МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Морозова И.М., Хвощинская Л.А., Боярина И.П.

МАТЕМАТИКА
(ЧАСТЬ 1)

Учебно-методический комплекс
для студентов
высших учебных заведений
по направлению образования 74 06 Агроинженерия

Минск
2009

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я 7
М 34

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом факультета предпринимательства и управления БГАТУ

Протокол № 3 от 23 декабря 2008 г.

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теории функций БГУ *А.Я. Радыно;*
д-р физ.-мат. наук, зав. каф. физики БГАТУ *В.Р. Соболь*

Морозова, И.М.
М34 Математика. В 2 ч. Ч. 1. : учеб.-метод. комплекс / И.М.Морозова, Л.А. Хвощинская, И.П. Боярина. – Минск : БГАТУ, 2009. – 144 с.
ISBN 978-985-519-057-9.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я 7

ISBN 978-985-519-057-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методический комплекс (УМК) дисциплины «Математика» предназначен для студентов заочной формы обучения инженерно-технических специальностей сельскохозяйственных высших учебных заведений.

УМК состоит из двух частей. Первая часть данного комплекса содержит материалы к тестированию и экзамену по дисциплине «Математика» по темам «Элементы линейной и векторной алгебры», «Аналитическая геометрия», «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Функции нескольких переменных».

Во вторую часть УМК входят следующие модули: «Комплексные числа», «Дифференциальные уравнения», «Ряды», «Двойной интеграл», «Криволинейный интеграл», «Элементы теории поля», «Теория вероятностей».

УМК составлен в соответствии с учебной программой по учебной дисциплине «Математика», разработанной по модульной технологии обучения. Каждый модуль содержит теоретический материал, задачи для управляемой самостоятельной работы студентов, разноуровневые задания для контроля знаний по модулю (задания репродуктивного уровня отмечены ^{0}, а задания творческого уровня отмечены *), а также примеры итоговых тестов для оценки знаний студентов по темам, изученным в семестре.

В результате изучения дисциплины «Математика» студент должен ***знать:***

- основные понятия и методы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа;
- основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики;
- численные методы решения инженерных задач;

уметь:

- решать алгебраические системы уравнений;
- дифференцировать и интегрировать функции;
- решать обыкновенные дифференциальные уравнения.
- составлять математические модели производственных задач, решать их математическими методами с применением вычислительной техники и анализировать полученные данные.

ПОРЯДОК ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА В 1 СЕМЕСТРЕ

Учебной программой по изучению дисциплины "Математика" для инженерно-технических специальностей вузов сельскохозяйственного профиля в первом семестре предусмотрено изучение следующих модулей:

1. *Элементы линейной и векторной алгебры.*
2. *Аналитическая геометрия.*
3. *Введение в анализ.*
4. *Дифференциальное исчисление функций одной переменной.*

При подготовке к сдаче экзамена по содержанию названных модулей студент должен:

- внимательно изучить теоретический материал указанных модулей с помощью рекомендуемого списка литературы;
- изучить краткий конспект с примерами решенных задач по предлагаемому методическому пособию;
- протестировать себя с помощью предлагаемых тестовых заданий, которые помещены в конце каждого модуля;
- при необходимости дополнительно изучить предлагаемые разделы или обратиться за консультацией к преподавателям кафедры;
- протестировать самостоятельно себя по предлагаемому итоговому тесту 1 семестра.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» (1 СЕМЕСТР)

Модуль 1. Элементы линейной и векторной алгебры

1. Определители 2-го и 3-го порядков, их свойства и вычисление. [3], гл.4, §4.3
2. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера. [3], гл.4, §4.8
3. Векторы. Линейные операции над векторами. [3], гл.5, §§5.1,5.2
4. Проекция вектора на ось. Свойства проекции. [3], гл.5, §5.4
5. Базис. Прямоугольная декартова система координат. Координаты вектора и точки. [3], гл. 5, §§ 5.5, 5.6
6. Деление отрезка в данном отношении. [3], гл.5, §5.6
7. Скалярное произведение векторов, его свойства и вычисление. Приложения скалярного произведения к задачам геометрии и механики. [3], гл.5, §5.7

8. Векторное произведение векторов, его свойства и вычисление. Геометрический и механический смысл векторного произведения. [3], гл.5, §§5.8, 5.9
9. Смешанное произведение векторов, его свойства и вычисление. Геометрический смысл смешанного произведения. [3], гл.5, §5.10

Модуль 2.
Аналитическая геометрия

1. Понятия уравнений поверхности и линии. [3], гл.6, §§ 6.1-6.3.
2. Плоскость и ее основные уравнения. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости. [3], гл.6, §6.4.
3. Прямая в пространстве и ее основные уравнения. Угол между прямыми. [3], гл.6, §6.5.
4. Прямая на плоскости и ее основные уравнения. [3], гл. 2, §2.1.
5. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой. [3], гл.2, §2.1.
6. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Канонические уравнения кривых второго порядка. [3], гл.2, §§ 2.3-2.10.
7. Поверхности второго порядка и их канонические уравнения. [3], гл.6, §§ 6.7-6.10.

Модуль 3.
Введение в анализ

1. Определение функции. Способы задания функций. Основные элементарные функции. Сложные, неявные функции. Функции, заданные параметрически. [1], гл.1, §§ 1-10.
2. Предел числовой последовательности. Предел функции в точке и его геометрический смысл. Односторонние пределы. Ограниченные функции. [1], гл.2, §§ 1-3.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Теоремы о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций. Основные теоремы о бесконечно малых . [1], гл.2, § 4.
4. Теоремы о пределах суммы, произведения и частного функций. [1], гл.2, § 5.
5. Два замечательных предела. Число *e*, натуральный логарифм. [1], гл.2, §§ 6-8.

6. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции и их применение при вычислении пределов. [1], гл.2, §11.
7. Непрерывность функции в точке, на отрезке. Точки разрыва функции и их классификация. [1], гл.2, §9.
8. Свойства непрерывных функций. [1], гл.2, §10.

Модуль 4.
Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. [1], гл.3, §§ 1-4.
2. Основные правила дифференцирования: производная суммы, произведения, частного, сложной и обратной функций [1], гл.3, §§ 1-7, 9, 13.
3. Таблица производных основных элементарных функций. [1], гл.3, §15.
4. Дифференцирование неявных функций. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных параметрически. [1], гл.3, §§ 11, 16.
5. Уравнения касательной и нормали к кривой. Угол между двумя кривыми. [1], гл.3, §26.
6. Дифференциал функции и его геометрический смысл. [1], гл.3, §§ 20, 21.
7. Свойства дифференциала. Таблица дифференциалов. Инвариантность формы дифференциала 1-го порядка. [1], гл.3, §20.
8. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. [1], гл.3, §20.
9. Производные и дифференциалы высших порядков.[1], гл.3, §22,23.
10. Теоремы о среднем: Ролля, Лагранжа, Коши. [1], гл.4, §1-3.
11. Правило Лопиталя и его применение к раскрытию неопределенностей. [1], гл.4, §§ 4, 5.
12. Признаки возрастания и убывания функции. [1], гл.5, §2.
13. Экстремум функции. Необходимый признак экстремума функции. [1], гл.5, §3.
14. Первый и второй достаточные признаки экстремума[1],гл5,§§4,5.
15. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. [1], гл.5, §6.

16. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Необходимое и достаточное условия существования точек перегиба. [1], гл.5, § 9.
17. Асимптоты графика функции и их нахождении. [1], гл.5, § 10.
18. Схема исследования функции и построение ее графика.[1], гл.5, §11.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1985. – Т. 1.
2. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. – М.:Наука, 1985.
3. Гусак А. А. Высшая математика. – Мн.:Тетра Системс,2000.-Т.1.
4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Мн.: Вышейшая школа, 1986. – Ч. 1.
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А., Марченко А. И., Унукович В. Т. Общий курс высшей математики. – Орша,1996.
6. Лихолетов И. И., Мацкевич И. П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Вышейшая школа, 1976.
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.Учебное пособие / Под. ред. А. П. Рябушко. – Мн.: Вышэйшая школа, 2000.
8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.
9. Высшая математика для инженеров. В 2 т. Т.1: учебное пособие для вузов/ С.А. Минюк, В.И. Булгаков, А.В. Метельский, З.М. Наркун; Под общ. ред. Н.А. Микулика–Мн.:ООО «Элайда», 2004.
10. Курс вышэйшай матэматыкі: Алгебра і геаметрыя. Аналіз функцый зменнай: Падручнік / В.М. Русак, Л.І. Шлома, В.К. Ахраменка, А.П. Крачкоускі. – Мн.: Выш. шк., 1994.

Модуль 1.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Определители

Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей размерности* $m \times n$ и записывается в виде

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим квадратную матрицу размерности 2×2.

Определителем второго порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

равное разности произведений элементов *главной* и *побочной* диагоналей.

Пример 1.1. Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-1) = -7$.

Рассмотрим квадратную матрицу размерности 3×3.

Определителем третьего порядка называется число, задаваемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.1)$$

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению алгебраической суммы трех определителей 2-го порядка. При этом каждое слагаемое в правой части (1.1) есть произведение элемента первой строки определителя на определитель 2-го порядка, полученный после вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Если сумма номеров строки и столбца четная, то перед определителем 2-го порядка стоит знак “плюс”, если нечетная – то знак “минус”.

Пример 1.2. Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1(-2-0) - 4(-4-3) +$$

$$+5(0-3) = -2 + 28 - 15 = 11.$$

§ 2. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Составим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где Δ – определитель системы, а Δ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) – определитель, который получается из определителя Δ при помощи замены i-го столбца соответственно столбцом свободных членов системы (1.2).

Правило Крамера. Если определитель системы (1.2) $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, получаемое по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если $\Delta = 0$, то правило Крамера неприменимо. Система либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений.

В частности, для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \quad \text{при} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

существует единственное решение $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 1.3. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$

Решение. Находим определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-5+3) + 4(1-3) + 1(-1+5) = -8 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-5+3) + 4(-1-3) + 1(1+5) = -16,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1-3) - 3(1-3) + 1(1+1) = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5-1) + 4(1+1) + 3(-1+5) = 8.$$

Значит, $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-16}{-8} = 2$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{0}{-8} = 0$, $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{8}{-8} = -1.$

§ 3. Векторы

1. Основные определения

Вектором называется направленный отрезок. Обозначают вектор: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$.

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной* или *модулем*. Обозначают модуль вектора: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым вектором* $\vec{0}$. $|\vec{0}|=0$, а направление можно считать любым.

Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным вектором* (или *ортом*).

Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой. Если $\vec{a}$ коллениарен $\vec{b}$, то пишут $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, равны по длине и одинаково направлены.

2. Линейные операции над векторами

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число (скаляр)* λ называется новый вектор, имеющий длину $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ и направленный одинаково с $\vec{a}$ при $\lambda>0$ или направленный противоположно с $\vec{a}$ при $\lambda<0$.

Для сложения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *применяют правило параллелограмма* (рис. 1.1) или *правило треугольника* (рис. 1.2).

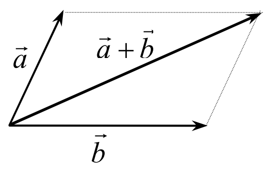


Рис. 1.1

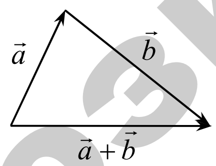


Рис. 1.2

Для сложения трех некомпланарных векторов применяют правило *параллелепипеда*.

В общем случае для сложения любого числа векторов применяют правило *многоугольника* (рис. 1.3).

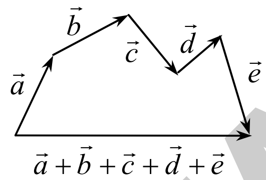


Рис. 1.3

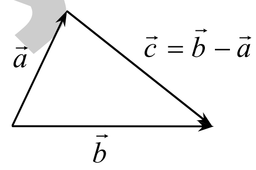


Рис. 1.4

Разностью векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ называется третий вектор $\vec{c}$ ($\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$), который нужно сложить с вектором $\vec{a}$, чтобы получить вектор $\vec{b}$ (рис. 1.4).

§ 4. Проекция вектора на ось

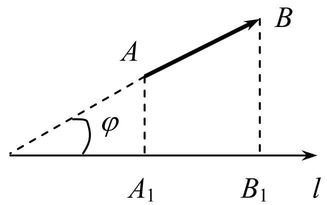
Всякая прямая, на которой указано направление, называется *осью*.

Углом между вектором и осью называется угол между вектором и положительным направлением оси.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число, равное произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью, т.е.

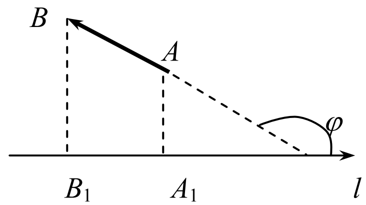
$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi\,.$$

Если угол φ – острый, то $\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}>0$ (рис. 1.5), если φ – тупой, то $\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}<0$ (рис. 1.6).



$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}=|A_1B_1|>0$

Рис. 1.5



$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}=-|A_1B_1|<0$

Рис. 1.6

Свойства проекций

1. $\text{пр}_l\,\lambda\vec{a}=\lambda\,\text{пр}_l\,\vec{a}$, $(\lambda=\text{const})$.
2. $\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b})=\text{пр}_l\,\vec{a}+\text{пр}_l\,\vec{b}$.

§ 5. Прямоугольная система координат. Координаты вектора и точки

Базисом трехмерного пространства называется совокупность трех взаимно перпендикулярных единичных векторов (ортов) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. $\quad \vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k}, \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$

Эти векторы определяют соответственно оси: *Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат* (рис. 1.7).

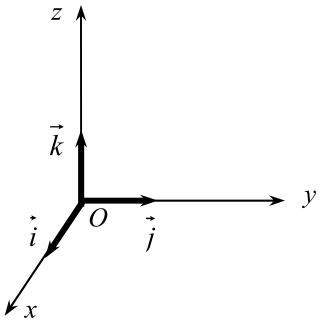


Рис. 1.7

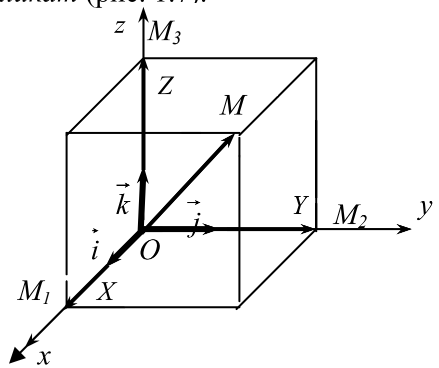


Рис. 1.8

Совокупность $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ начала координат и векторов базиса называется *прямоугольной декартовой системой координат.*

Рассмотрим вектор $\vec{a}$ в прямоугольной декартовой системе координат.

Определение. *Координатами вектора* $\vec{a}$ называются проекции этого вектора на координатные оси. Пишут

$$\vec{a} = (X, Y, Z), \text{ где } X = np_{Ox}\vec{a}, \quad Y = np_{Oy}\vec{a}, \quad Z = np_{Oz}\vec{a}.$$

Поместим этот вектор в начало координат, т.е. $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$. Обозначим проекции точки M на координатные оси M_1, M_2, M_3 и построим на векторах $\overrightarrow{OM}_1, \overrightarrow{OM}_2, \overrightarrow{OM}_3$ параллелепипед (рис.1.8). По правилу параллелепипеда

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 + \overrightarrow{OM}_3.$$

Но $\overrightarrow{OM}_1 = X\vec{i}, \quad \overrightarrow{OM}_2 = Y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OM}_3 = Z\vec{k}$.

Поэтому вектор $\vec{a}$ можно представить в виде

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \qquad (1.3)$$

и дать другое определение координат вектора.

Определение. Коэффициенты X, Y, Z разложения вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются *координатами вектора.*

Формула (1.3) задает представление вектора $\vec{a}$ *в системе орт.*

Определение. *Координатами точки M* называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Пишут $M(x, y, z)$.

Приведем некоторые формулы, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

1. Действия над векторами, заданными своими координатами.

1) Если $\vec{a} = (x, y, z)$, то $\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $\lambda = const$.

2) Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2).$$

2. Условие равенства векторов.

$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2.$

3. Условие коллинеарности векторов.

$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad (\vec{a} = \lambda\vec{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$, *то есть координаты коллинеарных векторов пропорциональны.*

4. Длина вектора.

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \vec{a} = (x, y, z).$

5. Вычисление координат и длины вектора через координаты его начала и конца.

Если $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

6. Координаты середины отрезка AB:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Пример 1.4. Даны точки $A(5, 3, -2)$ и $B(3, 0, 4)$. Записать вектор $\overrightarrow{AB}$ в системе орт и найти его длину.

Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (3-5, 0-3, 4+2) = (-2, -3, 6) \text{ или } \overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7.$$

§ 6. Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

(φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;

4. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$.

Если $\vec{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $\vec{b} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$, то *скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат*:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Приложения скалярного произведения к задачам геометрии и механики.

1. Угол между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}.$$

2. Проекция вектора на направление другого вектора

Так как $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = \left|\vec{a}\right|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, то

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}, \qquad \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

3. Работа силы (механический смысл скалярного произведения). Работа А силы $\vec{F}$ при прямолинейном перемещении тела на вектор $\vec{S}$ под действием силы $\vec{F}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{S}.$$

Пример 1.5. Дан треугольник с вершинами $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(4,3,2)$. Найти угол $\angle A$ и проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

Решение. Находим координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, 3-1, 4-1) = (1, 2, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (4-1, 3-1, 2-1) = (3, 2, 1).$$

Тогда $$\cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{9+4+1}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7},$$

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7}.$$

Пример 1.6. Найти работу силы $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, если ее точка приложения движется прямолинейно из точки $A(2,-1,3)$ в точку $B(6, 1, 5)$.

Решение. Найдем вектор $\vec{S}$ перемещения:

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (6-2, 1+1, 5-3) = (4, 2, 2).$$

Тогда работа $\quad A = \vec{F}\cdot\vec{S} = 2\cdot 4 + 0\cdot 2 - 3\cdot 2 = 8 - 6 = 2.$

§ 7. Векторное произведение векторов

Определение. *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $\left|\vec{c}\right| = |\vec{a}\times\vec{b}| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$;

2. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3. тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая (т.е. при наблюдении из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 1.9).

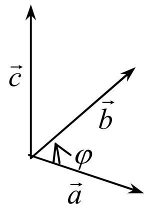


Рис. 1.9

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$;

2. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

4. $\vec{a}\times\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\parallel\vec{b}$.

Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то векторное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Приложения векторного произведения к задачам геометрии и механики.

1. Площадь параллелограмма (геометрический смысл векторного произведения).

$$S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Площадь треугольника $S_\Delta=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

2. Момент силы (механический смысл векторного произведения).

Пусть точка A твердого тела закреплена, а в точке B приложена сила $\vec{F}$. Тогда возникает вращающий момент

$$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}.$$

Пример 1.7. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7,3,4)$, $B(1,0,6)$, $C(4,5,-2)$.

Решение. Находим векторы $\overrightarrow{AB}=(-6,-3,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,2,-6)$. Вычисляем векторное произведение

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & -3 & 2\\ -3 & 2 & -6\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-6 & 2\\ -3 & -6\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-6 & -3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=14\vec{i}-42\vec{j}-21\vec{k}.$$

Тогда

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{14^2+42^2+21^2}=\frac{1}{2}\cdot7\sqrt{2^2+6^2+3^2}=\frac{49}{2}=24{,}5.$$

Пример 1.8. Найти момент силы $\vec{F}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$, приложенной в точке $A(3,2,-1)$ относительно начала координат.

Решение. Вектор плеча силы $\overrightarrow{0A}=(3,2,-1)$. Тогда момент

$$\vec{M}=\overrightarrow{0A}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+11\vec{j}+\vec{k}.$$

§ 8. Смешанное произведение векторов

Определение. *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Приложения смешанного произведения к задачам геометрии

1. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (геометрический смысл смешанного произведения).

$$V = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|.$$

Объем пирамиды $$V = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|.$$

2. Условие компланарности векторов:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ – компланарны} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 1.9. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(4, 0, 6)$, $D(2, 3, 8)$.

Решение. Находим векторы $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 0, 6)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 3, 8)$. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\;\overrightarrow{AC}\;\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 0 = -2(0-18) -$$

$$-3(16-0) = 36 - 48 = -12.$$

Тогда $$V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\;\overrightarrow{AC}\;\overrightarrow{AD}\,| = \frac{|-12\,|}{6} = 2.$$

Пример 1.10. Выяснить, лежат ли точки $A(1; 2; 0)$, $B(2; 0; 1)$, $C(2; 1; 2)$, $D(4; 2; 3)$ в одной плоскости.

Решение. Если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ также лежат в одной плоскости, то есть компланарны. Запишем условие компланарности векторов: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 + 2(3-6) + 3(0+3) = -3 - 6 + 9 = 0,$$

Следовательно, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

1. Вычислить определители

а) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Решить системы уравнений по правилу Крамера

а) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x + y = 3, \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ x - 2y - z = 7. \end{cases}$

3. Вершинами пирамиды являются точки $A(1; -4; 0)$, $B(5; 0; -2)$, $C(3; 7; -10)$, $D(1; -2; 1)$. Найти

1) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
2) площадь грани ABC;
3) объем пирамиды $ABCD$.

4. Установить, при каком значении α векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ортогональны.

5. Копмпланарны ли векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$?

6. Найти работу силы $\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ при перемещении из точки $M(2; -3; 4)$ в точку $N(-1; 2; 3)$.

7. Вычислить момент силы $\vec{F} = (2; -3; 5)$, приложенной в точке $A(1; 5; -3)$, относительно точки $B(2; 1; 2)$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №1

1^0. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ равен: **а)** – 11; **б)** 12; **в)** – 4; **г)** 11.
2^0. Если $\vec{m} = (3, 5, 6)$, то проекция этого вектора на ось Oz равна **а)** 3; **б)** 5; **в)** 6; **г)** 14.
3^0. Длина вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ равна **а)** $\sqrt{7}$; **б)** 9; **в)** 3; **г)** $\sqrt{3}$.
4. Если $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ для $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **а)**ортогональны; **б)**компланарны; **в)**коллинеарны; **г)**равны.
5. Если для ненулевых векторов $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, то векторы $\vec{m}, \vec{n}$ **а)**равны; **б)**ортогональны; **в)**коллинеарны; **г)**компланарны.
6. Площадь треугольника, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле: **а)** $S_\Delta = \frac{1}{2}\vec{a} \times \vec{b}$; **б)** $S_\Delta = \frac{1}{2}\lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert$; **в)** $S_\Delta = \frac{1}{2}\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$; **г)** $S_\Delta = \frac{1}{2}\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$.
7*. Проекция вектора $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ на направление вектора $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ находится по формуле: **а)** $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert}$; **б)** $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$; **в)** $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert}$; **г)** $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.
8*. Если $A(1, 0, -3)$, $B(5, 2, 1)$, то координаты середины отрезка AB равны **а)** $(2; 1; 2)$; **б)** $(6; 2; -2)$; **в)** $(2{,}5; 0; -1{,}5)$; **г)** $(3; 1; -1)$.
9*. Скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$ равно: **а)** числу 5; **б)** вектору $\vec{c}$ (2;1;-1); **в)** числу –1; **г)** числу 1.

Модуль 2. АНАЛИТИЧЕКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Плоскость и ее основные уравнения

Рассмотрим плоскость P в прямоугольной декартовой системе координат. Положение плоскости вполне определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$ и *вектором нормали* $\vec{n} = (A, B, C) \perp P$ $(\vec{n} \neq \vec{0})$ (рис. 2.1).

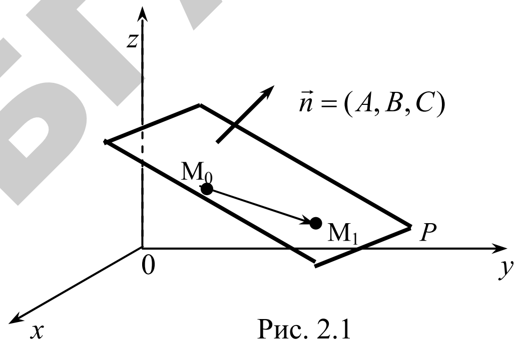


Рис. 2.1

Возьмем любую точку $M(x, y, z) \in P$ и построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Так как $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, то скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2.1)$$

Получили *уравнение плоскости, заданной точкой* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и вектором нормали* $\vec{n} = (A, B, C)$.

Если в уравнении (2.1) раскрыть скобки и обозначить $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то получим *общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (A^2 + B^2 + C^2 > 0). \qquad (2.2)$$

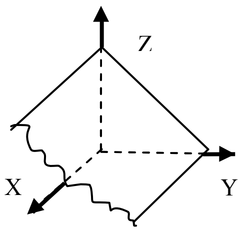
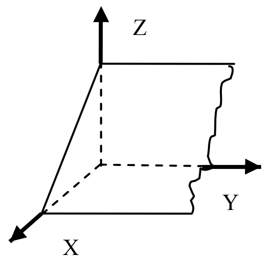
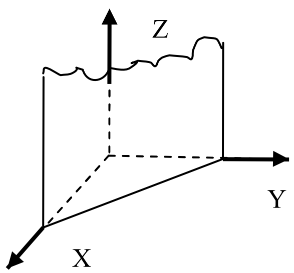
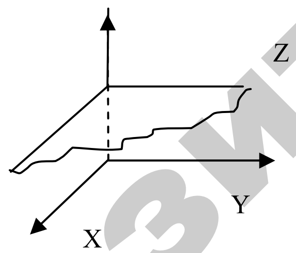
Теорема. *Всякое уравнение вида (2.2) определяет некоторую плоскость в пространстве.*

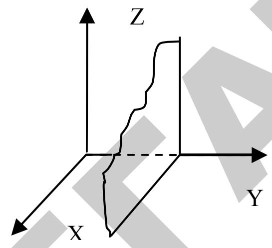
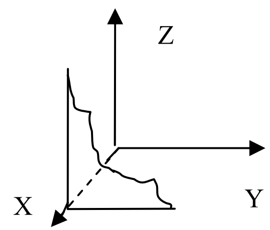
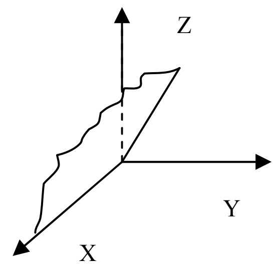
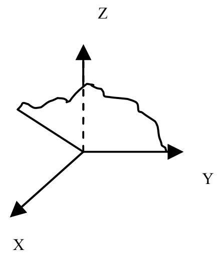
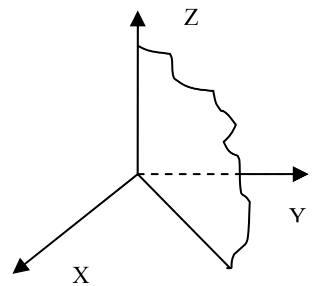
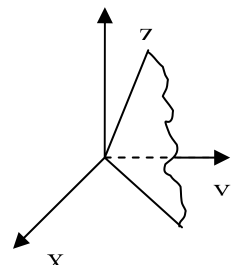
Если в уравнении (2.2) какой-либо из коэффициентов A, B, C равен нулю, то плоскость расположена параллельно той оси, координата которой отсутствует в уравнении. Например, при $A = 0$ плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox; при $A = B = 0$ плоскость $Cz + D = 0$ параллельна осям Ox и Oy, т.е. плоскости xOy и т.д. (табл. №1).

Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0:$$

Таблица №1

1. Плоскость параллельна оси Ox.  **A=0** Общее уравнение будет иметь вид: $By + Cz + D = 0$	**2.** Плоскость параллельна оси Oy.  **B=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Ax + Cz + D = 0$
3. Плоскость параллельна оси Oz.  **C=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Ax + By + D = 0$	**4.** Плоскость перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy)  **A=B=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Cz + D = 0$

5. Плоскость перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz).  **A=C=0** Общее уравнение будет иметь вид: $By + D = 0$	**6.** Плоскость перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz).  **C=B=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Ax + D = 0$
7. Плоскость проходит через ось Ox  **A=D=0** Общее уравнение будет иметь вид: $By + Cz = 0$	**8.** Плоскость проходит через ось Oy  **B=D=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Ax + Cz = 0$
9. Плоскость проходит через ось Oz  **C=D=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Ax + By = 0$	**10.** Плоскость проходит через начало координат  **D=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Ax + By + Cz = 0$

Пусть в уравнении (2.2) ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен 0. Перепишем уравнение (2.2) в виде $Ax + By + Cz = -D$, разделим обе части этого равенства на $-D$ и обозначим $-\dfrac{D}{A} = a, -\dfrac{D}{B} = b, -\dfrac{D}{C} = c$.Получим *уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{2.3}$$

где a, b, c – это величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат (рис. 2.2).

Если три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой, то через эти точки проходит единственная плоскость (рис. 2.3). *Уравнение плоскости, проходящей через три точки*, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

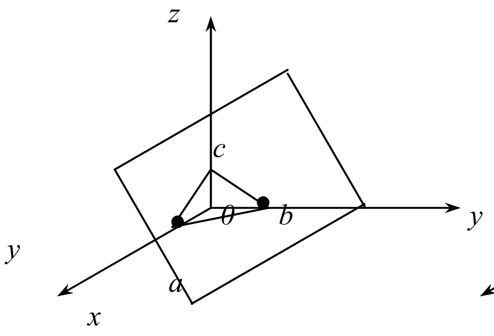


Рис. 2.2

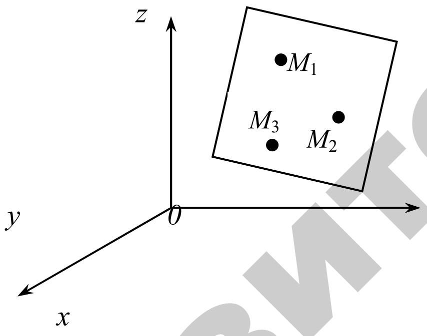


Рис. 2.3

Пусть даны две плоскости P_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и P_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. *Угол φ между двумя плоскостями* равен углу между их векторами нормали:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

При этом

$P_1 \perp P_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ (условиеперпендиулярности плоскостей),

$P_1 \parallel P_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ (условие параллельности плоскостей).

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 2.1. Даны две точки $M_1(-2, 0, 1)$ и $M_2(1, 4, 2)$. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение. Поскольку искомая плоскость перпендикулярна $\overrightarrow{M_1M_2}$, то в качестве вектора нормали $\vec{n}$ возьмем вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (3, 4, 1)$ (рис.2.4).

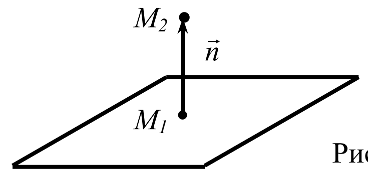


Рис. 2.4

Подставив теперь в уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ $A = 3,\ B = 4,\ C = 1$, а также координаты точки M_1: $x_0 = -2,\ y_0 = 0,\ z_0 = 1$, получим уравнение

$$3(x + 2) + 4(y - 0) + 1(z - 1) = 0 \quad \text{или} \quad 3x + 4y + z + 5 = 0$$

– это и есть искомое общее уравнение плоскости.

Пример 2.2. Найти величины отрезков, которые отсекает плоскость $2x - 3y + 4z - 12 = 0$ на осях координат.

Решение. Преобразуем уравнение плоскости:

$$2x - 3y + 4z = 12, \qquad \frac{2x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{4z}{12} = 1, \qquad \frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1.$$

Получили уравнение плоскости в отрезках (см. 2.3).

Следовательно, данная плоскость отсекает на осях координат отрезки $a = 6, b = -4, c = 3$.

Пример 2.3. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, -3)$, $B(-1, 6, 1)$, $C(4, 8, -9)$.

Решение. Подставляя в уравнение (2.4) координаты точек A, B, C, получим уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ -1-1 & 6-2 & 1+3 \\ 4-1 & 8-2 & -9+3 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по элементам первой строки, получим искомое уравнение плоскости:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + (z+3)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-48(x-1) - 0\cdot(y-2) - 24(z+3) = 0, \quad \text{или} \quad 2(x-1) + (z+3) = 0,$$

$$2x - 2 + z - 3 = 0, \qquad 2x + z - 5 = 0.$$

§ 2. Прямая в пространстве и ее основные уравнения

Рассмотрим прямую l в прямоугольной декартовой системе координат. Положение прямой в пространстве вполне определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ и направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p) \parallel l$ $(\vec{s} \neq \vec{0})$ (рис. 2.5).

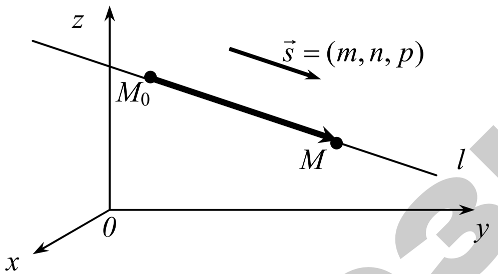


Рис. 2.5

Возьмем любую точку $M(x, y, z) \in l$ и построим вектор $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$, из условия коллинеарности этих векторов получим *канонические уравнения прямой в пространстве:*

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \qquad (2.5)$$

Обозначим в (2.5) коэффициент пропорциональности через t и выразим через t переменные x, y, z. Приходим к *параметрическим уравнениям прямой в пространстве*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t \text{ – параметр.} \qquad (2.6)$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим две плоскости P_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и P_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Если эти плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой, задаваемой системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Система (2.8) называется *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Направляющий вектор $\vec{s}$ прямой (2.8) можно найти по формуле

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Угол φ *между двумя прямыми* l_1 *и* l_2 равен углу между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

При этом

$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$ (условие перпендиулярности прямых),

$$l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \quad \text{(условие параллельности прямых).}$$

Угол ψ *между прямой* $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ *и плоскостью* $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\psi=\frac{|\,Am+Bn+Cp\,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

При этом

$$l \parallel P \quad \Leftrightarrow \quad Am+Bn+Cp=0 \quad \text{(условие параллельности прямой и плоскости),}$$

$$l \perp P \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \quad \text{(условие перпендиулярности прямой и плоскости).}$$

Пример 2.4. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3,2,-1)$ и $M_2(4,2,1)$.

Решение. Подставляем в формулу (2.7) координаты точек M_1 и M_2:

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-2}{2-2}=\frac{z+1}{1+1}$$

или $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{2}$ – канонические уравнения прямой (нуль в знаменателе означает, что направляющий вектор $\vec{s}=(1,0,2)$ перпендикулярен оси Oy, т.е. прямая перпендикулярна оси Oy).

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{2}=t$$

$$x-3=t, \quad y-2=0, \quad z+1=2t,$$

$$x=3+t, \quad y=2, \quad z=-1+2t.$$

Пример 2.5. Проверить, являются ли прямая $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ и плоскость $6x+4y-2z+5=0$ а) параллельными; б) перпендикулярными.

Решение. Запишем координаты направляющего вектора $\vec{s}$ прямой и вектора нормали $\vec{n}$ плоскости: $\vec{s}=(3;2;-1)$, $\vec{n}=(6,4,-2)$.

а) прямая параллельна плоскости, если $\vec{s}\perp\vec{n} \Rightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0$.

$$\vec{s}\cdot\vec{n}=3\cdot 6+2\cdot 4+(-1)\cdot(-2)=18+8+2=28\neq 0.$$

Следовательно, прямая и плоскость не параллельны.

б) прямая перпендикулярна плоскости, если $\vec{s}\parallel\vec{n}$, то есть координаты векторов пропорциональны.

Так как $\frac{6}{3}=\frac{4}{2}=\frac{-2}{-1}=2$, то прямая и плоскость перпендикулярны.

§ 3. Прямая на плоскости и ее основные уравнения

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k имеет вид

$$y=kx+b \quad \text{или} \quad y-y_0=k(x-x_0),$$

где $k=\mathrm{tg}\,\alpha$ – угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого этой прямой на оси Oy, (x_0,y_0) – точка, лежащая на прямой (рис. 2.6).

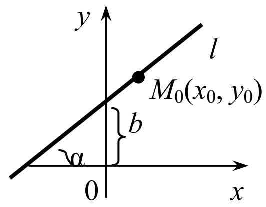


Рис. 2.6

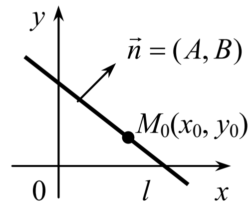


Рис. 2.7

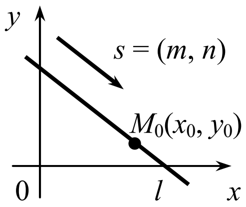


Рис. 2.8

Кроме того, прямую l на плоскости можно задать вектором нормали $\vec{n}=(A,B)\perp l$ и точкой $M_0(x_0,y_0)\in l$ (рис. 2.7). Получим 3 уравнения, аналогичные уравнениям (2.1) – (2.3) для плоскости:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – *уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали*;

$Ax + By + C = 0$ – *общее уравнение прямой*;

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – *уравнение прямой в отрезках*.

Прямая l на плоскости также определяется *направляющим вектором* $\vec{s} = (m, n) \parallel l$ и точкой $M_0(x_0, y_0) \in l$ (рис. 2.8). Получим еще 3 уравнения, аналогичные уравнениям (2.5) – (2.7) прямой в пространстве:

$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ – *каноническое уравнение прямой*;

$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}$ – *параметрические уравнения прямой*;

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – *уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Угол φ *между двумя прямыми*, заданными уравнениями: l_1: $y = k_1 x + b_1$ и l_2: $y = k_2 x + b_2$ можно найти по формуле

$$\text{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2};$$

при этом

$l_1 \perp l_2 \iff k_1 k_2 = -1,$ т.е. $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ (условие перпендиулярности прямых),

$l_1 \parallel l_2 \iff k_1 = k_2$ (условие параллельности прямых).

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 2.6. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $M(-2, 1)$ параллельно и перпендикулярно прямой $3x - 4y + 12 = 0$.

Решение. Перепишем общее уравнение прямой $3x - 4y + 12 = 0$ (l), выразив из него переменную y: $l: \; y = \frac{3}{4}x + 3$.

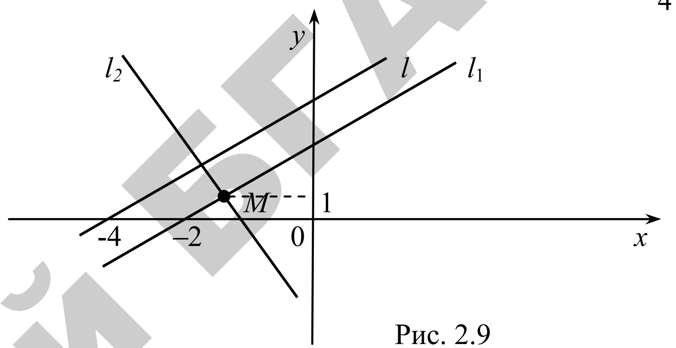


Рис. 2.9

Получили уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{4}$. Запишем уравнение прямой $l_1 \parallel l$ и проходящей через точку $M(-2, 1)$. Поскольку для параллельных прямых угловые коэффициенты равны, т.е. $k_1 = k = \frac{3}{4}$, то

$$l_1: \; y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2) \text{ или}$$

$$4y - 4 = 3x + 6, \qquad 3x - 4y + 10 = 0.$$

Составим уравнение прямой $l_2 \perp l$, проходящей через точку $M(-2,1)$. Так как угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{4}{3}$, то

$$l_2: \; y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2) \text{ или}$$

$$3y - 3 = -4x - 8, \qquad 4x + 3y + 5 = 0.$$

Прямые l, l_1, l_2 изображены на рис. 2.9.

§ 4. Кривые второго порядка

Кривой второго порядка называется линия, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (2.9)$$

где коэффициенты *A, B, C* одновременно не обращаются в нуль. При $A = B = C = 0$ уравнение (2.9) задает прямую, которая называется *линией первого порядка.*

К числу линий второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

1. ***Окружностью*** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

Если центр окружности поместить в начало координат, то *каноническое уравнение окружности* радиусом *R* имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если центр окружности находится в точке $C(x_0, y_0)$, то ее уравнение записывается в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Эта окружность изображена на рис. 2.10.

2. Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно *2c,* и задано число $a > c$.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная *2a.*

Если систему координат выбрать так, как указано на рис.2.11, то *каноническое уравнение эллипса* запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, *a – большая, b – малая полуоси* эллипса (при *a>b*). Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$.

Окружность есть частный случай эллипса при *a = b*.

3. Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно *2c*, и задано число *a < c*.

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная *2a*.

Если систему координат выбрать так, как указано на рис. 2.12, то *каноническое уравнение гиперболы* запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, *a – действительная, b – мнимая полуоси* гиперболы.

Гипербола состоит из двух *ветвей* и расположена симметрично относительно координатных осей. При этом ее ветви при удалении в бесконечность как угодно близко подходят к прямым $y = \pm\frac{b}{a}x$, которые называются *асимптотами гиперболы*.

При построении гиперболы вначале строят *основной прямоугольник* со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$. Затем через противоположные вершины этого прямоугольника проводят прямые, которые являются асимптотами гиперболы. *Вершины гиперболы* расположены в точках с координатами (*–a,*0) и (*a,*0), а фокусы – в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ (рис. 2.12).

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (или $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) также задает гиперболу, *сопряженную* с гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Действительная и мнимая полуоси этой гиперболы соответственно равны *b* и *a.*

4. Пусть на плоскости задана точка *F* и прямая *D,* расстояние между которыми равно *p.*

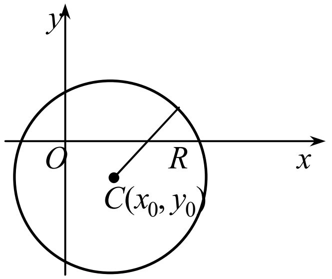
Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки *F* (фокуса) и данной прямой *D* (директрисы).

Кривые второго порядка

Таблица №2

Окружность

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

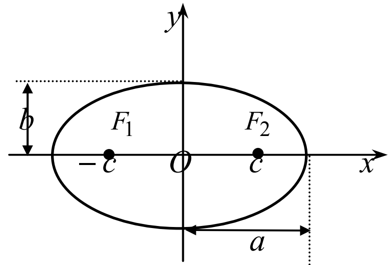


R - радиус окружности,
$C(x_0, y_0)$ - центр окружности.

Рис. 2.10

Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

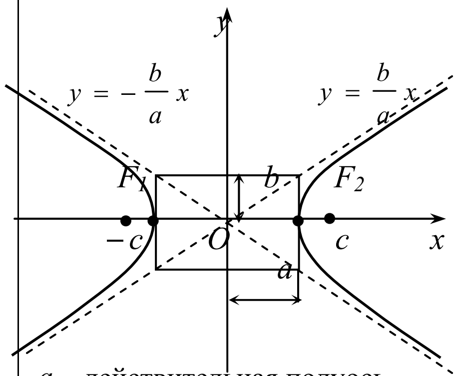


a - большая полуось,
b - малая полуось,
$F_1(-c,0), F_2(c,0)$ - фокусы,
$c^2=a^2-b^2$.

Рис. 2.11

Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

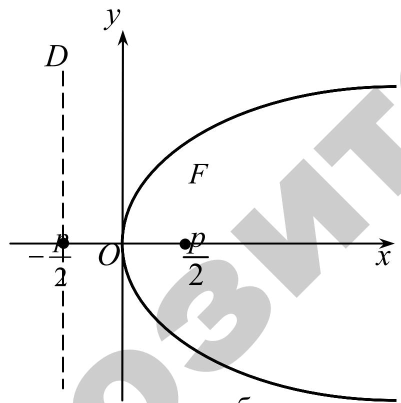


a - действительная полуось,
b - мнимая полуось, $c^2=a^2+b^2$,
$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ - фокусы,
$y=\pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты

Рис. 2.12

Парабола

$$y^2=2px\ (p>0)$$



p – параметр параболы,
$D: x=-\frac{p}{2}$ - директриса,
$F(\frac{p}{2},0)$ - фокус.

Рис. 2.13

Если систему координат выбрать так, как указано на рис.2.13, то *каноническое уравнение параболы* запишется в виде

$$y^2=2px.$$

Эта парабола симметрична относительно оси Ox. Директрисой является прямая $x=-\frac{p}{2}$, точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – фокус параболы, p – *параметр параболы*.

Если $p<0$, то парабола направлена в противоположную сторону.

Уравнение $x^2=2py$ задает параболу, симметричную относительно оси Oy.

Для того, чтобы построить кривую второго порядка, заданную общим уравнением, уравнение кривой приводят к каноническому виду и переходят к новой системе координат.

Пример 2.7. Определить тип кривой, заданной уравнением $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ и построить ее.

Решение. Данное уравнение задает окружность с центром в точке $C(-1;2)$ и радиусом $R=\sqrt{9}=3$. Окружность изображена на рис. 2.14.

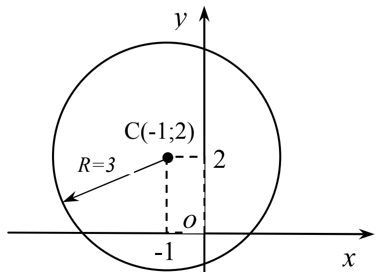


Рис. 2.14

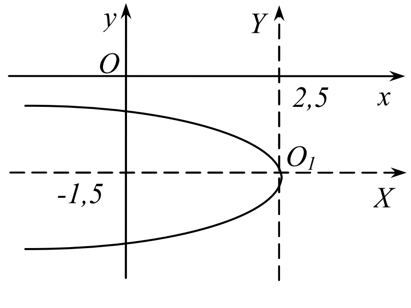


Рис. 2.15

Пример 2.8. Определить тип линии и схематически построить ее:

$$2y^2+x+6y+2=0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2(y^2+3y)+x+2=0$$

и выделим полный квадрат:

$$2\left[\left(y^2 + 2\cdot\frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4}\right] + x + 2 = 0,$$

$$2\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + x + 2 = 0, \quad \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right).$$

Совершим параллельный перенос по формулам

$$X = x - \frac{5}{2}, \quad Y = y + \frac{3}{2}.$$

Координаты нового центра $O_1\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Уравнение примет вид

$$Y^2 = -\frac{1}{2}X.$$

Это каноническое уравнение параболы вида $Y^2 = 2pX,$ где $p = -\frac{1}{4} < 0$. Поэтому парабола направлена в отрицательную сторону оси O_1X.
Парабола изображена на рис. 2.15.

Пример 2.9. Построить гиперболу, заданную уравнением $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$. Найти ее полуоси, координаты фокусов и записать уравнения ее асимптот.
Решение. Данное уравнение является каноническим уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Поэтому действительная полуось $a = \sqrt{25} = 5,$ мнимая полуось $b = \sqrt{9} = 3$. Найдем координаты фокусов F_1 и F_2: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$, $F_1\left(-\sqrt{34}, 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{34}; 0\right)$.
Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm\frac{3}{5}x$.

Построение гиперболы начинаем с построения основного прямоугольника со сторонами $2a$=10 и $2b$=6, параллельными осям координат. Асимптоты гиперболы проходят по диагоналям этого прямоугольника. Вершины гиперболы расположены в точках пересечения основного прямоугольника с осью *oX*.
Гипербола изображена на рис. 2.16.

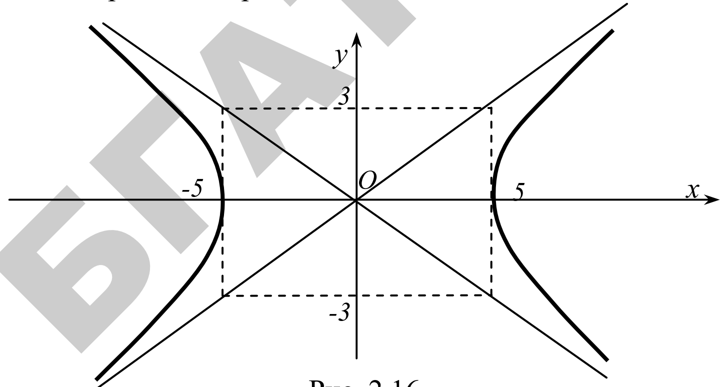


Рис. 2.16

§ 5. Поверхности второго порядка

Рассмотрим в плоскости xOy эллипс, гиперболу, сопряженную гиперболу, параболу и пару пересекающихся прямых. Совершим вращение этих линий вокруг оси Oy и деформацию(сжатие или растяжение) образованных таким образом *поверхностей второго порядка.* Эти поверхности со своими каноническими уравнениями изображены на рис. 2.17 - 2.21.

Если в уравнении эллиптического параболоида поменять знак, то придем к уравнению, которое задает *гиперболический параболоид* (седло), изображенный на рис. 2.22.

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, которая образуется при поступательном перемещении некоторой линии (*образующей*) вдоль некоторой кривой (*направляющей*). Выбирая в качестве направляющей эллипс, гиперболу и параболу, расположенные в плоскости xOy, а в качестве образующей – прямую, параллельную оси Oz, получим соответственно *эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры*, изображенные на рис. 2.23 - 2.25.

При построении поверхностей второго порядка часто пользуются таблицей этих поверхностей (см. табл. №3), учитывая, что ось фигуры или образующая может быть параллельна не только оси Oz.

Поверхности второго порядка

Таблица №3

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

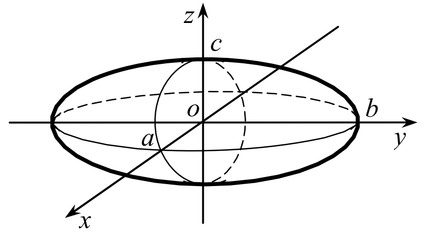


Рис. 2.17

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

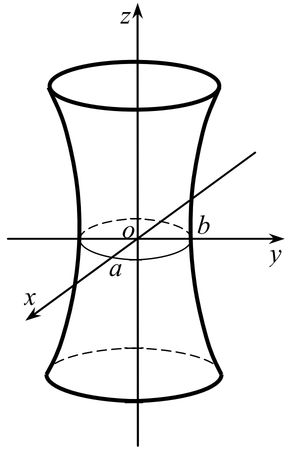


Рис. 2.18

Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

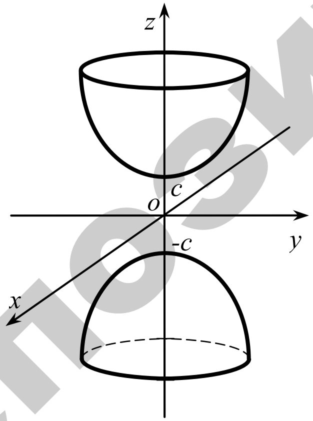


Рис. 2.19

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

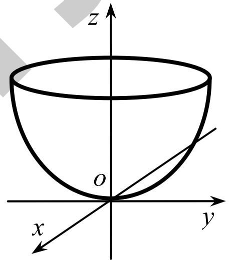


Рис. 2.20

Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

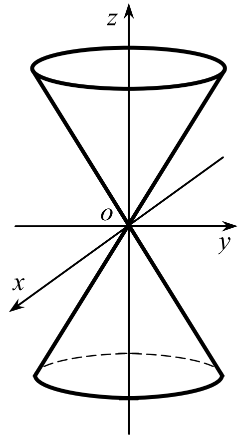


Рис. 2.21

Гиперболический параболоид
(седло)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

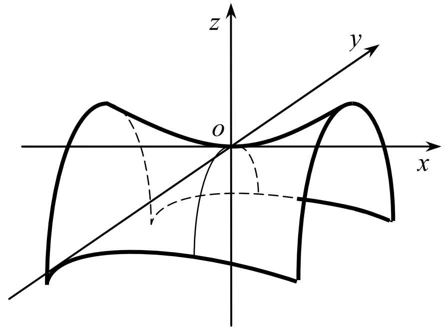
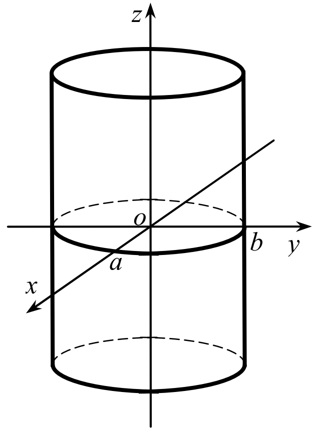
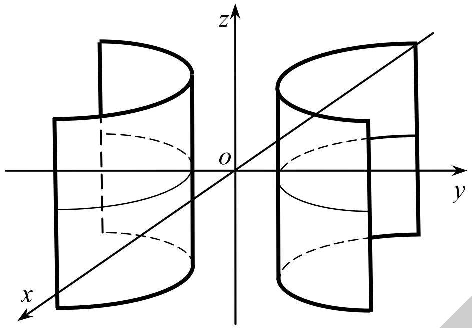
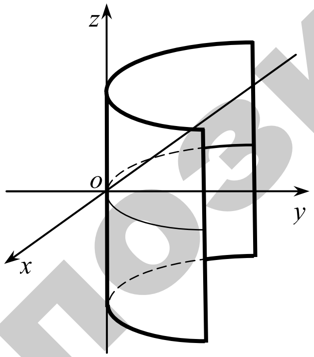


Рис. 2.22

Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Рис. 2.23	
Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Рис. 2.24	
Параболический цилиндр $x^2=2py$ Рис. 2.25	

Пример 2.10. Определить тип поверхности, задаваемой уравнением $x^2-2y^2+z^2=1$.

Решение. Это каноническое уравнение однополостного гиперболоида, у которого осью симметрии является ось Oy (перед y^2 стоит знак “-”). Поверхность представлена на рис. 2.26.

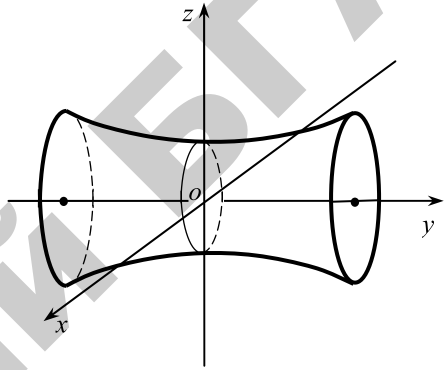


Рис. 2.26

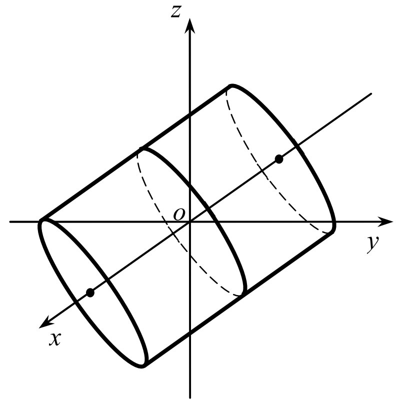


Рис. 2.27

Пример 2.11. Построить поверхность, задаваемую уравнением $y^2+2z^2=4$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$. Это каноническое уравнение эллиптического цилиндра, образующая которого параллельна оси Ox. Поверхность изображена на рис. 2.27.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

1. Даны две точки $M_1(2,-1,3)$ и $M_2(3,2,1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2,0,5)$ перпендикулярно плоскости $\alpha: 2y - z + 1 = 0$.

3. Даны вершины пирамиды $A(-1;-2;-8)$, $B(0;-4;-6)$, $C(10;0;2)$, $D(7;2;0)$.

1) записать уравнение ребра AD;
2) записать уравнение грани ABC;
3) найти угол между ребром AD и гранью ABC.

4. По данным координатам вершин треугольника ABC $A(-2;-3)$, $B(10;-12)$, $C(14;10)$ составить уравнение медианы AM.

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;2)$ перпендикулярно прямой $3x - 5y + 1 = 0$.

6. Определить вид и построить кривые второго порядка

а) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; **б)** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; **в)** $x - 2 = y^2$.

7. Найти координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 - 4x + y^2 = 0$.

8. Составить уравнение окружности с центром в точке $S(5,6)$ и проходящий через точку $M(7,3)$. Построить окружность.

9. Составить уравнение линии на плоскости, для которой отношение расстояний до данной точки $F(2,0)$ и расстоянию до данной прямой $x = -2$ равно числу $\varepsilon = 3$. Полученное уравнение привести к каноническому виду и построить кривую.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №2

1^0. В уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты A, B, C задают:
а) координаты направляющего вектора ;
б) координаты нормированного вектора;
в) точки, через которые проходит плоскость;
г) координаты вектора нормали.

2^0. Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид:

а) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$; **б)** $Ax + By + Cz = 0$;

в) $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$; **г)** $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

3^0. Уравнение вида $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ называется:
а) уравнением плоскости в отрезках; **б)** общим уравнением;
в) каноническим; **г)** нормальным.

4^0. Центр окружности $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$ находится в точке:
а) $C_1(4,1)$; **б)** $C_2(-4,-1)$; **в)** $C_3(-4,1)$; **г)** $C_4(-1,-4)$.

5. Плоскость с уравнением $3x + 4y + z = 0$ проходит:
а) через начало координат; **б)** параллельно оси Ox;
в) параллельно плоскости xOy; **г)** параллельно оси Oz.

6. Прямая $3x + 2y = 6$ отсекает на оси Oy отрезок, равный:
а)2; **б)** 3; **в)** 1; **г)**-3.

7. Условие параллельности двух прямых на плоскости, заданных уравнениями: $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$
а) $k_1 \cdot k_2 = 0$; **б)** $k_1 = k_2$; **в)** $k_1 \cdot k_2 = 1$; **г)** $k_1 \cdot k_2 = -1$.

8. Тангенс угла наклона прямой $y = 3x - 5$ к положительному направлению оси Ox равен:
а) 3; **б)** 5; **в)** –5; **г)** 1.

9. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ имеет вид:

а) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$; **б)** $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0$;

в) $Ax+By+Cz+D=0$; **г)** $A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$.

10. Уравнение эллипса имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; **б)** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+c^2=0$;

в) $x^2-y^2=a^2$; **г)** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

11. Укажите уравнение эллиптического параболоида

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; **б)** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=2y$;

в) $x^2=2y$; **г)** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

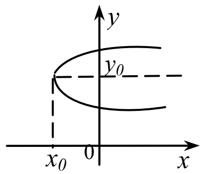
12*. Плоскости с уравнениями $2x+y+3z-1=0$ и $4x+2y+6z+5=0$ являются:

а) перпендикулярными ; **б)** параллельными;
в) совпадающими. **г)** скрещивающимися

13*. Уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(1,2)$ имеет вид:

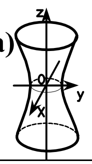
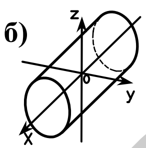
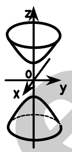
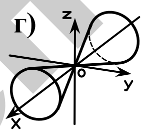
а) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}$; **б)** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=0$; **в)** $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}$; **г)** $\frac{x}{1}-\frac{y}{2}=0$.

14*. Уравнение данной параболы имеет вид:



а) $x-x_0=2p(y-y_0)$;
б) $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$;
в) $(y-y_0)^2=2px$;
г) $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

15*. Какая поверхность определяется уравнением $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$?

а) 
б) 
в) 
г) 

Модуль 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Понятие функции. Способы задания функций

Пусть X — некоторое множество действительных чисел.

Определение. Если каждому элементу x из множества X по некоторому закону f ставится в соответствие вполне определенное действительное число y, то говорят, что y есть *функция* переменной величины x и пишут $y=f(x)$.

Множество X называется *областью определения функции* $f(x)$ и обозначается $D(f)$. Множество всех значений y функции $y=f(x)$, когда x пробегает всю область определения, называется *областью изменения* или *областью значений функции* и обозначается $E(f)$.

Например, для функции $y=\sin x$ область определения $D(f)=R$, область значений $E(f)=[-1;1]$.

Различают следующие *способы задания функции:* табличный, графический, аналитический (с помощью формул).

Под *графиком функции* понимают множество точек плоскости, абсциссы которых есть значения независимой переменной, а ординаты равны соответствующим значениям функции. График фукции есть некоторая линия на плоскости. Например, уравнение $y=x^2$ задает функцию, графиком которой является парабола.

К *основным элементарным функциям* относятся:

1. $y=x^a$ (при постоянном $a\in R$) — степенная функция;
2. $y=a^x$ (при постоянном $a\in R$, $a>0$, $a\neq 1$) — показательная функция;
3. $y=\log_a x$ (при постоянном $a\in R$, $a>0$, $a\neq 1$) — логарифмическая функция;
4. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$ — тригонометрические функции;
5. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$ — обратные тригонометрические функции.

Функция, *заданная* последовательной цепью нескольких функций ($y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$), называется *сложной* функцией. Например, функция $y = \lg^3(2^{x^5})$ сложная, и она может быть представлена следующей цепью основных элементарных функций: $y = z^3$, $z = \lg u$, $u = 2^v$, $v = x^5$.

Функции, *образованные* из основных элементарных функций посредством конечного числа алгебраических операций и взятия функции от функции, называются *элементарными*. Все остальные функции называются *неэлементарными.* Функция $y = \dfrac{x^2 \sin x + 2^x}{\log_4 x + 5}$ является элементарной. Примером неэлементарной функции может служить функция вида $y = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$

Функция $y = f(x)$ называется *четной (нечетной)* функцией, если для любого $x \in D(f)$ число $(-x) \in D(f)$ и справедливо равенство $f(-x) = f(x)$ $\quad (f(-x) = -f(x))$. Например функция $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ является четной, функция $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ является нечетной. А функция $y = \dfrac{x}{x - 4}$ не является ни четной ни нечетной, так как ее область определения $D(f) = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ не симметрична относительно начала координат.

Функция, определяемая уравнениями $\begin{cases} y = \varphi(t), \\ x = \psi(t), \end{cases}$ в которых зависимость между y и x устанавливается посредством третьей переменной t, называется заданной *параметрически,* при этом t *—параметр.* Например, уравнения $y = 2t + 1$, $x = t - 2$ определяют линейную функцию $y = 2(x+2) + 1 = 2x + 5$.

§ 2. Предел числовой последовательности. Предел функции

Определение. Число A называется *пределом последовательности* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ если для любого положительного числа ε существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Если последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ имеет своим пределом число A, то это записывается следующим образом $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ *или* $a_n \to A$ *при* $n \to \infty$.

Определение. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to a$ (*в точке* $x = a$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in D(f)$ и удовлетворяющего неравенству $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначают этот факт так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Если число A является пределом функции $y = f(x)$ *при* $x \to a$, то на графике это иллюстрируется следующим образом. Так как из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то это значит, что для всех x, отстоящих от a не далее чем на δ, точка M графика функции $y = f(x)$ лежит внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. Очевидно, что с уменьшением ε величина δ также уменьшается (см. рис.3.1).

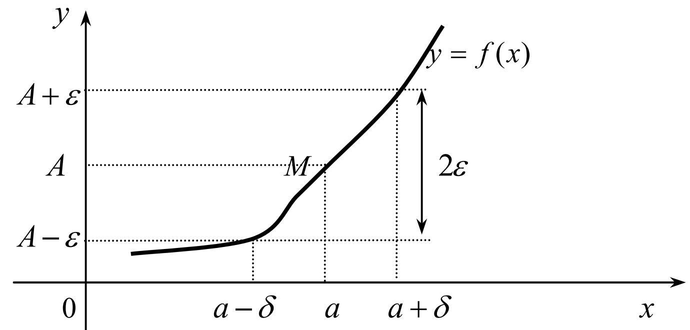


Рис.3.1

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to \pm\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$, что при всех $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной в области D,* если существует постоянное число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| < M$.

Например, функция $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ ограничена для всех $x \in R$, так как в этой области $|f(x)| \le 2$.

§ 3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$.

Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to a$**,** если $\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = \infty$.

Например, функция $y = \sin x$ является бесконечно малой при $x \to 0$, а функция $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ есть бесконечно малая при $x \to \pm\infty$, так как их пределы равны нулю. Функция $y = tgx$ является бесконечно малой при $x \to 0$ и бесконечно большой при $x \to \dfrac{\pi}{2}$.

Теорема.

Если функция $\alpha(x)$ *— бесконечно малая при* $x \to a$, *то* $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ *— бесконечно большая функция при* $x \to a$ $\left(\dfrac{1}{0} = \infty\right)$.

Если функция $\beta(x)$ *— бесконечно большая при* $x \to a$, *то* $\dfrac{1}{\beta(x)}$ *- бесконечно малая функция при* $x \to a$ $(\dfrac{1}{\infty} = 0)$.

(Доказательство см. [1], гл. II, §4.).

Справедливы следующие утверждения:

1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция.
3. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

§ 4. Теоремы о пределах

Если пределы $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x)$ существуют и конечны, то

1. $\lim\limits_{x\to a} cu(x) = c\lim\limits_{x\to a} u(x)$, где $c - const$;
2. $\lim\limits_{x\to a}(u(x)+v(x)) = \lim\limits_{x\to a} u(x) + \lim\limits_{x\to a} v(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to a}(u(x)\cdot v(x)) = \lim\limits_{x\to a} u(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} v(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} u(x)}{\lim\limits_{x\to a} v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} v(x) \ne 0$.

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

где e — иррациональное число, $e \approx 2{,}718281828$ — одна из фундаментальных величин в математике. Функция $y = e^x = \exp(x)$ называется *экспонентой*; $y = \log_e x = \ln x$ называется *натуральным логарифмом.*

Пример 3.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+3}{x^2+x-3}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-3) = \lim\limits_{x\to 2}x^2 + \lim\limits_{x\to 2}x - 3 = 3 \ne 0$, то применима теорема о пределе частного. Значит,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+3}{x^2+x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-3)} = \frac{1}{3}.$$

Пример 3.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x-2}$.

Решение. Так как при $x \to \infty$ числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, стремятся к бесконечности, то имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия таких неопределенностей делят числитель и знаменатель дроби на старшую степень x. После деления на x^3 получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}=\frac{2-0+0}{1+0-0}=2\,.$$

Пример 3.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-9}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x-12)=0$ и $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$, то имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель дроби на линейные множители. Так как $x^2+x-12=0$ при $x_1=3$ и $x_2=-4$, то $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$; $x^2-9=(x-3)(x+3)$. Тогда $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+4}{x+3}=\dfrac{7}{6}$.

Пример 3.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-3x+2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение ($\sqrt{x+7}+3$), а так же разложим знаменатель на линейные множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-3x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{1}{6}\,.$$

Пример 3.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{tg 3x}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\dfrac{0}{0}$ воспользуемся первым замечательным пределом. Считая, что $x\neq 0$, проведем очевидные преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x\cdot 3x}\cdot 3x}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot 7}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}\cdot\cos 3x=$$

$$=\frac{7}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\frac{7}{3}\,.$$

Пример 3.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Для раскрытия неопределенности 1^∞ воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right)^{-2}=e^{-2},$$

$$\text{поскольку}\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}=\lim_{y=-\frac{x}{2}\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e\,.$$

§ 5. Сравнение бесконечно малых функций

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке $x=a$ находят предел отношения $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$.

Если $A\neq 0$ и $A\neq\infty$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка.*

Если $A=0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой высшего порядка по сравнению с* $\beta(x)$. Записывается это так: $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Если A=1, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентным* и обозначают $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Например, $\sin x \sim x$ *при* $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Основные эквивалентности при $x \to 0$:

$$\sin kx \sim kx, \qquad tgkx \sim kx,$$
$$\arcsin kx \sim kx, \qquad arctgkx \sim kx,$$
$$\ln(1+kx) \sim kx, \qquad e^{kx} - 1 \sim kx.$$

При вычислении пределов используют следующую теорему.

Теорема. *Предел отношения двух бесконечно малых функций в некоторой точке равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых функций в той же точке.*

Доказательство см. [1], гл. II, §11.

Пример 3.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\sin 3x}$.

Решение. Воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми функциями. Так как при $x \to 0$

$$1-\cos 5x = 2\sin^2\frac{5x}{2} \sim 2\left(\frac{5x}{2}\right)^2 = 25\frac{x^2}{2} \text{ и } \sin 3x \sim 3x \text{, то}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x\sin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{25\frac{x^2}{2}}{x\cdot 3x} = \frac{25}{6}.$$

§ 6. Непрерывность функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если предел функции в точке x_0 существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Односторонними называются пределы:

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ - *левосторонний предел в точке* a;

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$ - *правосторонний предел в точке* a.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если существуют односторонние пределы в точке x_0 и

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0). \qquad (*)$$

Если односторонние пределы конечны, но нарушается хотя бы одно из равенств (*), то x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода*.

Если хотя бы один из этих односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

Например, функция $y = \dfrac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 1, \\ -1, \text{ если } x < 1 \end{cases}$, имеет в точке $x = 1$ разрыв 1-го рода (рис. 3.2).

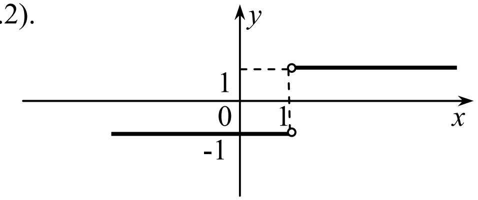


Рис. 3.2

Функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ имеет в точке $x = 2$ разрыв второго рода (рис.3.3).

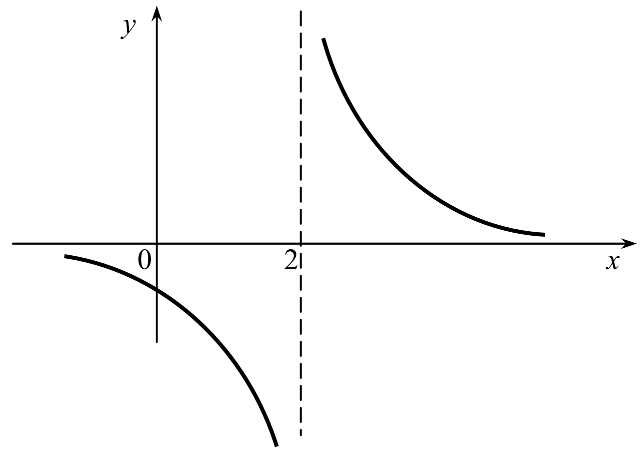


Рис.3.3

Если функция непрерывна во всех точках отрезка $[a,b]$, то она называется *непрерывной на этом отрезке*.

Из определения непрерывности функции и теорем о пределах следуют теоремы:

I. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны функции $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$.

II. Сложная функция, составленная из непрерывных функций, непрерывна в соответствующей точке.

III. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Доказательство приведено, например, в [1], гл. 2, §9.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

1. Найти область определения функции $y=\sqrt{9-x^2}$.

2. Найти указанные пределы

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{5x^2-4x-1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$; **г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$; **е)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tgx}$; **з)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^x$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №3

1^0. Пусть $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$. Тогда $D(f)=$ **а)** $(-\infty;+\infty)$; **б)** $(1;+\infty)$; **в)** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; **г)** $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.
2^0. Какие из данных функций являются четными? **а)** $y=\cos 2x$; **б)** $y=ctg3x$; **в)** $y=2tg3x$; **г)** $y=-3\sin x$.
3^0. Какая из функций не является сложной функцией? **а)** $y=2^{x^2}$; **б)** $y=\log_{30}x$; **в)** $y=\sin(x^2)$; **г)** $y=\cos(2x)$.
4. В указанном множестве функций найдите бесконечно малые при $x\to 0$ функции: **а)** $y=2x+3$; **б)** $y=2^{x-1}$; **в)** $y=\cos 2x$; **г)** $y=\sqrt{x+4}-2$.
5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. **а)** e; **б)** ∞; **в)** $\frac{1}{e}$; **г)** $\frac{\alpha}{\beta}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$ равен **а)** 1; **б)** -1; **в)** ∞; **г)** не существует.
7*. Функция $\sin^2 3x$ при $x\to 0$ эквивалентна функции **а)** $3x$; **б)** $3x^2$; **в)** $9x^2$; **г)** $6x$.
8*. Известно, что $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to c+0}f(x)=18$. Какое из утверждений верно? **а)** c - точка неустранимого разрыва первого рода; **б)** c - точка устранимого разрыва первого рода; **в)** c - точка разрыва второго рода; **г)** c - точка непрерывности.

Модуль 4.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Если переменная x получит приращение Δx, то функция y получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Для производной функции $y = f(x)$ в точке x применяют также обозначения: $$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Функция, имеющая в данной точке конечную производную, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Геометрический смысл производной. Построим график функции $y = f(x)$ и проведем к нему касательную через точку $M(x_0, f(x_0))$ (рис.4.1). Обозначим через α угол, образованный этой касательной с осью Ox, тогда $tg\alpha = f'(x_0)$,

т.е. *производная* $f'(x_0)$ *функции* $y = f(x)$ *равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой* x_0.

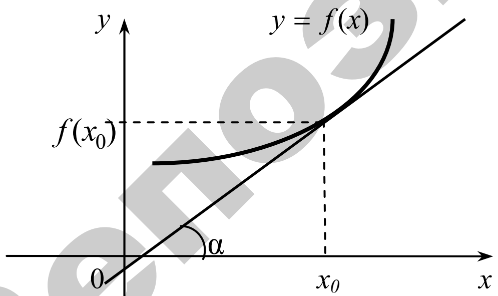


Рис.4.1

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, а *уравнение нормали* к данной кривой в этой же точке записывается в виде $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ при условии, что $f'(x_0) \neq 0$.

Если $f'(x_0) = 0$, то уравнение касательной: $y = f(x_0)$, а уравнение нормали: $x = x_0$.

Механический смысл производной. Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$. Тогда $v = s'(t)$, *т.е. производная от пути по времени есть скорость движения точки.*

§ 2. Основные правила дифференцирования

Если функции u и v дифференцируемы, то

1. $(cu)' = cu'$, $c = const$.

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

5. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ - дифференцируемые функции своих аргументов, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ тоже дифференцируема и $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Это правило легко распространить на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

6. Если для дифференцируемой функции $y = f(x)$ $(f'(x) \neq 0)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, то $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

7. Если функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то ее производная вычисляется по формуле

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad \text{или} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

§ 3. Таблица производных основных элементарных функций

В приводимой ниже таблице: $c = const$; $\alpha \in R$; $a > 0$, $a \ne 1$; $u = u(x)$.

Производные основных элементарных функций	Производные сложных функций
$c' = 0$; $x' = 1$;	
$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$;	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$;
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$;
$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$;	$\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a u'$;
$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;	$\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$;
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$;	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}u'$;
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}u'$;
$\left(\sin x\right)' = \cos x$;	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$;	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;
$\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;	$\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;
$\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;	$\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
$\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;	$\left(arctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$;
$\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;	$\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

Доказательство справедливости указанных формул смотрите в [1], гл.3, §5, 6, 8, 10, 12, 14.

Пример 4.1. Найти производную функции $y = 2x^4 - 4\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{x^5}$.

Решение. Данную функцию представляем в виде $y = 2x^4 - 4x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-5}$. $y' = 2\left(x^4\right)' - 4\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' + 2\left(x^{-5}\right)' = 2\cdot 4\cdot x^3 -$

$$-4\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 2\cdot(-5)x^{-6} = 8x^3 - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{10}{x^6}.$$

Пример 4.2. Найти производную функции $y = tg^3 7x$.

Решение. Последовательно используем формулы для производных сложных функций

$$y' = (tg^3 7x)' = \left|\begin{array}{c}(u^3)' = 3u^2\cdot u',\\ где\ u = tg7x\end{array}\right| = 3tg^2 7x\left(tg7x\right)' = \left|\begin{array}{c}(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u',\\ где\ u = 7x\end{array}\right| =$$

$$= 3tg^2 7x\frac{1}{\cos^2 7x}\cdot(7x)' = 3tg^2 7x\frac{1}{\cos^2 7x}\cdot 7 = 21\frac{\sin^2 7x}{\cos^4 7x}.$$

Здесь при решении указывались формулы, которые применялись при вычислении производных.

Пример 4.3. Найти производную функции $y = \ln arctg\sqrt{x}$.

Решние. $y' = (\ln arctg\sqrt{x})' = \left|\begin{array}{c}(\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u',\\ где\ u = arctg\sqrt{x}\end{array}\right| = \dfrac{1}{arctg\sqrt{x}}(arctg\sqrt{x})' =$

$$= \left|\begin{array}{c}(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u',\\ где\quad u = \sqrt{x}\end{array}\right| = \frac{1}{arctg\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{arctg\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 4.4. Найти производную функции $y = (x-1)^2\sqrt{x^2+3x-1}$.

Решение. Применим формулу производной произведения

$$y' = ((x-1)^2)'\sqrt{x^2+3x-1} + (x-1)^2(\sqrt{x^2+3x-1})' =$$
$$= 2(x-1)\sqrt{x^2+3x-1} + (x-1)^2\frac{1}{2\sqrt{x^2+3x-1}}(2x+3).$$

Пример 4.5. Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = t^2 + 2t + 1, \\ y = t^3 + t \end{cases}$ при $t = 1$.

Решение. Последовательно находим производные:

$x'_t = (t^2 + 2t + 1)' = 2t + 2$,

$y'_t = (t^3 + t)' = 3t^2 + 1$.

Тогда $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3t^2+1}{2t+2}$, $\quad y'_x(1) = \dfrac{4}{4} = 1$.

Пример 4.6. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Определяем значение функции при $x_0 = 2$:

$$y_0 = f(2) = 2^3 = 8.$$

Находим производную данной функции и ее значение при $x_0 = 2$:

$$y' = f'(x) = (x^3)' = 3x^2, \quad f'(2) = 3\cdot 2^2 = 12.$$

Подставляя значения $x_0 = 2$, $y_0 = 8$, $f'(x_0) = 12$ *в уравнения*

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ *(уравнение касательной) и*

$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ *(уравнение нормали), получим*

соответственно:

$y - 8 = 12(x-2)$ *или* $12x - y - 16 = 0$ *– уравнение касательной;*

$y - 8 = -\dfrac{1}{12}(x-2)$ *или* $x + 12y - 98 = 0$ *– уравнение нормали.*

Пример 4.7. Определить момент времени, когда ускорение движения равно нулю, при условии, что материальная точка движется по закону $s = s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$.

Решение. Находим первую и вторую производные:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 18.$$

Ускорение $a = 0$, *когда* $6t - 18 = 0$. *Откуда искомый момент времени* t = *3.*

§ 4. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Правила дифференцирования

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) = 0$, т.е. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина $\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0\right)$. Это значит, что приращение функции Δy, соответствующее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$.

Определение. *Дифференциалом* dy *функции* y *в точке* x называется главная линейная часть приращения функции в этой точке, т.е.

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Обозначая $\Delta x = dx$, получим формулу

$$dy = f'(x)dx \text{ или } dy = y'dx,$$

т.е. *дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента.*

Геометрический смысл дифференциала функции.

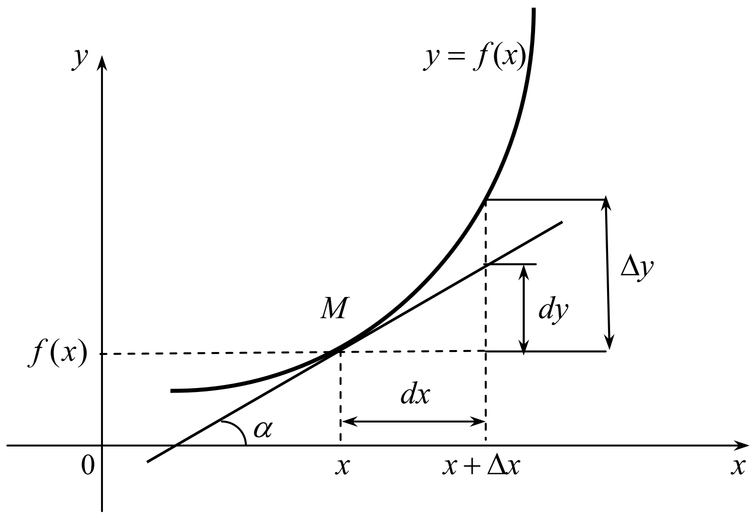


Рис.4.2

Дифференциал функции $y = f(x)$ равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику этой функции в точке $M\big(x, f(x)\big)$, когда аргумент получает приращение Δx (рис.4.2).

Пример 4.6. Найти дифференциал функции $y = \sin^5 7x$.

Решение. Находим производную $y' = 5 \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x \cdot 7$.

Тогда $dy = 35 \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x dx$.

Если c – постоянная, u, v – дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила нахождения дифференциалов:

1. $dc = 0$,
2. $d(cu) = cdu$,
3. $d(u+v) = du + dv$,
4. $d(uv) = udv + vdu$,
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$,
6. $df(u) = f'(u)du$.

§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков

I. *Производной n-ого порядка* называют производную, взятую от производной $(n-1)$-го порядка, т.е.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Согласно этому определению производная порядка n любой функции находится последовательным ее дифференцированием n раз, т.е. для функции $y = f(x)$ имеем

$$y' = f'(x), \quad y'' = (y')' = f''(x), \quad y''' = (y'')' = f'''(x), \ldots$$

Для обозначения производной n-го порядка применяются символы

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Физический смысл второй производной. Так как производная любой функции равна скорости ее изменения в данной точке, *то вторая производная от пути по времени равна ускорению движения точки в данный момент времени, т.е.* $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

II. *Дифференциалом n-ого порядка* функции $y = f(x)$ называется дифференциал, взятый от дифференциала $(n-1)$-го порядка, т.е.

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Откуда следует, что $d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2$, т.к. dx не зависит от x. Аналогично получаем

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Пример 4.7. Найти производную и дифференциал второго порядка функции $y = \ln(x + \sqrt{x^2+4})$.

Решение. Находим первую производную

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}x+x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Следовательно, $dy = (x^2+4)^{-1/2} dx$.

Дифференцируя первую производную, получаем

$$y'' = \left((x^2+4)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}(x^2+4)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}},$$

значит $d^2 y = -x(x^2+4)^{-3/2} dx^2$.

§ 6. Правило Лопиталя и его применение к раскрытию неопределенностей

Теорема. *Пусть функции* $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$

1) дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = x_0$, *причем* $\varphi'(x_0) \neq 0$*;*

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0 \left(\text{или} \pm \infty\right)$*;*

3) существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$*;*

то существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Правило применимо и в случае, когда $x_0 = \pm\infty$.

Пример 4.8. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$.

Решение. Так как функции $\sin 5x$ и $3x$ непрерывны и дифференцируемы в точке $x = 0$ и $\lim\limits_{x \to 0} \sin 5x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} 3x = 0$, то применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{5\cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

Иногда правило Лопиталя применяют несколько раз подряд.

Пример 4.9. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(e^x - e^{-x} - 2x\right)'}{(x - \sin x)'} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x + e^{-x} - 2\right)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

§ 7. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции

Определение. Если для всех точек интервала (a, b) при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$, то функция называется *возрастающей* (*убывающей*) на (a, b).

Признаки возрастания (убывания) функции.

1. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b) *и возрастает (убывает), то* $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ *для любых* $x \in (a, b)$.

2. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b) *и* $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$, *то она возрастает (убывает) на* (a, b).

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) *функции* $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для любых $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$.

Точки, в которых функция достигает максимума или минимума, называются *точками экстремума функции*, а значения функции в этих точках называют *экстремальными*.

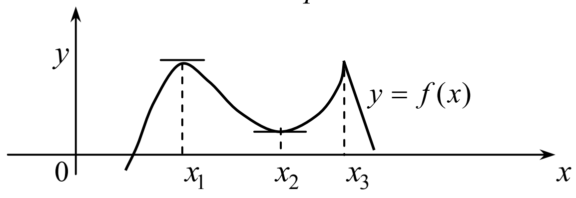


Рис.4.3

Функция, заданная кривой на рис.4.3, в точках x_1 и x_3 достигает максимума, а в точке x_2 – минимума.

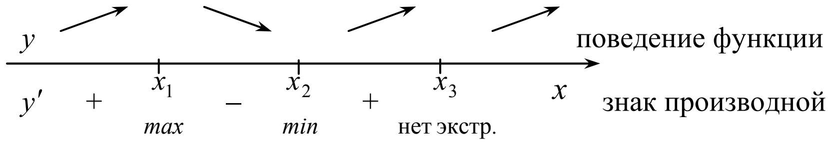
Необходимый признак экстремума. *В точке экстремума производная функции равна нулю или не существует.*

Функция $y = f(x)$ (рис.4.3) в точках x_1 и x_2 имеет производную равную нулю. Касательные к кривой в этих точках параллельны оси Ox. Но функция может достигать экстремума и в точках, в которых производная не существует (точка x_3).

Достаточный признак экстремума. *Пусть функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в некотором интервале, содержащем критическую точку* x_0, *кроме, быть может, самой точки* x_0. *Тогда, если при переходе через критическую точку производная* $f'(x)$

1) *меняет знак с + на – ,то в точке* x_0 *функция имеет максимум;*
2) *меняет знак с – на +, то в точке* x_0 *функция имеет минимум;*
3) *не меняет знак, то в точке* x_0 *нет экстремума.*

Схема исследования функции на экстремум с помощью первой производной:



Пример 4.10. Исследовать на экстремум функцию $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

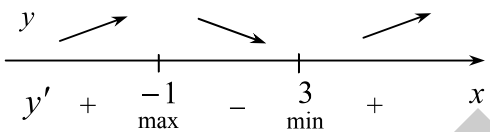
Решение. Находим критические точки данной функции

$$y' = 6x^2 - 12x - 18,$$

$$y' = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 1 - \sqrt{1+3} = -1, \quad x_2 = 1 + \sqrt{1+3} = 3.$$

Исследуем знак производной при переходе через критические точки:



Следовательно, $y_{\max} = y(-1) = 17$, $y_{\min} = y(3) = -47$.

§ 8. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

Всякая непрерывная функция может принимать на отрезке наибольшее и наименьшее значения в критических точках, лежащих внутри отрезка или на его концах. Схему нахождения наибольшего и наименьшего значений функции рассмотрим на следующем примере.

Пример 4.11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ на отрезке $[-2, 2]$.

Решение. Находим критические точки:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9, \qquad y' = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \qquad x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

Отрезку $[-2, 2]$ принадлежит только одна критическая точка $x_1 = -1$. Вычисляем значения функции в точке $x_1 = -1$ и на концах отрезка: $y_1 = y(-1) = 11$, $y_2 = y(-2) = 4$, $y_3 = y(2) = -16$.

Сравнивая полученные значения, находим, что $\max\limits_{[-2,2]} y = 11$, $\min\limits_{[-2,2]} y = -16$.

§ 9. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Определение. Функция называется *выпуклой* (*вогнутой*) на интервале (a, b), если график этой функции расположен ниже (выше) любой проведенной к нему касательной на этом интервале (рис.4.4).

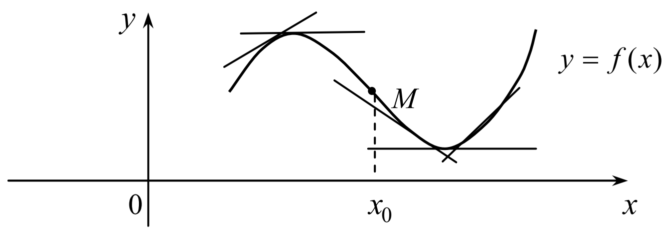


Рис.4.4

Признаки выпуклости (вогнутости) функции.

1. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и выпукла (вогнута), то $f''(x) \le 0$ $(f''(x) \ge 0)$ для любых $x \in (a, b)$.
2. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) < 0$ $\left(f''(x) > 0\right)$, то она выпукла (вогнута) на (a, b).

Точка $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ графика функции $y = f(x)$, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба графика этой функции* (точка M (рис.4.4) является точкой перегиба). Абсцисса x_0 точки M называется *точкой перегиба функции* $y=f(x)$.

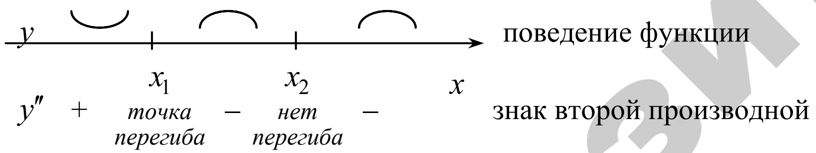
Необходимый признак существования точки перегиба.

Если функция имеет точку перегиба, то вторая производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

Достаточный признак существования точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную, причем $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x_0)$ меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Схема исследования функции на выпуклость и вогнутость с помощью второй производной:



Пример 4.12. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$.

Решение. Имеем, $y' = 3x^2 - 12x + 12$, $y'' = 6x - 12$.

Если $y'' = 0$, то $6x - 12 = 0$, $x = 2$. Эта точка делит область определения функции на интервалы $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$. Найдем вторую производную функции:

$y(2) = 12$.

Таким образом, на интервале $(-\infty, 2)$ кривая выпукла, на интервале $(2, +\infty)$ кривая вогнута, точка $(2, 12)$ является точкой перегиба.

§ 10. Асимптоты графика функции и их нахождение

Определение. *Асимптотой кривой* называется прямая, к которой как угодно близко приближается точка кривой при ее неограниченном удалении от начала координат.

Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Вертикальные асимптоты. Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ равен ∞, (рис.4.5).

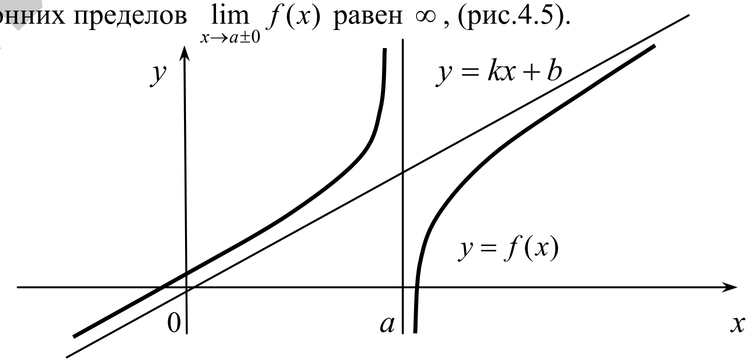


Рис.4.5

Наклонные асимптоты. Если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right),$$

то прямая $y = kx + b$ есть *наклонная асимптота* кривой $y = f(x)$. Если указанные пределы при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ различны, то имеем *правую* и *левую* наклонные асимптоты. В случае $k = 0$ асимптота называется *горизонтальной*. Если хотя бы один из пределов не существует (k или b) или $= \infty$, то кривая $y = f(x)$ не имеет наклонных асимптот.

Пример 4.13. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Решение. При $x\neq 1$ функция непрерывна. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty$,

а $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{x-1}=+\infty$, то $x=1$ – вертикальная асимптота.

Уравнения наклонных асимптот ищем в виде $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1.$$

Следовательно, $y=x+1$ - наклонная асимптота.

§ 11. Общая схема исследования функции и построение ее графика

Исследование функции можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции, точки пересечения с осями координат, точки разрыва функции.
2. Установить четность или нечетность функции, ее периодичность.
3. Найти интервалы монотонности, точки экстремума функции, вычислить значения экстремумов.
4. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба.
5. Найти асимптоты функции.
6. На координатную плоскость нанести все найденные характерные точки и по результатам исследования построить эскиз графика функции.

Пример 4.14. Исследовать функцию $y=\ln(x^2-4x+5)$ и построить ее график**.**

Решение. *Воспользуемся общей схемой исследования функции.*

1) Найдем область определения функции.

Так как выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительно, то решим неравенство $x^2-4x+5>0$.

Дискриминант квадратного трехчлена $D=4^2-4\cdot 5=-4<0$, поэтому неравенство выполняется при любых x. Следовательно, областью определения функции является вся числовая ось $D(y)=R$.

Найдем точки пересечения кривой с осями координат.

Если $x=0$, то $y=\ln 5\approx 1{,}6$, т.е. точка $(0;\ln 5)$ - точка пересечения с осью Oy.

Если $y=0$, то $\ln(x^2-4x+5)=0$, $x^2-4x+5=1$, $x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$, $x=2$, т.е. $(2;\,0)$ - точка пересечения с осью Ox.

Функция всюду непрерывна и не имеет точек разрыва. Значит, функция не имеет вертикальных асимптот.

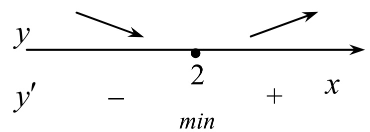
2) Установим четность или нечетность функции.

Находим $y(-x)=\ln(x^2+4x+5)$. Так как $y(-x)\neq y(x)$ и $y(-x)\neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Определим интервалы монотонности и точки экстремума функции. Находим первую производную:

$$y'=\frac{2x-4}{x^2-4x+5}.$$

Так как $x^2-4x+5\neq 0$, то критические точки функции найдем из уравнения $y'=0$, т.е. $2x-4=0$, $x=2$. Точка $x=2$ разбивает всю числовую ось на интервалы $(-\infty;2)$ и $(2;+\infty)$:



Поскольку при переходе через точку $x=2$ первая производная меняет знак с «минус» на «плюс», то $x=2$ – абсцисса точки минимума,

$$y_{\min}=y(2)=\ln(4-8+5)=\ln 1=0.$$

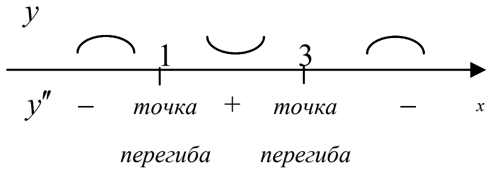
Следовательно, $A\,(2;0)$ - точка минимума функции.

4) Для определения интервалов выпуклости и вогнутости кривой и точек перегиба найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{2(x^2-4x+5)-(2x-4)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{-2x^2+8x-6}{(x^2-4x+5)^2}.$$

Для нахождения критических точек первой производной решаем уравнение $y''=0$ или $2x^2-8x+6=0$, $x^2-4x+3=0$, $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}$, $x_1=1$, $x_2=3$.

Эти два решения разбивают всю числовую ось на три интервала:



Поскольку при переходе через точки $x=1$ и $x=3$ вторая производная меняет знак, то точки $B(1;\ln 2)$ и $C(3;\ln 2)$ являются точками перегиба кривой $(\ln 2 \approx 0{,}7)$.

5) Для нахождения асимптот вычисляем пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(x^2-4x+5)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\ln(x^2-4x+5))'}{x'}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-4)'}{(x^2-4x+5)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{2x-4}=0.$$

Здесь при вычислении предела дважды использовано правило Лопиталя.

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\ln(x^2-4x+5)=\infty.$$

Следовательно, наклонных асимптот нет.

6) Строим график функции (рис.4.6).

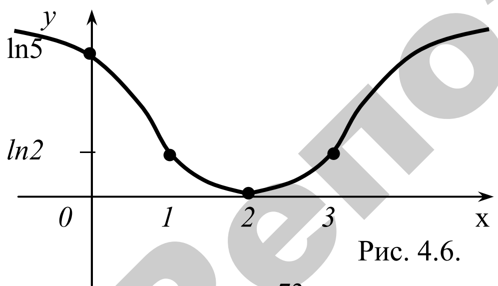


Рис. 4.6.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

1. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ функций

а) $y=x^3-2x+\sqrt{x}+1$; **б)** $y=\frac{1-2x^3}{2x^3+1}$;

в) $y=\arcsin x^2$; **г)** $y=\ln(\cos e^x)$;

д) $y=\sin(x^2)+\sin^2 x+\sin 2x$; **е)** $y=\left(5^{ctg\,2x}+\sin 2x\right)^3$.

2. Записать уравнение касательной и нормали к кривой $y=3x^2-4x+6$ в точке $x_0=2$.

3. Материальная точка движется по закону $s=4t^3-2t+11$. Найти ее скорость и ускорение в момент времени $t_0=4$ *сек*.

4. Найти пределы с помощью правила Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{tg 3x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$;

5. Найти точки экстремума и точки перегиба функции $y=x^3-3x^2-9x+1$.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{x^2}{x-2}$ на отрезке $[-1;1]$.

7. Записать уравнения вертикальных асимптот графика функции $y=\frac{x^3-x+2}{x^2-4}$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №4

1^0. Производной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется…
а) отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx; **б)** предел отношения приращения аргумента Δx к приращению функции Δy при $\Delta x \to 0$;
в) отношение приращения аргумента Δx к приращению функции Δy; **г)** предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$.

2^0. Найдите производную функции $y=tg(\ln x)$
а) $\frac{1}{\cos^2 x}\cdot \ln x + tgx\cdot\frac{1}{x}$; **б)** $\frac{1}{x\cdot\cos^2(\ln x)}$;
в) $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$; **г)** $\frac{1}{x}\cdot ctg(\ln x)$.

3. Среди приведенных функций укажите те, производная которых равна $8x$
а) $y=(2x-4)^4$; **б)** $y=8x+5$;
в) $y=4x^2+10$; **г)** $y=4(x-5)(x+10)$.

4. Точка движется прямолинейно по закону $S=4t+t^3$. Найти скорость движения точки в момент $t=2$ сек.:
а) 12; **б)** 16; **в)** 10; **г)** 5.

5. Уравнение нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид:
а) $y=\frac{1}{f'(x_0)}+f(x_0)\cdot(x-x_0)$; **б)** $y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$;
в) $y-x_0=f'(x_0)\cdot(x-f'(x_0))$; **г)** $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

6*. Сколько точек перегиба имеет функция $y=x^4+4x$?
а) ни одной; **б)** одну; **в)** две; **г)** три.

7*. Укажите точки экстремума непрерывной на всей числовой прямой функции $y(x)$, если $y'=(x+1)^2(x-2)$:
а) $x=2$ - точка max; **б)** $x=2$ - точка min;
в) $x=-1$ - точка max; **г)** $x=-1$ - точка min.

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ №1

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 5\\ 7 & -1\end{vmatrix}$.

2. Найти длину вектора $\overrightarrow{MN}$, если $M(5;1;2)$, $N(6;1;2)$.

3. Векторы $\vec{a}=(1;2;-1)$ и $\vec{b}=(3;6;-3)$ являются
а) ортогональными; **б)** компланарными;
в) коллинеарными; **г)** равными.

4. Уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ называется
а) каноническим; **б)** общим;
в) параметрическим; **г)** в отрезках.

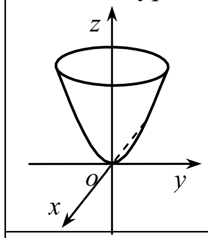
5. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2;5)$ параллельно вектору $\vec{a}=(-1;4;-2)$, имеет вид
а) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+2}{5}$; **б)** $(x+1)+2(y-4)+5(z+2)=0$;
в) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-2}$; **г)** $-(x-1)+4(y-2)+(z-5)=0$.

6. Записать величину отрезка, которую отсекает прямая $x+6y-12=0$ от оси Oy.

7. Какая кривая на плоскости xOy задается уравнением $5y^2-x=4$?
а) парабола; **б)** гипербола; **в)** эллипс; **г)** окружность.

8. Записать величину большой полуоси эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

9. Каким уравнением задается поверхность на рисунке?



а) $2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$;
б) $z=x^2-y^2$;
в) $z^2=x^2-y^2$;
г) $x^2=z^2-y^2$.

10. Какая функция является сложной?
а) $y=e^x$; **б)** $y=\log_2 x$; **в)** $y=ln(x+1)$; **г)** $y=arctgx$.

11. Какая функция определена на интервале $[2; +\infty)$?

а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$; **б)** $y = \sqrt{x-2}$; **в)** $y = \sqrt{x+2}$; **г)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

12. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$.

13. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2 - 4}$.

14. Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ называется

а) дифференциалом функции; **б)** приращением функции;
в) производной функции; **г)** замечательным пределом.

15. Найти $y'(1)$, если $y = (x^2+5)^2$.

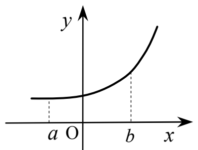
16. Найти $\dfrac{df}{dx}$ для функции $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^3}$

а) $\dfrac{2}{3x}$; **б)** $\dfrac{2x-3}{3x^2}$; **в)** $\dfrac{9-x^2}{x^4}$; **г)** $\dfrac{5x^4 - x^2 + 3}{x^6}$.

17. Если $y' > 0$ на интервале $(a; b)$, то на этом интервале функция y

а) возрастает; **б)** убывает; **в)** вогнута; **г)** выпукла.

18. Если график функции $f(x)$ выглядит как на рисунке, то на интервале (a, b) $f'(x)$ и $f''(x)$ удовлетворяют условиям



а) $f'(x) < 0;\ f''(x) < 0$;
б) $f'(x) > 0;\ f''(x) < 0$;
в) $f'(x) < 0;\ f''(x) > 0$;
г) $f'(x) > 0;\ f''(x) > 0$.

19. Запишите меньшую критическую точку функции $y = f(x)$, если $f'(x) = (x-5)(x-1)^2$.

20. Вертикальная асимптота графика функции $y = \dfrac{x^2 - 3x + 10}{x - 8}$ задается уравнением.

а) $y = 8$; **б)** $x = 8$; **в)** $x = -8$; **г)** $y = -8$.

ПОРЯДОК ИЗУЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА ВО 2-М СЕМЕСТРЕ

Учебной программой по изучению дисциплины "Математика" для инженерно-технических специальностей вузов сельскохозяйственного профиля во втором семестре предусмотрено изучение следующих модулей:

5. Неопределенный интеграл.
6. Определенный интеграл.
7. Функции нескольких переменных.

При подготовке к сдаче экзамена по содержанию названных модулей студент должен:

- внимательно изучить теоретический материал указанных модулей с помощью рекомендуемого списка литературы;
- изучить краткий конспект с примерами решенных задач по предлагаемому методическому пособию;
- протестировать себя с помощью предлагаемых тестовых заданий, которые помещены в конце каждого модуля;
- при необходимости дополнительно изучить предлагаемые разделы или обратиться за консультацией к преподавателям кафедры;
- протестировать самостоятельно себя по предлагаемому итоговому тесту 2 семестра.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» (2 СЕМЕСТР)

Модуль 5.
Неопределенный интеграл

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Теорема о первообразной. [1], гл. 10, §1.
2. Основные свойства неопределенного интеграла.[1], гл. 10, §3.
3. Таблица интегралов основных элементарных функций[1],гл.10,§2
4. Интегрирование методом замены переменной (методом подстановки) в неопределенном интеграле. [1], гл. 10, §4.
5. Интегрирование по частям. [1], гл. 10, §6.
6. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен. [1], гл. 10, §5.
7. Интегрирование простейших рациональных дробей[1],гл.10,§7.
8. Интегрирование дробно-рациональных функций.[1], гл. 10, §§8,9.
9. Интегрирование тригонометрических функци. [1], гл. 10, §12.

10. Интегрирование иррациональных функций. [1], гл. 10, §§10,13
11. Несобственные интегралы. [1], гл. 11, §7.

Модуль 6.
Определенный интеграл

1. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл. [1], гл. 11, §1,2.
2. Основные свойства определенного интеграла. [1], гл. 11, §3.
3. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом. [1], гл. 11, §4.
4. Формула Ньютона-Лейбница. [1], гл. 11, §4.
5. Замена переменной в определенном интеграле. [1], гл. 11, §5.
6. Вычисление определенных интегралов методом интегриро-вания по частям. [1], гл. 11, §6.
7. Вычисление площадей плоских фигур. [1], гл. 12, §§1, 2.
8. Вычисление длины дуги кривой. [1], гл. 12, §3.
9. Вычисление объема и площади поверхности тела вращения. [1], гл. 12, §4, 5, 6.
10. Координаты центра масс. [1], гл. 12, §8.

Модуль 7.
Функции нескольких переменных

1. Определение функции нескольких переменных. Геометри-ческое изображение функции двух переменных. [1], гл. 8, §1, 2.
2. Предел и непрерывность функции двух переменных. [1], гл. 8, §4.
3. Частные производные функции нескольких переменных [1], гл. 8, §§3, 5, 6, 12.
4. Дифференциал функции нескольких переменных. [1], гл. 8, §§7,8.
5. Неявные функции. Производные неявной функции. [1], гл. 8, §11.
6. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. [1], гл. 8, §6.
7. Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточные условия экстремума функции двух переменных. [1], гл.8, §17.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1985. – Т. 1.
2. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. – М.:Наука, 1985.
3. Гусак А. А. Высшая математика. – Мн.: Тетра Системс, 1998.
4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Мн.: Вышейшая школа, 1986. – Ч. 1.
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А., Марченко А. И., Унукович В. Т. Общий курс высшей математики. – Орша,1996.
6. Лихолетов И. И., Мацукевич И. П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Вышейшая школа, 1976.
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике:Ч. 2. Учебное пособие/Под. ред.А.П.Рябушко–Мн.: Вышейшая школа, 2000.

Модуль 5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Неопределенный интеграл и его свойства

Опр. *Первообразной функцией* для функции $f(x)$ на промежутке X называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т.е.

$$F'(x) = f(x) \text{ для любых } x \in X.$$

Например, $\sin x$ есть первообразная функции $\cos x$ для любого действительного x, так как $(\sin x)' = \cos x$, $\ln x$ есть первообразная функция $\dfrac{1}{x}$ на промежутке $(0, +\infty)$, т. к. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные для одной и той же функции $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – постоянная.

Опр. Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)\mathrm{d}x$ *подынтегральным выражением*.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ или $\mathrm{d}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ или $\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$.

3. $\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x \quad (c = \text{const})$.

4. $\int [f_1(x) + f_2(x)]\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x$.

5. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, а $u = u(x)$ – дифференцируемая функция, то $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$.

Таблица неопределенных интегралов

1.	$\int \mathrm{d}u = u + C$	**2.**	$\int 0\,\mathrm{d}u = C$
3.	$\int u^{\alpha}\mathrm{d}u = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$, $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	**4.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$, $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
5.	$\int a^u\mathrm{d}u = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$, $(a > 0, a \neq 1)$	**6.**	$\int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u + C$
7.	$\int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C$	**8.**	$\int \cos u\mathrm{d}u = \sin u + C$
9.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	**10**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
11.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C$	**12.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u+a}{u-a}\right\rvert + C$
13.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$	**14.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$
15.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a^2}\right\rvert + C$	**16.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 - a^2}\right\rvert + C$
17.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sin u} = \ln\lvert \operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\rvert + C$	**18.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
19.	$\int \operatorname{tg} u\mathrm{d}u = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	**20.**	$\int \operatorname{ctg} u\mathrm{d}u = \ln\lvert\sin u\rvert + C$

Пример 5.1. Найти $\int\left(x-\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x$**.**

Решение. Возведем подынтегральную функцию в квадрат и разобъем интеграл на сумму трех табличных интегралов:

$$\int\left(x-\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x=\int\left(x^2-2x\sqrt{x}+x\right)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x-2\int x^{3/2}\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{x^2}{2}+C\;=\;\frac{x^3}{3}-4\frac{x^{5/2}}{5}+\frac{x^2}{2}+C.$$

Пример 5.2. Найти $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}$.

Решение. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

§ 2. Замена переменной в неопределенном интеграле (Метод подстановки)

При вычислении неопределенных интегралов методом замены переменной применяют два типа подстановок: либо $u=\varphi(x)$, либо $x=\psi(t)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ — некоторые функции.

После подстановки полученный интеграл может оказаться проще исходного.

Частным случаем метода замены переменной является *метод подведения под знак дифференциала*, основанный на формуле

$$\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\varphi(x).$$

Например, $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$, $x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$ и т.п.

Пример 5.3. Найти $\int\sin(2x+1)\mathrm{d}x$**.**

Решение. Сделаем замену переменной

$$2x+1=u\Rightarrow x=\frac{u-1}{2},\;\;\mathrm{d}x=\left(\frac{u-1}{2}\right)'du\;\;,\quad \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u\,.$$

Тогда $\int\sin(2x+1)\mathrm{d}x=\int\sin u\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\sin u\mathrm{d}u=$

$$=-\frac{1}{2}\cos u+C==-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C\,.$$

Можно этот интеграл находить иначе, предварительно преобразовав выражение под знаком дифференциала:

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x+1),$$

так как дифференциал от постоянной $\mathrm{d}c=c'\mathrm{d}x=0$. Значит,

$$\int\sin(2x+1)\mathrm{d}x=\int\sin(2x+1)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}(2x+1)=\left|2x+1=u\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin u\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\cos u+C=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C\,.$$

Пример 5.4. Найти $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$**.**

Решение. Поскольку $\frac{1}{x}=(\ln x)'$, то подводя $\frac{1}{x}$ под знак дифференциала $\mathrm{d}x$, получаем $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln x)$.

Тогда $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x}$. Обозначив $\ln x=u$, получим табличный интеграл вида

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln|u|+C=\ln|\ln x|+C\,.$$

Пример 5.5. Найти $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+9}$.

Решение. Введем x под знак дифференциала. Тогда

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+9}} = \left| x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}x^2 \right| = \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2}{\sqrt{(x^2)^2+3^2}} = \left| x^2 = u \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+3^2}} = \frac{1}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+3^2}|+C = \frac{1}{2}\ln|x^2+\sqrt{x^4+9}|+C.$$

§ 3. Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, тогда $\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$. Интегрируя обе части полученного равенства и учитывая, что $\int \mathrm{d}(uv) = uv$, получим *формулу интегрирования по частям* в неопределенном интеграле:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Среди интегралов, берущихся по частям, выделяют три основных класса интегралов:

1. $\int x^n \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \mathrm{e}^x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$, здесь полагают $u = x^n \Rightarrow \mathrm{d}u = nx^{n-1}\mathrm{d}x$.

2. $\int x^n \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \mathrm{arctg} x \\ \mathrm{arcctg} x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$, здесь полагают $\mathrm{d}v = x^n\mathrm{d}x \Rightarrow v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

3. $\int \mathrm{e}^x \begin{Bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$, полагают либо $u = \mathrm{e}^x$, либо $\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$ и дважды интегрируют по частям.

Замечание. Иногда формулу интегрирования по частям применяют несколько раз подряд.

Пример 5.6. Найти $\int (x+2x)e^{-8x}\mathrm{d}x$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = x+2 \Rightarrow \mathrm{d}u = (x+2)'\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = e^{-8x}\mathrm{d}x \Rightarrow v = \int \mathrm{e}^{-8x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\int \mathrm{e}^{-8x}\mathrm{d}(-8x) = -\frac{1}{8}e^{-8x}.$$

Тогда

$$\int (x+2x)e^{-8x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}e^{-8x}(x+2) + \frac{1}{8}\int e^{-8x}\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{8}e^{-8x}(x+2) + \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)e^{-8x} + C = -\frac{1}{8}e^{-8x}(x+2) - \frac{1}{64}e^{-8x} + C$$

Пример 5.7. Найти $\int x^2\cos 2x\mathrm{d}x$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = \cos 2x\mathrm{d}x \Rightarrow v = \int \cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Тогда

$$\int x^2\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\cdot 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \int x\sin 2x\mathrm{d}x$$

К последнему интегралу снова применим формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = \sin 2x\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Окончательно получаем

$$\int x^2\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Пример 5.8. Найти $\int x^2 \ln x\mathrm{d}x$.

Решение. $\int x^2 \ln x\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u=\ln x & \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x & v=\frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| =$

$$= \ln x\cdot\frac{x^3}{3} - \int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{3}x^3(\ln x - \frac{1}{3}) + C.$$

§ 4. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

Интегралы вида

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}, \quad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x, \quad \int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$$

сводятся к табличным после предварительного выделения полного квадрата в квадратном трехчлене с последующей заменой переменной.

Пример 5.9. Найти $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+5}$.

Решение. Выделим в знаменателе полный квадрат

$$x^2+6x+5=(x^2+2\cdot3x+3^2)-3^2+5=(x+3)^2-4.$$

Тогда

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2-4} = \left|\begin{matrix} x+3=u \\ x=u-3 \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}u \end{matrix}\right| = \int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-4} = \frac{1}{2\cdot2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+3-2}{x+3+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right| + C.$$

Пример 5.10. Найти $\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{9x^2-12x+5}$.

Решение.

$$\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{9x^2-12x+5} = \left|\begin{matrix} 9x^2-12x+5=(3x)^2-2\cdot2\cdot3x+4-4+5= \\ =(3x-2)^2+1 \end{matrix}\right| =$$

$$= \int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{9x^2-12x+5} = \left|\begin{matrix} 3x-2=u, & \\ x=\frac{u+2}{3}, & \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}u \end{matrix}\right| = \int\frac{\frac{u+2}{3}-1}{u^2+1}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}u = \frac{1}{9}\int\frac{u-1}{u^2+1}\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{9}\int\frac{u}{u^2+1}\mathrm{d}u - \frac{1}{9}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u^2+1)}{u^2+1} - \frac{1}{9}\mathrm{arctg}u = \frac{1}{18}\ln(u^2+1) -$$

$$- \frac{1}{9}\mathrm{arctg}u + C = \frac{1}{18}\ln(9x^2-12x+5) - \frac{1}{9}\mathrm{arctg}(3x-2) + C.$$

§ 5. Интегрирование дробно-рациональных функций

Рациональной функцией называют дробь вида

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+\ldots+b_1x+b_0},$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно.

Если $m\ge n$, то дробь называется *неправильной*, а если $m<n$ – *правильной*.

Если дробь неправильная, то *выделяют целую часть*. Для этого числитель делят "уголком" на знаменатель.

Например, дробь $\frac{2x^3+3}{x^2+x+1}$ является неправильной, так как в числителе стоит многочлен третьей степени, а в знаменателе – второй. Разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\;2x^3+3 & x^2+x+1 \\ \underline{2x^3+2x^2+2x} & \overline{2x-2} \\ -\;-2x^2-2x+3 & \\ \underline{-2x^2-2x-2} & \\ 5 & \end{array}$$

При делении на каждом шаге мы знаменатель x^2+x+1 умножили на такую степень x, чтобы при вычитании полученного после этого многочлена старшие степени уничтожались (сначала мы умножили на $2x$, затем на (-2)).

Следовательно, неправильную дробь можно представить в виде:

$$\frac{2x^3+3}{x^2+x+1}=2x-2+\frac{5}{x^2+x+1}.$$

Из алгебры известно, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму *простейших рациональных дробей* вида:

$$\frac{A}{(x-a)^n};\qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l},$$

где k, l – натуральные числа, A, B, C, a, p, q – постоянные, причем $p^2-4q<0$ (квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней).

Интегрирование правильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ($m<n$) производят по следующей схеме:

1) Раскладывают знаменатель на неприводимые множители (линейные и квадратичные)

$$Q_n(x)=(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^l.$$

2) Представляем правильную рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_m(x)}{(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^l}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\ldots$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}.$$

Т.е. каждому множителю $(x-a)^k$ в знаменателе соответствует сумма k дробей вида $\frac{A_i}{(x-a)^i}$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$), а каждому множителю $(x^2+px+q)^l$ – сумма l дробей вида:

$$\frac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j},\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l).$$

3) Находим неопределенные коэффициенты разложения.

Для определения коэффициентов A_i ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$), B_j, C_j ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ l$) правую часть разложения приводят к общему знаменателю и приравнивают числитель полученной дроби к $P_m(x)$. Затем,

а) либо приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x (метод неопределенных коэффициентов);

б) либо придают x частные значения, в первую очередь значения корней знаменателя (метод частных значений);

в) либо комбинируют оба указанных приема.

4) Вычисляем интегралы. В общем случае интеграл от рациональной функции всегда может быть выражен через элементарные функции: степенную, $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$.

Пример 5.11. Найти $\int\frac{x^2+3}{x^3-9x}\mathrm{d}x$.

Решение. Дробь $\frac{x^2+3}{x^3-9x}$ является правильной. Разложим знаменатель дроби на простые множители:

$$x^3-9x=x(x^2-9)=x(x-3)(x+3).$$

Разложение подынтегральной функции на сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{x^2+3}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим

$$x^2+3=A(x-3)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-3).$$

Для определения коэффициентов A, B, C применяем метод частных значений. Будем полагать в последнем равенстве x равным корням знаменателя:

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ x=3 \\ x=-3 \end{array}\right| \begin{array}{l} 3=-9A \\ 12=18B \\ 12=18C \end{array} \quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{3},\quad B=\frac{2}{3},\quad C=\frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$\int\frac{x^2+3}{x^3-9x}\mathrm{d}x=\int\left(-\frac{\frac{1}{3}}{x}+\frac{\frac{2}{3}}{x-3}+\frac{\frac{2}{3}}{x+3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x-3)}{x-3}+$$

$$+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}=-\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{2}{3}\ln|x-3|+\frac{2}{3}\ln|x+3|+C.$$

Пример 5.12. Найти $\int\frac{x^5-x^2-2}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

Решение. Дробь $\frac{x^5-x^2-2}{x^2(x^2+1)}$ является неправильной. Выделим целую часть:

$$\begin{array}{l|l} x^5-x^2-2 & \underline{x^4+x^2} \\ \underline{x^5+x^3} & x \\ -x^3-x^2-2 & \end{array}$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^5-x^2-2}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int\left(x-\frac{x^3+x^2+2}{x^2(x^2+1)}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^3+x^2+2}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x.$$

Вычислим последний интеграл. Разложение на простейшие элементарные дроби будет иметь вид:

$$\frac{x^3+x^2+2}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получаем

$$x^3+x^2+2=Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2.$$

Применим метод неопределенных коэффициентов, т.е. будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 1=A+C, \\ x^2 & 1=B+D, \\ x & 0=A, \\ x^0 & 2=B, \end{array}$$

откуда находим $A=0$, $B=2$, $C=1$, $D=-1$.

Значит,

$$\int\frac{x^5-x^2-2}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-\int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}-\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}+$$

$$+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}-2(-\frac{1}{x})-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}+\mathrm{arctg}\,x=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\mathrm{arctg}\,x+C.$$

§ 6. Интегрирование тригонометрических функций

I. Рассмотрим интегралы вида: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.

1. Если хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное положительное*, то от нечетной степени отделяем один множитель и вносим его под знак дифференциала. Оставшуюся четную степень выражаем через дополнительную функцию с помощью формул $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Пример 5.13. Найти $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \mathrm{d}x$

Решение. $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x \mathrm{d}x =$

$$= \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2 \mathrm{d}(\sin x) = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \mathrm{d}(\sin x) = \left| \sin x = t \right| =$$

$$= \int t^2 (1 - t^2)^2 \mathrm{d}t = \int t^2 (1 - 2t^2 + t^4) \mathrm{d}t = \int (t^2 - 2t^4 + t^6) \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} +$$

$$+ \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

2. Если оба числа m и n *четные неотрицательные*, то применяем формулы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 5.14. Найти $\int \sin^2 x \cos^2 x \mathrm{d}x$

Решение. $\int \sin^2 x \cos^2 x \mathrm{d}x = \int (\sin x \cos x)^2 \mathrm{d}x =$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1 - \cos 4x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(\int \mathrm{d}x - \int \cos 4x \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\int \cos 4x \mathrm{d}4x\right) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

II. Интегралы вида

$$\int \mathrm{tg}^m x \mathrm{d}x, \qquad \int \mathrm{ctg}^m x \mathrm{d}x, \qquad (m = 2, 3, \dots),$$

вычисляются соответственно с помощью подстановок:

$$\mathrm{tg} x = t, \qquad \mathrm{ctg} x = t.$$

Пример 5.15. Найти $\int \mathrm{tg}^4 x \mathrm{d}x$

Решение. $\int \mathrm{tg}^4 x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \mathrm{tg} x = t \\ x = \mathrm{arctg} t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} \end{array} \right| = \int \dfrac{t^4}{1 + t^2} \mathrm{d}t =$

$$= \begin{array}{r|l} t^4 & t^2 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{t^4 + t^2} & t^2 - 1 \\ -t^2 & \\ \underline{-t^2 - 1} & \\ 1 & \end{array} = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1}\right) \mathrm{d}t = \int t^2 \mathrm{d}t - \int \mathrm{d}t + \int \frac{1}{t^2 + 1} \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + \mathrm{arctg} t + C = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg} x + x + C.$$

III. При вычислении интегралов

$$\int \sin ax \sin bx \mathrm{d}x, \ \int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x, \ \int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x$$

применяют формулы

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right],$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right],$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right].$$

IV. В общем случае интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, где R – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональной функции новой переменной t с помощью *универсальной подстановки* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, при этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Пример 5.16. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3\sin x + 2\cos x}$.

Решение. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3\sin x+2\cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(x/2) = t \\ \sin x = 2t/(1+t^2) \\ \cos x = (1-t^2)/(1+t^2) \\ \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t/(1+t^2) \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{2+3\dfrac{2t}{1+t^2}+2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{3t+2} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(3t+2)}{3t+2} = \frac{1}{3}\ln\left|3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\right| + C.$$

§ 7. Интегрирование иррациональных функций

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{(ax+b)^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_s]{(ax+b)^{m_s}}\right)\mathrm{d}x,$$

где R – рациональная функция, $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots, m_s, n_s$ – целые числа, сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки

$$ax + b = t^k,$$

где k – наименьшее общее кратное показателей корней $n_1\ n_2, \ldots, n_s$, т. е. $k = НОК(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Пример 5.17. Найти $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt[4]{2x+3}-1\right)\sqrt{2x+3}}$.

Решение. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt[4]{2x+3}-1\right)\sqrt{2x+3}} = \left| \begin{array}{l} НОК(2,4) = 4 \\ 2x+3 = t^4 \\ x = \dfrac{t^4-3}{2} \\ \mathrm{d}x = 2t^3\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2t^3\mathrm{d}t}{(t-1)t^2} =$$

$$2\int \frac{t\mathrm{d}t}{t-1} = 2\int \frac{(t-1)+1}{t-1}\mathrm{d}t = 2\left(\int \mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}(t-1)}{t-1}\right) =$$

$$= 2\left(t + \ln|t-1|\right) + C = 2\left(\sqrt[4]{2x+3} + \ln\left|\sqrt[4]{2x-3}-1\right|\right) + C.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

2. Найти интегралы

1) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + \sqrt{x+1}}{x}dx$; **2)** $\int \cos(5x-2)dx$;

3) $\displaystyle\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$; **4)** $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+4}$;

5) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+4}$; **6)** $\displaystyle\int \frac{\ln x\, dx}{x}$;

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+8}$; **8)** $\int (2x+3)\cos x\mathrm{d}x$;

9) $\int (2x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$; **10)** $\int \cos^4 x \sin^3 x\mathrm{d}x$;

11) $\int \sin^2 3xdx$; **12)** $\displaystyle\int \cos^4\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;

13) $\int \sin 3x \cos x\mathrm{d}x$; **14)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x+1}}$;

15) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3+2\cos x}$; **16)** $\displaystyle\int \frac{4x-9}{x(x-3)^2}\mathrm{d}x$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №5

1^0. Если $F(x)=x^5$ является первообразной некоторой функции $f(x)$, то какая из предложенных функций также является первообразной $f(x)$?

а) $\Phi(x)=x^6$; **б)** $\Phi(x)=x^5-10$; **в)** $\Phi(x)=x^4$ **г)** $\Phi(x)=\frac{x^5}{5}$.

2^0. Записать результат интегрирования $\int\frac{dx}{x^2+25}$.

3^0. Интеграл $\int\cos 4x dx$ равен

а) $\sin 4x+C$; **б)** $\frac{1}{4}\sin 4x+C$; **в)** $-\frac{1}{4}\sin 4x+C$; **г)** $\sin 4x$.

4. Дробь $\frac{x^2}{x-8}$ называется

а) правильной; **б)** неправильной;
в) приведенной; **г)** неприведенной.

5. Записать замену для нахождения интеграла $\int\frac{3dx}{5+\sqrt{x+6}}$.

6. С помощью какой замены можно найти интеграл $\frac{1}{\cos x+4}$?

а) $x=tgt$; **б)** $t=tgx$; **в)** $t=tg\frac{x}{2}$; **г)** $t=tg\frac{x}{4}$.

7*. Для нахождения интеграла $\int(x+10)\sin 3x dx$ применяется формула интегрирования по частям $\int u dv=uv-\int v du$, где

а) $u=x+10,\ dv=\sin 3xdx$; **б)** $u=\sin 3xdx,\ dv=x+10$;
в) $u=(x+10)\sin 3x,\ dv=dx$; **г)** $u=(x+10)dx,\ dv=\sin 3x$.

8*. Замена $x=t^6$ применяется для нахождения интеграла

а) $\int\frac{x^5}{x+6}dx$; **б)** $\int\cos 5xdx$; **в)** $\int\frac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt[12]{x}+x}dx$; **г)** $\int\frac{5}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$.

Модуль 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция $f(x)$ – определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. На каждом из полученных элементарных отрезков длиной $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ произвольным образом выберем точку $\xi_i (i=1,2,\ldots,n)$ и составим сумму

$$S_n=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Эта сумма называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

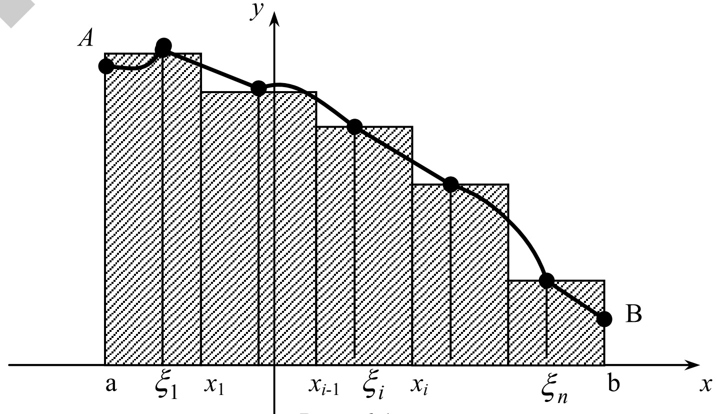


Рис. 6.1.

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при стремлении к нулю наибольшей из длин Δx_i, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_{i-1},x_i]$, ни от выбора точек ξ_i, то он называется ***определенным интегралом от функции*** $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b], то она интегрируема на [a;b], т. е. предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка [a;b] на частичные отрезки Δx_i и выбора на них точек ξ_i.

Если $y = f(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$, то геометрически определенный интеграл выражает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$, $x = b$. Эта фигура называется *криволинейной трапецией.* В общем случае, когда функция $y = f(x)$ на отрезке [a;b] принимает значения разных знаков, определенный интеграл выражает разность площадей криволинейных трапеций, расположенных над осью Ox и под ней, так как площадям криволинейных трапеций, расположенных под осью Ox, присваивается знак «-». Например, для функции, график которой изображен на рисунке, имеем

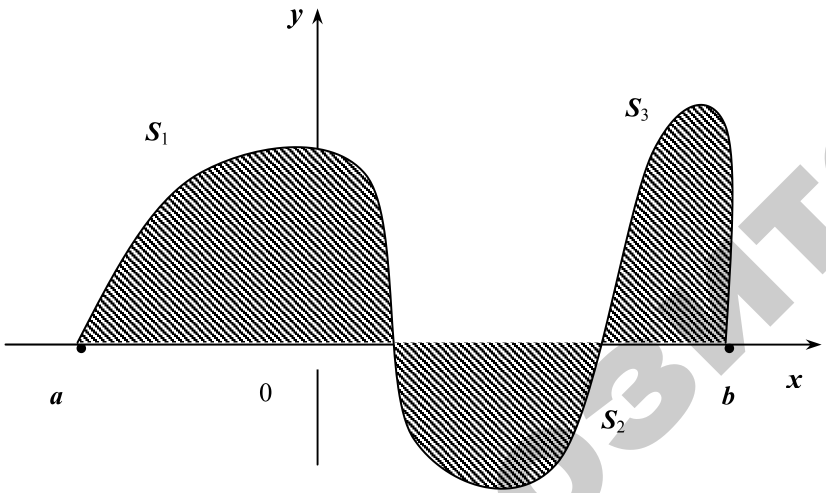


Рис. 6.2.

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$$

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

3. $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (c = const).

4. $\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$.

5. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ для любого действительного c.

6. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке [a,b], где a<b, и $f(x) \leq \varphi(x)$ для всех $x \in$[a,b], то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], тогда найдется хотя бы одна точка $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

§ 2. Методы вычисления определенного интеграла

Если $F(x)$ – одна из первообразных непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, то справедлива следующая ***формула Ньютона-Лейбница:***

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t,$$

где $x=\phi(t)$ имеет непрерывную производную, $a=\phi(\alpha)$, $b=\phi(\beta)$.

Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняется по формуле

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

Пример 6.1. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$.

Решение. Так как $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$,

$$\text{то } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Пример 6.2. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x$.

Решение. Преобразуем выражение под знаком дифференциала

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 (3x+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\mathrm{d}(3x+1) = \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) =$$

$$= \frac{2}{9}(2^3 - 1) = \frac{14}{9}.$$

Пример 6.3. Вычислить $\int_1^e \ln x dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, положив

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \qquad dv = dx \Rightarrow v = x.$$

Тогда

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = e\ln e - \ln 1 - x\Big|_1^e = e - 0 - e + 1 = 1.$$

§ 3. Приложения определенного интеграла к задачам геометрии и механики

1. Площадь плоской фигуры

1) Площадь криволинейной трапеции (см. рис. 6.3), ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, слева и справа соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx \tag{6.1}$$

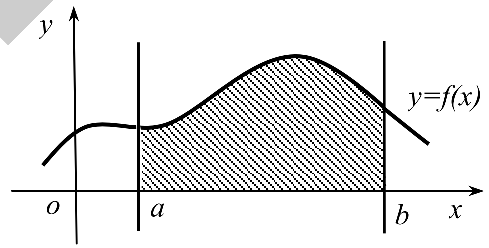


Рис. 6. 3

2) Площадь фигуры (см. рис. 6.4), ограниченной сверху и снизу соответственно кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, слева и справа прямыми $x= a$, $x =b$, определяется формулой

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x \tag{6.2}$$

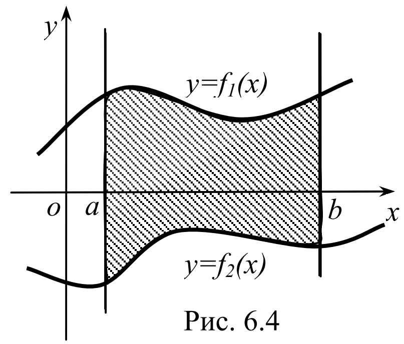


Рис. 6.4

3) Площадь криволинейной трапеции, в случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le x \le b$, $a = x(t_1), b = x(t_2)$, будет вычисляться по формуле

$$S = \int_{t_2}^{t_1} y(t)x'(t)\mathrm{d}t \qquad (6.3)$$

4) Площадь криволинейного сектора (см. рис. 6.5), ограниченного непрерывной кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \qquad (6.4)$$

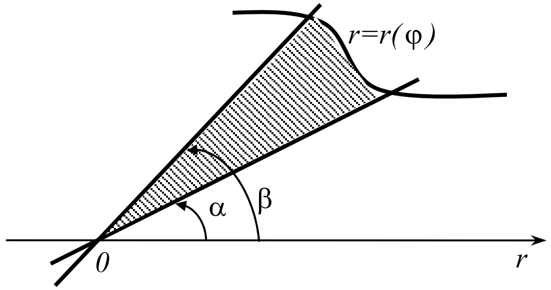


Рис. 6.5

Пример 6.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x - y + 2 = 0$.

Решение. Данная фигура ограничена сверху прямой $y = x + 2$, а снизу – параболой $y = x^2$ (см. рис. 6.6).

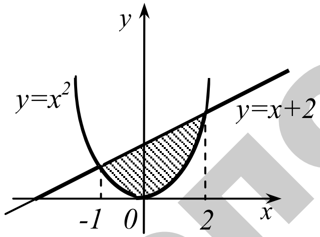


Рис. 6.6

Точки пересечения этих кривых найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой (6.2)

$$S = \int_{-1}^{2}((x+2) - x^2)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{2}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} + 4 + 2 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{9}{2}.$$

Пример 6.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Решение. Так как эллипс (см. рис. 6.7) симметричен относительно координатных осей, достаточно найти площадь $\frac{1}{4}$ части фигуры, лежащей в первой четверти. Для вычисления площади воспользуемся формулой (6.3).

Найдем пределы интегрирования по t:

если $x = 0$, то $\cos t = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{2}$ – нижний предел,

если $x = a$, то $\cos t = 1 \;\Rightarrow\; t = 0$ – верхний предел.

Значит,

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(a\cos t)'\mathrm{d}t = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\mathrm{d}t = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{ab}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\pi/2}^{0} = -\frac{ab}{2}(-\frac{\pi}{2} + 0) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Отсюда находим $S = \pi ab$.

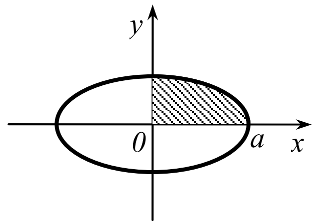


Рис. 6.7

Пример 6.6. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $r = a\cos\varphi$ и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. В полярной системе координат уравнение $r = a\cos\varphi$ задает окружность радиусом $\dfrac{a}{2}$ со смещенным центром (рис. 6.8).

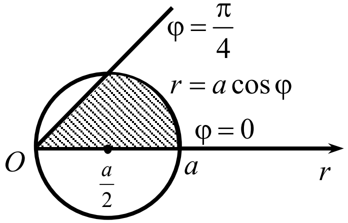


Рис. 6.8

Криволинейный сектор, площадь которого мы вычисляем, ограничен кривой $r = a\cos\varphi$ и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Поэтому

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a\cos\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2(\pi+2)}{8}.$$

2. Длина дуги кривой

1) Длина дуги кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (6.5)$$

2) Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,\mathrm{d}t\,. \qquad (6.6)$$

3) Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,\mathrm{d}\varphi\,. \qquad (6.7)$$

Пример 6.7. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки A (4, 8) (см. рис. 6.9).

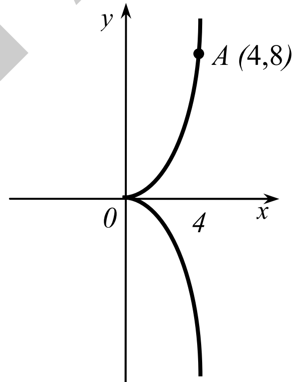


Рис. 6.9

Решение. Имеем $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\int_0^4 \sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)}\,\mathrm{d}\left(1+\frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Пример 6.8. Найти длину кардиоиды (см. рис. 6.10) $r = a(1+\cos\varphi)$.

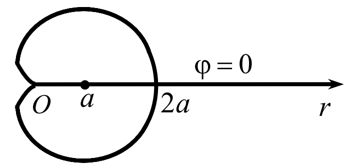


Рис. 6.10

Решение. Имеем

$$\frac{1}{2}l=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi=$$

$$=a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi=a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=$$

$$=a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi=2a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi=2a2\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\frac{\varphi}{2}=4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=4a,$$

откуда $l=8a$.

3. Объем и площадь поверхности тел вращения

1) Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, $a\le x\le b$.

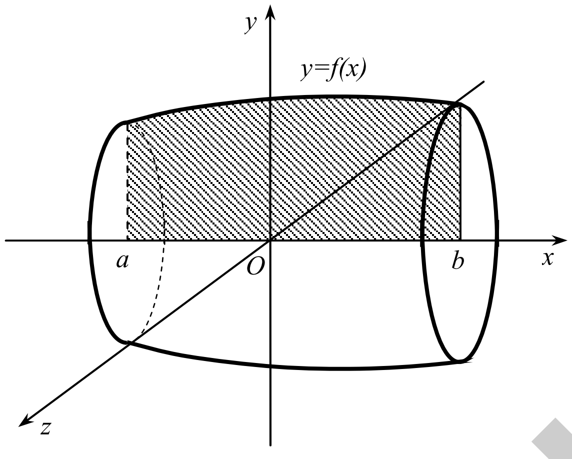


Рис. 6.11

(см. рис. 6.11), вычисляется по формуле

$$V_x=\pi\int\limits_a^b y^2\mathrm{d}x\ . \tag{6.8}$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x=\varphi(y)$, $c\le y\le d$, вращается вокруг оси Oy, то

$$V_y=\pi\int\limits_c^d x^2\mathrm{d}y. \tag{6.9}$$

2) Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a\le x\le b$, вычисляется по формуле

$$Q_x=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}\mathrm{d}x\ . \tag{6.10}$$

Если дуга $x = \varphi(y)$, $c\le y\le d$, вращается вокруг оси Oy, то

$$Q_y=2\pi\int\limits_a^b x\sqrt{1+(x'_y)^2}\mathrm{d}y\ . \tag{6.11}$$

Пример 6.9. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $x=y^2$ (см. рис. 6.12).

Решение. Найдем точки пересечения кривых из системы

$$\begin{cases} y=x^2\\ x=y^2\end{cases}\Rightarrow\quad x=x^4\quad\Leftrightarrow\quad x-x^4=0,\quad x(1-x^3)=0,\quad x_1=0,\quad x_2=1.$$

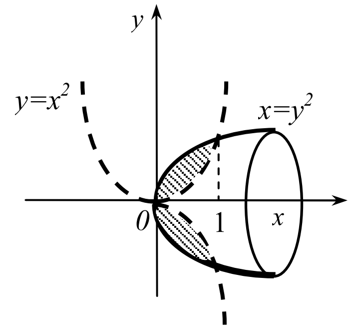


Рис. 6.12

Искомый объем есть разность двух объемов: объема V_1, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=\sqrt{x}$ $(0\le x\le 1)$ и объема V_2, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ $(0\le x\le 1)$.

Используя формулу (6.8), получаем

$$V_x=V_1-V_2=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2dx-\pi\int\limits_0^1\left(x^2\right)^2dx=\pi\int\limits_0^1 xdx-\pi\int\limits_0^1 x^4dx=$$

$$= \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\pi.$$

4. Координаты центра тяжести плоской пластинки

Рассмотрим плоскую пластинку, имеющую форму криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Будем предполагать, что пластинка является однородной с плотностью ρ = const.

Масса такой пластинки вычисляется по формуле

$$m = \rho \int_a^b f(x)\, dx = \rho\, S,$$

где S – площадь пластинки.

Координаты центра тяжести C (x_c, y_c) однородной пластинки могут быть вычислены по формулам

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b xy\, dx, \quad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx,$$

где S – площадь пластинки.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

1. Вычислить интегралы

а) $\int_0^1 \left(3x^2 + 4x - 1\right)dx$; **б)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$, $y = 4\ (x \ge 0)$.

3. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$ от $x = -1$ до $x = 4$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = 2 - x^2$ и прямыми $y = x$ и $x = 0$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №6

1^0. Если $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$, то справедливо равенство

а) $\int_c^d f(x)dx = F(a) - F(b)$; **б)** $\int_a^b f(x)dx = F(x)\cdot b - F(x)\cdot a$;

в) $\int_a^b f(x)dx = F(a) + F(b) + C$; **г)** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

2^0.Значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, если $f(x) \le 0$ равно:

а) длине дуги $y = f(x),\ a \le x \le b$;

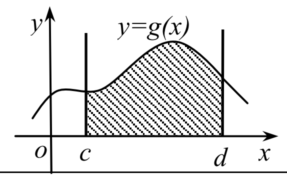
б) длине отрезка $[a,b]$.

в) площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0$;

г) площади криволинейной трапеции, взятой со знаком минус.

3^0. Вычислить $\int_1^1 \left(x^5 + \cos 4x - 4\right)dx$.

4. На рисунке изображена криволинейная трапеция. Объем тела вращения вокруг оси Ox можно найти по формуле



а) $\int_c^d g^2(x)dx$ **;** **б)** $\pi\int_d^c g^2(x)dx$ **;**

в) $\pi\int_c^d g^2(x)dx$ **;** **г)** $\int_d^c g(x)dx$ **.**

5. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то интеграл $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,\mathrm{d}t$ позволяет найти:

а) площадь плоской фигуры; **б)** объем тела вращения;

в) длину дуги кривой; **г)** площадь поверхности вращения.

6. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2x+5}$ равен:

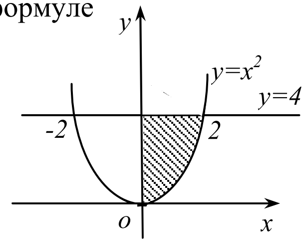
а) $\ln|2x+5|+C$; **б)** $\ln|2x+5|$;

в) $\frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{2}\ln 5$; **г)** $\frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 7$.

---

7. Вычислить $\int\limits_{14}^{15} dx$.

8*. Площадь фигуры, изображенной на рисунке находится по формуле



а) $S=\int\limits_0^2 x^2 dx$; **б)** $S=\int\limits_0^4 y dy$;

в) $S=\int\limits_0^2 (4-x^2)dx$; **г)** $S=\int\limits_0^4 x^2 dx$.

9*. Длина линии $y=\sqrt{x}$ между точками $O(0;0)$ и $A(1;1)$ вычисляется с помощью интеграла

а) $l=\int\limits_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$; **б)** $l=\int\limits_0^1 \sqrt{1+\frac{3}{2}x^2}\,dx$;

в) $l=\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$; **г)** $l=\int\limits_1^0 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$.

10*. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид

а) $\int\limits_a^b udv = uv - \int\limits_a^b vdu$; **б)** $\int\limits_a^b udv = uv + \int\limits_a^b vdu$;

в) $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$; **г)** $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b + \int\limits_a^b vdu$.

Модуль 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Определение функции нескольких переменных. Предел и непрерывность.

Пусть D – некоторое множество точек $M(x,y)$ плоскости (двумерного арифметического пространства R^2).

Определение. Если каждой точке $M(x,y)$ из области D по некоторому закону f ставится в соответствие вполне определенное действительное число z, то говорят, что z есть *функция двух переменных* x и y и пишут

$z=f(x,y)$ или $z=f(M)$, где $M(x,y)$ – точка плоскости.

Множество D называется *областью определения* функции.

Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в трехмерном пространстве. Например, графиком функции $z=x^2+y^2$ является эллиптический параболоид (см. справочник).

Аналогично дается определение функции нескольких переменных для произвольного n.

Всякая упорядоченная совокупность действительных чисел $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется точкой n–мерного арифметического пространства R^n. Пусть D – некоторое множество точек пространства R^n.

Определение. Если каждой точке $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ из области $D\subset R^n$ по некотрому закону f ставиться в сответствие вполне определенное число u, то говорят, что u есть *функция n переменных* и пишут

$u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ или $u=f(M)$, где $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – точка n–мерного арифметического пространства.

Например, объем V прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его ребер x,y,z, т. е. $V=xyz$. Следовательно, V есть функция трех переменных x,y,z.

Функцию трех и большего числа переменных нельзя изобразить графически в трехмерном пространстве.

Определение. Число A называется *пределом функции* $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ и $0 < |y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$. При этом пишут

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Определение. Функция $z = f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если функция $f(x,y)$ определена в этой точке и существует

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Аналогичные определения имеют место и для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ произвольного числа n переменных.

§ 2. Частные производные функции нескольких переменных

Пусть $z = f(x,y)$ – функция двух переменных. Дадим независимой переменной x приращение Δx, оставляя при этом переменную y неизменной. Тогда z получит приращение

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x,y),$$

которое называется *частным приращением* z *по* x.

Аналогично, если независимой переменной y дадим приращение Δy, оставляя при этом неизменной переменную x, то z получит приращение

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x,y),$$

называемое *частным приращением* z *по* y.

Определение. *Частной производной по* x *от функции* z называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Эта производная обозначается одним из символов

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \; z'_x, \; \frac{\partial f}{\partial x}, \; f'_x(x,y).$$

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется *частная производная от функции* $z = f(x,y)$ *по переменной* y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Она обозначается одним из символов

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \; z'_y, \; \frac{\partial f}{\partial y}, \; f'_y(x,y).$$

В общем случае *частной производной первого порядка функции* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *по переменной* x_k называется предел

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}.$$

Так как при вычислении частных производных все переменные, кроме одной, считают постоянными, то для частных производных сохраняются все правила и формулы дифференцирования функции одной переменной.

Пример 7.1. Найти частные производные функции $z = x^2 y + \dfrac{x}{y}$.

Решение. Полагая $y = \mathrm{const}$, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y}.$$

Полагая $x = \mathrm{const}$, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot 1 + x(-\frac{1}{y^2}) = x^2 - \frac{x}{y^2}.$$

Пример 7.2. Найти значения частных производных функции $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$ в точке $M(1, -1, 0)$.

Решение. Полагая $y = \mathrm{const}, z = \mathrm{const}$, (в дальнейшем условимся писать c вместо const) находим

$$\frac{\partial u}{\partial x}\underset{y,z=c}{=}\frac{1}{x^2+y^2}(2x+0)+1\cdot yz=\frac{2x}{x^2+y^2}+yz\Big|_M=\frac{2}{1+1}+0=1\,.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial u}{\partial y}\underset{x,z=c}{=}\frac{1}{x^2+y^2}(0+2y)+1\cdot xz=\frac{2y}{x^2+y^2}+xz\Big|_M=\frac{-2}{1+1}+0=-1\,.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\underset{x,y=c}{=}0+1\cdot xy=xy\big|_M=-1\,.$$

Предположим, что функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)\,.$$

Эти производные в свою очередь являются функциями независимых переменных x и y. Будем называть $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ *частными производными 1-го порядка*.

Частными производными 2-го порядка называются частные производные от частных производных 1-го порядка.

Для функции $z=f(x,y)$ двух переменных можно найти четыре частные производные 2-го порядка, которые обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);\end{aligned}\right\}\ \text{смешанные частные производные}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

В общем случае смешанные частные производные могут не совпадать, однако для них справедлива теорема:

Теорема. Если смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в некоторой точке $M(x,y)$, то они равны, т. е.

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)\,.$$

Аналогично, частными производными $n-$го порядка называются частные производные от частных производных $(n-1)-$го порядка.

Их обозначают $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$, $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$ и т. д.

Частные производные любого порядка, взятые по различным переменным, называются смешанными.

Пример 7.3. Найти частные производные 2-го порядка функции $z=x^3y^2+\sin(xy+1)$.

Решение. Последовательно находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}\underset{y=c}{=}3x^2y^2+y\cos(xy+1);\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\underset{x=c}{=}2x^3y+x\cos(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(3x^2y^2+y\cos(xy+1)\Big)\underset{y=c}{=}6xy^2-y^2\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(3x^2y^2+y\cos(xy+1)\Big)\underset{x=c}{=}6x^2y+\cos(xy+1)-yx\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(2x^3y+x\cos(xy+1)\Big)\underset{y=c}{=}6x^2y+\cos(xy+1)-yx\sin(xy+1)\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(2x^3y+x\cos(xy+1)\Big)\underset{x=c}{=}2x^3-x^2\sin(xy+1)\,.$$

§ 3. Дифференциал функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию $z=f(x,y)$. Дадим аргументу x приращение Δx, а аргументу y приращение Δy. Тогда z получит приращение $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$, которое называется *полным приращением функции* z.

Предположим, что $f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ имеет непрерывные частные производные.

Определение. *Дифференциалом 1-го порядка* функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz этой функции, линейная относительно Δx и Δy, обозначается символом $\mathrm{d}z$ или $\mathrm{d}f$ и вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y . \qquad (7.1)$$

Так как дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $\mathrm{d}x = \Delta x$, $\mathrm{d}y = \Delta y$, то формулу (7.1) можно записать в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy . \qquad (7.2)$$

Дифференциалом 2-го порядка функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от ее дифференциала 1-го порядка и обозначается

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z) .$$

Если все частные производные 2-го порядка функции $z = f(x, y)$ непрерывны, то имеет место формула:

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 . \qquad (7.3)$$

Аналогично определяется дифференциал n–го порядка:

$$\mathrm{d}^n z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} z) .$$

Пример 7.4. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = x^2 y + \dfrac{x}{y}$.

Решение. Найдем частные производные 1-го и 2-го порядков:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \dfrac{1}{y}$, $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \dfrac{x}{y^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \frac{1}{y}\right)_{y=c} = 2y + 0 = 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + \frac{1}{y}\right)_{x=c} = 2x - \frac{1}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - \frac{x}{y^2}\right)_{y=c} = 0 - x(-2y^{-3}) = \frac{2x}{y^3} .$$

Следовательно, дифференциалы 1-го и 2-го порядков запишутся в виде:

$$\mathrm{d}z = (2xy + \frac{1}{y})dx + (x^2 - \frac{x}{y^2})dy ,$$

$$\mathrm{d}^2 z = 2y\mathrm{d}x^2 + 2(2x - \frac{1}{y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{2x}{y^3}\mathrm{d}y^2 .$$

§ 4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в ее точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности в точке M_0 называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной плоскости, проведенной в данной точке.

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0 .$$

Уравнения нормали, проведенной к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, запишутся следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)} .$$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) ,$$

а уравнения нормали запишутся так:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} .$$

Пример 7.5. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3xy+xz+3yz+1=0$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, если $x_0=2, \quad y_0=-1$.

Решение. Подставляя x_0 и y_0 в уравнение поверхности, находим значение z_0:

$$4+2(-1)^2+3\cdot 2(-1)+2z_0+3(-1)z_0+1=0,$$

откуда находим $z_0=1$. Следовательно, $M_0(2,-1,1)$ – точка касания.

По условию задачи поверхность задана неявно. Обозначим $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3xy+xz+3yz+1$ и найдем частные производные в точке $M_0(2,-1,1)$:

$$F'_x=2x+3y+z, \qquad F'_x(M_0)=2\cdot 2+3(-1)+1=2,$$

$$F'_y=4y+3x+3z, \qquad F'_y(M_0)=4\cdot(-1)+3\cdot 2+3\cdot 1=5,$$

$$F'_z=x+3y, \qquad F'_z(M_0)=2+3\cdot(-1)=-1.$$

Подставляя найденные значения частных производных в уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

получим искомое уравнение касательной плоскости:

$$2(x-2)+5(y+1)-1(z-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+5y-z+2=0,$$

а уравнения нормали имеет вид:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{-1}.$$

§ 5. Экстремум функции двух переменных

Определение. Функция $z=f(x,y)$ имеет *максимум* в точке $M_0(x_0,y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, что для любых точек $M(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0,y_0)\ge f(x,y)$.

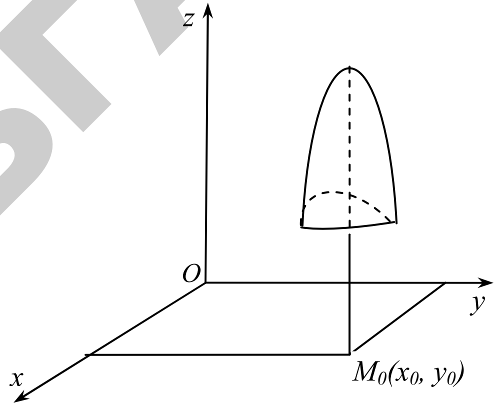


Рис.7.1.

Определение. Функция $z=f(x,y)$ имеет *минимум* в точке $M_0(x_0,y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, что для любых точек $M(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0,y_0)\le f(x,y)$.

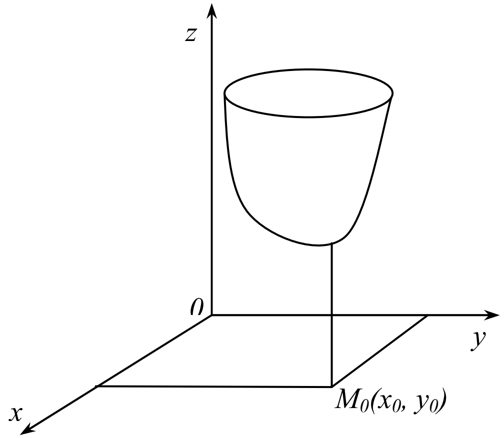


Рис.7.2.

Точки максимума и минимума называют *точками экстремума*, а значения функции в этих точках называются *экстремальными*.

Теорема 1 ***(необходимые условия экстремума).*** *Если дифференцируемая функция* $z = f(x, y)$ *имеет экстремум в точке* $M_0(x_0, y_0)$, *то ее частные производные в этой точке равны нулю,*

$$\text{т. е. } \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0} = 0.$$

Функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум и в точках, где функция непрерывна, но частные производные не существуют.

Точки, в которых $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются *стационарными* точками функции $z = f(x, y)$.

Теорема 2 ***(достаточные условия экстремума).*** *Пусть* $M_0(x_0, y_0)$ *является стационарной точкой функции* $z = f(x, y)$ *и в ее окрестности существуют непрерывные частные производные 2-го порядка.*

Обозначим $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{M_0} = A$, $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]_{M_0} = B$, $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{M_0} = C$ *и составим определитель* $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. *Тогда:*

1) *если* $\Delta < 0$, *то в точке* M_0 *нет экстремума;*

2) *если* $\Delta > 0$, *то в точке* M_0 *есть экстремум, причем максимум при* $A < 0$ *и минимум при* $A > 0$;

3) *если* $\Delta = 0$, *то требуется дополнительное исследование.*

Пример 7.6. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Находим частные производные 1-го порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Стационарные точки найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1.$$

Получили две стационарные точки: $M_1(0; 0)$ и $M_2(1; 1)$.

Находим частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Исследуем каждую стационарную точку.

1) В точке $M_1(0; 0)$ имеем: $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$.

Тогда $\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$.

Так как $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума.

2) В точке $M_2(1; 1)$ имеем: $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$.

В этом случае $\Delta = 36 - 9 = 27 > 0$.

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в этой точке функция имеет минимум

$$z_{\min} = z\,(1; 1) = 1 + 1 - 3 = -1.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

1. Найти частные производные

а) $z = x^2 \sin y + xy^2 + x^3 + 3$; **б)** $u = 2xy^2 - x^2 yz + yz^2 4xy$.

2. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = x \ln y + x^2 y + y^2$.

3. Составить уравнения касательной и нормали к поверхности $y^2 z - 2x^2 y + 2xz + x + 1 = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

4. Найти экстремум заданной функции $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №7

1⁰ Графику какой функции принадлежит точка $M(-1, 2, 0)$?

а) $4xy - 2z + x^2 = 0$; **б)** $z + x - 3y = 5$;

в) $z = x^2 - 2yx - 5$; **г)** $z = x^2 - 3yx - 7$.

2⁰ Для функции $z = 4xy + 5y^2 + 1$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$.

3⁰. Если для функции $z = f(x, y)$ в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ выполняются условия $f'_x = f'_y = 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является:

а) точкой экстремума; **б)** точкой перегиба;
в) стационарной точкой; **г)** точкой разрыва.

4. Полный дифференциал функции $z = xy + y^2x + 1$ равен:

а) $dz = (y + 2y)dx + (x + xy)dy$; **б)** $dz = (y + y^2 + 1)dx + (x + 2xy + 1)dy$;

в) $dz = (y + y^2)dx \times (x + 2xy)dy$; **г)** $dz = (y + y^2)dx + (x + 2xy)dy$.

5. Найти стационарную точку функции $z = x^2 + y^2 - 9$.
а) $A(1,1)$; **б)** $A(1,-9)$; **в)** $A(-1,-9)$; **г)** $A(0,0)$.

6. Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $z = f(x, y)$ и в этой точке $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ является точкой

а) максимума; **б)** минимума; **в)** перегиба; **г)** выпуклости.

7*. Вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $O(1,0)$ для функции $z = x^2 \sin y + x^4 + y$.
а)0; **б)**1; **в)**14; **г)** 2.

8*. Уравнение касательной плоскости в точке M(1,2) к поверхности $z = f(x, y)$ имеет вид:

а) $z - f(1,2) = f'(1,2)(x-1) + f'(1,2)(y-2)$;

б) $z - f(1,2) = f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2)$;

в) $z - f(1,2) = f(1,2)(x-1) + f(1,2)(y-2)$;

г) $z = f'_x(1,2)(x-1) - f'_y(1,2)(y-2)$.

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ №2

1. Если $z = f(x, y)$ - непрерывная функция, то предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ называется

а) частным дифференциалом; **б)** производной функции $z = f(x, y)$;

в) частной производной функции по переменной x;
г) полным дифференциалом функции.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = xy + x^2 + y^2$.

3. Составить полный дифференциал функции $z = 5xy + e^{xy}$.

а) $\frac{\partial z}{\partial y} = 5x + e^{xy}x$; **б)** $dz = (5y + e^{xy}y)dx + (5x + e^{xy}x)dy$;

в) $\frac{\partial z}{\partial x} = 5y + e^{xy}y$; **г)** $dz = (5y + e^{xy}y)dy + (5x + e^{xy}x)dx$.

4. Записать уравнение нормали к поверхности $z = xy + x^2 - y^2$ в точке $A(1;1;1)$.

5. Найти стационарные точки функции $z = x^2 + 2x + y^2 - 2y$.

6. Какая функция является первообразной функции $f(x) = x^4 + 5$?

а) $F(x) = \frac{x^5}{5}$; **б)** $F(x) = \frac{x^5}{5} + 5x$;

в) $F(x) = 5x^5 + 5x$; **г)** $F(x) = x^5 + 5x$.

7. Найти $\left(\int (\cos^6 x)dx\right)' =$

8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$.

а) $\frac{1}{2} arctg \frac{x}{2}$+C; **б)** $\frac{1}{4} arctg \frac{x}{4}$+C; **в)** $\frac{1}{2} arctg \frac{x}{4}$+C; **г)** $\frac{1}{x} arctg \frac{2}{x}$+C.

9. Интеграл $\int (2x+1)e^{3x}dx$ можно найти с помощью:

а) замены $2x + 1 = t$; **б)** замены $t = e^{3x}$;
в) формулы интегрирования по частям, где $u = 2x + 1$;

г) формулы интегрирования по частям, где $u = e^{3x}$.

10. Найти интеграл $\int \sin 3x dx$.

11. Интеграл $\int \sin^4 x dx$ можно найти с помощью:

а) подстановки $\sin x = t$; **б)** универсальной подстановки $tg\frac{x}{2} = t$;

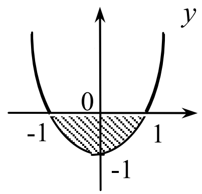
в) формулы $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$; **г)** формулы $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

12. Вычислить $\int_0^1 \left(4x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\right)dx$.

13. Интеграл $\int_2^3 \frac{dx}{x+5}$ равен:

а) $\ln 8 - \ln 7$; **б)** $\ln 7 - \ln 8$; **в)** 1; **г)** -1.

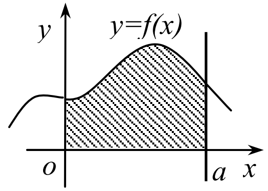
14. Площадь фигуры, изображенной на рис., находится по формуле



а) $\int_{-1}^{1}(x^2 - 1)dx$; **б)** $\int_{-1}^{1}(x^2 + 1)dx$;

в) $\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx$; **г)** $\int_{-1}^{1}x^2 dx$.

15. Объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, изображенной на рис., вокруг оси Ox можно найти с помощью интеграла



а) $\int_0^a f(x)dx$; **б)** $\pi\int_0^a f^2(x)dx$;

в) $\int_0^a f^2(x)dx$; **г)** $\frac{1}{2}\int_0^a f^2(x)dx$.

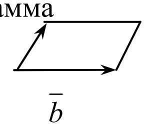
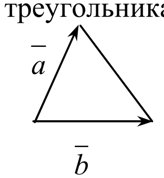
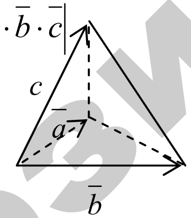
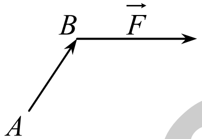
16. Если дуга кривой L задана уравнением $y = \ln x$, $0 \le x \le e$, то ее длину можно найти по формуле

а) $\int_1^e \sqrt{1+\ln^2 x}dx$; **б)** $\int_1^e \sqrt{1+\ln x}dx$; **в)** $\int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$; **г)** $\int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{x}}dx$.

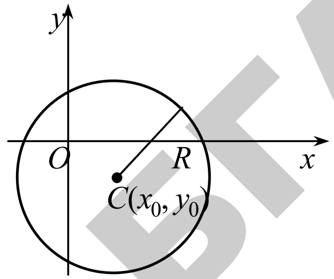
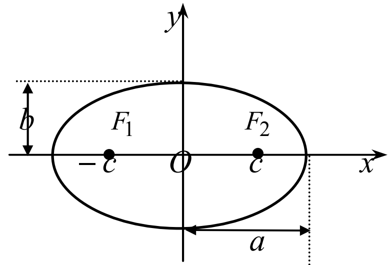
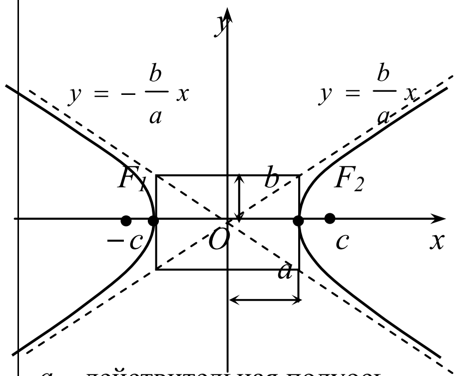
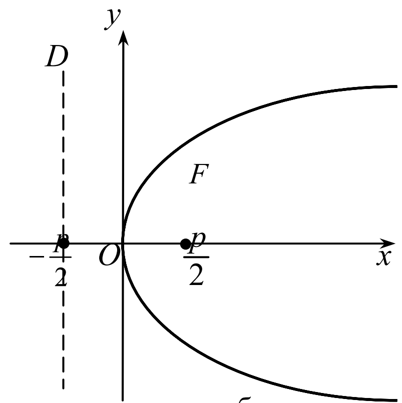
КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Скалярное произведение		
1.	Определение	Число $\bar{a}\cdot\bar{b} = \lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$
2.	Основное геометрическое свойство	Признак ортогональности векторов $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a}\perp\bar{b}$
3.	Формула для вычисления через координаты сомножителей, где $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$	$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
4.	Приложение к задачам геометрии	Угол между векторами $\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert}$ Проекция вектора на вектор $пр_{\bar{b}}\vec{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{b}\rvert}$
5.	Приложения к задачам механики	Работа силы $A = \vec{F}\cdot\vec{s}$

Векторное произведение	*Смешанное произведение*
Вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ 1) $\lvert\bar{c}\rvert = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert \sin\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$, 2) $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$, 3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая тройка	Число $\overline{abc} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$
Признак коллинеарности векторов $\bar{a} \times \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$	Признак компланарности векторов $\overline{abc} = 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - компланарны
$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$	$\overline{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
Площадь параллелограмма $S = \lvert\bar{a} \times \bar{b}\rvert$  Площадь треугольника $S_\Delta = \frac{1}{2}\lvert\bar{a} \times \bar{b}\rvert$ 	Объем параллелепипеда $V = \lvert\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\rvert$ Объем пирамиды $V = \frac{1}{6}\lvert\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\rvert$ 
Момент силы $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F}$ 	

Кривые второго порядка

Окружность	**Эллипс**
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  R - радиус окружности, $C(x_0, y_0)$ - центр окружности. Рис. 2.10	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  a - большая полуось, b - малая полуось, $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ - фокусы, $c^2 = a^2 - b^2$. Рис. 2.11
Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  a - действительная полуось, b - мнимая полуось, $c^2 = a^2 + b^2$, $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ - фокусы, $y = \pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты Рис. 2.12	**Парабола** $y^2 = 2px\ (p > 0)$  p – параметр параболы, $D: x = -\frac{p}{2}$ - директриса, $F(\frac{p}{2}, 0)$ - фокус. Рис. 2.13

Поверхности второго порядка

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

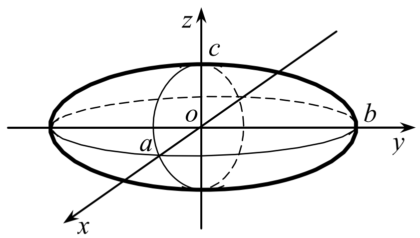


Рис. 2.17

Однополосный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

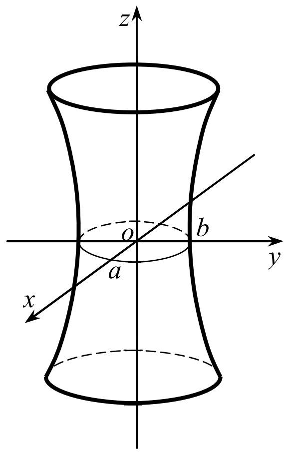


Рис. 2.18

Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

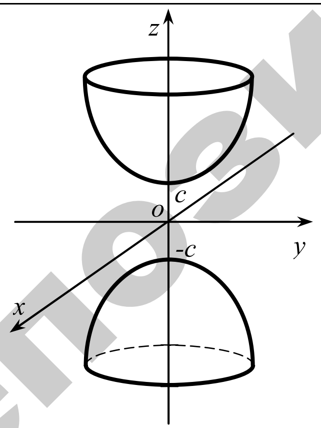


Рис. 2.19

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

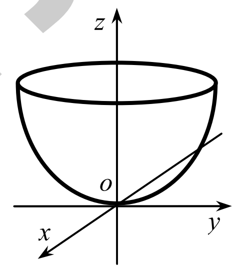


Рис. 2.20

Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

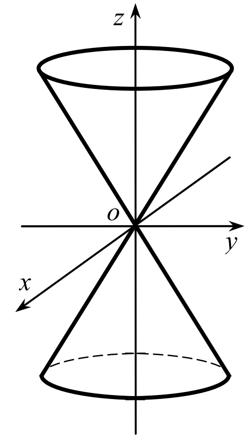


Рис. 2.21

Гиперболический параболоид

(седло)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

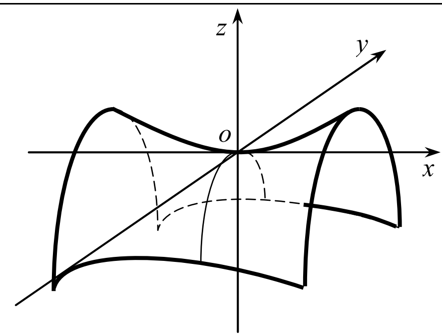


Рис. 2.22

Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

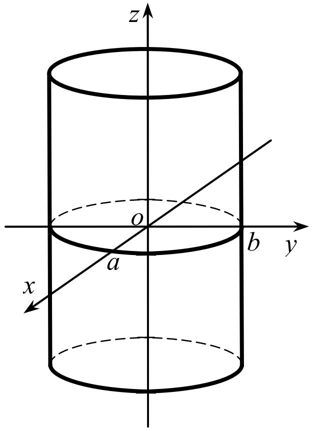


Рис. 2.23

Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

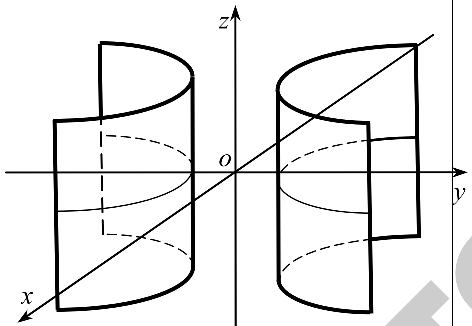


Рис. 2.24

Параболический цилиндр

$$x^2=2py$$

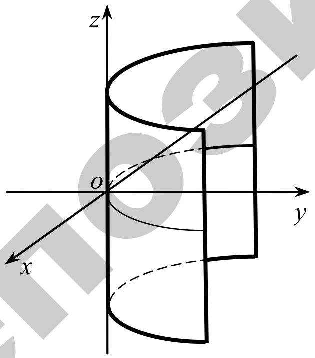
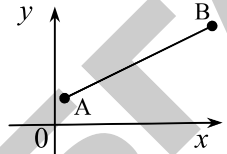
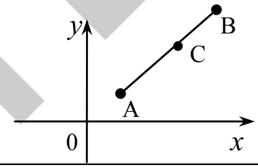
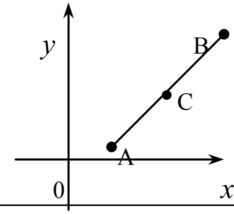
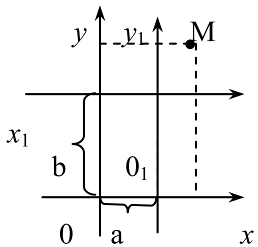
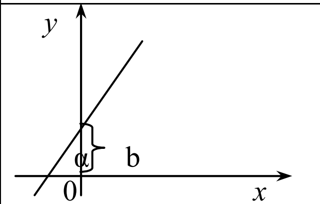
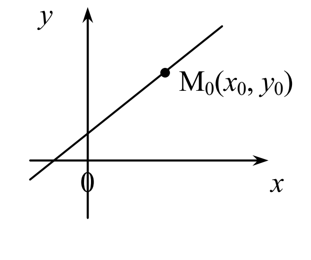
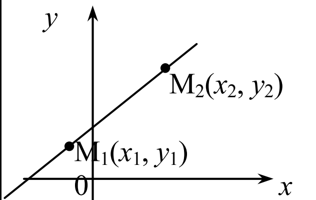
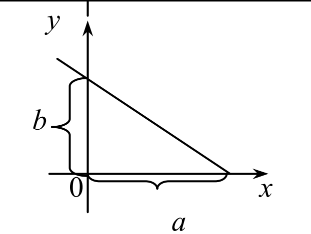
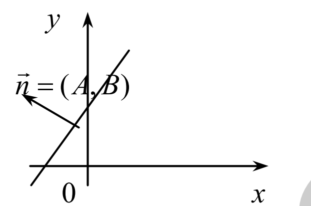


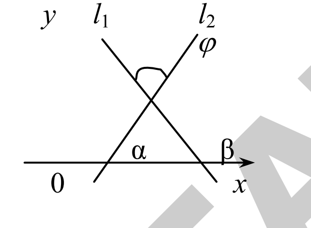
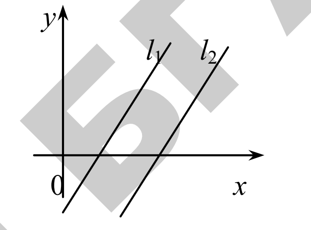
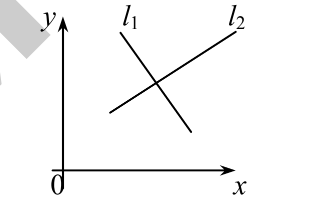
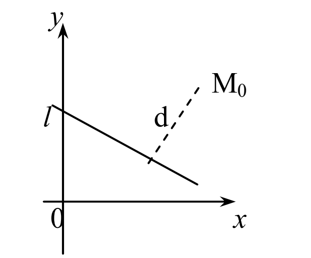
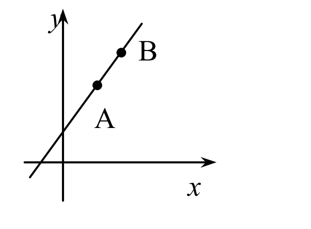
Рис. 2.25

Простейшие формулы аналитической геометрии

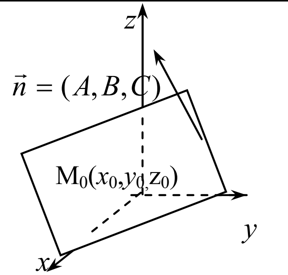
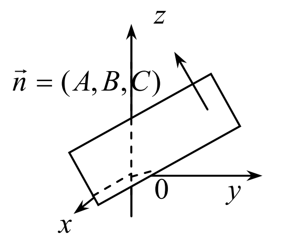
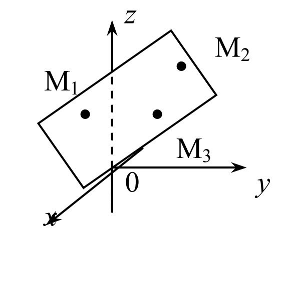
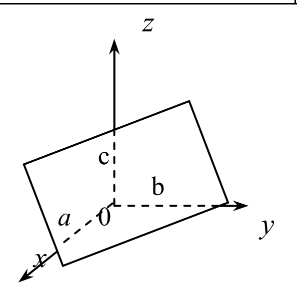
№ п/п	Схематический чертеж	Формулы	Комментарии
1.		$\lvert AB\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$	Расстояние между двумя точками A(x_A,y_A) и B(x_B,y_B)
2.		$x_C=\dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}$, $y_C=\dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$	Деление отрезка в заданном отношении (λ = AC/CB)
3.		$x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}$, $y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}$	Деление отрезка пополам (λ = 1)
4.		$x=x_1+a$ $y=y_1+b$	Преобразования координат при параллельном переносе

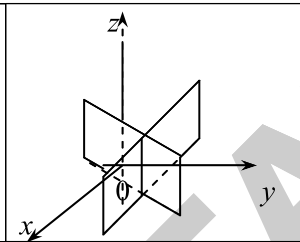
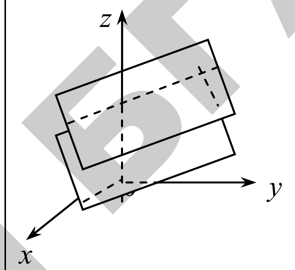
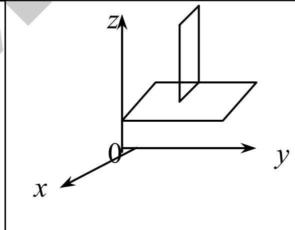
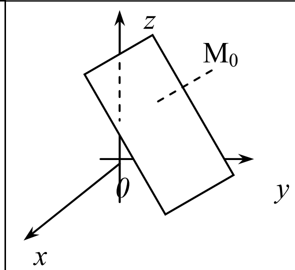
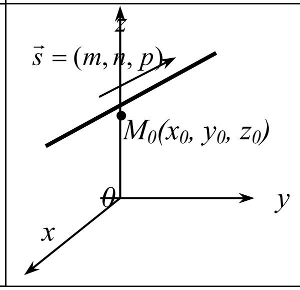
Прямая на плоскости

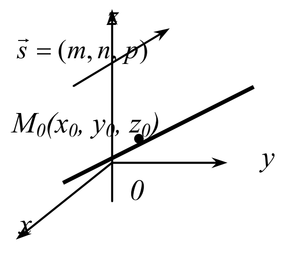
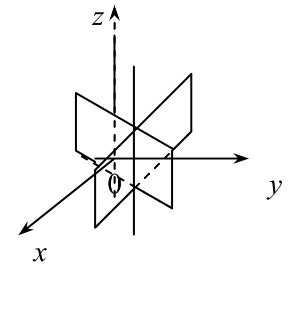
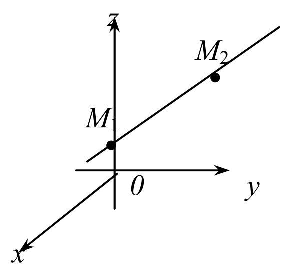
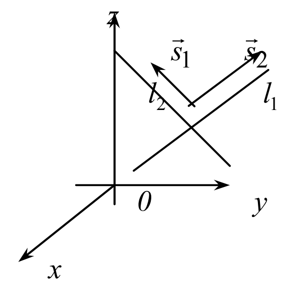
№ п/п	Схематический чертеж	Формулы	Комментарии
1	2	3	4
1		$y = kx + b$ $(k = \mathrm{tg}\alpha)$	Уравнение прямой с угловым коэффициентом (k)
2		$y - y_0 = k(x - x_0)$	Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ в заданном направлении (k)
3		$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки M_1 и M_2.
4		$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	Уравнение прямой в отрезках на осях
5		$Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$	Общее уравнение прямой

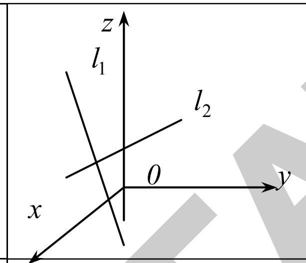
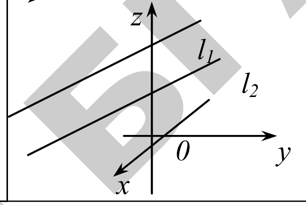
6		$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$	Угол между двумя прямыми l_1: $y = k_1 x + b_1$, l_2: $y = k_2 x + b_2$.
7		$k_1 = k_2$	Условие параллельности двух прямых
8		$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$	Условие перпендикулярности двух прямых
9		$d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	Расстояние от точки M_0 (x_0, y_0) до прямой l: $Ax + By + C = 0$
10		$k = \mathrm{tg}\alpha$ $k = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	Угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

Плоскость и прямая в пространстве

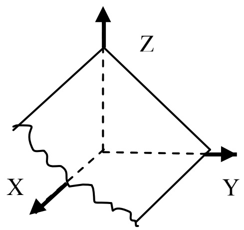
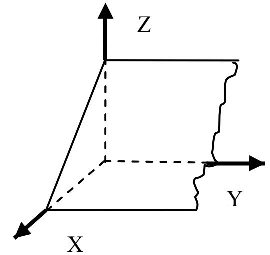
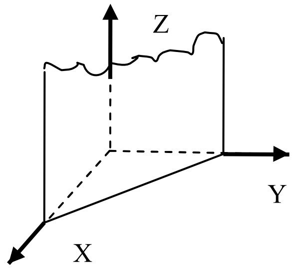
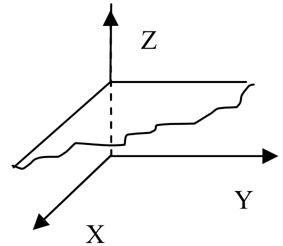
№ п/п	Схематический чертеж	Формулы и комментарии
1	2	3
1		Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ – перпендикулярно вектору нормали $\vec{n} = (A,B,C)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
2		Общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2 \neq 0)$
3		Уравнение плоскости, проходящей че- рез три точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$
4		Уравнение плоскости в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$ где *a, b, c* – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях

5		Угол между двумя плоскостями $P_1: A_1x+B_1y+C_1z++D_1=0,$ $P_2: A_2x+B_2y+C_2z++D_2=0$ $\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
6		Условие параллельности двух плоскостей $P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
7		Условие перпендикулярности двух плоскостей $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
8		Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ $d = \frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
9		Канонические уравнения прямой в пространстве: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$ где $\vec{s}=(m,n,p)$ – направляющий век- тор прямой

10		Параметрические уравнения прямой в пространстве: $\begin{cases} x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt, \text{ где } t\text{– параметр}\\ z=z_0+pt, \end{cases}$
11		Общие уравнения прямой в пространстве: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$ $\vec S=\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$
12		Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$ $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$
13		Угол между двумя прямыми $l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$ $l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$ $\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

14		Условие перпендикулярности двух прямых $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \quad m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
15		Условие параллельности двух прямых $l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$

Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$:

1. Плоскость параллельна оси Ox.  **A=0** Общее уравнение: $By+Cz+D=0$	**2.** Плоскость параллельна оси Oy.  **B=0** Общее уравнение: $Ax+Cz+D=0$
3. Плоскость параллельна оси Oz.  **C=0** Общее уравнение: $Ax+By+D=0$	**4.** Плоскость перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy)  **A=B=0** Общее уравнение: $Cz+D=0$

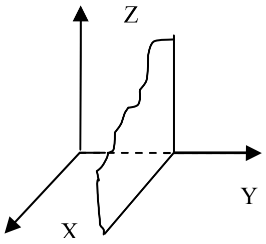
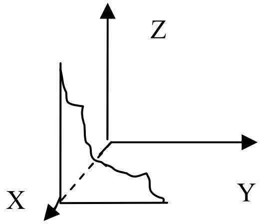
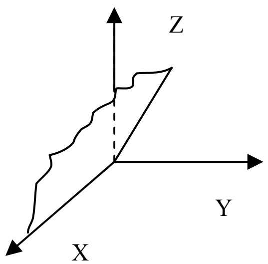
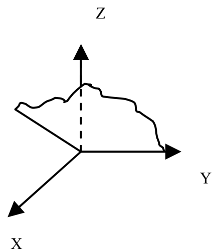
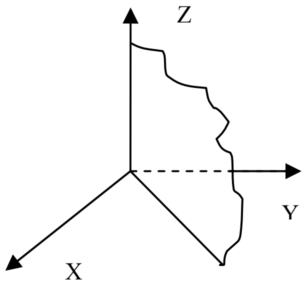
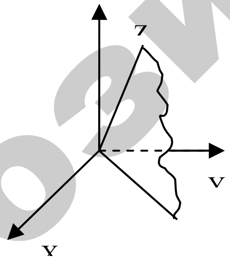
5. Плоскость перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz).  **A=C=0** Общее уравнение будет иметь вид: $By + D = 0$	**6.** Плоскость перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz).  **C=B=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Ax + D = 0$
7. Плоскость проходит через ось Ox  **A=D=0** Общее уравнение будет иметь вид: $By + Cz = 0$	**8.** Плоскость проходит через ось Oy  **B=D=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Ax + Cz = 0$
9. Плоскость проходит через ось Oz  **C=D=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Ax + By = 0$	**10.** Плоскость проходит через начало координат  **D=0** Общее уравнение будет иметь вид: $Ax + By + Cz = 0$

Таблица производных основных элементарных функций

В приводимой ниже таблице: $c = const$; $\alpha \in R$; $a > 0$, $a \neq 1$; $u = u(x)$.

Производные основных элементарных функций	**Производные сложных функций**
$c' = 0$; $x' = 1$;	
$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$;	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$;
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$;
$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$;	$\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a u'$;
$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;	$\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$;
$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$;	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u\ln a}u'$;
$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$;	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}u'$;
$\left(\sin x\right)' = \cos x$;	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$;	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;
$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;	$\left(tgu\right)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$;
$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;	$\left(ctgu\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;
$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$;	$\left(arctgu\right)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$;
$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$;	$\left(arcctgu\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

Таблица неопределенных интегралов

1.	$\int \mathrm{d}u = u + C$	**2.**	$\int 0\, \mathrm{d}u = C$
3.	$\int u^{\alpha} \mathrm{d}u = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1$э0 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	**4.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$, $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
5.	$\int a^u \mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C$, $(a > 0, a \neq 1)$	**6.**	$\int \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \mathrm{e}^u + C$
7.	$\int \sin u \mathrm{d}u = -\cos u + C$	**8.**	$\int \cos u \mathrm{d}u = \sin u + C$
9.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$	**10**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$
11.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + C$	**12.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{u+a}{u-a} \right\rvert + C$
13.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + C$	**14.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
15.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a^2} \right\rvert + C$	**16.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 - a^2} \right\rvert + C$
17.	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u} = \ln \lvert \mathrm{tg} \frac{u}{2} \rvert + C$	**18.**	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$
19.	$\int \mathrm{tg}\, u \mathrm{d}u = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	**20.**	$\int \mathrm{ctg}\, u \mathrm{d}u = \ln\lvert\sin u\rvert + C$

ОТВЕТЫ

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ВАРИАНТ ОТВЕТА	г	в	в	в	б	в	г	г	в

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ВАРИАНТ ОТВЕТА	б	а	а	в	а	б	б	а	б	г
№	11	12	13	14	15					
ВАРИАНТ ОТВЕТА	б	б	в	г	г					

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №3

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ВАРИАНТ ОТВЕТА	г	а	б	г	$\frac{\alpha}{\beta}$	в	в	в

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №4

№	1	2	3	4	5	6	7
ВАРИАНТ ОТВЕТА	г	б	в	б	б	а	б

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ №1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ВАРИАНТ ОТВЕТА	-37	1	в	б	в	2	а	3	а	в
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ВАРИАНТ ОТВЕТА	б	5	$\frac{1}{4}$	в	12	в	а	г	1	б

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №5

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ВАРИАНТ ОТВЕТА	б	$\frac{1}{5} arctg \frac{x}{5}$	б	б	$\sqrt{x+6} = t$	в	а	г

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №6

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ВАРИАНТ ОТВЕТА	г	г	0	в	в	в	1	в	а	в

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ №7

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ВАРИАНТ ОТВЕТА	в	$4y$	в	г	г	б	в	б

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ №2

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ВАРИАНТ ОТВЕТА	в	$x + 2y$	б	$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$	$(-1;1)$	б	$\cos^6 x$	а
№	9	10	11	12	13	14	15	16
ВАРИАНТ ОТВЕТА	в	$-\frac{1}{3}\cos 3x$	в	1	а	в	б	в

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие…………………………………………………... 3

Учебная программа (1 семестр)……………………………… 4

Модуль 1. Элементы линейной и векторной алгебры………… 8
Задачи для управляемой самостоятельной работы студентов.. 20
Контрольный тест по модулю №1……………………………. 21

Модуль 2. Аналитическая геометрия…………………… 22
Задачи для управляемой самостоятельной работы студентов.. 43
Контрольный тест по модулю №2……………………………. 44

Модуль 3. Введение в анализ………………………………… 46
Задачи для управляемой самостоятельной работы студентов.. 55
Контрольный тест по модулю №3……………………………. 56

Модуль 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной…………………………………………………. 57
Задачи для управляемой самостоятельной работы студентов.. 74
Контрольный тест по модулю №4……………………………. 75

Итоговый контрольный тест №1……………………………. 76

Учебная программа (2 семестр)……………………………… 78

Модуль 5. Неопределенный интеграл……………………… 81
Задачи для управляемой самостоятельной работы студентов.. 96
Контрольный тест по модулю №5……………………………. 97

Модуль 6. Определенный интеграл………………………….. 98
Задачи для управляемой самостоятельной работы студентов.. 109
Контрольный тест по модулю №6……………………………. 110

Модуль 7. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных…………………………………………… 112
Задачи для управляемой самостоятельной работы студентов.. 122
Контрольный тест по модулю №7……………………………. 123

Итоговый контрольный тест №2……………………………. 124

Краткий справочник………………………………………… 126

Ответы……………………………………………………….. 142

Учебное издание

Морозова Инна Михайловна,
Хвощинская Людмила Аркадьевна,
Боярина Ирина Петровна

МАТЕМАТИКА
(ЧАСТЬ 1)

Учебно-методический комплекс
для студентов
высших учебных заведений
по направлению образования 74 06 Агроинженерия

Ответственный за выпуск *Морозова И. М.*
Компьютерный набор и верстка *Боярина И.П.*

Издано в редакции авторов

Подписано в печать 21.01.2009г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 6,54. Тираж 920 экз. Заказ
Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный аграрный технический университет
ЛИ № 02330/0131734 от 10.02.2006. ЛП № 02330/0131656 от 02.02.2006.
220023, г. Минск, пр. Независимости, 99, к. 2.