^0=1$	$6^\circ\ a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$
$2^\circ\ a^1=a$	$7^\circ\ \dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
$3^\circ\ a^n\cdot a^m=a^{n+m}$	
$4^\circ\ (a^n)^m=a^{m\cdot n}$	$8^\circ\ a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$
$5^\circ\ \dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	$9^\circ\ a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

Пример 24.1. $2^3\cdot 8:64^2=\dfrac{2^3\cdot 2^3}{(2^3)^2}=\dfrac{2^6}{2^6}=1$

Способы решения показательных уравнений:

Решение по определению

$$\boxed{a^x=a^y\ \text{т.к.}\ \ a=a,\Rightarrow x=y}$$

(если основания равны, то равны и показатели степени)

Пример 24.2. $2^x=8\Rightarrow 2^x=2^3\Rightarrow x=3$

Пример 24.3. $0{,}1\cdot 10^x=1000\Rightarrow 10^{-1}\cdot 10^x=10^3\Rightarrow 10^{x-1}=10^3\Rightarrow$
$\Rightarrow x-1=3\Rightarrow x=4$

Вынесение общего множителя за скобки

$$\boxed{a^{x+1}+a^x=c\Rightarrow a^x(a+1)=c\Rightarrow a^x=\frac{c}{(a+1)}}$$

Далее решаем по определению

Пример 24.4. $7^{x+3}-7^x=2394\Rightarrow 7^x(7^3-1)=2394\Rightarrow$

$\Rightarrow 7^x(7^3-1)=2394\Rightarrow 7^x(343-1)=2394\Rightarrow 7^x=\dfrac{2394}{342}=7\Rightarrow x=1$

Сведение к квадратному уравнению

А. $a^{2x}+b\cdot a^x+c=0$ $a^x=t$ $t^2+b\cdot t+c=0$ Находим $t_1,\ t_2\ \Rightarrow\left[\begin{array}{l}a^x=t_1\\ a^x=t_2\end{array}\right.$ решаем по определению	Б. $a^x+b\cdot a^{-x}+c=0$ $a^x+\dfrac{b}{a^x}+c=0$ $a^x=t\Rightarrow t+\dfrac{b}{t}+c=0.$ сведем к А) случаю.

Пример 24.5.

$4^x-3\cdot 2^x+2=0$

$2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0$

$2^x=t>0$ (замена)

$t^2-3\cdot t+2=0$

$\left[\begin{array}{l}t_1=2\\ t_2=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=2\\ a^x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\end{array}\right.$

(вернулись к старой переменной)

Пример 24.6. $3^x-3^{-x}=\dfrac{8}{3}$

$3^x-\dfrac{1}{3^x}=\dfrac{8}{3}\Rightarrow 3\cdot 3^{2x}-8\cdot 3^x-3=0$

$3^x=t>0\Rightarrow 3t^2-8\cdot t-3=0$

$\left[\begin{array}{l}t_1=3\\ t_2=-\dfrac{1}{3}<0\end{array}\right.$

$3^x=3\Rightarrow x=1$

Переход к новому основаниию

$$\boxed{\begin{array}{c}a^x=b^x\,\big|:b^x\\ \dfrac{a^x}{b^x}=1\Rightarrow\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=1\Rightarrow x=0\end{array}}$$

Пример 24.7. $2^x=3^x\cdot\dfrac{2}{3}$ (разделим на 3^x)

$\dfrac{2^x}{3^x}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\dfrac{2}{3}$ (получили новое дробное основание)

Ответ: $x=1$

Пример 24.8. $2^{x+3}-3^{x}=3^{x+1}-2^{x}$

$2^{x+3}+2^{x}=3^{x+1}+3^{x}$ (перегрупировали)

$2^{x}(8+1)=3^{x}(3+1)\Rightarrow 2^{x}\cdot 9=3^{x}\cdot 4$ (разделим на $9\cdot 3^{x}$)

$$\frac{2^{x}}{3^{x}}=\frac{4}{9}\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\Rightarrow x=2$$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить уравнения.

а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{x+2}=\frac{9}{16}$ б) $4^{x^{2}-x+1}=8^{x}$

в) $2^{x+3}+2^{x+1}=80$ г) $13\cdot 4^{x}-3^{x+2}=7\cdot 3^{x}+4^{x+1}$

д) $3^{x}-3\cdot 3^{x-3}=8$ е) $5^{x+6}-3^{x+7}=43\cdot 5^{x+4}-19\cdot 3^{x+5}$

ж) $2\cdot 9^{x}-17\cdot 3^{x}=9$ з) $4^{x}+3\cdot 2^{x}=10$

№ 4 Решить систему уравнений.

$$\begin{cases}2^{x}+2^{y}=6\\ x+y=3\end{cases}$$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Решить уравнения.

а) $3^{\frac{2-x}{x-5}}=\frac{1}{9}$ б) $2^{x^{2}}=\frac{16^{2}}{4^{x}}$ в) $5^{x+1}+5^{x-1}-5^{x}=105$

г) $5^{x+1}+5^{-x}=6$ д) $5^{x+6}-3^{x+7}=43\cdot 5^{x+4}-19\cdot 3^{x+5}$

№ 2 Решить систему уравнений.

$$\begin{cases}3^{x}+3^{y}=36\\ x+y=5\end{cases}$$

§ 25 *Показательные неравенства*

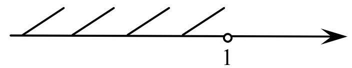
I. Новые определения, понятия

Если $a^{x}>a^{y}\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}x>y, & a>1\\ x<y, & 0<a<1\end{array}\right.$

Показательные неравенства решаются по данной схеме, способы решения такие же как и в уравнениях.

Пример 25.1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, так как $a=\frac{1}{2}<1$, то получаем

$2x-3<-2$ (меняем знак)

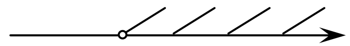


$2x<1\Rightarrow x<\frac{1}{2}$

$x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$

Пример 25.2. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1}>\sqrt{3}\Rightarrow\left(3^{-2}\right)^{-3x+1}>3^{\frac{1}{2}}\Rightarrow 3^{6x-2}>3^{\frac{1}{2}}$ так как $a=3>1$ знак сохраняем и получим:

$6x-2>\frac{1}{2}\Rightarrow 6x>2{,}5\Rightarrow x>\frac{5}{12}$



$x\in\left(\frac{5}{12};+\infty\right)$

II. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить показательные неравенства.

а) $3^{\frac{2x+1}{5}}<\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^{2}+6x-27}>1$

в) $(0,2)^{\frac{x(x+2)}{5}} > (0,04)^{\frac{3}{10}}$ г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geq \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$

№ 2 Решите неравенства:

а) $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} > 700$ б) $2^x - 2^{x+1} + 2^{x+2} \geq 96$

в) $3^x + 10^{x-2} > 19 \cdot 3^{x-2} + 10^{x-3}$

№ 3 Решите неравенства:

а) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$

б) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$

III. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Какие уравнения называются показательными?
- Назовите свойства показательной функции.
- Какая функция называется убывающей (возрастающей)?
- Назовите способы решения уравнений и неравенств.

№ 2 Решите неравенства.

а) $(0,4)^{x-1} < (6,25)^{6x-5}$ б) $(0,35)^{\frac{x^2+4x+3}{x+5}} > 1$

в) $5^x + 5^{x+1} - 3^x - 3^{x+3} > 3^{x+1} - 5^{x+2}$

г) $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$

№ 3 Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

§ 26 *Логарифмическая функция*

I. Новые слова:

1. *Логарифм.*
2. *Основание.*
3. *Выражение стоящее под логарифмом.*
4. *Показатель степени.*
5. *Коэффициент.*
6. *Переход к новому основанию.*
7. *Последовательные логарифмы.*

II. Новые понятия, определения, обозначения

$\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$ – определение ***логарифма***.

Читаем «*Логарифм числа “b” по основанию “a” равен ”c”, если “a” в степени “c” равно “b”*»

ОДЗ: $\begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

$y = \log_a x$ – *логарифмическая функция* (рис. 24).

При $a > 1$ –функция возрастает,

при *0<a<1* – функция убывает.

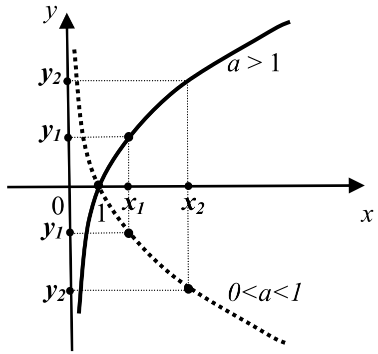


Рис. 24

Свойства и основные формулы.

$1^\circ\ a^{\log_a b} = b$	$6^\circ\ \log_a x^n = n \cdot \log_a x$
$2^\circ\ \log_a a = 1$	$7^\circ\ \log_{a^m} x = \dfrac{1}{m} \cdot \log_a x$
$3^\circ\ \log_a 1 = 0$	$8^\circ\ \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
$4^\circ\ \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ (логарифм произведения равен сумме логарифмов)	$9^\circ\ \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (переход к новому основанию)
$5^\circ\ \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ (логарифм частного равен разности логарифмов)	$10^\circ\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\lg x = \log_{10} x$ (десятичный логарифм)
$\ln x = \log_e x$ (натуральный логарифм)

Вычисление выражений с логарифмами по их свойствам.

Примеры 26.1. $2^{\log_2 3} = 3$ **26.2.** $2^{2-\log_2 5} = 2^2 : 2^{\log_2 5} = 4/5$

26.3. $10^{\lg\frac{3}{5}+\lg 5} = 10^{\lg\left(\frac{3}{5}\cdot 5\right)} = 10^{\lg 3} = 3$

26.4. $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5} = \log_2\left(\log_5 5^{\frac{1}{8}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{8}\log_5 5\right) = \log_2 \frac{1}{8} = -3$

Решение логарифмических уравнений.

Решение по определению

Пример 26.5. $\log_2 (x+1) = 3 \Rightarrow x+1 = 2^3 \Rightarrow x+1 = 8 \Rightarrow x = 7 \in ОДЗ$

$ОДЗ\ \ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$ Ответ: $x = 7$

Пример 26.6. $\log_{4-x} 5 = \frac{1}{2} \Rightarrow 5 = (4-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 5^2 = \left(\sqrt{4-x}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - x = 25 \Rightarrow x = -21 \in\ ОДЗ$

$ОДЗ\ \begin{cases} 4-x>0 \\ 4-x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x\neq 3 \end{cases}$ Ответ: $x = -21$

Сведение к квадратному уравнению

Пример 26.7. $\lg^2 x - 11 \cdot \lg x + 10 = 0$

Замена $\lg x = t\ \Rightarrow t^2 - 11t + 10 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 10 \\ t_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 10 \\ \lg x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10^{10} \in ОДЗ \\ x = 10 \quad \in ОДЗ \end{array}\right.$

$ОДЗ\ \ x > 0$ Ответ: $x_1 = 10^{10},\ x_2 = 10$

Переход к новому основанию

Пример 26.8. $\log_2 x + \log_8 x = 4$

$\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8} = 4 \Rightarrow \log_2 x + \dfrac{1}{3}\log_2 x = 4 \Rightarrow \dfrac{4}{3}\log_2 x = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 x = 4 : \dfrac{4}{3} = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8 \in ОДЗ$

$ОДЗ\ \ x > 0$ Ответ: $x = 8$

Последовательные логарифмы

Пример 26.9. $\log_2 \log_3 (x+1) = 2$

$\log_3 (x+1) = 2^2 = 4 \Rightarrow x+1 = 3^4 = 81 \Rightarrow x = 81 - 1 = 80 \in ОДЗ$

$ОДЗ\ \ x > 0$ Ответ: $x = 80$

Смешанные уравнения

Пример 26.10. $\log_2 \left(2^x + 1\right) = 3\ \ :\ \ ОДЗ\ x \in R$

$2^x + 1 = 2^3 \Rightarrow 2^x + 1 = 8 \Rightarrow x = \log_2 7$ Ответ: $x = \log_2 7$

Пример 26.11. $x^{\log_2 x}=8$: *ОДЗ* $x>0$

$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8\Rightarrow\log_2 x\cdot\log_2 x=3\Rightarrow(\log_2 x)^2=3\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=\sqrt{3}\\ \log_2 x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}x_1=2^{\sqrt{3}} & \in ОДЗ\\ x_2=2^{-\sqrt{3}} & \in ОДЗ\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=2^{\sqrt{3}},\ x_2=2^{-\sqrt{3}}$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Вычислите:

а) $\log_{7^3}49^4-\frac{1}{3}\cdot 2^{\log_2 8}=$ б) $\log_{\frac{1}{3}}\log_3 27=$

в) $-6^{\log_6 3}-\log_{6^2}36=$

№ 2 Решите уравнения.

а) $2^{\log_4 9}=\log_2(4-2x)$ б) $\lg 5-\lg(x-3)=1-\frac{1}{2}\lg(3x+1)$

в) $\log_{3-x}5-\frac{1}{2}=0$ г) $\log_{\sqrt{6-x}}3-2=0$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Решить уравнения.

а) $\log_2\log_3(x+1)=2$

б) $\log_7\log_3\log_2\log_2 x=0$

в) $2\log_4 x+2\log_x 4=5$

г) $\log_3(4\cdot 3^x-1)=2x+1$

д) $x^{\lg x+2}=1000$

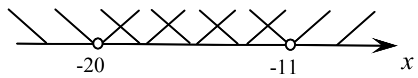
§ 27 *Логарифмические неравенства*

I. Новые понятия, определения, обозначения

Если $\log_a x>\log_a y\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}x>y, & a>1\\ x<y, & 0<a<1\end{array}\right.$ ОДЗ: $\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$

Неравенства решаются по данной схеме, а способы решения такие же как и у уравнений.

Пример 27.1. $\log_3(x+20)<2\Rightarrow\begin{cases}x+20>0\\ x+20<3^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-20\\ x<-11\end{cases}$

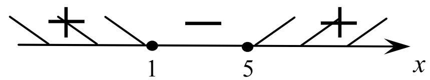


Ответ: $x\in(-20;-11)$

Пример 27.2. $\log_{\frac{1}{3}}\log_4\left(x^2-6x+9\right)\le 0$

$$\begin{cases}x^2-6x+9>0\\ \log_4\left(x^2-6x+9\right)>0\\ \log_{\frac{1}{3}}\log_4\left(x^2-6x+9\right)\le\log_{\frac{1}{3}}1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-6x+9>0\\ x^2-6x+9>1\\ \log_4\left(x^2-6x+9\right)\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-6x+9>0\\ x^2-6x+9>1\\ x^2-6x+9\ge 4\end{cases}\Rightarrow$$

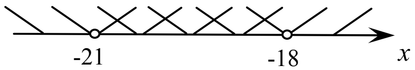
$\Rightarrow x^2-6x+9\ge 4\Rightarrow x^2-6x+5\ge 0\Rightarrow x_1=5,\quad x_2=1.$



Ответ: $x\in(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$

Пример 27.3. $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{3}+7\right)>0\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{3}+7>0\\ \frac{x}{3}+7<\left(\frac{1}{3}\right)^0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{3}>-7\\ \frac{x}{3}+7<1\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -21 \\ x < -18 \end{cases}$$



Ответ: $x \in (-21; -18)$

II. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Вычислить.

а) $\log_2 2\sqrt{2}$ б) $2^{\log_4 25}$

в) $\sqrt{3}^{4+\log_{1/9} 625}$ г) $\log_4 12 + \log_{\frac{1}{4}} 3$

д) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

№ 2 Решить неравенства.

1) $\log_2\left(2x^2 - 4x + 6\right) \le 2$ 2) $\log_{\frac{2x-1}{x-3}} 3 > 0$

3) $\lg^2 x + 3\lg x - 4 \ge 0$ 4) $\log_{0,7} \dfrac{2x-5}{x+4} > 1$

5) $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \dfrac{x^2 - 2x}{x-3} \le 0$ 6) $\log_{0,5}(x+1) > \log_2(2-x)$

7) $\log_5(5-x) \le 2$ 8) $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \le 0$

9) $\log_{x-3}\left(x^2 - 4x + 3\right) < 0$ 10) $\log_x(2x-3) < 1$

11) $2\log_2(x+2) < \log_2(x+5) + 2$

12) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \log_9(x+2) > -\dfrac{3}{2}$

III. Домашнее задание:

№ 1 Вычислить.

а) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \dfrac{1}{125}$ б) $3^{2+\log_3 2}$

в) $-\log_{4^3} 16^6 - 4^{\log_4 5}$ г) $\log_8 12 + \log_{\frac{1}{8}} 3$

№ 2 Решить уравнения.

а) $3^x \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\dfrac{1}{27}\right)^x$ б) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$

в) $9^{x+1} - 27 = \dfrac{26}{3} \cdot 3^{x+2}$ г) $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$

№ 3 Решить неравенства.

а) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$ б) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\dfrac{9}{49}\right)^{x+1,5}$

в) $2^{x+3} + 3 \cdot 5^x < 3 \cdot 2^x + 5^{x+1}$

№ 4 Решить уравнения.

1) $\lg \dfrac{5}{x-3} = \lg \dfrac{10}{\sqrt{3x+1}}$ 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 5x + 6\right) > -1$

4) $\log_{1,5} \dfrac{2x-8}{x-2} < 0$ 4) $\log_{18} \log_2 x = 0$

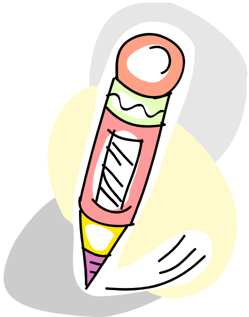
№ 5 Решить системы уравнений.

1) $\begin{cases} \log_3(x-y) = 1 \\ \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 - y^2\right) = -3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0 \end{cases}$

§ 28 *Тригонометрические функции*

I. Новые слова:

1. *Синус* $(\sin)$.
2. *Косинус* $(\cos)$.
3. *Тангенс* (tg).
4. *Котангенс* (ctg).
5. *Период* (T).
6. *Градусы* $(^{\circ})$.
7. *Радианы.*
8. *Формулы приведения.*
9. *Четность, нечетность.*
10. *Четверти.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Тригонометрические функции:

$$\boxed{y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\mathrm{tg}\,x,\quad y=\mathrm{ctg}\,x.}$$

x – аргумент, измеряется в радианах или градусах:

Перевод градусов в радианы: $\pi=180^{\circ}$

Основные углы:

$$\boxed{\pi=180^{\circ}\quad \frac{\pi}{3}=60^{\circ}\quad \frac{\pi}{6}=30^{\circ}\quad \frac{\pi}{2}=90^{\circ}\quad \frac{\pi}{4}=45^{\circ}\quad \frac{3\pi}{2}=270^{\circ}}$$

Тригонометрические функции *периодические* – это значит, что их значение повторяются через какой-то промежуток.

Графики функций (рис.25 и рис. 26):

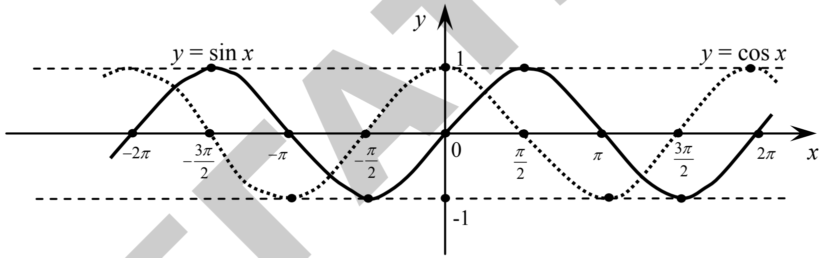


Рис. 25

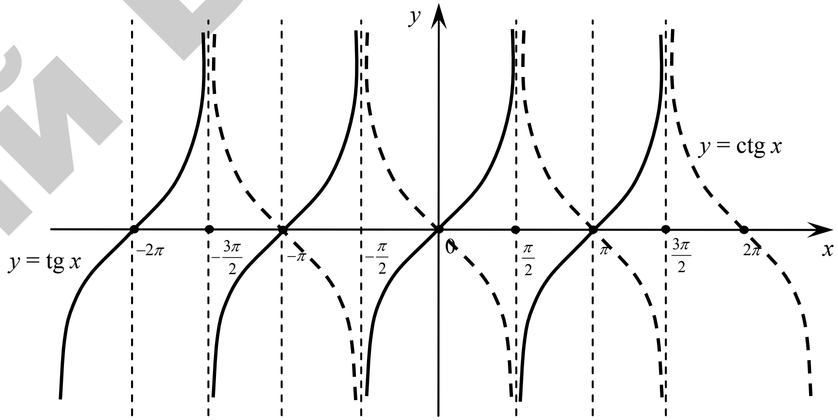


Рис. 26

Графиком функции $y=\sin x$ является синусоида и имеет период $T=2\pi$. Графиком функции $y=\cos x$ является косинусоида и имеет период $T=2\pi$. Графиком функции $y=\mathrm{tg}\,x$ является тангенсоида и имеет период $T=\pi$. Графиком функции $y=\mathrm{ctg}\,x$ является котангенсоида и имеет период $T=\pi$. Функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ ограниченные функции. $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$, функции $y=\mathrm{tg}\,x$ и $y=\mathrm{ctg}\,x$ – неограничены

Значения функций для основных углов:

	0^{o}	30^{o}	45^{o}	60^{o}	90^{o}	180^{o}	270^{o}	360^{o}
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}\, x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

Формулы приведения:

1. При отбрасывании углов $90°, 270° \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ функция *меняется на ко-функцию*., т.е. $\sin x$ на $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ на $\mathrm{ctg}\, x$.Дополнительно определяем *знак* по начальному условию (рис. 27).

2. При отбрасывании углов $180°, 360° \,(\pi, 2\pi)$ функция *не меняется*. Дополнительно определяем знак по начальному условию.

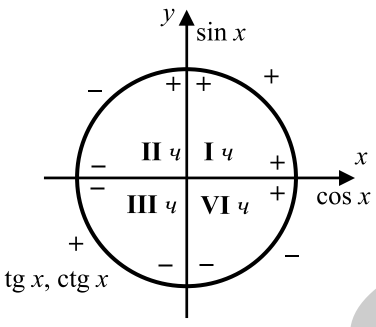


Рис. 27

$\cos x = \cos(-x)$ – четная функция

$\sin(-x) = -\sin x$ – нечетная функция

$\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\, x$ – нечетная функция

$\mathrm{ctg}\,(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$ – нечетная функция

Пример 28.1. $\sin 135^{o} = \sin\left(90^{o} + 45^{o}\right) = \cos 45^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Пример 28.2. $\cos 240^{o} = \cos\left(270^{o} - 30^{o}\right) = -\sin 30^{o} = -\frac{1}{2}$

Пример 28.3. $\mathrm{tg}\, 150^{o} = \mathrm{tg}\left(180^{o} - 30^{o}\right) = -\mathrm{tg}\, 30^{o} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Построить графики функций:

а) $y = 2\sin x$ б) $y = \cos 2x$ в) $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$

г) $y = \mathrm{ctg}\, x + 1$ д) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

№ 2 Переведите радианы в градусы:

а) $\frac{\pi}{5}$ б) $\frac{3\pi}{4}$ в) $\frac{7\pi}{5}$ г) $\frac{4\pi}{9}$ д) $\frac{6\pi}{5}$

№ 3 Переведите градусы в радианы:

а) 210^{o} б) 325^{o} в) 720^{o} г) 10^{o}

№ 4 Вычислить:

а) $9\cos 0^{o} + 12\sin 270^{o} - 4\cos 180^{o} =$

б) $\mathrm{tg}\, 0^{o} - \sin 210^{o} =$

в) $\mathrm{ctg}\left(-45^{o}\right) + \cos 780^{o} =$

г) $\frac{26\cos 315^{o}}{\sqrt{2}} - 11\sin 270^{o} + 12\cos 300^{o} =$

д) $\sin\pi - \cos\frac{3\pi}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} =$

е) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{2\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}2\pi =$

ж) $\sin^2\frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} =$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Какие функции называются тригонометрическими?
- Как называются их графики?
- В чем измеряются углы?
- Назовите основные значения главных углов всех функций.
- Что такое период?

№ 2 Построить графики.

а) $y = \sin x + 3$

б) $y = -\cos x$

в) $y = |\sin x|$

№ 3 Вычислить:

а) $\cos 750^{\circ}$ б) $\operatorname{tg} 210^{\circ}$ в) $\sin 420^{\circ}$ г) $\operatorname{ctg} 330^{\circ}$

№ 4 Вычислить:

а) $3\sin 0^{\circ}\cdot\cos 90^{\circ} + 12\sin^2 225^{\circ}\cdot\cos 420^{\circ} =$

б) $\sin\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} - 3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} =$

§ 29 *Основные группы тригонометрических формул*

I. Новые понятия, определения, обозначения

Формулы одного и того же угла

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x = 1$ $\operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\operatorname{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

Формулы сложения

$\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos x$ $\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \sin y\cdot\cos x$ $\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y$ $\cos(x-y) = \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y$	$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}$ $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 + \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}$

Формулы двойного угла

$$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg}2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Формулы половинного угла

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$	
$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$	$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$
$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$	$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$
$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$	

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\cos(x+y)\big)$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\big(\cos(x-y)-\sin(x+y)\big)$$

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\big(\sin(x+y)+\sin(x-y)\big)$$

Пример 29.1. $\cos^2 70^\circ+\cos^2 20^\circ=\cos^2\left(90^\circ-20^\circ\right)+\cos^2 20^\circ=$
$=\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ=1$

Пример 29.2. $\cos 15^\circ\cdot\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\cos 15^\circ\cdot\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Пример 29.3. $\frac{2\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin\left(180^\circ-20^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=1$

Пример 29.4. $\frac{\cos 46^\circ\cdot\cos 29^\circ-\sin 46^\circ\cdot\sin 29^\circ}{\cos 75^\circ}=\frac{\cos\left(46^\circ+29^\circ\right)}{\cos 75^\circ}=$

$=\frac{\cos 75^\circ}{\cos 75^\circ}=1$

II. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Упростить:

а) $\frac{23\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ\cdot\cos 70^\circ}=$

г) $\frac{\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\cos 3\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$

б) $\cos 4\alpha-\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha}=$

д) $\frac{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\sin\left(90^\circ-\alpha\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\left(450^\circ-\alpha\right)}=$

в) $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=$

е) $\frac{\sin 28^\circ+\sin 32^\circ}{\sin 28^\circ\left(\sin 43^\circ+\sin 47^\circ\right)}=$

№ 2 Вычислить:

а) $\sin\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$

б) $\cos\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$

в) $\sin\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$

г) $\dfrac{3+\cos 2\alpha}{6+7\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0,2$

№ 3 Вычислить в градусах:

а) $(\sin 45° + \cos 135°)^2$

б) $(\sin 90° + \cos 45°)^3$

III. Домашнее задание:

№ 1 Выучить группы формул.

№ 2 Упростить:

а) $\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{2} + \cos^2\alpha =$ б) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos 2\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)} =$

в) $15\cos\alpha \cdot \left(1+\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right) =$ г) $\dfrac{1+\sin\alpha - \sin^2\left(45^{\circ} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}} =$

д) $1+\dfrac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{1}{\cos^2\alpha} =$

№ 3 Вычислить:

а) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right)$

б) $2\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{8}{17}$, $\sin\alpha < 0$

в) $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = -\dfrac{7}{24}$, $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right)$

§ 30 *Решение тригонометрических уравнений*

I. Новые понятия, определения, обозначения.

Рассмотрим обратные тригонометрические функции.

$\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arcrg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Вычисление обратных функций:

$$\begin{cases} \arcsin x = a \Leftrightarrow \sin a = x \\ \arccos x = a \Leftrightarrow \cos a = x \\ \operatorname{arctg} x = a \Leftrightarrow \operatorname{tg} a = x \\ \operatorname{arcctg} x = a \Leftrightarrow \operatorname{ctg} a = x \end{cases}$$

Пример 30.1. $\arcsin 0 = 0^{\circ} \Leftrightarrow \sin 0^{\circ} = 0$.

Пример 30.2. $\arcsin\dfrac{1}{2} = 30^{\circ}$, т.к. $\sin 30^{\circ} = \dfrac{1}{2}$.

Пример 30.3. $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 60^{\circ}$, т.к. $\sin 60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 30.4. $\arcsin 1 = 90^{\circ}$, т.к. $\sin 90^{\circ} = 1$.

Вычисление выражений с обратными тригонометрическими функциями.

Пример: 30.5. Вычислите $\sin(2\operatorname{arctg} 3)$

Пусть $\operatorname{arctg} 3 = \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3) = \operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = 3$, если $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+9}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

С учетом вычислений имеем:

$$\sin(2\operatorname{arctg}3) \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

Решение тригонометрических уравнений.

Решение в общем виде	Частные случаи решения
$\sin x = a, \quad \lvert a\rvert \le 1$ $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n\in Z$ $\sin x = -a, \quad \lvert a\rvert \le 1$ $x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n, n\in Z$	$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n\in Z$ $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in Z$ $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in Z$
$\cos x = a, \quad \lvert a\rvert \le 1$ $x = \pm\arccos a + 2\pi n, n\in Z$ $\cos x = -a, \quad \lvert a\rvert \le 1$ $x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n, n\in Z$	$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z$ $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n\in Z$ $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n\in Z$
$\operatorname{tg} x = a$ $x = \operatorname{arc\,tg} a + \pi n, n\in Z$ $\operatorname{tg} x = -a$ $x = -\operatorname{arc\,tg} a + \pi n, n\in Z$	$\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n\in Z$ $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\in Z$ $\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n\in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$ $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n\in Z$ $\operatorname{tg} x = -a$ $x = \pi - \operatorname{arc\,tg} a + \pi n, n\in Z$	$\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z$ $\operatorname{ctg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\in Z$ $\operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + \pi n, n\in Z$

I способ. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Пример 30.6. $\cos(17^\circ + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Выписать решения из промежутка $-90^\circ < x < 0^\circ$.

$$17^\circ + x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n \Rightarrow 17^\circ + x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$17^\circ + x = \left[\begin{array}{l} 45^\circ + 360^\circ n \\ -45^\circ + 360^\circ n \end{array}\right. \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} 45^\circ - 17^\circ + 360^\circ n \\ -45^\circ - 17^\circ + 360^\circ n \end{array}\right. \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} 28^\circ + 360^\circ n \\ -62^\circ + 360^\circ n \end{array}\right.$$

<u>Ответ:</u> $x = -62^\circ$

II способ. Вынесение общего множителя за скобки.

Пример 30.7. $\sin 2x = \sin x$ Решение удовлетворяет $-90^\circ < x < 0^\circ$

$$2\sin x\cdot\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$\sin x = 0$ или $2\cos x - 1 = 0$

$x = \pi n, \quad n\in Z$ $\qquad$ $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n\in Z$ $\qquad$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n\in Z$

III способ. Переход к квадратному уравнению.

Пример 30.8. $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$

Пусть $\sin x = t, \quad \lvert t\rvert \le 1,$ тогда

$$6t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n\in Z \\ x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n\in Z \end{array}\right.$$

IV способ. Используем группы формул.

Пример 30.9. $\sin\frac{13x}{2}=\sin\frac{x}{2}$;

$\sin\frac{13x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0$ (разность синусов)

$$2\sin\frac{\frac{13x}{2}-\frac{x}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{13x}{2}+\frac{x}{2}}{2}=0\Rightarrow 2\sin 3x\cdot\cos\frac{7}{2}x=0$$

$\sin 3x=0$ или $\cos\frac{7}{2}x=0$

$3x=\pi n,\quad n\in Z$ $\qquad\qquad$ $\frac{7}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$

$x=\frac{\pi}{3}n,\quad n\in Z$ $\qquad\qquad$ $x=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}n,\quad n\in Z$

Ответ: $x=\left\{\frac{\pi}{3}n,\quad \frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}n,\quad n\in Z\right\}$

V способ. Однородные уравнения первого и второго порядков.

$A\sin x+B\cos x=0$ **Пример** $\sin x+\cos x=0$ (разделим на $\cos x$) $\operatorname{tg}x+1=0$ $\operatorname{tg}x=-1$ $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$	$A\sin^2 x+B\sin x\cdot\cos x+C\cos^2 x=0$ **Пример** $\sin^2 x-3\sin x\cdot\cos x+2\cos^2 x=0$ (разделим на $\cos^2 x$) $\operatorname{tg}^2x-3\operatorname{tg}x+2=0$ $\operatorname{tg}x=t$ $t^2-3t+2=0$ $\left[\begin{array}{l}t_1=1\\t_2=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=1\\\operatorname{tg}x=2\end{array}\right.\Rightarrow$ $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z\\x=\operatorname{arctg}2+\pi n,\quad n\in Z\end{array}\right.$

VI способ. Введение вспомогательного угла.

$A\sin x+B\cos x=D \qquad C=\sqrt{A^2+B^2}$

$\frac{A}{C}\sin x+\frac{B}{C}\cos x=\frac{D}{C}$

$\cos\varphi \qquad \sin\varphi$

$\sin(x+\varphi)=\frac{D}{C}$

Пример 30.10. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1,\quad C=\sqrt{1+3}=2$

$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2},\quad \cos\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=60^{\circ}$

$\sin(x+60^{\circ})=\frac{1}{2}\Rightarrow x+60^{\circ}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\quad n\in Z$

$x+60^{\circ}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z\Rightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{6}-60^{\circ}+\pi n,\quad n\in Z$

VII способ. Введение универсальной подстановки.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t;\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Пример 30.11. $2\sin x+\cos x=-1$

$$2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1\Rightarrow\frac{4t+1-t^2}{1+t^2}=-1\Rightarrow 4t+1-t^2=-1-t^2\Rightarrow 4t=-2$$

$t=-\frac{1}{2}\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\quad n\in Z$

$x=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n,\quad n\in Z$

II. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Вычислить:

а) $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$ $\qquad$ г) $\sin(\arcsin 1+\arcsin 0,8)$

б) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$ д) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$

в) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{8}\right)\right)$ е) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{5}\right)-\frac{5\pi}{3}\right)$

ж) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi\right)$

№ 2 Решить уравнения.

а) $\cos x\cdot\sin x+\sin^2 x=0$ б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\sin\left(\pi-x\right)=2\cos x$

в) $\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x=1$ г) $\cos^2 x=5+5\sin x$

д) $\sin x\cdot\operatorname{tg}x+\sin x-\operatorname{tg}x=1$ ж) $\sin^{16}x+\cos^{16}x=1$

з) $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1,\quad x\in\left[0^\circ;180^\circ\right]$, найти сумму корней.

Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

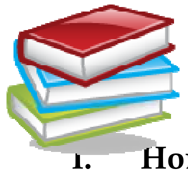
- Какие функции называются обратными тригонометрическими?
- Как решаются простейшие уравнения?
- Назовите основные способы решения уравнений.

№ 2 Вычислить:

а) $\cos\left(arctg\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{3\pi}{4}\right)$

№ 3 Решить уравнение.

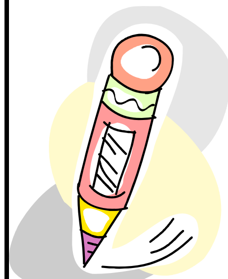
$2\sin\left(90^\circ+x\right)\cdot\cos 4x=\cos 3x,\quad x\in\left[0^\circ;90^\circ\right]$



§ 31 *Прогрессии*

I. Новые слова:

1. *Прогрессия (последовательность).*
2. *Арифметическая прогрессия.*
3. *Геометрическая прогрессия.*
4. *Разность прогрессии.*
5. *Знаменатель прогрессии.*
6. *Возрастающая прогрессия.*
7. *Убывающая прогрессия.*
8. *Сумма n-членов.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Последовательность членов, где каждый следующий член больше или меньше предыдущего на определенное число, называется ***арифметической прогрессией***.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$.

a_1 – ***первый член*** последовательности.

$d=a_2-a_1$ – ***разность*** прогрессии.

При $d>0$ – последовательность возрастает, а при $d<0$ – убывает.

$a_n=a_1+d\left(n-1\right)$ – ***n-ый член*** прогрессии.

Формула суммы n-членов арифметической прогресии.

$$\boxed{S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{2a_1+d\left(n-1\right)}{2}n}$$

Пример 31.1. $1; 3; 5; 7; 9; K\ 41.$ – это арифметическая последовательность, т.к. $\begin{matrix} 3-1=2 \\ 5-3=2 \end{matrix} \Rightarrow d=2,\ a_1=1$

$41 = a_n$ – n-ый член

прогрессии. $a_n = a_1 + d(n-1) \Rightarrow 41 = 1 + 2(n-1) \Rightarrow 40 = 2(n-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 = n-1 \Rightarrow\ n = 21$ (всего 21 число).

$$S_{21} = \frac{a_1 + a_{21}}{2} \cdot 21 = \frac{1+41}{2} \cdot 21 = 21 \cdot 21 = 441.$$

Свойства арифметической прогрессии:

- $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ (средний член прогрессии равен среднему арифметическому рядом стоящих членов).
- $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$ (суммы крайних членов равны).

Пример 31.2. Сумма $a_3 + a_9 = 18$. Найти S_{11}.

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{a_3 + a_9}{2} \cdot 11 = \frac{18}{2} \cdot 11 = 99.$$

Последовательность членов, где каждый следующий член больше или меньше предыдущего в n-раз, называется *геометрической прогрессией*.

$b_1, b_2, b_3, b_4, K\ , b_n.$

b_1 – *первый член* последовательности.

$q = \dfrac{b_2}{b_1}$ – *знаменатель* прогрессии.

При $q > 1$ – последовательность возрастает, а при $0 < q < 1$ – убывает.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ – n-ый член прогрессии.

Формула суммы n-членов геометрической прогрессии.

$$\boxed{S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}}$$

Если $|q| < 1$, то $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ (сумма всей бесконечно убывающей прогрессии)

Пример: 31.3. $2; 6; 18; 54; K\ .$

$b_1 = 2$, $q = \dfrac{6}{2} = 3$ – последовательность возрастает.

$$S_{10} = \frac{b_1 \cdot (1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{2 \cdot (1 - 3^{10})}{1 - 3} = 3^{10} - 1.$$

Свойства геометрической прогрессии:

- $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ (средний член прогрессии равен среднему геометрическому рядом стоящих членов).
- $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1}$ (произведения крайних членов равны).

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 а) Найти n, если $a_1 = 10$, $a_n = 200$, $d = 5$.

б) Найти a_1, если $a_{81} = 500$, $d = -6$.

в) Найти сумму всех положительных двузначных чисел кратных 5.

№ 2 Решить уравнение.

а) Найти b_1, если $q = 2$, $b_5 = 32$.

б) Найти q, если $b_1 = 2, \quad b_n = 32, \quad n = 5$.

в) Найти b_6, если $b_1 = 1, \quad b_3 = 2$.

г) Найти сумму $6 + 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \ldots$.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Какая прогрессия называется арифметической?
- Какая прогрессия называется геометрической?
- Назвать формулы суммы прогрессий.
- Назвать свойства прогрессий.

№ 2 Вычислить:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \ldots$.

№ 3 Найти a_8, если $a_9 = 2a_2, \quad a_{13} = 2a_6 + 5$.

V. Обобщающие задачи

№ 1 Доказать, что сумма n первых нечетных чисел натурального ряда равна квадрату их количества.

№ 2 Решите уравнение $2\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 3$, если $|x| < 1$.

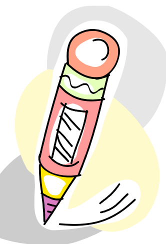
№ 3 Решите уравнение $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots = \frac{13}{16}$, если $|x| < 1$.

№ 4 Найти сумму $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots + \frac{100}{2^{100}}$.

§ 32 *Решение текстовых задач*

I. Новые слова:

1. *Движение.*
2. *Путь (расстояние)* (S).
3. *Скорость* (V).
4. *Время* (t).
5. *Работа (объем работы)* (P).
6. *Производительность, мощность* (N).
7. *Проценты* $(\%)$, *пропорции.*
8. *Смеси.*
9. *Растворы.*
10. *Цифра и число.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

<u>Задачи на движение</u>:

$S = V \cdot t$ – движение по дороге.

$S = (V - V_p) \cdot t$ – движение против течения реки.

$S = (V + V_p) \cdot t$ – движение по течению реки.

Пример 32.1. Турист плыл на лодке 6 км против течения реки на один час медленнее, чем 15 км по озеру. С какой скоростью плыл турист по озеру, если $V_p = 2\frac{км}{ч}$?

Решение: Исходя из условия задачи, построим схематический рисунок (рис. 28).

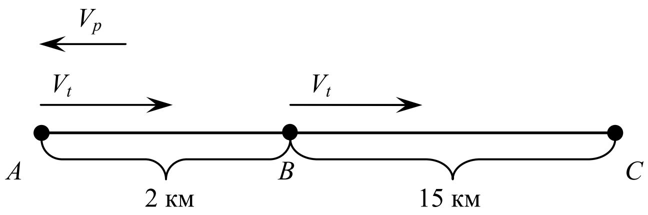


Рис. 28

Пусть скорость туриста $V_t = x\,\frac{км}{ч}$, тогда время против течения реки на AB $\quad t_{AB} = \dfrac{S_{AB}}{V_t - V_p} = \dfrac{6}{x-2}$

Время по течению реки $t_{BC} = \dfrac{S_{BC}}{V_t} = \dfrac{15}{x}$. Из условия задачи имеем уравнение: $\dfrac{6}{x-2} - \dfrac{15}{x} = 1 \Rightarrow \dfrac{6x - 15(x-2)}{x(x-2)} = 1 \Rightarrow 6x - 15x + 30 = x(x-2)$

$x^2 + 7x + 30 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -10 \text{ – не подходит по смыслу задачи} \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$

Ответ: $3\,\dfrac{км}{ч}$

Задачи на совместную работу: $P = 1$ (работу берем за 1)

x – время первого, работающего отдельно.

y – время второго, работающего отдельно.

$\dfrac{1}{x}$ – производительность первого, работающего отдельно.

$\dfrac{1}{y}$ – производительность второго, работающего отдельно.

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ – производительность совместной работы.

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{t}$, где t – время совместной работы.

Пример: 32.2. Две трубы вместе наполняют бассейн за 6 часов. Первая труба наполняет бассейн на 5 часов быстрее, чем вторая. За сколько вторая труба заполнит бассейн одна?

Решение: Пусть x – часов нужно второй трубе отдельно, тогда $x-5$ – часов нужно первой трубе.

Составим уравнение из текста:

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-5} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{x-5+x}{x(x-5)} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{2x-5}{x^2-5x} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow x^2 - 5x = 12x - 30 \Rightarrow$

$x^2 - 17x + 30 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 15 \end{array}\right.$ $\quad x_1 = 2$ не подходит по смыслу задачи. Ответ: 15 *ч*

Задачи на проценты, смеси, растворы, сложные проценты:

10% = 0,1 (перевод процентов в десятичные дроби).

$A_n = A_0\left(1 \pm \dfrac{P}{100}\right)^n$ – формула сложных процентов,

где A_0 – начальный вклад, P – разовый %, n – количество оборотов, "+" – увеличение, "–" – уменьшение.

Пример 32.3. Морская вода содержит 7% соли. Сколько воды нужно выпарить из 100 кг морской воды, чтобы получить 10% раствор соли (рис. 29).

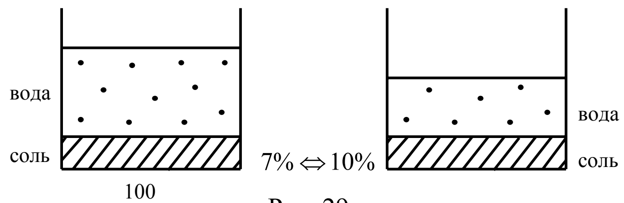


Рис. 29

Решение:

1. $\begin{matrix}100\% - 7\ кг \\ 7\% - x\ кг\end{matrix} \Rightarrow x = 7\ кг$ соли

2. $\begin{matrix}10\% - 7\ кг \\ 100\% - x\ кг\end{matrix} \Rightarrow x = 70\ кг$ (морской воды)

3. $100 - 70 = 30\ кг$ воды. Ответ: $30\ кг$

Пример: 32.4. Смешали 2 литра 40% раствора соли и 3 литра 60% раствора соли. Найти % соли в новом растворе (рис. 30).

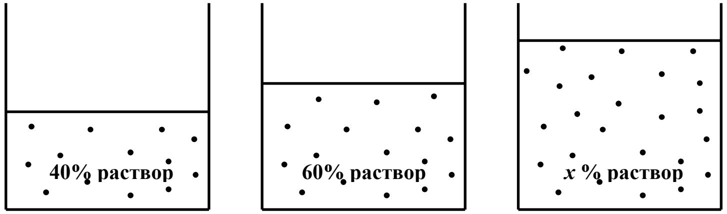


Рис. 30

Решение: $0,4 \cdot 2 + 0,6 \cdot 3 = x \cdot 5 \Rightarrow 5x = 2,6 \Rightarrow x = 0,52 = 52\%$ соли.

Ответ: 52% раствор соли.

Пример: 32.5. Цену товара понизили на 30%, затем повысили на 50%. На сколько % по сравнению с первоначальной увеличилась цена?

$$A_n = \left(1 - \frac{30}{100}\right)\left(1 + \frac{50}{100}\right) = 0,7 \cdot 1,5 = 1,05 \Rightarrow 1,05 - 1 = 0,05 = 5\%$$

Ответ: увеличилась на 5%

Задачи на запись числа цифрами **:** 10 a + b – двузначное число.

Пример: 32.6. Найти двузначное число, зная, что число единиц на два больше десятков и, что произведение искомого числа на сумму его цифр равна 144.

Решение:

$$\begin{cases} b = a + 2 \\ (10a + b)(a + b) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + 2 \\ (10a + a + 2)(a + a + 2) = 144 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = a + 2 \\ (11a + 2)(2a + 2) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + 2 \\ (11a + 2)(a + 1) = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + 2 \\ 11a^2 + 13a - 70 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a + 2 \\ \left[\begin{matrix} a_1 = 2 \\ a_2 - \text{не подходит по условию задачи} \end{matrix}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ответ: 24

III. Домашнее задание:

№ 1 Поезд проходит мост длиной 450 м за 45 с и за 15 с мимо телеграфного столба. Вычислить длину поезда и его скорость.

№ 2 Для разгрузки порохода выделено две бригады грузчиков. Если ко времени, за которое первая бригада может самостоятельно разгрузить пароход, прибавить время, за которое вторая бригада может самостоятельно разгрузить пароход, то получится 12 ч. Определить эти времена, если их разность составляет 45% времени, за которое обе бригады совместно могут разгрузить пароход?

№ 3 За три года население города увеличилось с 2 000 000 до 2315250 человек. Найти среднегодовой процент прироста населения.

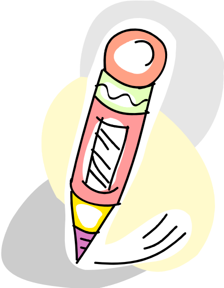
№ 4 Первое число больше второго на 25%. На сколько процентов второе число меньше первого?

Материалы для факультативного изучения

§ 1 *Метод Гаусса, метод определителей*

I. Новые слова:

1. *Строки.*
2. *Столбцы.*
3. *Определитель.*
4. *Второй порядок.*
5. *Третий порядок.*
6. *Последовательное исключение.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

<u>*Метод определителей.*</u> *Правило Крамера.*

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \ a_1, b_1, a_2, b_2 \text{ – коэффициенты}, \ c_1, c_2 \text{ – свободные}$$

члены.

Составим <u>*определитель*</u>: Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

где $a_1 \ b_1$ – первая строчка,

$a_1 \ a_2$ – первый столбик,

c_1, c_2 – столбик свободных членов.

Вычисление определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2,$$

Затем вычисляем определители Δ_x, Δ_y.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2.$$

Тогда для $\Delta \neq 0$ решения найдем по следующим формулам

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.}$$ – правило Крамера.

Пример 1.1.

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - (-2)\cdot 2 = 3 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - (-2)\cdot 7 = 12 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 2\cdot 2 = 3$$

$$x = \frac{12}{3} = 4; \quad y = \frac{3}{3} = 1.$$

<u>Ответ:</u> $(4;1)$

<u>*Метод последовательного исключения*</u>*, метод Гаусса.*

Необходимо перейти к треугольной системе вида:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ \quad my + nz = p \\ \quad\quad qz = t \end{cases}$$

Пример 1.2.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 24 \\ 3x - 2y + z = 17 \\ 5x + y - 3z = -8 \end{cases}$$

– первое уравнение умножаем на –3 и складываем со вторым, а затем первое умножаем на –5 и складываем с третьим, получим:

$$\begin{cases} x-4y+2z=24 \\ 10y-5z=-55 \\ 21y-13z=-128 \end{cases}$$

– второе уравнение умножим на 21, а третье на –10 и сложим их между собой, получим:

$$\begin{cases} x-4y+2z=24 \\ 10y-5z=-55 \\ 25z=125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=5 \end{cases}$$

Ответ: $\{(2;-3;5)\}$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Решить методом определителей.

1) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 4x+5y=14 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x-y=8 \\ 5x+2y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-2y=5 \\ 3x-3y=7,5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ -7x+3y+13=0 \end{cases}$

№ 2 Решить методом Гаусса.

1) $\begin{cases} x-2y+5z=9 \\ 3x+y-z=4 \\ 2x-3y+4z=11 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-4y+4z=10 \\ -3x+8y-10z=-25 \\ 4x-3y+z=1 \end{cases}$

IV. Домашнее задание:

№ 1 Повторить слова.

№ 2 Решить методом определителей и методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x-7y=17 \\ 8x+9y=-10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+3z=-1 \\ 2x+y-5z=9 \\ 4x-3y+z=7 \end{cases}$

§ 2 *Производная, ее вычисление*

I. Новые слова:

1. *Производная.*
2. *Правила дифференцирования.*
3. *Основные производные.*
4. *Геометрический смысл.*
5. *Физический смысл.*
6. *Касательная.*
7. *Точки экстремума (критические).*
8. *Максимум (max).*
9. *Минимум (min).*
10. *Наибольшее значение.*
11. *Наименьшее значение.*

II. Новые понятия, определения, обозначения

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – определение производной

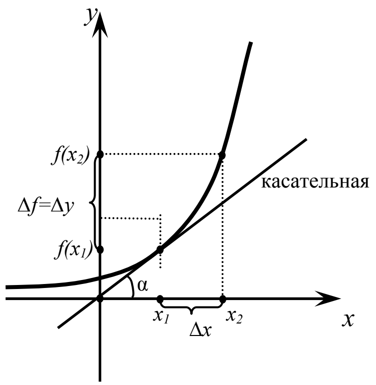


Рис. 31

Геометрический смысл (рис. 31):

$f'(x_1)=\operatorname{tg} x=k$ (угловой коэффициент)

Физический смысл:

$S'=V$, $V'=a$, где S – путь, V – скорость, a – ускорение.

Правила дифференцирования:

- $(const)'=0$
- $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$
- $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
- $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $\left[f(g(x))\right]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ (производная сложной функции)

Таблица основных производных:

- $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$; $(x)'=1$; $(x^2)'=2\cdot x$;
- $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$; $(1^x)'=1^x$
- $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$; $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
- $(\sin x)'=\cos x$
- $(\cos x)'=-\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Вычислить производные функций:

а) $x^3-2x^2+\dfrac{1}{x}-\sqrt[3]{x}$ б) $\sin 5x$ в) $(x^2+1)\cdot\sin x$

г) $\dfrac{x^2+x-3}{x+1}$ д) $\cos^3 2x$

№ 2 Найти значение производных в заданных точках:

1) $f'(1)-$, если $f(x)=x^2\left(x+4\sqrt{x^3}\right)$

2) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-$, если $f(x)=2x+\sin x\cos x$

3) $f'(0)-$, если $f(x)=\dfrac{\sin x+1}{x+1}$

4) $f'(1)-$, если $f(x)=(x^3+1)(1-2\sqrt{x})$

5) $f'(0)-$, если $f(x)=\sin^3 2x$

Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

- Что такое производная?
- Назвать геометрический смысл производной.
- Назвать правила дифференцирования.
- Назвать табличные значения производных.

№ 2 Вычислить:

а) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+4\sqrt{x^3}+\sqrt{5}$, $f'(0)-?$

б) $f(x)=\dfrac{x^3+3}{x+1}$, $f'(0)-?$

§ 3 *Применение производной к задачам*

1. Новые понятия, определения, обозначения

<u>Найти точки экстремума</u> $y = f(x)$ (критические точки)

Схема исследования:

1) $y' = f'(x)$ – найти производную функции.
2) $f'(x) = 0$ – приравнять производную к нулю, решить уравнение. x_1, x_2 – корни уравнения – это точки экстремума.
3) Нанесем эти точки на числовую прямую, расставим знаки $f'(x)$

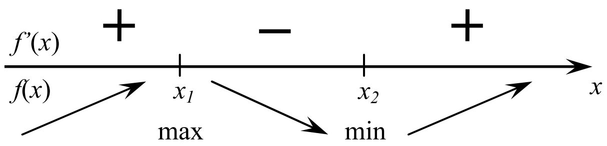


Рис. 32

$f'(x) > 0$ – функция возрастает, $f'(x) < 0$ – функция убывает.
$M = f(x_1)$ – максимум функции, $m = f(x_2)$ – минимум функции.

<u>Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке [*a*;*b*]</u>:

Схема исследования:

1) $y' = f'(x)$ – находим производную.
2) $f'(x) = 0$, x_1, x_2 – находим экстремальные точки.
3) $\begin{matrix} x_1 \in [a;b] \\ x_2 \notin [a;b] \end{matrix}$ – узнаем все ли точки входят в отрезок $[a;b]$.
4) $\underbrace{f(a) = \ldots,\ f(b) = \ldots,\ f(x_1) = \ldots}$ $\Rightarrow$ находим значение функции на концах отрезка и в экстремальной точке.

5) Выбираем наибольшее и наименьшее значение.

<u>Написать уравнение касательной к графику функции</u>:
$y = f(x)$ в точке x_0

Порядок составления уравнения:

1) $y' = f'(x)$ – находим производную.
2) $f'(x_0) = y'_0$ – подставляем в производную точку x_0.
3) $f(x_0) = y_0$ – находим значение функции в точке x_0.
Подставим данные в условие, т.е. *уравнение касательной*.

$$\boxed{y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)}$$

<u>Свойства прямых</u>:

$y_1 = k_1 x + b_1$

$y_2 = k_2 x + b_2$

$y_1 \parallel y_2$ – прямые параллельны, если
$k_1 = k_2 \Rightarrow f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$ – угловые коэффициенты равны.

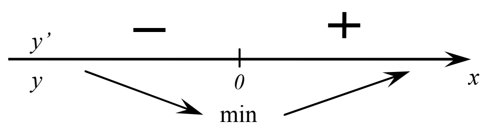
$y_1 \perp y_2$ – прямые перпендикулярны, если
$k_1 \cdot k_2 = -1, \quad \alpha = 90^{\circ}$.

Пример 3.1. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ – найти точки экстремума.

1. $$y' = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$
$$\frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

2. $y' = 0,\quad \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

3.



$x = 0$ – минимума.

II. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Найти максимум функции.

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ б) $f(x) = (x-4)^2(x-1)$

№ 2 Найти минимум функции.

а) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2)$ б) $f(x) = 5^x + 5^{2-x}$

№ 3 Найти интервалы возрастания и убывания функции.

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$ б) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

№ 4 Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

а) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5;\ [0;3]$ б) $f(x) = 2\sqrt{x} - x;\ [0;9]$

№ 5 Записать уравнение касательной.

а) $f(x) = x^2 - 5x + 7,\quad x_0 = 2$

б) $f(x) = x^2 + 4x + 7,\quad y = 2x + 5,$ в какой точке касательная параллельна прямой?

в) В какой точке графика функции $y = \sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 45°?

III. Домашнее задание:

№ 1 Рассказать схемы исследований функций.

№ 2 Найти значение производной в точке $x_0 = 3$ функции $f(x) = (2x-3)^2 \cdot e^{-x}$

№ 3 Найти максимум функции.

а) $f(x) = 4\sqrt{x-10} + 3\sqrt{35-x}$

б) $f(x) = x^2 + 4x - 5$

№ 4 Найти интервалы возрастания и убывания функции.

а) $f(x) = x - \ln x$

№ 5 Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

а) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x-2};\quad [-1;1]$

б) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x}{x-2};\quad [-2;1]$

№ 6 Найти уравнение касательной в точке пересечения графика с осью ординат $y = 3x^3 + 2x + 5$.

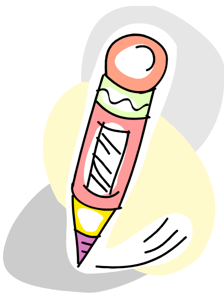
№ 7 Найти точку x_0, где касательная к графику функции $y = 2 + x - x^2$ параллельна прямой $y = 2x + 3$.

№ 8 Найти угол, который образует касательная к функции $y = 5 - 0{,}5x^2$, в точке $x_0 = -\sqrt{3}$.

§ 4 Векторы, действия над ними

I. Новые слова:

1. Точка.
2. Вектор.
3. Координаты вектора.
4. Сумма векторов.
5. Разность векторов.
6. Скалярное произведение.
7. Угол между векторами.
8. Правило треугольника.
9. Правило параллелограмма.
10. Расстояние.
11. Параллельность.
12. Коллинеарность.



II. Новые понятия, определения, обозначения

Пусть $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ – точки A и B с координатами (рис. 33).

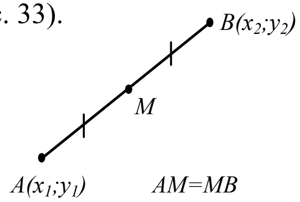


Рис. 33

__Расстояние__ между точками A и B находится по формуле

$$\left|AB\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

__Координаты точки M – середины отрезка AB__ находятся по формуле:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2};\frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Понятие вектора: *__Вектор__* – направленный отрезок (рис. 34).

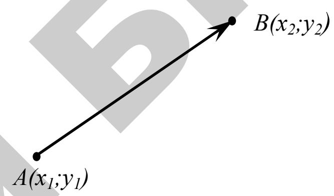


Рис. 34

Координаты вектора вычисляются по формуле:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\left(x_2 - x_1\right);\left(y_2 - y_1\right)\right)$$

Длина вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

Действия с векторами.

Если даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами $\vec{a} = \left(x_1;y_1\right)$ и $\vec{b} = \left(x_2;y_2\right)$ (рис. 35), то его длина $\vec{a}$ равна:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$$

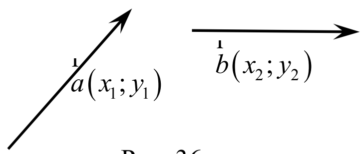
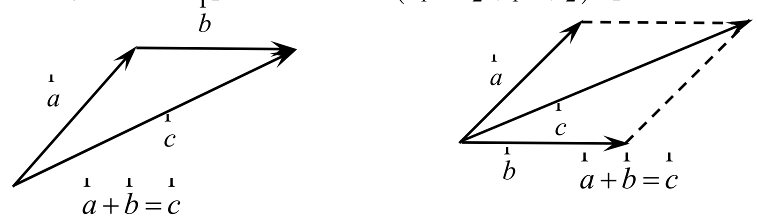


Рис. 36

Сумма векторов $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \left(x_1 + x_2;y_1 + y_2\right)$ (рис. 37).

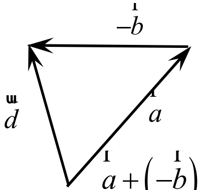


правило треугольника

правило параллелограмма

Рис. 37

Разность векторов $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}=\left(x_1-x_2;y_1-y_2\right)$ (рис. 38).

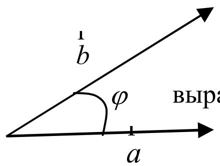


$\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$

Рис. 38

Умножение на число $k\vec{a}=\left(kx_1;ky_1\right)$.

Произведение векторов (скалярное)



$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}$ –координатное выражение.

$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi}$ – векторное выражение.

Рис. 39

φ – это угол между векторами

Угол между векторами можно вычислить по формуле:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}}}$$

Признак параллельности (коллинеарности) векторов (рис. 40).

$$\boxed{\vec{a}\parallel\vec{b}\Rightarrow\vec{a}=k\cdot\vec{b}\Rightarrow\frac{\vec{a}}{\vec{b}}=k\Rightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=k}$$

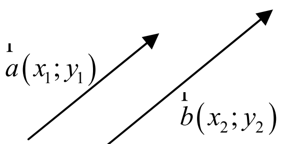


Рис. 40

У коллинеарных векторов координаты пропорциональны.
Если $k>0$ – направления совпадают,
если $k<0$ – противоположное направление.

Признак перпендикулярности векторов.

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=0}$$

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Найти длину вектора $\vec{c}$.

а) $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(4;-2;9)$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ б) $\vec{a}=(6;2)$, $\vec{b}=(0;-1)$, $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$

в) $\vec{a}=(0;-3;2)$, $\vec{b}=(1;-1;1)$, $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$

№ 2 Найти сумму координат середины отрезка AB, где $A(3;5;7)$, $B(3;1;-1)$.

№ 3 Найти значение m при котором векторы $\vec{a}=(m;3;4)$ и $\vec{b}=(5;6;3)$ перпендикулярны.

№ 4 Найти длину вектора $\vec{a}=(x;0;4)$, перпендикулярного вектору $\vec{b}=(-4;0;3)$.

№ 5 При каких m и n векторы:

а) $\vec{a}=(3;-2;m)$, $\vec{b}=(n;4;2)$ коллинеарны?

б) $\vec{a}=(m-1;2;3)$, $\vec{b}=(2;1;n+1)$ коллинеарны?

в) $\vec{a}=(1;-2;m)$, $\vec{b}=(3;4;1)$ перпендикулярны?

IV. Домашнее задание:

№ 1 Ответьте на вопросы:

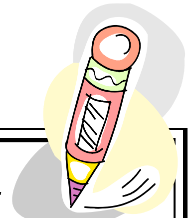
- Как найти длину отрезка координатным способом?
- Как найти расстояние между точками?
- Что такое вектор?

№ 2 Найти длину вектора $\vec{a}=(x;1;2)$, перпендикулярного вектору $\vec{b}=(3;0;3)$.

№ 3 Найти длину вектора $\vec{a}=(3m;8)$, коллинеарного вектору $\vec{b}=(3;4)$.

Глава 2 Геометрия

§ 1 *Аксиомы геометрии Евклида. Основные понятия*



I. Новые слова:

1. Начальные понятия.	*10. Стороны угла.*
2. Доказательство.	*11. Вершина угла.*
3. Теорема.	*12. Прямой угол.*
4. Аксиома.	*13. Острый угол.*
5. Прямая.	*14. Тупой угол.*
6. Луч.	*15. Смежные углы*
7. Отрезок.	*16. .Вертикальные углы.*
8. Ломаная.	*17. Биссектриса угла.*
9. Угол.	

II. Новые понятия, определения, обозначения

Начальные понятия. В геометрии существуют понятия, которым невозможно дать определение. Мы их принимаем как *начальные понятия*. Смысл этих понятий может быть установлен только на основании опыта. Так, понятия *точки* и *прямой линии* являются *начальными*. На основе начальных понятий мы можем дать определения всем остальным понятиям.

Доказательство – рассуждение, устанавливающее какое-либо свойство.

Теорема – утверждение, устанавливающее некоторое свойство и требующее доказательства.

Теоремы называются также *леммами, свойствами, следствиями, правилами, признаками, утверждениями*. Доказывая теорему, мы основываемся на ранее установленных свойствах; некоторые их них также являются теоремами. Однако некоторые свойства рассматриваются в геометрии как основные и принимаются без доказательств.

Аксиома – утверждение, устанавливающее некоторое свойство и принимаемое без доказательства.

Аксиомы возникли из опыта, и опыт же проверяет их истинность в совокупности. Можно построить систему аксиом различными способами. Однако важно, чтобы принятый набор аксиом был минимальным и достаточным для доказательства всех остальных геометрических свойств.

Пусть A и B точки на плоскости.

Аксиома принадлежности. Через любые две точки на плоскости можно провести прямую и притом только одну (рис. 41).

$A \in l, B \in l.$

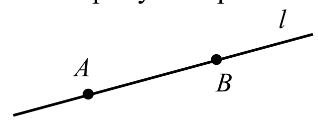


Рис. 41

Аксиома порядка. Среди любых трех точек, лежащих на прямой, есть не более одной точки, лежащей между двух других (рис. 42).

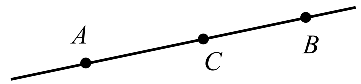


Рис. 42

Аксиома конгруэнтности (равенства) отрезков и углов. Если два отрезка (угла) конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны между собой.

$$[AB]=[MN] \text{ и } [CD]=[MN] \Rightarrow [AB]=[CD]$$

Аксиома параллельных прямых. Через любую точку, лежащую вне прямой, можно провести другую прямую, параллельную данной, и притом только одну (рис. 43).

$$(AB)\parallel(CD)$$

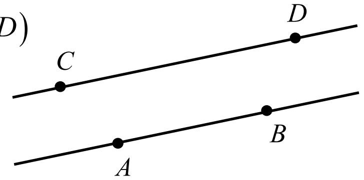


Рис. 43

Мысленно можно неограниченно продолжить <u>*прямую линию*</u> в обе стороны. Мы рассматриваем прямую как *бесконечную*. Прямая линия, ограниченная с одного конца и неограниченная с другого, называется <u>*лучом*</u>. Часть прямой, ограниченная с двух сторон, называется <u>*отрезком*</u>.

<u>*Ломаная*</u> – это фигура, состоящая из точек $(A_1, A_2, A_3 \ldots A_n)$ и отрезков $(A_1A_2; A_2A_3; \ldots; A_{n-1}A_n)$, соединяющих их (рис. 44). Точки $(A_1, A_2, A_3 \ldots A_n)$ называются *вершинами* ломаной, а отрезки $(A_1A_2; A_2A_3; \ldots; A_{n-1}A_n)$ – *звеньями* ломаной.

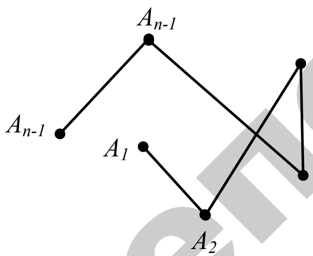


Рис. 44

Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений (рис. 45). *Длина ломаной* – сумма длин ее звеньев.

<u>*Угол*</u> – это геометрическая фигура (рис. 46), образованная двумя лучами *OA* и *OB* (*стороны угла*), исходящими из одной точки O (*вершина угла*).

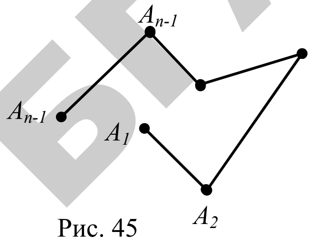


Рис. 45

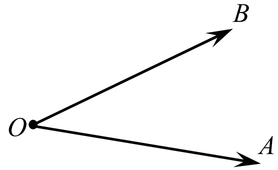


Рис. 46

Угол обозначается символом $\angle$ и тремя буквами, обозначающими концы лучей и вершину угла: $\angle AOB$ (причем, буква вершины – средняя). Углы измеряются величиной поворота луча *OA* вокруг вершины *O* до тех пор, пока луч *OA* не переходит в положение *OB*. Широко применяются две единицы измерения углов: радиан и градус.

<u>*Градус*</u> (его обозначение °) – это поворот луча на 1/360 полного оборота. Таким образом, полный оборот луча равен 360º. Угол в 90° (рис.47) называется <u>*прямым*</u>; угол, меньший, чем 90° (рис. 48), называется <u>*острым*</u>; угол, больший, чем 90° (рис. 49), называется <u>*тупым*</u>.

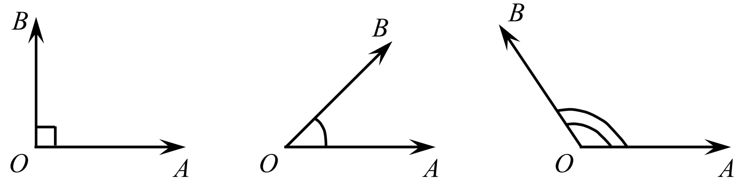


Рис. 47 Рис. 48 Рис. 49

__Смежные углы__ (рис. 50) – это углы $\angle AOB$ и $\angle COB$, имеющие общую вершину O и общую сторону OB; две другие стороны OA и OC являются продолжениями одна другой. Таким образом, сумма смежных углов равна 180 º.

Угол $\angle COD$ называется развернутым.

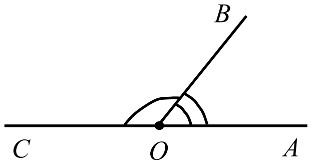


Рис. 50

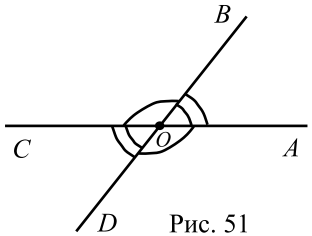


Рис. 51

__Вертикальные углы__ (рис. 51) – это два угла с общей вершиной, у которых стороны одного являются продолжениями сторон другого: $\angle AOB$ и $\angle COD$ (а также $\angle AOC$ и $\angle DOB$).

Две прямые называются *__параллельными__* $(a \parallel b)$, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 52).

Прямые линии, образующие прямой угол, называются *__взаимно перпендикулярными__* (рис. 53). Если прямые AB и MK перпендикулярны, то это обозначается: $AB \perp MK$.

Рис. 52

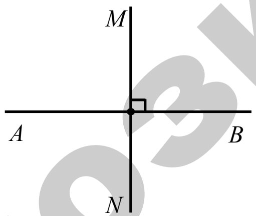


Рис. 53

Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам (рис. 54). *Свойство биссектрисы угла:* каждая точка биссектрисы угла находится на одинаковом расстоянии от сторон этого угла.

Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей (рис. 55):

- $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 8$ – пары *__соответственных углов__*.
- $\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$ – пары *__внешних односторонних углов__*.
- $\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$ – пары *__внутренних односторонних углов__*.
- $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$ – пары *__внутренних накрест лежащих углов__*.
- $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$ – пары внешних *__накрест лежащих углов__*.

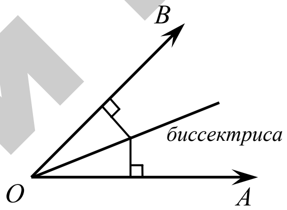


Рис. 54

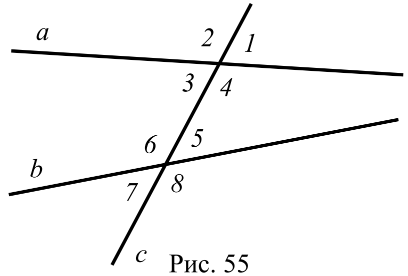


Рис. 55

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Нарисовать прямую MN.

№ 2 Нарисовать лучи OA и OB.

№ 3 Нарисовать все виды углов.

№ 4 Указать на рисунках основные элементы, используя новые слова.

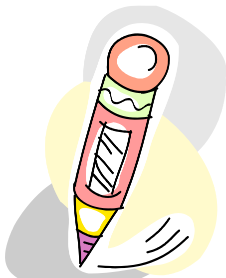
IV. Домашнее задание:

№ 1 Выучить новые слова.

№ 2 Подготовится к математическому диктанту.

§ 2 *Многоугольник, его углы, стороны, диагонали*

I. Новые слова:



1. *Многоугольник.*
2. *N-угольник.*
3. *Диагональ.*
4. *Выпуклый многоугольник.*
5. *Правильный многоугольник.*
6. *Периметр.*

II. Новые понятия, определения, обозначения

Многоугольник – это простая замкнутая ломаная, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой (рис. 56).

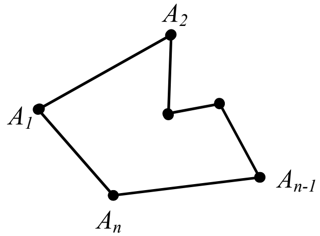


Рис. 56

Вершины ломаной называют *вершинами* многоугольника, звенья ломаной – *сторонами* многоугольника.

Отрезки, соединяющие несоседние вершины многоугольника, называют *диагоналями* многоугольника.

Многоугольник с n вершинами, а значит и с n сторонами $(n \in N, n \geq 3)$, называют *n-угольником*.

Многоугольник называют *выпуклым*, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой содержащей его сторону (рис. 57).

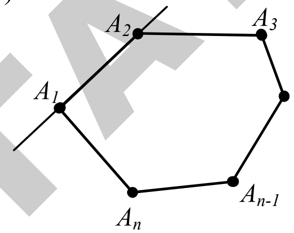


Рис. 57

Углом выпуклого многоугольника при данной вершине A_2 называется угол $\angle A_1A_2A_3$, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине (рис. 58).

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине A_1 называется угол $\angle BA_1A_2$, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине.

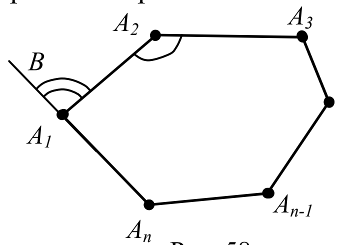


Рис. 58

Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны равны и все углы равны.

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^{\circ}$.

Если n-угольник правильный, то каждый внутренний угол $\dfrac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n}$.

Выпуклый n-угольник имеет диагоналей $\frac{n(n-3)}{2}$.

Периметром n-угольника называется сумма длин его сторон, обозначается Р.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Нарисовать 3-угольник, 4-угольник, 5-угольник, 6-угольник, 8- угольник.

№ 2 Указать основные элементы на рисунках.

№ 3 Вычислите сумму внутренних углов в выпуклом 3-угольнике, 4-угольнике, 5-угольнике, 6-угольнике, 8-угольнике.

№ 4 Вычислите количество диагоналей в выпуклом 4-угольнике, 5-угольнике, 6-угольнике, 8- угольнике.

№ 5 Найдите периметр многоугольника *ABCDEF* (рис. 59).

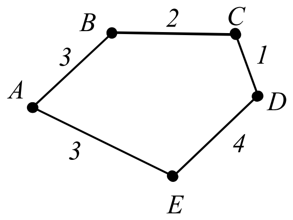


Рис. 59

IV. Домашнее задание:

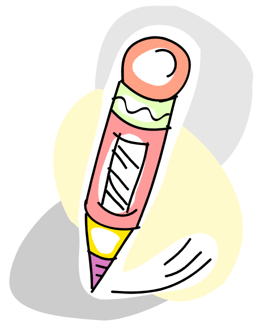
№ 1 Выучить новые слова.

№ 2 Подготовиться к диктанту по новым словам.

§ 3 *Треугольники*

I. Новые слова:

1. *Треугольник.*
2. *Остроугольный треугольник.*
3. *Тупоугольный треугольник.*
4. *Прямоугольный треугольник.*
5. *Равнобедренный треугольник.*
6. *Равносторонний треугольник.*
7. *Медиана.*
8. *Высота.*
9. *Биссектриса.*
10. *Серединный перпендикуляр.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Треугольник – это многоугольник с тремя сторонами (или тремя углами). Обозначается ΔABC (рис. 60). Стороны треугольника обозначаются часто малыми буквами, которые соответствуют заглавным буквам, обозначающим противоположные вершины.

Если все три угла острые, то это *остроугольный треугольник* (рис. 60).

Если один из углов прямой, то это *прямоугольный треугольник*; стороны a, b, образующие прямой угол, называются *катетами*; сторона c, противоположная прямому углу, называется *гипотенузой*.

Если один из углов тупой, то это <u>*тупоугольный треугольник.*</u>

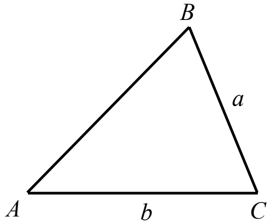


Рис. 60

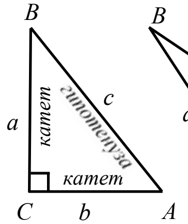


Рис. 61

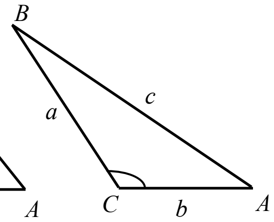


Рис. 62

Треугольник *ABC* – <u>*равнобедренный*</u>, если *две* его стороны равны ($a = c$); эти равные стороны называются *боковыми*, третья сторона называется *основанием* треугольника (рис. 63).

Треугольник *ABC* – <u>*равносторонний*</u>, если *все* его стороны равны ($a = b = c$) (рис. 64).

В общем случае ($a \neq b \neq c$) мы имеем <u>*произвольный*</u> треугольник (рис. 65).

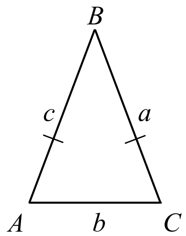


Рис. 63

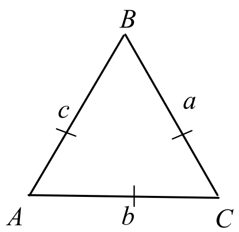


Рис. 64

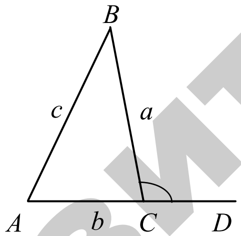


Рис. 65

<u>***Основные свойства треугольников.***</u>

<u>*В любом треугольнике:*</u>

- Против большей стороны лежит больший угол, и наоборот.
- Против равных сторон лежат равные углы, и наоборот.

В частности, все углы в равностороннем треугольнике равны.

- Сумма углов треугольника равна 180º.

Из двух последних свойств следует, что каждый угол в равностороннем треугольнике равен 60º

- Продолжая одну из сторон треугольника (*AC*), получаем *внешний* угол $\angle BCD$. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним: $\angle BCD = \angle A + \angle B$.
- Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности ($a < b + c$, $a > b - c$; $b < a + c$, $b > a - c$; $c < a + b$, $c > a - b$).

<u>***Признаки равенства треугольников:***</u>

Треугольники равны, если у них соответственно равны:

- *две стороны и угол между ними;*
- *два угла и прилегающая к ним торона;*
- *три стороны.*

<u>***Признаки равенства прямоугольных треугольников:***</u>

Два *прямоугольных* треугольника равны, если выполняется одно из следующих условий:

- равны их катеты;
- катет и гипотенуза одного треугольника равны катету и гипотенузе другого;
- гипотенуза и острый угол одного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого;
- катет и прилежащий острый угол одного треугольника равны катету и прилежащему острому углу другого;
- катет и противолежащий острый угол одного треугольника равны катету и противолежащему острому углу другого.

Замечательные линии и точки в треугольнике.

<u>Высота</u> треугольника – это *перпендикуляр, опущенный из любой вершины на противоположную сторону* (или ее продолжение). Эта сторона называется *основанием треугольника*. Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* треугольника. Ортоцентр остроугольного треугольника (точка *O*) расположен внутри треугольника (рис.66), а ортоцентр тупоугольного треугольника (точка *O*) – снаружи (рис. 67); ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла.

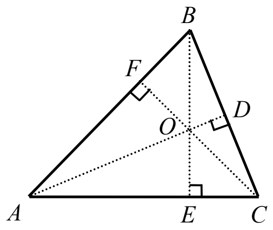


Рис. 66

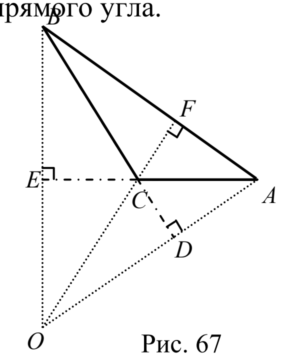


Рис. 67

<u>Медиана</u> – это отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Три медианы треугольника (*AD*, *BE*, *CF*, рис. 68) пересекаются в одной точке *O*, всегда лежащей внутри треугольника и являющейся его центром тяжести. Эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

<u>Биссектриса</u> – это отрезок, выходящий из вершины треугольника до точки пересечения с противоположной стороной и делящий угол пополпм. Три биссектрисы треугольника (*AD*, *BE*,

CF, рис. 69) пересекаются в одной точке *O*, всегда лежащей внутри треугольника и являющейся центром вписанного круга.

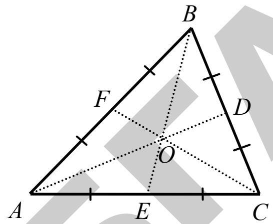


Рис. 68

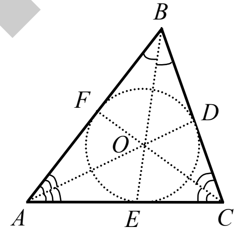


Рис. 69

Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам; например, на *AE : CE = AB : BC*.

<u>Срединный перпендикуляр</u> – это перпендикуляр, проведенный из средней точки отрезка (стороны). Три срединных перпендикуляра треугольника *ABC* (*KO, MO, NO*, рис. 30) пересекаются в одной точке *O*, являющейся *центром описанного круга* (точки *K, M, N* – середины сторон треугольника *ABC*).

В остроугольном треугольнике эта точка лежит внутри треугольника; в тупоугольном – снаружи; в прямоугольном – в середине гипотенузы. Ортоцентр, центр тяжести, центр описанного и центр вписанного круга совпадают только в равностороннем треугольнике.

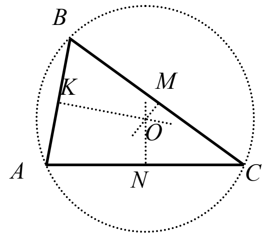


Рис. 70

<u>Средняя линия треугольника</u> – это отрезок *MN*, соединяющий средние точки боковых сторон треугольника (рис. 71). Средняя линия треугольника равна половине его основания и параллельна ему, т.е. $AB \parallel MN$, $|MN| = \frac{1}{2}|AB|$.

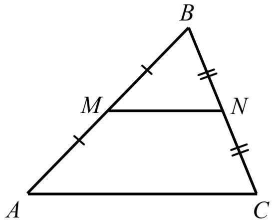


Рис. 71

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов (рис. 72).

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

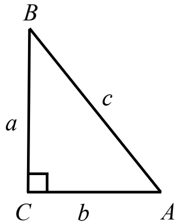


Рис. 72

Соотношение сторон в произвольном треугольнике.

В общем случае (для произвольного треугольника) имеем:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C},$$

где $\angle C$ – это угол между сторонами *a* и *b*.

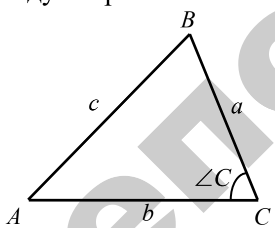


Рис. 73

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Нарисуйте остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники.

№ 2 На нарисованных треугольниках, постройте основные линии, т.е. высоту, медиану, биссектрису и среднюю линию.

№ 3 Найти периметр ΔABC, если $AB = 4\ см$, $BC = 5\ см$, $AC = 7 см$.

№ 4 Найти длину катета ΔABC, если гипотенуза $AB = 5\ см$, $BC = 3 см$ (рис. 74).

№ 5 Найти длину средней линии равностороннего ΔABC, если $AB = 6\ см$.

№ 6 Найти длину стороны AB, если $BC = 4\ см$, $AC = 3\ см$, а $\angle C = 60^o$ (рис. 75).

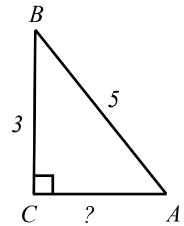


Рис. 74

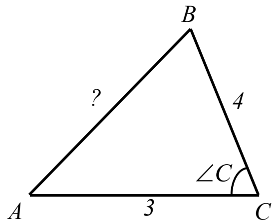


Рис. 75

IV. Домашнее задание:

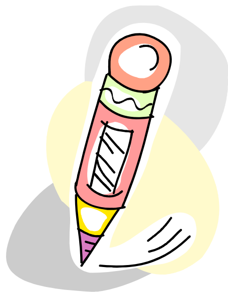
№ 1 Выучить новые слова.

№ 2 Научиться находить основные элементы на рисунках, называя их.

§ 4 Четырехугольники

I. Новые слова:

1. *Параллелограмм.*
2. *Прямоугольник.*
3. *Ромб.*
4. *Квадрат.*
5. *Трапеция.*
6. *Средняя линия трапеции.*



II. Новые понятия, определения, обозначения.

Параллелограмм ($ABCD$, рис. 76) – это четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны и равны.

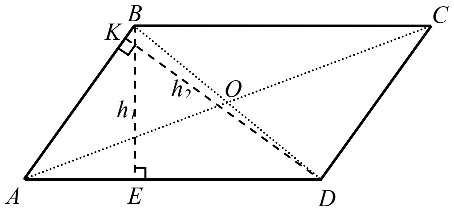


Рис. 76

Любые две противоположные стороны параллелограмма называются его *основаниями*, а расстояние между ними – *высотой* ($BE = h_1$, $DK = h_2$).

Свойства параллелограмма.

- Противоположные стороны параллелограмма равны ($AB = CD$, $AD = BC$).
- Противоположные углы параллелограмма равны ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$).

- Диагонали параллелограмма делятся в точке их пересечения пополам ($AO = OC$, $BO = OD$).
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его четырех сторон:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 .$$

Признаки параллелограмма.

Четырехугольник является параллелограммом, если выполняется одно из следующих условий:

- Противоположные стороны попарно равны ($AB = CD$, $AD = BC$).
- Противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$).
- Две противоположные стороны равны и параллельны ($AB = CD$, $AB \parallel CD$).
- Диагонали делятся в точке их пересечения пополам ($AO = OC$, $BO = OD$).

Если один из углов параллелограмма прямой, то все остальные углы также прямые. Такой параллелограмм называется *прямоугольником* (рис. 77) .

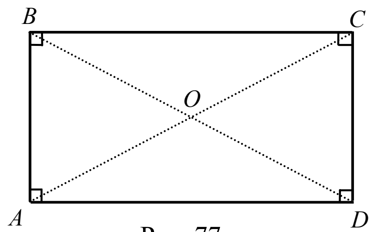


Рис. 77

Основные свойства прямоугольника.

- Стороны прямоугольника являются одновременно его высотами.
- Диагонали прямоугольника равны: $AC = BD$.

Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его смежных сторон: $AC^2 = AD^2 + DC^2$.

Для прямоугольника справедливы и все свойства параллелограмма.

Если все стороны параллелограмма равны, то этот параллелограмм называется ***ромбом*** (рис.78) .

Основные свойства ромба.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны ($AC \perp BD$) и делят их углы пополам ($\angle DCA = \angle BCA,\ \angle ABD = \angle CBD$ и т.д.).

Для ромба справедливы все свойства параллелограмма.

Квадрат – это параллелограмм с прямыми углами и равными сторонами (рис. 79). Квадрат является частным случаем прямоугольника и ромба одновременно; поэтому он обладает всеми их вышеперечисленными свойствами.

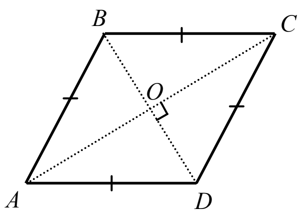


Рис. 78

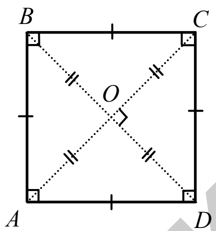


Рис. 79

Трапеция – это четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие нет (рис. 80).

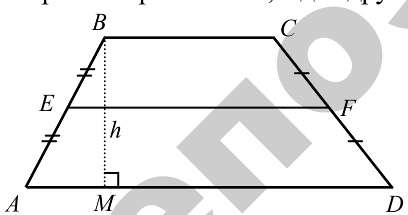


Рис. 80

Здесь $AD \parallel BC$. Параллельные стороны называются *основаниями трапеции*, а две другие (AB и CD) – *боковыми сторонами*. Расстояние между основаниями (BM) есть *высота*. Отрезок EF, соединяющий средние точки E и F боковых сторон, называется ***средней линией трапеции***.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям $EF \parallel AD$ и $EF \parallel BC$ и равна полусумме оснований:

$$\boxed{EF = \frac{AD + BC}{2}}$$

Трапеция с равными боковыми сторонами ($AB = CD$) называется *равнобочной трапецией*. В равнобочной трапеции углы при каждом основании равны ($\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle C$).

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Найти периметр параллелограмма $ABCD$, если $AB = 4\ см$, $AD = 8\ см$.

№ 2 Найти длину диагонали квадрата $ABCD$, если $AB = 6\ см$.

№ 3 Найти длину средней линии трапеции $ABCD$, если $AD = 10\ см$, $BC = 4\ см$.

IV. Домашнее задание:

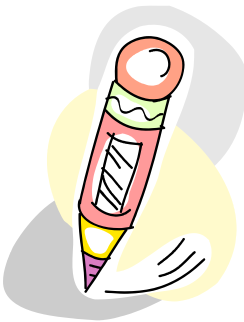
№ 1 Выучить новые слова.

№ 2 Научиться рисовать четырехугольники всех видов, называть их элементы.

§ 5 *Окружность и ее элементы*

I. Новые слова:

1. *Геометрическое место точек.*
2. *Окружность.*
3. *Круг.*
4. *Центр окружности.*
5. *Радиус.*
6. *Дуга.*
7. *Секущая.*
8. *Хорда.*
9. *Диаметр.*
10. *Касательная.*
11. *Сегмент.*
12. *Сектор.*
13. *Углы в круге.*
14. *Длина дуги.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Геометрическое место точек – это множество всех точек, удовлетворяющих определенным заданным условиям.

Окружность – это геометрическое место точек (т.е. множество всех точек) на плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой *центром окружности*. Отрезок,

соединяющий центр окружности с какой-либо ее точкой, называется *радиусом* и обозначается r или R (OA, рис. 81).

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом*. Часть окружности (AmB, рис. 81) называется *дугой*.

Прямая PQ, проходящая через точки M и N окружности (рис. 81), называется *секущей*, а ее отрезок MN, лежащий внутри окружности – *хордой*.

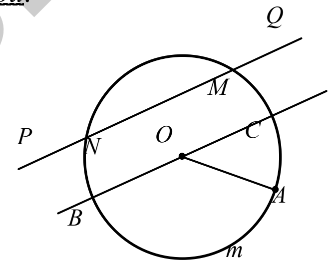


Рис. 81

Хорда, проходящая через центр круга (BC, рис.81), называется *диаметром* и обозначается d или D . *Диаметр* – это наибольшая хорда, равная двум радиусам ($d = 2\,r$).

Прямая AB (рис. 82) называется *касательной* к окружности в точке K. Точка K называется *точкой касания*. Касательная и окружность имеют только одну общую точку – точку касания.

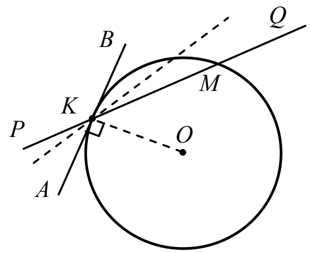


Рис. 82

Свойства касательной.

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания ($AB \perp OK$, рис. 82).

Из точки, лежащей вне круга, можно провести две касательные к одной и той же окружности; их отрезки равны (рис. 83).

$AB = AC$

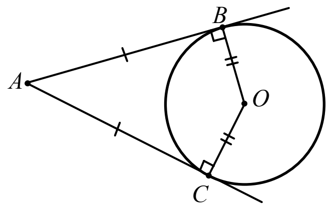


Рис. 83

Сегмент – это часть круга, ограниченная дугой ACB и соответствующей хордой AB (рис. 84).

Сектор – это часть круга, ограниченная дугой AmB и двумя радиусами OA и OB, проведенными к концам этой дуги (рис. 85).

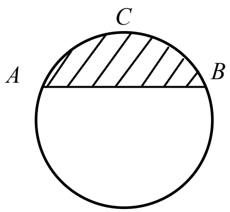


Рис. 84

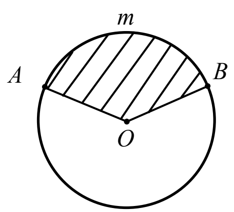


Рис. 85

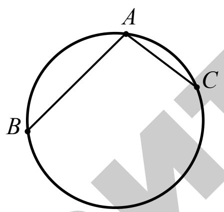


Рис. 86

Углы в круге. *Центральный угол* – угол, образованный двумя радиусами ($\angle AOB$, рис. 85). *Вписанный угол* – угол, образованный двумя хордами AB и AC, проведенными из их одной общей точки ($\angle BAC$, рис. 86). *Описанный угол* – угол, образованный двумя касательными AB и AC, проведенными из одной общей точки ($\angle BAC$, рис. 83).

Длина дуги окружности пропорциональна ее радиусу r и соответствующему центральному углу:

$$l_\alpha = 2\pi r \cdot \alpha$$

Таким образом, если мы знаем длину дуги l и радиус r, то величина соответствующего центрального угла может быть определена их отношением:

$$\alpha = \frac{l_\alpha}{2\pi r}$$

В соответствии с формулой длины дуги, длина окружности C может быть выражена следующим образом:

$$C = 2\pi r$$

где π – иррациональное число; его приближенное значение 3,1415..

Соотношения между элементами круга.

Вписанный угол ($\angle ABC$, рис. 87) равен половине центрального угла $\angle AOC$, опирающегося на ту же дугу AmC. Поэтому, все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. Любой вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (в нашем случае AmC).

Все вписанные углы, опирающиеся на полукруг, т.е. на диаметр ($\angle APB$, $\angle AQB$, …, рис. 88), прямые.

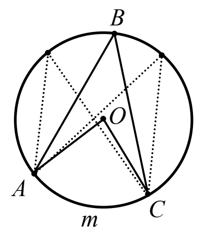


Рис. 87

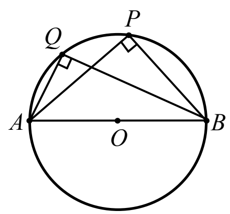


Рис. 88

Произведения отрезков хорд (AB и CD, рис. 89), на которые они делятся точкой пересечения, равны: $AO \cdot BO = CO \cdot DO$.

Хорда (AB, рис. 90), перпендикулярная диаметру CD, делится в их точке пересечения O пополам: $AO = OB$.

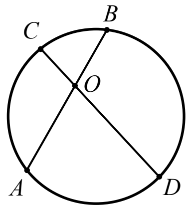


Рис. 89

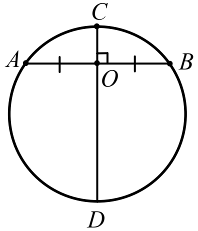


Рис. 90

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Нарисовать окружность и на ней показать основные элементы.

№ 2 Вычислите длину окружности C, если ее радиус равен 5 см, π взять равным 3,14.

№ 2 Вычислите длину дуги, если ее радиус равен 5 см, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, π взять равным 3, 14.

№ 3 Вычислите величину центрального угла, если вписанный угол, опирающийся на ту же самую дугу равен 60°.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Выучить новые слова.

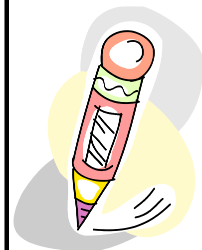
№ 2 Научиться пользоваться обозначениями.

№ 3 Уметь показать на рисунках все элементы окружности.

§ 6 *Вписанные и описанные многоугольники*

I. Новые слова:

1. Вписанный в круг многоугольник.
2. Описанный около круга многоугольник.
3. Описанный около многоугольника круг.
4. Вписанный в многоугольник круг.
5. Правильный многоугольник.
6. Центр правильного многоугольника.
7. Апофема правильного многоугольника



II. Новые понятия, определения, обозначения

Вписанным в круг называется многоугольник, вершины которого расположены на окружности (рис. 91). *Описанным около круга* называется многоугольник, стороны которого являются касательными к окружности (рис. 92).

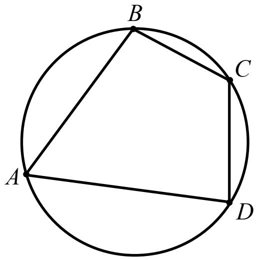


Рис. 91

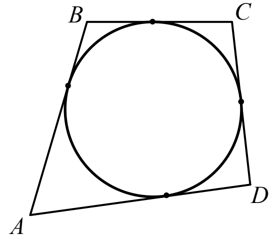


Рис. 92

Соответственно, окружность, проходящая через вершины многоугольника (рис. 91), называется *описанной около* *многоугольника*; окружность, для которой стороны многоугольника являются касательными (рис. 92), называется *вписанной в многоугольник*.

Для произвольного многоугольника не всегда возможно вписать в него и описать около него окружность.

Для треугольника это всегда возможно.

Радиус r вписанного круга выражается через стороны *a, b, c* треугольника: $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Радиус R описанного круга выражается формулой:

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},\text{ где } p \text{ – полупериметр.}$$

В четырехугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны.

Для параллелограммов это возможно только для ромба (квадрата). Центр вписанного круга расположен в точке пересечения диагоналей.

Около четырехугольника можно описать круг (окружность), если сумма его противоположных углов равна 180º.

Для параллелограммов это возможно только для прямоугольника (квадрата). Центр описанного круга лежит в точке пересечения диагоналей.

Вокруг трапеции можно описать круг, если только она равнобедренная.

Правильный многоугольник – это многоугольник с равными сторонами и углами.

На рисунке 93 показан *правильный шестиугольник*, а на рисунке 94 – *правильный восьмиугольник*.

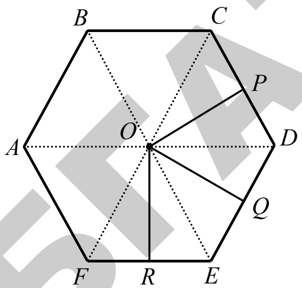


Рис. 93

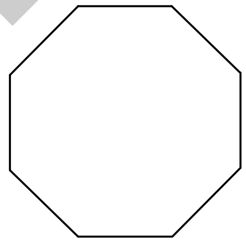


Рис. 94

Правильный четырехугольник – это квадрат; *правильный треугольник* – равносторонний треугольник.

Каждый угол правильного многоугольника равен $\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$, где n – число его углов.

Внутри правильного многоугольника существует точка *O* (рис. 93), равноудаленная от всех его вершин *OA* = *OB* = ... = *OF,* которая называется *центром правильного многоугольника*. Центр правильного многоугольника также равноудален от всех его сторон *OP* = *OQ* = *OR* = ...

Отрезки *OP, OQ, OR,* ... называются *апофемами*; отрезки *OA, OB, OC, … – радиусы правильного многоугольника*.

В правильный многоугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Центры вписанной и описанной окружностей совпадают с центром правильного многоугольника. Радиус описанного круга – это радиус правильного многоугольника, а радиус вписанного круга – его апофема.

Соотношения сторон и радиусов правильных многоугольников:

Для правильного треугольника: $a = R\sqrt{3}$, $a = 2r\sqrt{3}$.

Для правильного четырехугольника (квадрата): $a = R\sqrt{2}$, $a = 2r$.

Для правильного шестиугольника: $a = R$, $a = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Для большинства правильных многоугольников невозможно выразить посредством алгебраической формулы соотношение между их сторонами и радиусами.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Найти радиус вписанной окружности в треугольник со сторонами 6 см, 6 см, 4 см.

№ 2 Найти радиус описанной окружности около треугольника со сторонами 3 см, 4 см, 5 см.

№ 3 Найти радиус вписанной окружности в шестиугольник со стороной 5 см.

№ 4 Можно ли описать окружность около четырехугольника со сторонами AB = 3 см, BC = 4 см, CD = 5 см, AD = 4 см.

IV. Домашнее задание:

№ 1 Выучить новые слова.

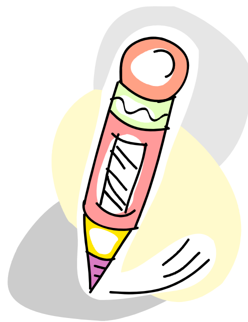
№ 2 Нарисуйте правильный четырехугольник со стороной 2 см и вычислите радиусы вписанной и описанной окружности.

№ 3 Подготовиться к диктанту по новым словам.

§ 7 *Основные понятия стереометрии*

I. Новые слова:

1. *Предмет стереометрии.*
2. *Плоскость.*
3. *Пучок плоскостей.*
4. *Ось пучка плоскостей.*
5. *Скрещивающиеся прямые.*
6. *Параллельные плоскости.*
7. *Параллельные прямая и плоскость.*
8. *Наклонная к плоскости.*
9. *Углы между прямыми.*
10. *Проекции точки и отрезка.*
11. *Двугранный угол.*
12. *Линейный угол.*
13. *Углы между плоскостями.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Стереометрия изучает геометрические свойства пространственных тел и фигур. В стереометрии основными понятиями являются *прямая* и *плоскость*.

Основные аксиомы стереометрии:

Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость.

Через три точки, лежащие на одной прямой, можно провести бесчисленное множество плоскостей, образующих в этом случае _пучок плоскостей_. Прямая, через которую проходят все плоскости пучка, называется _осью пучка_.

Через любую прямую и точку, лежащую вне этой прямой, можно провести одну и только одну плоскость.

Через две пересекающиеся прямые всегда можно провести одну и только одну плоскость.

Через две параллельные прямые всегда можно провести плоскость.

Скрещивающиеся прямые – это прямые которые не пересекаются, сколько бы их ни продолжать и не лежащие в одной плоскости. Разница между скрещивающимися и параллельными прямыми состоит в том, что параллельные прямые имеют одинаковое направление, а скрещивающиеся – нет.

Признаки параллельности прямой и плоскости:

Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости, это значит, что $AB||CD,\ CD\in\alpha \Rightarrow AB||\alpha$ (рис. 95).

Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны $AB\perp CD,\ \alpha\perp CD \Rightarrow AB||\alpha$ (рис. 96)..

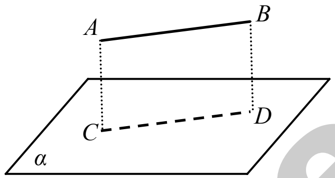


Рис. 95

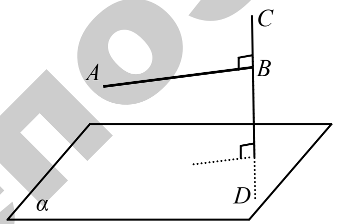


Рис. 96

Признаки параллельности плоскостей:

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (рис. 97).

Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны (рис. 98).

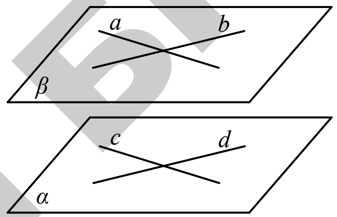


Рис. 97

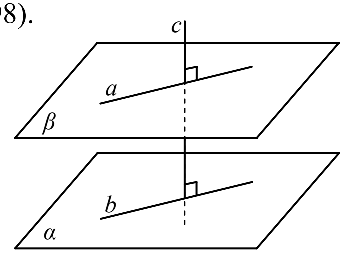


Рис. 98

Признаки перпендикулярности прямой и плоскости:

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Если плоскость перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой (рис. 100).

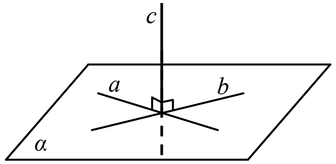


Рис. 99

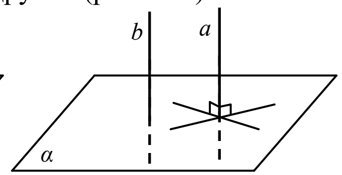


Рис. 100

Наклонная к плоскости прямая, пересекающая плоскость и не перпендикулярная ей, называется наклонной к плоскости (рис. 101).

Теорема о трех перпендикулярах. Прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной к этой плоскости, перпендикулярна и самой наклонной. Рисунок 101, где AB – это наклонная, AC – перпендикуляр к плоскости, BC – проекция.

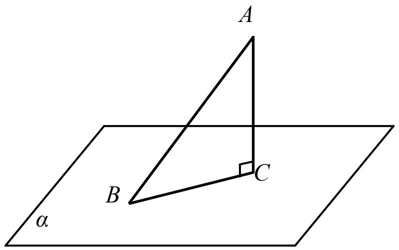


Рис. 101

<u>Признак перпендикулярности плоскостей:</u>

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (рис. 102).

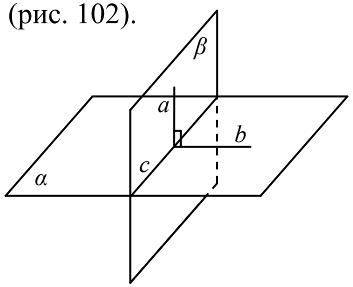


Рис. 102

Углы. *Угол между двумя пересекающимися прямыми* измеряется так же, как и в планиметрии (так как через эти прямые можно провести плоскость). *Угол между двумя параллельными прямыми* принимается равным 0 или 180°. *Угол между двумя скрещивающимися* прямыми AB и CD (рис. 103) определяется следующим образом: через любую точку O проводят лучи OM и ON так, что $OM||AB$ и $ON||CD$. Тогда угол между AB и CD принимается равным углу $\angle NOM$. Другими словами, прямые AB и CD переносятся в новое положение параллельно самим себе до пересечения. В частности, точка O может быть взята на одной из прямых AB или CD, которая в этом случае будет неподвижной.

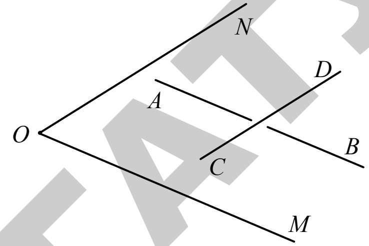


Рис. 103

Проекции. <u>*Проекцией точки*</u> A на плоскость α называется основание C перпендикуляра AC, опущенного из точки A на плоскость α. Проекцией отрезка AB на плоскость α является отрезок CD, концы которого являются проекциями точек A и B (рис. 104).

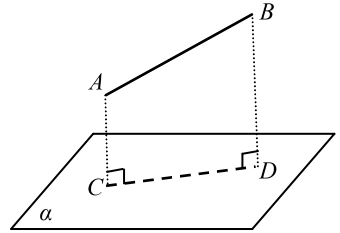


Рис. 104

<u>*Двугранный угол*</u> – фигура, образованная двумя полуплоскостями β и γ, проходящими через одну и ту же прямую MN (рис. 105), называется двугранным углом. Прямая MN называется ребром двугранного угла; полуплоскости β и γ – его гранями. Плоскость α, перпендикулярная к ребру MN, даёт в её пересечении с полуплоскостями β и γ угол $\angle AOB$. Угол $\angle AOB$ называется <u>*линейным углом*</u> двугранного угла. Двугранный угол измеряется своим линейным углом.

Углы между плоскостями. Две плоскости называются *перпендикулярными*, если они образуют прямой угол. Угол между двумя *параллельными* плоскостями принимается равным нулю. В общем случае угол между двумя плоскостями α и β (рис. 106) измеряется углом между препендикулярами проведенными в плоскостях α и β из одной точки, принадлежащей прямой, по которой пересекаются плоскости. прямыми AB и CD, которые перпендикулярны к плоскостям соответственно.

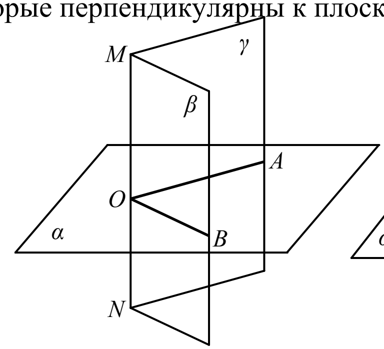


Рис. 105

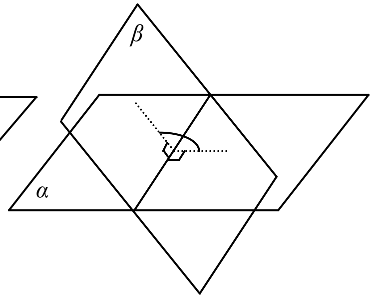


Рис. 106

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Нарисовать плоскость и прямую перпендикулярную ей.

№ 2 Нарисовать плоскость, наклонную прямую и проекцию этой наклонной к плоскости.

№ 3 Нарисовать пересекающиеся плоскости и угол между ними.

IV. Домашнее задание:

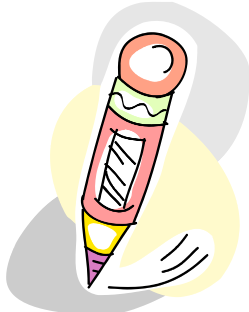
№ 1 Выучить новые слова.

№ 2 Научится показывать основные элементы на рисунках.

§ 8 *Многогранники*

I. Новые слова:

1. *Многогранник.*
2. *Выпуклый многогранник.*
3. *Призма.*
4. *Параллелепипед.*
5. *Пирамида.*
6. *Тетраэдр.*
7. *Правильная пирамида.*
8. *Усеченная пирамида.*
9. *Правильный многогранник.*
10. *Гексаэдр (куб).*
11. *Октаэдр.*
12. *Додекаэдр.*
13. *Икосаэдр.*



II. Новые понятия, определения, обозначения

Многогранник – это тело, граница которого состоит из кусков плоскостей (многоугольников). Эти многоугольники называются *гранями*, их стороны – *рёбрами,* их вершины – *вершинами многогранника.* Отрезки, соединяющие две вершины и не лежащие на одной грани, называются *диагоналями многогранника.* Многогранник – *выпуклый*, если все его диагонали расположены внутри него.

Призма – это многогранник (рис. 107), две грани которой *ABCDE* и *abcde* (*основания призмы*) – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани (*AabB*, *BbcC* и т.д.) – параллелограммы, плоскости которых параллельны прямой (*Aa*, или *Bb*, или *Cc* и т.д.). Параллелограммы *AabB*, *BbcC* и т.д. называются *боковыми гранями*; рёбра *Aa*, *Bb, Cc* и т.д. называются *боковыми рёбрами. Высота призмы* – это любой перпендикуляр, опущенный из любой точки основания на плоскость другого основания.

В зависимости от формы многоугольника, лежащего в основании, призма может быть соответственно: *треугольной, четырёхугольной, пятиугольной, шестиугольной* и т.д. Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к плоскости основания, то такая призма называется *прямой*; в противном случае – это *наклонная призма*. Если в основании прямой призмы лежит правильный многоугольник, то такая призма также называется *правильной*. На рис. 107 показана наклонная призма.

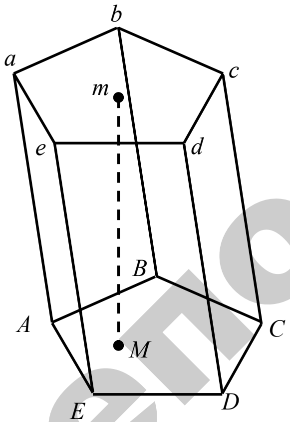


Рис. 107

Параллелепипед – это призма, основания которой параллелограммы. Таким образом, параллелепипед имеет шесть граней и все они – параллелограммы. Противоположные грани попарно равны и параллельны. У параллелепипеда четыре диагонали; они все пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Если четыре боковые грани параллелепипеда – прямоугольники, то он называется *прямым*. Прямой параллелепипед, у которого все шесть граней – прямоугольники, называется *прямоугольным*. Диагональ прямоугольного параллелепипеда d и его рёбра a, b, c связаны соотношением: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Прямоугольный параллелепипед, все грани которого квадраты, называется *кубом*. Все рёбра куба равны.

Пирамида – это многогранник, у которого одна грань (*основание пирамиды*) – это произвольный многоугольник (*ABCDE*, рис. 108), а остальные грани (*боковые грани*) – треугольники с общей вершиной *S*, называемой *вершиной пирамиды*. Перпендикуляр *SO*, опущенный из вершины пирамиды на ее основание, называется *высотой пирамиды*. В зависимости от формы многоугольника, лежащего в основании, пирамида может быть соответственно: *треугольной, четырёхугольной, пятиугольной, шестиугольной* и т.д. Треугольная пирамида является *тетраэдром* (*четырёхгранником*), четырёхугольная – *пятигранником* и т.д. Пирамида называется *правильной*, если в основании лежит правильный многоугольник, а ее высота падает в центр основания. Все боковые ребра правильной пирамиды равны; все боковые грани – равнобедренные треугольники. Высота боковой грани (*SF*) называется *__апофемой__* правильной пирамиды.

Если провести сечение *abcde*, параллельное основанию *ABCDE* (рис. 109) пирамиды, то тело, заключённое между этими плоскостями и боковой поверхностью, называется *__усеченной пирамидой__*. Параллельные грани *ABCDE* и *abcde* называются *основаниями*; расстояние *Oo* между ними – *высотой*. Усечённая пирамида называется *__правильной__*, если пирамида, из которой она была получена – правильная. Все боковые грани правильной усечённой пирамиды – равные равнобочные трапеции. Высота *Ff* боковой грани (рис. 109) называется *__апофемой__* правильной усечённой пирамиды.

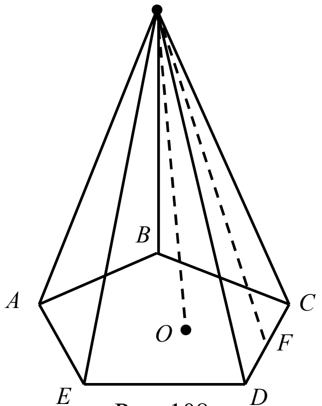


Рис. 108

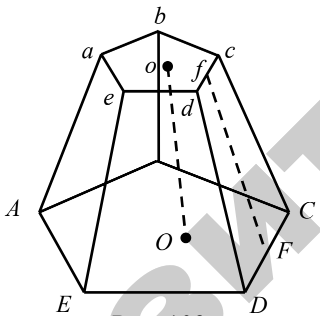


Рис. 109

Многогранник называется *__правильным__*, если все его грани – равные между собой правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число граней. Известно только *5* выпуклых правильных многогранников и 4 невыпуклых правильных многогранника. Правильные выпуклые

многогранники следующие: *__тетраэдр__* (4 грани, рис. 110); *__гексаэдр__* (6 граней, рис. 111) – это хорошо нам известный *куб*; *__октаэдр__* (8 граней, рис. 112); *__додекаэдр__* (12 граней, рис. 113); *__икосаэдр__* (20 граней, рис. 114).

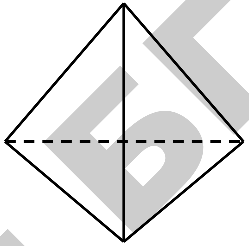


Рис. 110

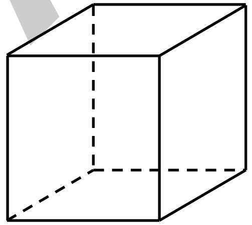


Рис. 111

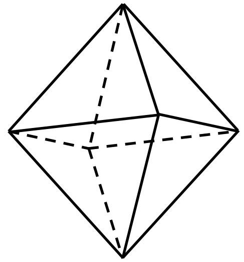


Рис. 112

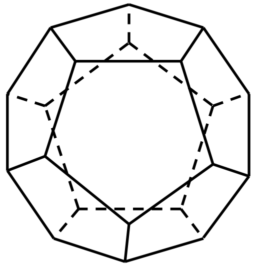


Рис. 113

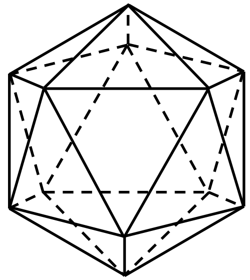


Рис. 114

Можно вписать шар в любой правильный многоугольник и описать шар около любого правильного многоугольника.

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Нарисовать треугольную прямую призму.

№ 2 Нарисовать правильную усеченную пирамиду.

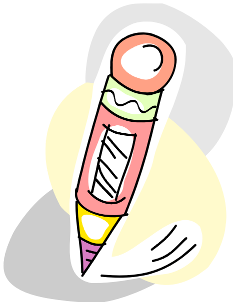
IV. Домашнее задание:

№ 1 Выучить новые слова.

№ 2 Подготовиться к диктанту по новым словам.

§ 9 *Цилиндр и конус*

I. Новые слова:



1. *Цилиндр.*
2. *Прямой цилиндр.*
3. *Конус.*
4. *Прямой конус.*

II. Новые понятия, определения, обозначения.

Цилиндром называют тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов (рис. 115). Круги называют основаниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, образующими цилиндра.

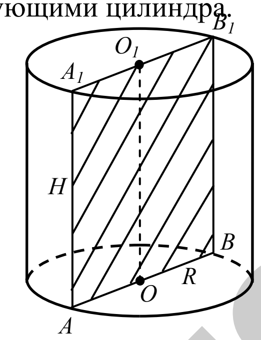


Рис. 115

Цилиндр называют *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Радиусом цилиндра называют радиус его основания $R = OA$.

Высотой цилиндра называют расстояние между плоскостями его оснований $H = AA_1$.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований OO_1.

Осевое сечение цилиндра – сечение A_1ABB_1, содержащее его ось.

Конусом называется тело, состоящее из круга – *основание конуса*, точки, не лежащей в плоскости основания, – вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания (рис. 116).

Образующая конуса – отрезок SA, соединяющий вершину конуса с точкой окружности основания.

Конус называется *прямым*, если прямая SO, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

Высота конуса SO – перпендикуляр, опущенный из его вершины S на плоскость основания.

Осью прямого конуса назвается прямая, содержащая его высоту SO.

Осевое сечение конуса – сечение конуса SAB, содержащее его ось.

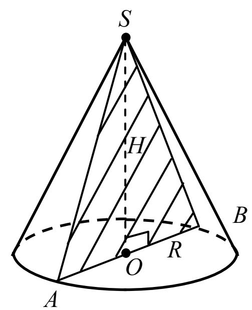


Рис. 116

<u>Усеченный конус</u> – часть конуса, заключенная между основанием конуса и сечением конуса плоскостью, параллельной основанию.

$h = OO_1$ – высота усеченного конуса. Прямая, *OO_1 – ось усеченного конуса*. *$l = AA_1$ – образующая*. *$OA = R$, $O_1A_1 = r$ – радиусы* оснований усеченного конуса.

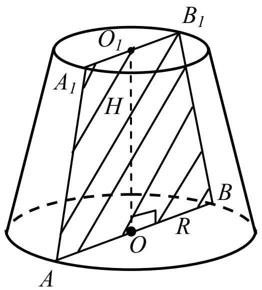


Рис. 117

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Нарисовать наклонный цилиндр, провести в нем высоту и образующую.

№ 2 Нарисовать конус, на нем изобразить высоту, образующую и осевое сечение.

№ 3 Нарисовать усеченный конус, на нем указать радиусы оснований.

Домашнее задание:

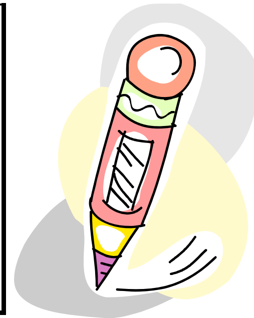
№ 1 Выучить новые слова.

№ 2 Научиться показывать и рисовать основные элементы цилиндра и конуса.

§ 10 *Сфера*

I. Новые слова:

1. *Сферическая поверхность.*
2. *Сфера (шар).*
3. *Сферический сегмент.*
4. *Сферический слой.*
5. *Сферический пояс.*
6. *Сферический сектор.*



II. Новые понятия, определения, обозначения.

<u>Сферическая поверхность</u> – это геометрическое место точек (т.е. множество всех точек) в пространстве, равноудалённых от одной точки *O*, которая называется *центром сферической поверхности* (рис. 118). *Радиус AO* и *диаметр AB* определяются так же, как и в окружности.

<u>Сфера (шар)</u> – это тело, ограниченное сферической поверхностью. Можно получить шар, вращая полукруг (или круг) вокруг диаметра. Все плоские сечения шара – *круги* (рис. 118). Наибольший круг лежит в сечении, проходящем через центр шара, и называется *большим кругом*. Его радиус равен радиусу шара.

Части сферы. Часть сферы, отсекаемая от него какой-либо плоскостью *ABC* (рис. 93), называется *<u>сферическим сегментом</u>*. Круг *ABC* называется *основанием* шарового сегмента. Отрезок *MN* перпендикуляра, проведенного из центра *N* круга *ABC* до пересечения со сферической поверхностью, называется *высотой* шарового сегмента. Точка М называется *вершиной* шарового сегмента.

Часть сферы, заключённая между двумя параллельными плоскостями *ABC* и *DEF*, пересекающими сферическую поверхность (рис. 119), называется *шаровым слоем*; кривая поверхность шарового слоя называется *шаровым поясом*. Круги *ABC* и *DEF* – *основания* шарового пояса. Расстояние *NK* между основаниями шарового пояса – его *высота*. Часть шара, ограниченная кривой поверхностью сферического сегмента *AMCB*, (рис. 119) и конической поверхностью *OABC*, основанием которой служит основание сегмента *ABC*, а вершиной – центр шара *O*, называется *шаровым сектором*.

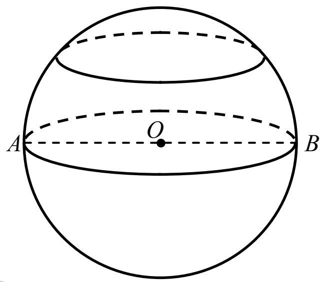


Рис. 118

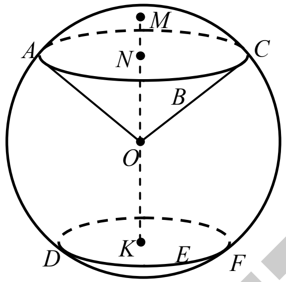


Рис. 119

III. Примеры для аудиторной работы:

№ 1 Нарисовать сферу и основные ее элементы

IV. Домашнее задание:

№ 1 Выучить новые слова.

№ 2 Научиться показывать и рисовать основные элементы сферы.

Варианты билетов для устного экзамена

Билет №1.

№ 1 Множество чисел.

№ 2 Логарифмическая функция.

№ 3 Треугольники, основные понятия и виды.

Билет №2.

№ 1 Действия с натуральными числами.

№ 2 Показательная функция.

№ 3 Параллелограмм, основные понятия и свойства.

Билет №3.

№ 1 Действия с целыми числами.

№ 2 Триогонометрические функции.

№ 3 Трапеция, основные понятия и виды.

Билет №4.

№ 1 Действия с рациональными числами.

№ 2 Квадратичная функция, основные виды графиков.

№ 3 Окружность, круг, сектор и другие понятия.

Билет №5.

№ 1 Спень числа, основные свойства.

№ 2 Метод интервалов.

№ 3 Призма, основные понятия.

Билет №6.

№ 1 Корень *n*-ой степени, основные свойства.

№ 2 Решение систем, основные способы.

№ 3 Пирамида, основные понятия.

Билет №7.

№ 1 Уравнения и их основные виды, решение уравнений.

№ 2 Производная, таблица производных.

№ 3 Конус, основные понятия.

Билет №8.

№ 1 Функция, способы задания функций.

№ 2 Прогрессии, основные понятия.

№ 3 Цилиндр, основные понятия.

Билет №9.

№ 1 Действия с дробями.

№ 2 Решение квадратных уравнений.

№ 3 Сфера, основные понятия.

Билет №10.

№ 1 Неравенства, решение неравенств.

№ 2 Решение тригонометрических уравнений.

№ 3 Векторы, основные действия над ними.

Варианты контрольных работ

Контрольная работа №1.

№ 1 Записать словами математические выражения $c \notin D,\ b \subset C,\ b = \varnothing$.

№ 2 Пусть $A = \{-1; 0; 1; 2; 5\}$, $B = \{0; 2; 3; 6\}$ найти: $A \cup B,\ A \cap B$.

№ 3 Записать словами $(-\infty; 2),\ [-1; 5],\ (-6; 0]$.

№ 4 Найти $[-2; 8) \cup (0; 9],\ (-\infty; 0) \cap [-1; 8)$.

№ 5 Записать словами дроби $-\frac{3}{7};\ 2\frac{2}{5};\ -1{,}07$.

№ 6 Записать словами дроби $\frac{2}{5};\ -\frac{8}{7};\ \frac{11}{10};\ \frac{3}{4}$.

№ 7 Выбрать дроби по видам $1{,}27;\ -1\frac{3}{8};\ 1{,}(21);\ \frac{7}{15};\ 0{,}09;\ 0{,}1(3)$ Варианты а) обыкновенная, б) десятичная, в) периодическая.

№ 8 Вычислить: $\frac{(6-8)\cdot 2+6}{(7-5):2-3}$

№ 9 Вычислить: $\frac{\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\right):1\frac{1}{20}}{\left(7\frac{1}{5}-4\frac{2}{7}\right)\cdot 3\frac{1}{2}}$

№ 10 Вычислить: $\frac{\left(0{,}4+\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{9}}{(0{,}75-1{,}25)\cdot\frac{3}{2}}+1{,}875$

Контрольная работа №2.

№ 1 Записать словами 5^2; $(-3)^3$; $\left(\frac{3}{4}\right)^8$.

№ 2 Вычислить:

$7^1 \cdot 7^8 \cdot 7^{-9} =$; $\qquad \frac{8^2 \cdot \left(8^3\right)^3}{8^3 \cdot 8^7} =$;

$\frac{7^0 \cdot 3^2 \cdot 8^5}{3^4 \cdot \left(8^2\right)^3} =$; $\qquad \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} : 3 =$.

№ 3 Записать словами $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{14}$, $\sqrt[8]{17}$.

№ 4 Вычислить: $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[3]{64}$.

№ 5 Вынести из-под знака корня $\sqrt{75}$, $\sqrt[3]{56}$.

№ 6 Внести под знак корня $3\sqrt{6}$, $2\sqrt[3]{3}$.

Контрольная работа №3.

№ 1 Записать словами $2x^3y$; $-\frac{1}{3}a^2b^4$.

№ 2 Назвать коофициенты: $2xy$; y^3; $-1,2zc$; $\frac{1}{6}y^3c$.

№ 3 Назвать переменные: $-3xy^2$; $5c$; $8abc$; $4zt$.

№ 4 Выполнить действия: $(a+2b)^2$; $(1-x)^3$.

№ 5 Раскрыть скобки $(3x-5y+6)-(2x+4y-3)$.

№ 6 Разделить $\frac{49-x^4}{7+x^2}$; $\frac{3xy^2+6xy}{y}+2$.

№ 7 Раскрыть скобки $\left(4x^2y^3\right)^2$; $(3x+y-3)\cdot(2+y)$.

№ 8 Выполнить действия $\frac{3x}{2y}-\frac{2x}{3y}$; $\frac{3x+3y}{3x}\cdot\frac{9x^2}{2x+2y}+\frac{3}{2}x$;

$\frac{2x}{x^2-y^2}+\frac{1}{x+y}$.

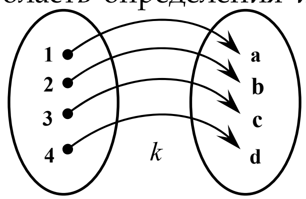
№ 9 Избавится от иррациональности $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

№ 10 Упростить $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

№ 11 Записать формулы сокращенного умножения a^2-b^2; a^3-b^3; $(a+b)^2$.

Контрольная работа №4.

№ 1 Дана функция k назвать область определения и область значения.



№ 2 Построить графики функций: $y=-x+4$, $y=|x|+3$, $y=\frac{3}{x}$

№ 3 Решить уравнения:

1) $(y-4c)\cdot(c+y)-y^2=8$, если с =1;

2) $\frac{z-3}{2}-4=\frac{z+5}{2}$; 3) $|x+4|=3$.

№ 4 Решить системы уравнений:

$\begin{cases}3x+4y=21,\\4x-2y=4.\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{4}{y+3}+\frac{3}{x-1}=7,\\\frac{16}{y+3}+\frac{2}{x-1}=6.\end{cases}$

Контрольная работа №5.

№ 1 Решить неравенство $2x+8\ge x+6$.

№ 2 Решить двойное неравенство $-3,5\le\frac{5x+1}{2}<2,5$.

№ 3 Решить дробно-рациональное неравенство методом интервалов $\frac{3x-1}{x}\ge 2$; $\frac{(x-3)^2(x+1)}{x-2}\le 0$.

№ 4 Решить квадратное неравенство $x^2-8x-9\ge 0$.

№ 5 Решить неравенство $\frac{x^2-10x+25}{x-1}<0$.

№ 6 Решить системы неравенств:

$\begin{cases}x+8\le 3x+5,\\2x-7<5x+2.\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-12x+11<0,\\3x+6\ge 0.\end{cases}$.

№ 7 Решить нерваенство с модулем: $|x+2|\le 3$; $|3x-1|>x+2$.

№ 8 Записать словами $a\le b,\ |c|>d$.

Контрольная работа №6.

№ 1 Прочитать и записать словами $2^5;\ -3^2;\ 4^3;\ \left(1\frac{1}{5}\right)^4$.

№ 2 Вычислить:

$2^3-16\cdot2^{-2}+\sqrt{4}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^0+2\cdot4^{-1}+8,5$.

№ 3 Решить уравнения:

$3^{x-1}=27$; $2^{2x-1}\cdot8^x=2$; $\frac{3^x}{7^x}=\frac{9}{49}$;

$2^{x+1}+2^x=6$; $4^x-3\cdot2^x+2=0$.

№ 4 Решить неравенства:

$4^{x+5}\le16$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+2}>9$.

№ 5 Построить графики функций:

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y=5^x$.

Контрольная работа №7.

№ 1 Прочитать и записать словами $\ln 5;\ \log_3 x;\ \lg(ab)$.

№ 2 Вычислить:

$2^{\log_2 8}$; $4^{3\log_4 2}$; $\log_6 3+\log_6 2-\log_6 1$.

№ 3 Решить уравнения:

$\log_3\log_2 x=1$; $\log_3 x+2=0$; $\log_2 x+\log_2(x+1)=1$.

№ 4 Решить неравенства:

$\lg x\le 1$; $\ln x+\ln(x+2)>1$; $\log_3(x+4)\ge 2$.

№ 5 Построить графики функций:

$y=\log_4 x$; $y=\log_{\frac{1}{4}} x$.

Контрольная работа №8.

№ 1 Прочитать и записать словами $\sin 2x$; $\cos(5x-\pi)$; $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

№ 2 Вычислить:

$\sin 45^{\circ}-\cos\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}135^{\circ}$; $1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-2\sin 30^{\circ}$.

№ 3 Упростить выражения:

$\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha+\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^4\alpha$;

$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right)\cdot\frac{\sin 2\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$.

№ 4 Решить простейшие уравнения:

$\sin 2x=\frac{1}{2}$; $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

№ 5 Построить графики функций:

$y=2\sin x$; $y=\frac{1}{2}\cos x$.

Итоговая экзаменационная работа (уровень 1).

№ 1 Вычислить: $(1,2-0,8)\cdot 10-13$.

№ 2 Решить уравнение: $2(x-1)-8(x+6)=7$.

№ 3 Решить систему неравенств: $\begin{cases}3x-6>x+8,\\ 2x+3\le x+20.\end{cases}$.

№ 4 Решить уравнение: $3x^2-10x+3=0$.

№ 5 Вычислить: $\sin 30^{\circ}-\operatorname{tg}45^{\circ}+\cos 90^{\circ}$.

№ 6 Решить уравнение: $|x+5|=8$.

№ 7 Вычислить: $\log_3 9-\lg 10$.

Итоговая экзаменационная работа (уровень 2).

№ 1 Вычислить: $\left(1,3+\frac{2}{5}\right):+0,35$.

№ 2 Упростить выражение: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{xy}{x+y}$.

№ 3 Решить уравнение: $5(x-6)-8(x+1)=3$.

№ 4 Решить уравнение: $|5x+1|=4$.

№ 5 Решить уравнение: $3x^2-16x+5=0$.

№ 6 Решить систему неравенств: $\begin{cases}2x-1<x+8,\\ 5x-6\ge x+2.\end{cases}$.

№ 7 Решить неравенство: $|2x-1|>5$.

№ 8 Решить уравнение: $3^x\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{1-x}=1$.

№ 9 Решить уравнение: $\ln\left(2^x-1\right)=0$.

№ 10 Вычислить: $\operatorname{ctg}30^{\circ}-\operatorname{tg}60^{\circ}+\sin 45^{\circ}-\cos 30^{\circ}$.

№ 11 Решить уравнение: $\cos 5x=0$

№ 12 Рассказать и нарисовать фигуру треугольник, описать все ее виды.

СОДЕРЖАНИЕ

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Учебное издание

Лобанок Лариса Васильевна
Покляк Жанна Ивановна

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие для иностранных слушателей подготовительного отделения

Ответственный за выпуск *И.М. Морозова*
Компьютерная верстка *Ю.П. Каминская*

Подписано в печать 14.10.2009 г. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 11,86. Уч.-изд. л. 9,27. Тираж 50 экз. Заказ 895.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Белорусский государственный аграрный технический университет».
ЛИ № 02330/0131734 от 10.02.2006.
ЛП № 02330/0131656 от 02.02.2006.
Пр. Независимости, 99–2, 220023, Минск.