

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Н. Орда, В. А. Шкляревич, С. В. Алешкевич

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов учреждений высшего
образования по агротехническим специальностям*

В двух частях

Часть 1

**Основы строения
и исследования механизмов**

Минск
БГАТУ
2012

УДК 621.01+531.8](075.8)
ББК 34.41я7
О-65

Рецензенты:
заведующий кафедрой теоретической механики
Белорусского национального технического университета,
доктор физико-математических наук, профессор *А. В. Чигарев*;
ответственный за цикл дисциплин по технической механике
Белорусского государственного университета информатики
и радиоэлектроники, доктор технических наук, профессор *В. М. Сурин*

О-65 **Орда, А. Н.**

Теория механизмов и машин : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1.
Основы строения и исследования механизмов / А. Н. Орда,
В. А. Шкляревич, С. В. Алешкевич. – Минск : БГАТУ, 2012. –
144 с.

ISBN 978-985-519-518-5.

В первой части изложены основы структурного и кинематического анализа, а также динамики механизмов и машин. Рассмотрен силовой расчет плоских рычажных механизмов, представлены основы теории трения.

Для студентов учреждений высшего образования по агротехническим специальностям.

УДК 621.01:531.8(075.8)
ББК 34.41я73

ISBN 978-985-519-518-5 (ч. 1)
ISBN 978-985-519-519-2

© БГАТУ, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ	7
1.1. Основные виды механизмов	7
1.2. Классификация кинематических пар по числу степеней свободы и числу связей	10
1.3. Кинематические цепи	13
1.4. Структурная формула механизма	13
1.5. Классификация механизмов	15
1.6. Понятие о технических системах	20
2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ	26
2.1. Кинематика точки и твердого тела. Основные понятия и определения кинематики	26
2.2. Кинематическое исследование плоских рычажных механизмов	32
2.2.1. Передаточные функции механизма	32
2.2.2. Аналитический метод кинематического анализа	33
2.2.3. Графоаналитический метод определения скоростей и ускорений (метод планов)	36
2.3. Кинематика зубчатых механизмов	46
2.3.1. Передачи с неподвижными осями	46
2.3.2. Передачи с подвижными осями	49
3. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ	54
3.1. Задачи силового анализа	54
3.2. Силы, действующие в механизмах	57
3.3. Определение реакций в кинематических парах	60
4. ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЗАДАННЫХ СИЛ	80
4.1. Динамическая модель механизма	80
4.2. Приведение сил и моментов сил	81
4.3. Приведение масс и моментов инерции	83
4.4. Уравнение движения механизма	84
4.5. Графоаналитический метод построения диаграммы энергомасс	88
4.6. Определение момента инерции маховика	92
5. ТРЕНИЕ В МЕХАНИЗМАХ	101
5.1. Основные понятия о трении	101
5.2. Трение в поступательной и вращательной кинематических парах	104
5.3. Трение качения	108
5.4. Жидкостное трение	117
6. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН	127
6.1. Коэффициент полезного действия механизмов при последовательном и параллельном соединении	127
6.2. Коэффициент полезного действия машинно-тракторных агрегатов	130
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	142

ВВЕДЕНИЕ

В течение всего своего развития теория механизмов и машин была одной из наиболее динамично развивающихся наук и основных учебных дисциплин в цикле инженерного образования. В этот период учебная дисциплина «Теория механизмов и машин» (ТММ) не отставала от науки в области механизмов и в достаточной мере отражала ее успехи. Однако, в начале второй половины XX в. образовался разрыв между научными и практическими достижениями ТММ как науки и содержанием учебной дисциплины ТММ, причем содержание и методы учебной дисциплины существенно отставали от научных достижений. Появление ЭВМ вытесняло графические и графоаналитические методы. Оказалось, что многие из указанных методов трудно и нерационально перекладывать в численные. Современный курс ТММ по сравнению с курсами столетней давности потерял свою энциклопедичность и сосредоточился на решении отдельных задач. Логическая целостность курса может быть обеспечена инженерным подходом к его программе, который должен содержать фундаментальные понятия и решать глобальные задачи. К последним можно отнести: формулировку задач проектирования механизмов; разработку и расчет спектра возможных решений; оценку и сравнение полученных решений; анализ функциональных возможностей механизмов; понимание места и значимости полученных решений в рамках общей задачи проектирования машины.

В настоящий момент предмет «Теория механизмов и машин» является общетехнической дисциплиной в системе подготовки агроинженера. В результате изучения дисциплины будущий специалист должен получить знания и навыки по расчету и рациональному проектированию элементов конструкций, входящих в состав механизмов и машин.

Современные сельскохозяйственные машины являются сложными системами, состоящими из нескольких функциональных частей (подсистем). Функциональными частями машины являются двигатели, механическая система, ходовая система, система управления движением. Двигатели являются теми функциональными частями, в которых происходит физико-химические процессы, связанные с преобразованием энергии в механическую работу. Механическая система машины осуществляет преобразование вращательных или поступательных

движений выходных звеньев двигателей в движения рабочих органов машины.

Изучение машин начинается с исследования свойств функциональных частей. При изучении механизмов машин прибегают к построению и исследованию физических и других моделей. Переход от реального объекта к модели сводится к идеализации объекта, абстрагированию от его частных особенностей и выделению тех свойств, которые являются наиболее существенными для решения поставленной задачи. При исследовании механизмов наряду с простейшими моделями, представляющими механизм как связанную систему абсолютно твердых тел, движение которых ограничивается идеальными голономными стационарными связями, рассматриваются и более сложные модели, учитывающие динамические свойства систем.

Таким образом, главная задача теории механизмов и машин как науки – предложить оптимальную схему механизмов, обеспечивающую заданные условия функционирования проектируемой машины.

Основная задача пособия «Основы строения и исследования механизмов» – установление общих принципов строения механизма и объяснение положения, что механизм это не произвольное соединение твердых тел, а упорядоченное соединение, осуществляемое по определенному закону; показ научных положений и технических приемов анализа схем механизмов. В этом пособии, наряду с традиционными вопросами структуры, кинематики и динамики механизмов, освещаются особенности динамики механизмов сельскохозяйственных машин. Изучение данных вопросов будет способствовать улучшению подготовки специалистов АПК высокой квалификации.

В первой части курса ТММ «Основы строения и исследования механизмов» рассмотрены вопросы структуры, кинематического и динамического анализа механизмов. При рассмотрении вопросов КПД и трения учтены особенности взаимодействия с почвой ходовых систем тракторов и сельскохозяйственных машин.

Авторы пособия выражают признательность рецензентам – заведующему кафедрой теоретической механики БНТУ, доктору физико-математических наук, профессору А. В. Чигареву и ответственному за цикл дисциплин по технической механике БГУИР, доктору технических наук, профессору В. М. Сурину – за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, позволившие улучшить содержание учебного пособия.

1. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

1.1. Основные виды механизмов

В технике наибольшее распространение имеют шарнирные механизмы, звенья которых соединены вращательными парами. На рис. 1.1, *а* показан механизм шарнирного четырехзвенника *OABC*. В этом механизме четыре звена: стойка *O*, звенья *1*, *2* и *3*. Звено *2*, образующее кинематические пары только с подвижными звеньями, называется шатуном. Звено *1*, совершающее полный оборот вокруг неподвижной оси, называется кривошипом, а звено *3*, совершающее возвратно-вращательное движение, – коромыслом.

Заменяя в шарнирном четырехзвеннике одну или две вращательные пары на поступательные, получаем новые механизмы. С одной поступательной парой можно получить механизмы двух видов. Если стойкой сделать звено, входящее в поступательную пару, то в механизме образуется ползун, т. е. звено, которое входит только в нижние кинематические пары и совершает прямолинейное поступательное движение. Такой механизм будет называться кривошипно-ползунным (рис. 1.1, *б*). Если стойкой сделать звено, входящее в две вращательные пары, то в механизме образуется кулиса, т. е. звено, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее с другим подвижным звеном поступательную пару. Соответственно механизм называется кулисным (рис. 1.1, *в*).

Большое распространение в технике имеют кулачковые механизмы. Кулачком называется звено, которому принадлежит элемент высшей пары, выполненный в виде поверхности переменной кривизны. Механизм, в состав которого входит кулачок, называется кулачковым механизмом. На рис. 1.2, *а* показана схема плоского кулачкового механизма. Кулачок *1* имеет поверхность переменной кривизны, которая соприкасается с роликом *2*, образуя высшую пару. Постоянное соприкосновение элементов высшей пары обеспечивается пружиной, между стойкой и выходным звеном *3* (толкателем).

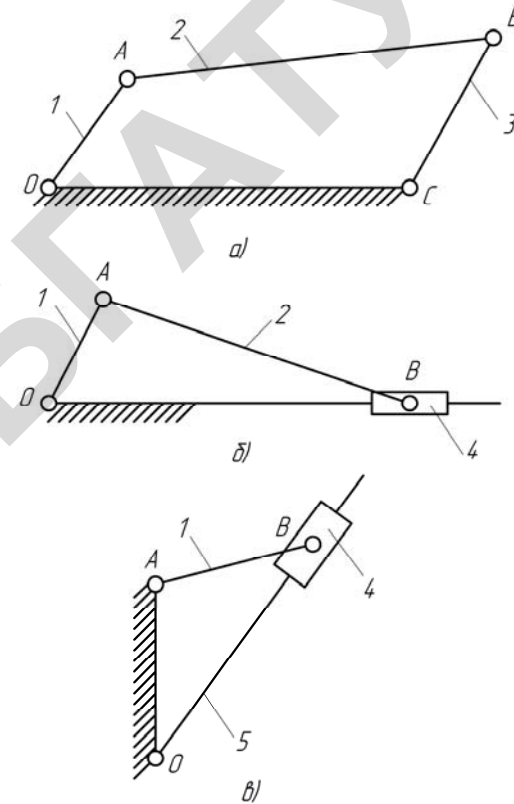


Рис. 1.1. Рычажные механизмы: *а* – шарнирный четырехзвенник; *б* – кривошипно-ползунный механизм; *в* – кулисный механизм; *1* – кривошип; *2* – шатун; *3* – коромысло; *4* – ползун; *5* – кулиса

Зубчатым механизмом называется механизм, в состав которого входят зубчатые звенья. Зубчатое звено определяется как звено, имеющее выступы (зубья) для передачи движения посредством взаимодействия с выступами другого звена (тоже зубчатого). Каждый зуб может рассматриваться как кулачок, а весь зубчатый механизм – как многократно повторенный кулачковый механизм.

Вращающееся зубчатое звено называется зубчатым колесом. На схеме механизма цилиндрические зубчатые колеса изображаются окружностями, которые перекатываются без скольжения. На рис. 1.2, *б* показан зубчатый планетарный механизм, в котором

колесо 2 (сателлит) вращается вокруг своей оси и одновременно движется вместе со звеном H (водило) вокруг оси центрального (солнечного) колеса 1, т. е. совершает движение, подобное движению планеты (отсюда название механизма).

Механизмы, в которых для передачи движения между соприкасающимися звеньями используется трение, называются фрикционными. Передача вращения с постоянным отношением угловых скоростей (передаточным отношением) происходит за счет трения цилиндрических поверхностей колес 1 и 2 (рис. 1.2, в).

Механизмы входят в состав машины. Машина – устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения труда человека.

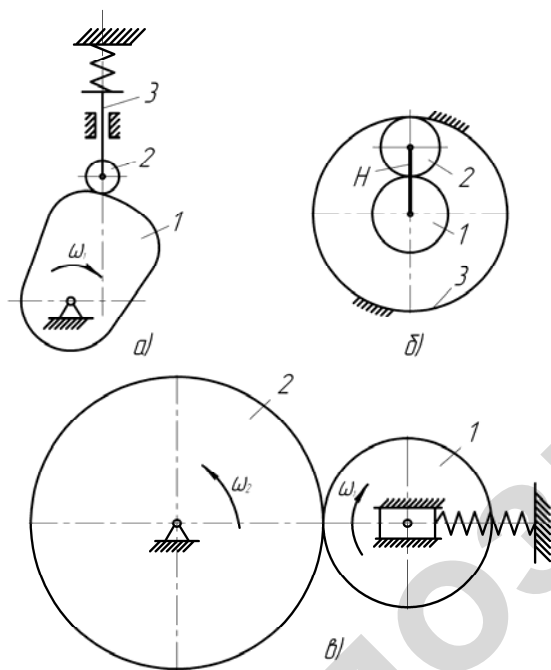


Рис. 1.2. Примеры механизмов: а – кулачковый: 1 – кулачок; 2 – ролик; 3 – толкатель; б – зубчатый планетарный механизм: 1 – солнечная шестерня; 2 – сателлит; 3 – опорная шестерня; H – водило; в – фрикционный механизм: 1 – ведущий ролик; 2 – ведомый ролик

Механизм – система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких звеньев (входных) в требуемые движения других звеньев (выходных).

Звено механизма – твердое тело, входящее в состав механизма.

Входное звено – звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемом движении выходного звена.

Выходное звено – звено, совершающее движение, для которого предназначен механизм.

Ведущее звено – звено, для которого элементарная работа внешних сил является положительной. В данном случае внешними силами являются силы, приложенные со стороны тел, не входящих в состав механизма.

Ведомое звено – звено для которого элементарная работа внешних сил, приложенных к нему является отрицательной, или равна нулю.

Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называется кинематической парой.

1.2. Классификация кинематических пар по числу степеней свободы и числу связей

Свободно движущееся в пространстве твердое тело обладает шестью степенями свободы.

Вхождение звена в кинематическую пару с другим звеном налагает на относительные движения этих звеньев условия связи.

$$1 \leq S \leq 5,$$

где S – число условий связи.

Если $S = 0$, то звенья не соприкасаются и кинематическая пара перестает существовать.

Если $S = 6$, то звенья теряют относительную подвижность и кинематическая пара переходит в жесткое соединение двух звеньев.

Число степеней свободы H в относительном движении звеньев пары взаимоувязывается с числом условий связи S следующей формулой:

$$H = 6 - S. \quad (1.1)$$

Кинематические пары делятся на классы в зависимости от числа условий связи, налагаемых на относительные движения их звеньев. Из уравнения (1.1) найдем число условий связи S :

$$S = 6 - H. \quad (1.2)$$

В табл. 1.1 даны примеры кинематических пар. Класс пары определяется числом условий связи.

1. Пара I класса. Шар – плоскость (пятиподвижная кинематическая пара). Движение шара вверх нарушает соприкосновение звеньев и кинематическая пара перестает существовать.


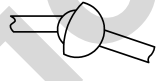

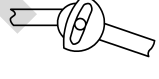
Число степеней свободы звеньев H данной пары равно 5, число условий связи: $S = 6 - H = 6 - 5 = 1$.


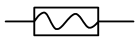

2. Пара II класса. Цилиндр – плоскость (четыреподвижная кинематическая пара).

Число степеней свободы $H = 4$, число условий связи: $S = 6 - 4 = 2$.

Таблица 1.1

Классификация кинематических пар по числу условий связи

Число степеней свободы	Число уравнений геометрических связей	Название пары	Рисунок	Условное обозначение
5	1	Шар – плоскость		
4	2	Цилиндр – плоскость		
3	3	Плоскостная		
3	3	Сферическая (шаровая)		
2	4	Сферическая с пальцем		

Число степеней свободы	Число уравнений геометрических связей	Название пары	Рисунок	Условное обозначение
2	4	Цилиндрическая		
1	5	Винтовая		
1	5	Вращательная		
1	5	Поступательная		

3. Пара III класса. Сферическая, шаровая (трехподвижная кинематическая пара).

Число степеней свободы звеньев данной пары $H = 3$, число условий связи: $S = 6 - 3 = 3$.

4. Пара IV класса. Цилиндрическая (двухподвижная кинематическая пара).

Число степеней свободы $H = 2$, число условий связи: $S = 6 - 2 = 4$.

5. Пара V класса. Вращательная или поступательная (одноподвижная кинематическая пара).

Число степеней свободы звеньев данной пары $H = 1$; число условий связи: $S = 6 - 1 = 5$.

Винтовая пара (кинематическая пара V класса):

1) поступательное движение h ; 2) вращательное движение φ .

h и φ связаны условием: $h = h(\varphi)$ + дополнительная связь.

Две степени свободы $H = 2$, четыре условия связи + дополнительная связь, т. е. число условий связи: $S = 6 - 2 + 1 = 5$.

Кинематическая пара, которая может быть выполнена соприкосновением элементов ее звеньев по поверхности, называется низшей.

Кинематическая пара, которая может быть выполнена соприкосновением элементов ее звеньев только по линиям или в точках, называется высшей.

1.3. Кинематические цепи

Кинематическая цепь – это система звеньев, связанных между собой кинематическими парами.

Простая кинематическая цепь – такая цепь, у которой каждое звено входит не более чем в 2 кинематические пары.

Сложная кинематическая цепь – такая цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары.

Замкнутая кинематическая цепь – цепь, звенья которой образуют один или несколько замкнутых контуров.

Незамкнутая кинематическая цепь – цепь, звенья которой не образуют замкнутых контуров.

Кинематическая цепь, конструктивно заменяющая в механизме кинематическую пару, называется кинематическим соединением. Пример кинематического соединения – шарикоподшипник. Он по сравнению с вращательной кинематической парой уменьшает трение.

1.4. Структурная формула механизма

Как уже отмечалось в п. 1.2, если на движение звена в пространстве не наложено никаких условий связи, то оно обладает шестью степенями свободы. Соединение звеньев в кинематические пары накладывает различное число связей на относительное движение звеньев. Число степеней свободы H , которым обладает кинематическая цепь, равно:

$$H = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (1.3)$$

где k – число звеньев кинематической цепи;
 p_5 – число кинематических пар пятого класса;
 p_4 – число кинематических пар четвертого класса;
 p_3 – число кинематических пар третьего класса;
 p_2 – число кинематических пар второго класса;
 p_1 – число кинематических пар первого класса.

Если одно из звеньев кинематической цепи является неподвижным, то число степеней свободы уменьшится на 6 и число степеней свободы относительно неподвижного звена будет равно:

$$W = H - 6, \quad (1.4)$$

где W – число степеней свободы кинематической цепи относительно неподвижного звена.

Подставив уравнение (1.3) в уравнение (1.4) получим:

$$W = 6(k - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1,$$

или

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (1.5)$$

где n – число подвижных звеньев кинематической цепи.

Формула (1.5) является структурной формулой кинематической цепи общего вида и носит название формулы Сомова – Малышева.

Структурную формулу для плоских механизмов предложил Чебышев П. Л. (у плоского механизма точки звеньев движутся в плоскостях параллельных одной общей неподвижной плоскости).

Условие параллельности осей накладывает ограничения на движения звеньев. Звенья не могут совершать вращательные движения относительно осей y и z и поступательно движутся относительно оси x .

Если в общем случае число степеней свободы подвижных звеньев механизма равняется $6n$, то для плоского механизма число степеней свободы подвижных звеньев будет равно:

$$(6 - 3)n = 3n.$$

Вместо $5p_5$ связей, накладываемых парами V класса, в плоском механизме пары V класса будут накладывать $(5 - 3)p_5 = 2p_5$ связей.

Структурная формула (1.5) для плоского механизма примет вид:

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)p_5 - (4 - 3)p_4 - (3 - 3)p_3,$$

или

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (1.6)$$

Это структурная формула для плоских механизмов, которая носит название формулы Чебышева.

1.5. Классификация механизмов

Классификацией механизмов называется разделение их на группы и классы по общности структуры и конструктивного оформления, назначения и др.

Структурной классификации плоских механизмов посвящены многочисленные работы русских, советских и иностранных ученых. Первая научно обоснованная классификация плоских механизмов создана трудами профессора Ассур Л. В.

В своей работе Ассур Л. В. показал, что любой плоский рычажный механизм может быть образован методом «наслоения», т. е. путем присоединения к одному или нескольким первичным механизмам одной или нескольких кинематических цепей нулевой подвижности (структурных групп).

Механизмом I класса называется двухзвенный механизм, который состоит из одного подвижного звена и стойки, образующих одноподвижную пару.

Движение подвижного звена I класса механизма определяется его обобщенной координатой.

Структурной группой Ассур, называется кинематическая цепь, состоящая только из подвижных звеньев с одноподвижными парами, но получающая нулевую подвижность и превращающаяся в ферму, если свободные элементы звеньев крайних пар соединить со стойкой.

Для установления связи между числами звеньев и пар в структурной группе следует использовать структурную формулу (1.6) Чебышева, записанную в следующем виде:

$$W_{гр} = 3k_{гр} - 2p_n = 0,$$

где $k_{гр}$ – число звеньев структурной группы;

p_n – число низших кинематических пар.

Число кинематических пар в структурной группе находят из равенства:

$$p_n = \frac{3}{2}k_{гр}. \quad (1.7)$$

Так как число пар в группе обязательно целое, то количество ее звеньев должно быть четным и возможные значения чисел звеньев и пар в группах могут быть следующими:

$$k_{гр} = 2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

$$p_n = 3, 6, 9, 12, 15, \dots$$

Наиболее простая структурная группа состоит из двух звеньев 1 и 2 и трех пар B, C и D (рис. 1.3, а) и называется двухповодковой. Поводок – это звено группы, входящее только в две кинематические пары, из которых одна (концевая) имеет свободный элемент звена, предназначенный для присоединения группы к звеньям механизма. Пары B и D на концах поводков 1 и 2 имеют свободные элементы звеньев b и d, показанные штрихами. Если оба свободных элемента прикрепить к стойке (рис. 1.3, б) то получится кинематически неизменяемая система – ферма. Если ту же группу одним элементом, например 2, через вращательную кинематическую пару присоединить к подвижному звену 3, вращающемуся относительно стойки 0, а другим – к той же стойке, то в результате этого будет создан известный шарнирный четырехзвенник (рис. 1.1, а).

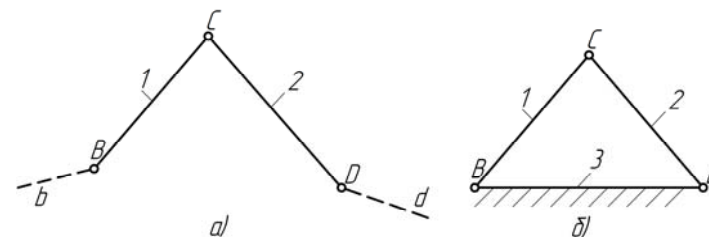


Рис 1.3. Двухповодковая структурная группа

Для получения более сложных структурных групп используют так называемый метод развития поводка, заключающийся в том, что один из поводков с парой развивается, т. е. заменяется тремя звеньями – одним базисным (входящим в состав трех пар) и двумя поводками с парами на концах. Таким образом, двухповодковая группа (рис. 1.3, а) развилась в трехповодковую (рис. 1.4, а),

в которой вместо звена 2 и пары D появились базисное звено 2 и поводки 3 и 4 с парами F и H на концах. Эти пары имеют свободные элементы звеньев f и h . В трехповодковой группе четыре звена (одно из них базисное) и шесть пар. На рис. 1.4, δ , в показаны некоторые модификации группы, полученные путем замены вращательных пар поступательными. Дальнейшее развитие трехповодковой группы дает четырехповодковую уже с двумя базисными звеньями (рис. 1.5) и т. д.

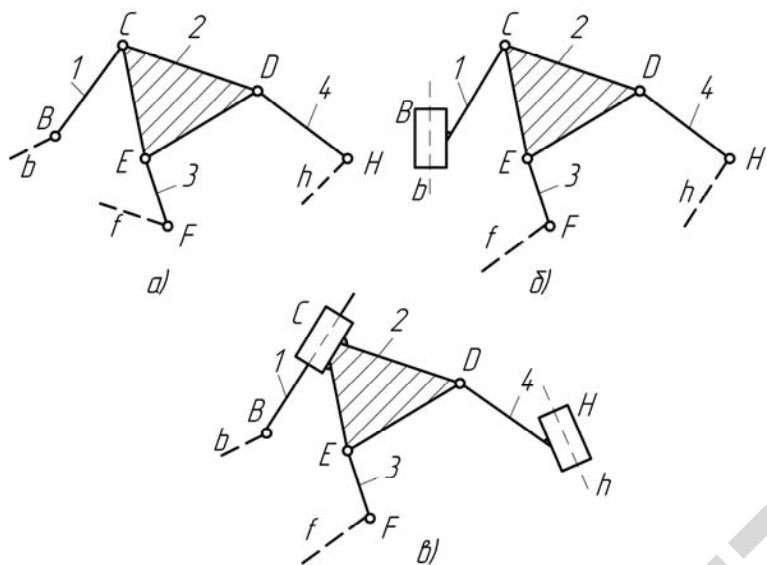


Рис. 1.4. Трехповодковая структурная группа

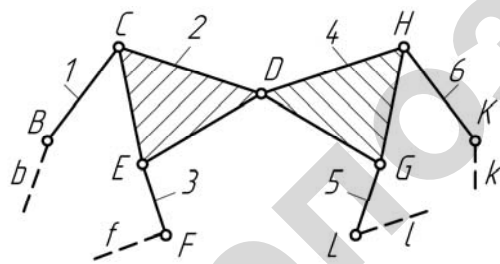


Рис. 1.5. Четырехповодковая структурная группа

На основании вышеизложенного Асуром Л. В. предложена классификация простейших структурных групп, представленная в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Классификация простейших структурных групп Асура

Класс группы	Признак группы	Схемы групп Асура					Порядок группы
		Виды групп Асура II класса					
		1	2	3	4	5	
II	Звено, входящее в две кинематические пары $n = 2$ $p_5 = 4$						II
III	Звено, входящее в три кинематические пары $n = 4$ $p_5 = 6$						III
IV	Четырехсторонний замкнутый контур $n = 4$ $p_5 = 6$						II

По классификации Артоболевского И. И., класс группы определяется по числу кинематических пар, образующих наиболее сложный замкнутый контур, а порядок группы – по числу внешних свободных шарниров.

Класс механизма определяется по той структурной группе, которая относится к наивысшему классу. Так, шарнирный четырехзвенник (рис. 1.1, а), состоящий из первичного механизма I класса и двухповодковой группы II класса 1-го вида, является механизмом II класса; кривошипно-ползунный механизм (рис. 1.1, б), образованный из первичного механизма и двухповодковой группы, является тоже механизмом II класса. Структурные группы IV класса встречаются в парораспределительном механизме паровоза и механизме ходовой части портального крана.

Для определения состава механизма необходимо расчленить его на первичные механизмы и структурные группы, производя действия, обратные образованию механизма методом присоединения. От структурной схемы механизма при этом отделяют по одной все структурные группы таким образом, чтобы оставшаяся цепь была механизмом I класса. После отделения всех групп должны остаться механизмы I класса, количество которых определяет число степеней свободы механизма.

Как пример структурного анализа механизма по Ассур можно провести разложение на составные части восьмизвенного двухкулисного кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.6, а), если ведущим его звеном является кривошип 1. Проверка по формуле Чебышева П. Л. (1.6) подтверждает, что при $n = k - 1 = 8 - 1 = 7$, $p_5 = 10$ и $p_4 = 0$, число степеней свободы $W = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 21 - 20 = 1$. Так как первичный механизм состоит из двух звеньев (неподвижного – стойки и подвижного – кривошипа 1), то на долю структурных групп остается шесть подвижных звеньев. При ведущем кривошипе 1 отделение групп нужно начать с концов, где звенья 6 и 7 парами F и G присоединяются к стойке и направляющей 0. В первую очередь можно отделить группу из звеньев 4, 5, 6 и 7 (рис. 1.6, б). Это трехповодковая группа в модификации, представленной на рис. 1.4, в. Далее выделяется группа из звеньев 2 и 3, образующих кулисный механизм (рис. 1.6, в). После снятия этих групп остается механизм I класса из звеньев 1 и 0 (рис. 1.6, г). Рассматриваемый механизм состоит из одного механизма I класса,

одной двухповодковой и одной трехповодковой групп и является механизмом III класса.

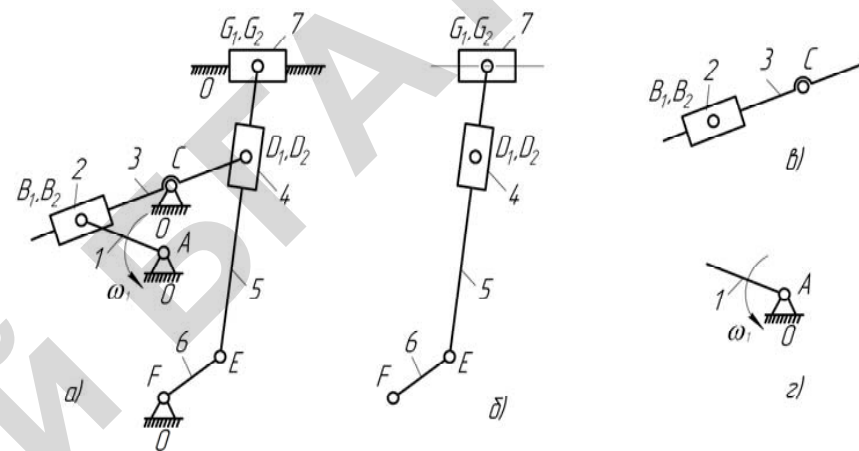


Рис. 1.6. Схема структурного анализа восьмизвенного двухкулисного кривошипно-ползунного механизма

1.6. Понятие о технических системах

Представление о машинах менялось в процессе развития цивилизации. Сначала было принято рассматривать машину как нечто целое, состоящее только из свойственных ей частей. С основанием технических школ в конце XVIII века происходит выделение механизмов из рамок общего учения о машинах.

В XIX столетии было проведено систематическое исследование элементов механизмов и машин. В 1874 г. Рело Ф. в работе «Теоретическая кинематика» предпринял первую попытку создать общую теорию механизмов и машин. Дальнейшее развитие теории механизмов прослеживается в работах Виллиса Р., Чебышева П. Л., Артоболевского И. И.

Бурно растущее промышленное производство после второй мировой войны потребовало разработки новых подходов и теорий, пересмотра методов изучения технических систем. Цель теории заключается в том, чтобы привести имеющиеся знания по техническим

системам в единый комплекс понятий, определений и положений, основываясь на сущности и закономерностях структуры.

Структура теории должна содержать:

- систему понятий;
- систему преобразований;
- технический процесс как элемент системы преобразований;
- техническую систему как элемент системы преобразований;
- назначение и структуру технических систем;
- свойства и оценивание технических систем;
- эволюцию и системологию технических систем.

Таким образом, под техническими системами понимаются искусственно созданные объекты, предназначенные для удовлетворения определенных потребностей. Технические системы должны обладать способностью выполнения не менее одной функции. Им присущи многоэлементность, иерархичность строения, множественность связей между элементами, многократность изменения и многообразие потребительских качеств. К техническим системам относятся как отдельные машины, так и сложные комплексы взаимосвязанных машин. Одним из важнейших свойств технической системы является ее структура.

Структура (Str) системы характеризует внутреннюю организацию, порядок и построение системы, т. е. структура – это совокупность элементов и отношений между ними. Если $E = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ есть множество элементов, а $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ – множество отношений, то структура $Str = \{E, R\}$ представляет собой множество, состоящее из E и R (рис. 1.7, а).

Окружение (Umg) системы теоретически включает все, что не входит в данную систему. Однако обычно ограничиваются окружением, состоящим из систем, включающих хотя бы один элемент, выход которого является в то же время входом некоторого элемента системы. Входы (J_n) и выходы (Ou) системы включают все виды связей с окружающей средой: связи материального (S), энергетического (En) и информационного (J) характера.

Каждая система обладает свойствами (E), присущими этой системе и точно ее определяющими размерами, масса, скорость, форма, стабильность, технологичность, транспортабельность и т. д.

Совокупность значений свойств системы в определенный момент времени называется состоянием системы. Как и качество, состояние

системы можно определить вектором, имеющим в качестве компонентов отдельные свойства. При определении качества или состояния систем абстрагируются от большей части несущественных свойств.

Модель системы (рис. 1.7, а) наглядно иллюстрирует приведенные выше определения.

При изучении систем рассматривают три характерных типа задач. В задачах синтеза при заданном характере функционирования системы требуется определить структуру системы. В задачах анализа при заданной структуре определяется функционирование системы. В задачах «черного ящика» при заданной системе, структура которой неизвестна или известна частично, определяется ее функционирование и, возможно, структура. Известны системы типа «объект» (TS) и типа «процесс» (P).

Целенаправленное изменение определенных объектов имеет для людей жизненную важность. Искусственные процессы, в которых те или иные свойства объекта действия (операнда) претерпевают соответствующие изменения при участии людей и технологических средств, вследствие чего достигается желаемое состояние операнда, называются преобразованиями. На рис. 1.7, б представлена общая модель процесса преобразования. Воздействия операторов осуществляются в виде потоков материи (S), энергии (En) и информации (J).

Операторы воздействуют на операнды. Термин «операнд» (Od) выбран в качестве общего названия всех предметов, систем и состояний, подвергаемых целенаправленному преобразованию. Преобразование есть следствие определенных воздействий, основанных на физических и других явлениях и описываемых определенным алгоритмом.

Процесс преобразования представляет собой совокупность операций (O). Алгоритм можно определить как упорядоченное множество операций, их отношений и условий перехода от одной операции к другой. Имеет место сходство между понятиями алгоритма и технологического процесса, представляющего собой последовательность операций изготовления изделия.

Технический процесс (TP) является элементом системы преобразований. Его модель строится на отношениях в системе преобразований (рис. 1.7, в). Обобщенный технический процесс определяет преобразование операнда без точного указания того, «чем», «кто», «когда» и «где» его выполняет.

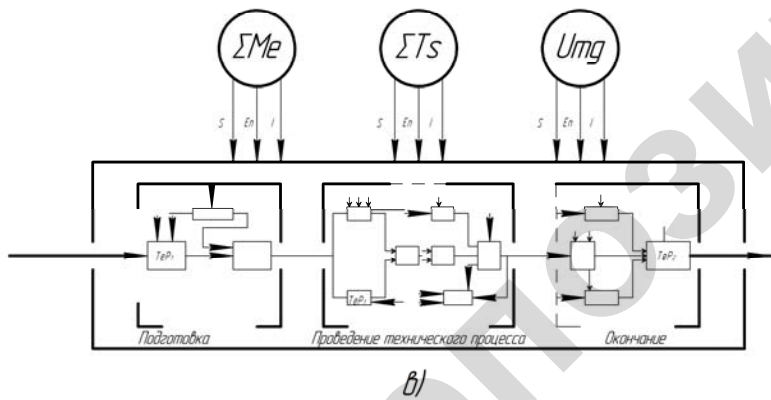
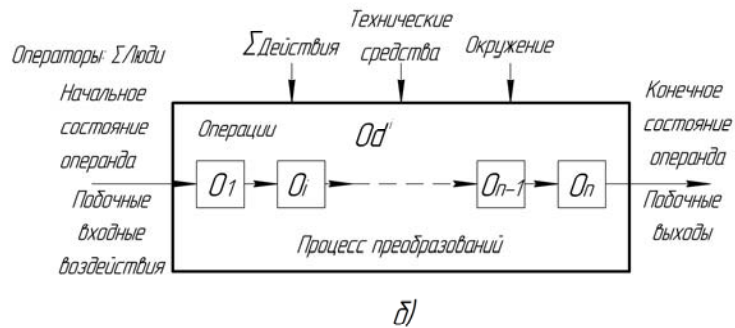
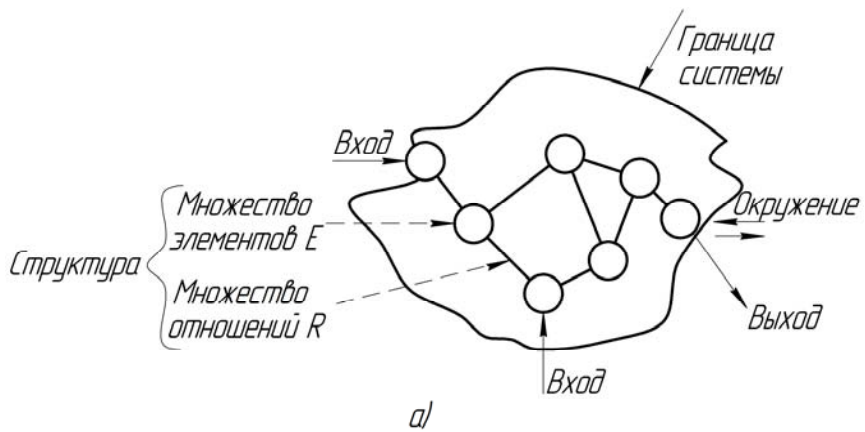


Рис. 1.7. Модель технической системы

Описание любого технического процесса должно содержать ответы на следующие вопросы:

1. Что является операндом и каковы его состояния?
2. С помощью каких преобразований достигается совокупное преобразование в рамках существующих условий?
3. Какими действиями (материального, энергетического или информационного типа) могут быть реализованы преобразования?
4. Какими операторами выполняются отдельные действия?

Технический процесс, как правило, характеризуется качеством операнда на выходе. Если все требуемые свойства операнда достигнуты, то задача процесса считается выполненной.

Наиболее важными элементами системы преобразований являются технические системы, выполняющие необходимые воздействия на операнды, в результате чего осуществляются требуемые преобразования. Модель технической системы тесно связана с системой преобразований и техническим процессом (рис. 1.8). Как элемент системы преобразований техническая система взаимосвязана со всеми остальными элементами системы преобразований:

- операндами;
- людьми – операторами;
- другими техническими системами;
- окружением.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется машиной, механизмом, звеном, кинематической парой?
2. Как классифицируются кинематические пары по числу условий связи?
3. Что такое степени свободы и условия связи в кинематических парах?
4. Какова формула для определения числа степеней свободы для плоской кинематической цепи?
5. Что такое обобщенные координаты и начальные звенья механизма?

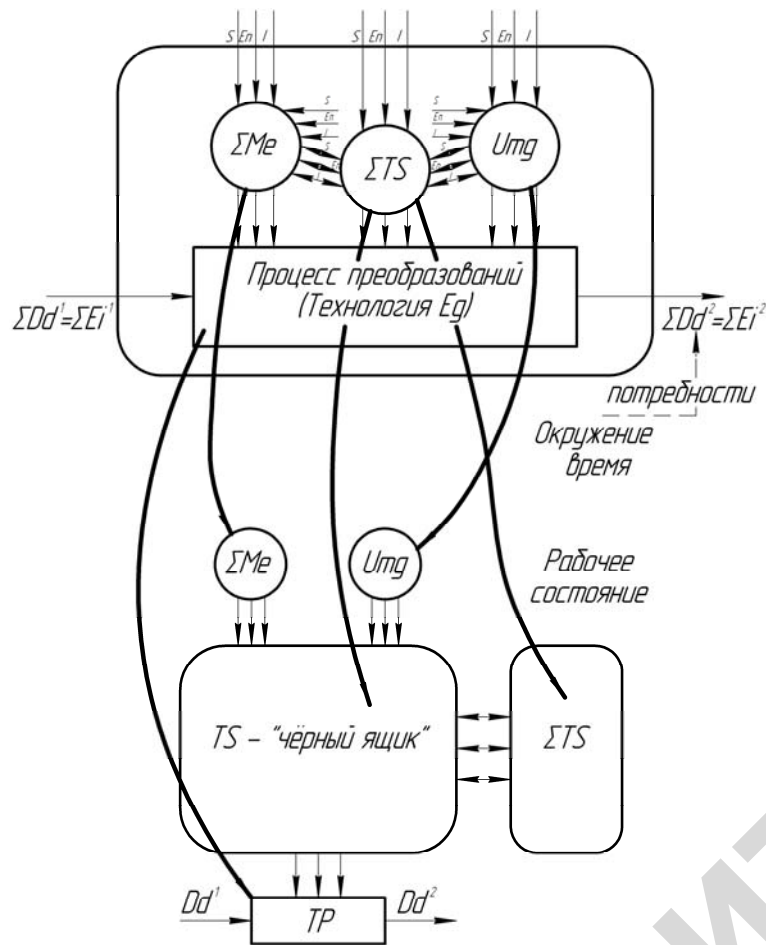


Рис. 1.8. Модель технического процесса

6. В чем заключается суть классификации плоских рычажных механизмов?
7. Что называется структурной группой?
8. Каков порядок структурного анализа механизмов?

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

2.1. Кинематика точки и твердого тела. Основные понятия и определения кинематики

В кинематике изучаются движения тел в отрыве от того, какие силы создают и поддерживают эти движения. Изменения расстояний между точками движущихся тел определяются по отношению к некоторой системе отсчета (системе координат). Если выбранная система координат условно принята за неподвижную, то движение тел по отношению к этой системе отсчета называют абсолютным движением. Если движение тел изучается по отношению к движущейся системе координат, то такое движение называют относительным.

При движении точки в пространстве координаты ее изменяются во времени (рис. 2.1, а). Уравнения движения точки в декартовых координатах имеют вид:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t). \quad (2.1)$$

Для получения уравнений траектории необходимо из параметрических уравнений движения исключить время:

$$x = f_1[\varphi(z)] y = f_2[\varphi(z)].$$

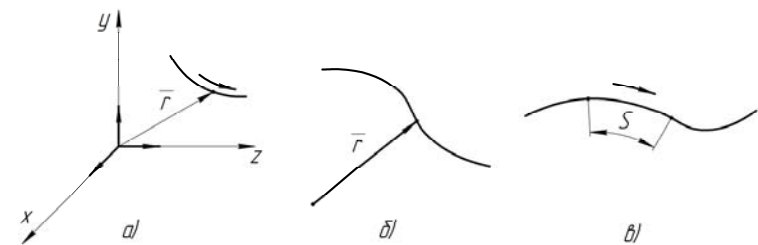


Рис. 2.1. Способы задания движения точки в пространстве:
а – координатный; б – векторный; в – естественный

Помимо рассмотренного координатного способа задания движения точки в кинематике часто используются векторный и естественный способы. При векторном способе задания закона движения радиус-вектор движущейся точки задается как функция времени (рис. 2.1, б):

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.2)$$

При естественном способе (рис. 2.1, в) задают траекторию точки, начало отсчета с указанием положительного направления и закон движения точки вдоль траектории:

$$S = S(t). \quad (2.3)$$

Скорость точки в координатной форме определяется путем дифференцирования уравнений (2.1):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (2.4)$$

Модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.5)$$

Направление скорости определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\vartheta, x) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vartheta, y) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vartheta, z) = \frac{v_z}{v}.$$

Компоненты ускорения определяются по формулам:

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}. \quad (2.6)$$

Модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.7)$$

Направление ускорения определяется по направляющим косинусам:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Если тело совершает вращательное движение, его положение вполне определяется одной независимой координатой – углом поворота $\varphi = \varphi(t)$.

Угловая скорость определяется как первая производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.8)$$

Угловым ускорением является первая производная от угловой скорости по времени, или вторая производная от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2.9)$$

Вращение тела, при котором угловое ускорение постоянно, называется равнопеременным вращением. Если абсолютная величина угловой скорости увеличивается, вращение называется равноускоренным, а если уменьшается – равнозамедленным. Угловая скорость при равнопеременном вращении определяется по формуле:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t,$$

где ω_0 – угловая скорость в начальный момент времени.

Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, то движение равноускоренное, а если разные – равнозамедленное.

Закон равнопеременного вращения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где φ_0 – угол поворота в начальный момент времени.

Линейная скорость \mathfrak{V} точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению угловой скорости ω на расстояние r от точки до оси вращения:

$$\mathfrak{V} = \omega \cdot r. \quad (2.10)$$

Касательное ускорение a_τ точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, направлено в сторону скорости точки при ускоренном вращении и в сторону, противоположную скорости, при замедленном вращении. Значение касательного ускорения равно:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r. \quad (2.11)$$

Нормальное ускорение направлено к оси вращения, а его значение равно:

$$a_n = \omega^2 \cdot r. \quad (2.12)$$

При плоском (плоскопараллельном) движении положение фигуры D в плоскости xOy определяется положением какого-либо отрезка AB , принадлежащего фигуре. Положение отрезка, в свою очередь задается координатами какой-либо его точки A (полюса) и углом φ , образуемым отрезком с положительным направлением оси Ox (рис. 2.2, а). Поэтому уравнения плоскопараллельного движения твердого тела имеют вид:

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t).$$

Скорость точки B равна векторной сумме скорости точки A , принятой за полюс, и вращательной скорости точки B вокруг полюса:

$$\bar{\mathfrak{V}}_B = \bar{\mathfrak{V}}_A + \bar{\mathfrak{V}}_{BA}.$$

Вектор вращательной скорости $\bar{\mathfrak{V}}_{BA}$ перпендикулярен линии, соединяющей точки A и B .

Скорость точки B можно найти, воспользовавшись теоремой, согласно которой проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, их соединяющую, равны между собой:

$$\mathfrak{V}_{B(AB)} = \mathfrak{V}_{A(AB)}.$$

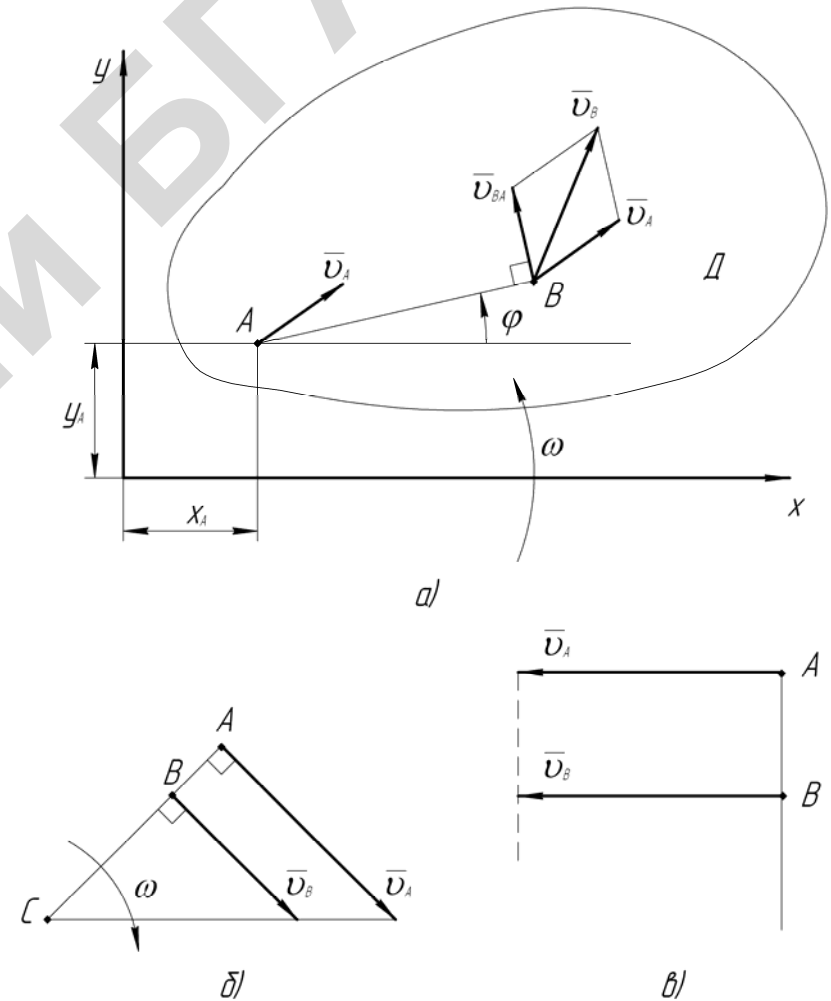


Рис. 2.2. Кинематика твердого тела, совершающего плоское движение

Точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю, называется мгновенным центром скоростей. Скорость любой точки плоской фигуры численно равна произведению угловой скорости на длину отрезка, соединяющего точку с мгновенным центром скоростей C , и направлена перпендикулярно этому отрезку в сторону вращения фигуры:

$$\begin{aligned} \vartheta_A &= \omega \cdot AC, \\ \vartheta_B &= \omega \cdot BC. \end{aligned}$$

Модули скоростей точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей (рис. 2.2, б):

$$\frac{\vartheta_A}{\vartheta_B} = \frac{AC}{BC}.$$

Мгновенный центр скоростей какого-либо звена находится на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей двух точек звена.

Если скорости точек A и B плоской фигуры равны, параллельны между собой и перпендикулярны к линии AB , то мгновенный центр скоростей находится в бесконечности (рис. 2.2, в), а угловая скорость фигуры равна:

$$\omega = \frac{\vartheta_A}{\infty} = 0.$$

Ускорение какой-либо точки плоской фигуры в каждый момент времени равно векторной сумме ускорения полюсов и ускорения этой точки при вращении вокруг полюса:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$$

Относительное ускорение \bar{a}_{AB} точки B во вращательном движении вокруг полюса A можно представить как векторную сумму касательного и нормального ускорений:

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n.$$

2.2. Кинематическое исследование плоских рычажных механизмов

2.2.1. Передаточные функции механизма

Число независимых друг от друга кинематических параметров механизма с заданной структурной схемой равно числу степеней свободы механизма или числу обобщенных координат. Звено, которому приписывается одна или несколько обобщенных координат, называют начальным звеном.

Функцией положения одноподвижного механизма называют зависимость координаты выходного звена φ_i от обобщенной координаты механизма φ_1 . Для кинематического исследования механизма применяются передаточные функции. Первая передаточная функция:

$$\frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}$$

и вторая передаточная функция:

$$\frac{d^2\varphi_i}{d\varphi_1^2},$$

где φ_1 – обобщенная координата одноподвижного механизма.

Первую и вторую передаточные функции называют также аналогом угловой скорости и аналогом углового ускорения звена i .

Найдем угловую скорость ω_3 и угловое ускорение ε_3 звена 3 шарнирного четырехзвенника (см. рис. 1.1, а):

$$\omega_3 = \dot{\varphi}_3 = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \dot{\varphi}_1, \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_3 = \ddot{\varphi}_3 = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} \omega_1^2 + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \varepsilon_1, \quad (2.14)$$

где $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ и $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1$ – соответственно угловые скорость и ускорение звена 1.

Для кривошипно-ползунного механизма (см. рис. 1.1, б):

$$\vartheta = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{ds}{d\varphi_1} \omega_1, \quad (2.15)$$

где ϑ – скорость ползуна;

s – перемещение ползуна;

$\frac{ds}{d\varphi_1}$ – аналог скорости.

$d\varphi_1$

Ускорение ползуна:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2s}{d\varphi_1^2} \omega_1^2 + \frac{ds}{d\varphi_1} \varepsilon_1, \quad (2.16)$$

где $\frac{d^2s}{d\varphi_1^2}$ – аналог ускорения.

2.2.2. Аналитический метод кинематического анализа

Аналитическое исследование кривошипно-ползунного механизма проведем методом векторных контуров.

Для кривошипно-ползунного механизма, (рис. 2.3, а) рассмотрим векторный контур OAB . Выберем систему координат Oxy , начало которой совместим с осью вращения кривошипа I .

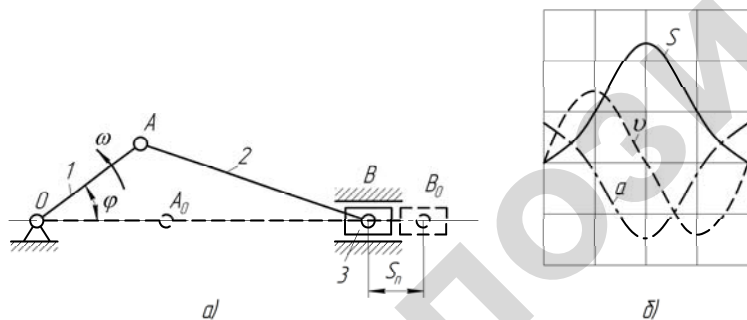


Рис. 2.3. Аналитическое исследование кривошипно-ползунного механизма: а – кривошипно-ползунный механизм; б – зависимости перемещения, скорости и ускорения ползуна от угла поворота кривошипа

Угловая скорость кривошипа определяется как первая производная угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi n}{30},$$

где n – частота вращения кривошипа, об/мин.

Окружная скорость точки A кривошипа равна:

$$\vartheta_A = \omega \cdot l_{OA}.$$

При повороте кривошипа на угол φ ползун 3 переместится из точки B_0 в точку B на величину s_n .

Запишем векторное уравнение для контура OAB .

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}.$$

Учитывая, что $OA = R$, $AB = L$, а $OB_0 = R + L$, получим:

$$\overline{R} + \overline{L} = \overline{OB}. \quad (2.17)$$

Проекция уравнения (2.17) на ось Ox равна:

$$R \cos \varphi + L \cos \beta = OB.$$

Так как $OB = R + L - s_n$, то:

$$R \cos \varphi + L \cos \beta = R + L - s_n. \quad (2.18)$$

где s_n – перемещение ползуна.

Проекция уравнения (2.17) на ось Oy равна:

$$R \sin \varphi - L \sin \beta = 0. \quad (2.19)$$

Введем обозначение $\lambda = \frac{R}{L}$. Тогда $L = \frac{R}{\lambda}$.

Из уравнения (2.19) находим $\sin \beta = \lambda \sin \varphi$. Отсюда:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}.$$

Из (2.18) найдем перемещение ползуна:

$$s_0 = R \left[1 + \frac{1}{\lambda} - (\cos \varphi + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}) \right]. \quad (2.20)$$

Выражение $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$ представим в виде $(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$ и разложим в биномиальный ряд и ограничимся его первыми двумя членами:

$$(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi.$$

С учетом этого допущения формула (2.20) примет вид:

$$s_n = R \left(1 - \cos \varphi + \frac{1}{2} \lambda \sin^2 \varphi \right). \quad (2.21)$$

На рис. 2.3, б приведены зависимости перемещения ползуна s_n и его составляющих от угла φ поворота кривошипа.

Скорость ползуна найдем путем дифференцирования по t уравнения (2.21):

$$\vartheta_n = \frac{ds_n}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{ds_n}{d\varphi} = R \omega \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right). \quad (2.22)$$

На рис. 2.3, б приведены кривые скорости ползуна (поршня) и ее составляющие.

Ускорение ползуна может быть получено дифференцированием уравнения (2.22) по времени:

$$a_n = \frac{d\vartheta_n}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vartheta_n}{d\varphi} = R \omega^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi). \quad (2.23)$$

На рис. 2.3, б показаны кривая ускорения ползуна a_n и ее составляющие в зависимости от φ .

2.2.3. Графоаналитический метод определения скоростей и ускорений (метод планов)

При кинематическом исследовании методом планов скоростей и ускорений их представляют векторами. Длину отрезков, условно изображающих кинематические величины, измеряют в миллиметрах (мм).

Масштабным коэффициентом μ называют отношение действительной величины к длине отрезка, изображающего данную величину.

Обозначим:

x_ϑ – отрезок, изображающий скорость ϑ (м/с);

x_a – отрезок, изображающий ускорение a (м/с²).

Тогда масштабные коэффициенты скорости и ускорений будут равны:

$$\mu_\vartheta = \frac{\vartheta}{x_\vartheta} \left[\frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}} \right], \quad \mu_a = \frac{a}{x_a} \left[\frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{мм}} \right].$$

Метод планов скоростей и ускорений основан на теореме о сложении движения. Рассмотрим пример кинематического анализа шарнирного четырехзвенника методом планов.

По заданным размерам и углу φ_1 в масштабе μ_l строим план положений механизма (рис. 2.4, а).

Построение плана скоростей

Вначале определяем величину линейной скорости точки A :

$$\vartheta_A = \omega_1 \cdot l_{OA}. \quad (2.24)$$

В зависимости от полученной величины скорости ϑ_A выбираем масштабный коэффициент μ_ϑ для построения плана скоростей. Из полюса p плана скоростей, выбранного в произвольном месте, проводим вектор скорости точки A \overline{pa} перпендикулярно звену OA , направленный в сторону вращения кривошипа l (рис. 2.4, б). Причем, модуль вектора \overline{pa} равен:

$$|\overline{pa}| = \frac{\vartheta_A}{\mu_\vartheta}. \quad (2.25)$$

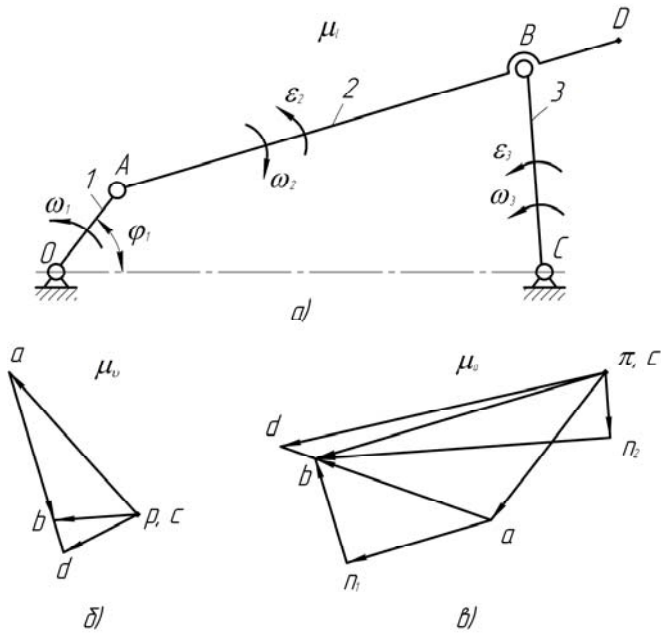


Рис. 2.4. Кинематическое исследование механизма шарнирного четырехзвенника методом планов: а – схема механизма; б – план скоростей; в – план ускорений

Далее определяем скорость точки B , принадлежащей структурной группе Ассур II класса 1-го вида, состоящей из звеньев 2, 3. Точка B совершает два относительных вращательных движения: в звене 2 точка B вращается относительно точки A , а в звене 3 – относительно точки C . Согласно этому составляем систему двух векторных уравнений, графическое решение которой позволяет определить величину и направление скорости точки B :

$$\begin{cases} \bar{\vartheta}_B = \bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_{BA}; \\ \bar{\vartheta}_B = \bar{\vartheta}_C + \bar{\vartheta}_{BC}. \end{cases} \quad (2.26)$$

Согласно первому уравнению системы (2.26) через точку a на плане скоростей проводим прямую, перпендикулярную звену AB ($\bar{\vartheta}_{BA} \perp AB$), а согласно второму через полюс p , так как $\vartheta_C = 0$, про-

водим прямую, перпендикулярную звену BC ($\bar{\vartheta}_{BC} \perp BC$). Пересечение этих прямых определяет положение точки b на плане скоростей, изображающей конец векторов абсолютной $\bar{\vartheta}_B$ и относительной $\bar{\vartheta}_{BA}$ скоростей. Из построенного плана скоростей находим величины указанных скоростей:

$$\vartheta_B = \mu_{\vartheta} \cdot pb;$$

$$\vartheta_{BA} = \mu_{\vartheta} \cdot ab.$$

Исходя из второго уравнения системы (2.26) и построенного плана скоростей, величина и направление относительной скорости $\bar{\vartheta}_{BC}$ соответствует величине и направлению абсолютной скорости $\bar{\vartheta}_B$:

$$\vartheta_{BC} = \mu_{\vartheta} \cdot cb = \vartheta_B.$$

Скорость точки D определим по теореме подобия: фигура, образованная точками звена на схеме механизма (в нашем случае звена 2) должна быть подобна фигуре, образованной соответствующими точками на плане скоростей (ускорений), т. е. фигура ABD подобна фигуре abd . На основании этого составим пропорцию:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{ab}{bd},$$

Откуда

$$(bd) = \frac{BD(ab)}{AB}.$$

Для определения положения точки d на плане скоростей на продолжении вектора ab откладываем отрезок длиной bd и, соединив полученную точку d с полюсом p , получим вектор скорости точки D в масштабе μ_{ϑ} , то есть pd .

Величина скорости точки D определяется по формуле:

$$\vartheta_D = \mu_{\vartheta} \cdot pd.$$

Далее определяем величины угловых скоростей звеньев 2 и 3:

$$\omega_2 = \frac{\vartheta_{BA}}{l_{AB}}; \omega_3 = \frac{\vartheta_{BC}}{l_{BC}}. \quad (2.27)$$

Направления вращения звеньев 2 и 3 зависят от направлений векторов относительных скоростей $\bar{\vartheta}_{BA}$ и $\bar{\vartheta}_{BC}$. Для этого вектор $\bar{\vartheta}_{BA}$, на плане скоростей это вектор \overline{ab} , необходимо перенести в точку B на схеме механизма и посмотреть, в каком направлении под действием этого вектора будет вращаться звено 2 относительно точки A (в нашем случае по часовой стрелке). Вектор $\bar{\vartheta}_{BC}$, на плане скоростей это вектор \overline{cb} , перенесенный в точку B на схеме механизма, поворачивает звено 3 относительно точки C против часовой стрелки.

Построение плана ускорений

Определяем величину ускорения точки A . При постоянной угловой скорости кривошипа l ($\omega_1 = \text{const}$) точка имеет только нормальное ускорение, т. к. $\varepsilon_1 = 0$:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}. \quad (2.28)$$

В зависимости от полученной величины ускорения a_A выбираем масштабный коэффициент μ_a для построения плана ускорений. Из полюса π плана ускорений, выбранного в произвольном месте, проводим вектор ускорения точки A $\overline{\pi a}$, направленный параллельно звену OA к центру вращения, то есть от точки A к точке O (рис. 2.4, в), с учетом того, что:

$$|\overline{\pi a}| = \frac{a_A}{\mu_a}. \quad (2.29)$$

Для определения ускорения точки B составляем систему двух векторных уравнений, рассматривая относительное вращательное движение точки B относительно точек A и C :

$$\begin{cases} \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau; \\ \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau. \end{cases} \quad (2.30)$$

В первом уравнении системы нормальное ускорение \bar{a}_{BA}^n направлено параллельно звену 2 от точки B к точке A , а его величина равна:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}. \quad (2.31)$$

Из точки a на плане ускорений проводим вектор этого ускорения длиной:

$$an_1 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}. \quad (2.32)$$

Затем через точку n_1 проводим прямую в направлении вектора тангенциального ускорения \bar{a}_{BA}^τ перпендикулярно звену AB .

Нормальное ускорение \bar{a}_{BC}^n во втором уравнении направлено параллельно звену 3 от точки B к точке C и его величина определяется по формуле:

$$a_{BC}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BC}. \quad (2.33)$$

Из точки c на плане ускорений, которая находится в полюсе π (так как $a_C = 0$) проводим вектор этого ускорения длиной:

$$cn_2 = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a}. \quad (2.34)$$

Через точку n_2 проводим прямую в направлении вектора тангенциального ускорения \bar{a}_{BC}^τ перпендикулярно звену BC .

Точка пересечения прямых проведенных через точки n_1 и n_2 на плане ускорений (направления \bar{a}_{BA}^τ и \bar{a}_{BC}^τ) определяет положение точки b , изображающей конец вектора абсолютного ускорения \bar{a}_B . Из построенного плана ускорений находим величину ускорения точки B :

$$a_B = \mu_a (\pi b).$$

Полученные на плане ускорений векторы $\overline{n_1 b}$ и $\overline{n_2 b}$ являются соответственно векторами тангенциальных ускорений $\overline{a_{BA}^\tau}$ и $\overline{a_{BC}^\tau}$, их величины равны:

$$\begin{aligned} a_{BA}^\tau &= \mu_a \cdot n_1 b; \\ a_{BC}^\tau &= \mu_a \cdot n_2 b. \end{aligned}$$

Ускорение точки D , также как и скорость, определим по теореме подобия, согласно которой фигура ABD на схеме механизма подобна фигуре abd на плане ускорений. Следовательно:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{ab}{bd},$$

откуда:

$$bd = \frac{BD \cdot ab}{AB}.$$

Для определения положения точки d на плане ускорений на продолжении вектора ab , который является вектором полного относительного ускорения $\overline{a_{BA}}$ ($\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}$), откладываем отрезок длиной bd и, соединив полученную точку d с полюсом π , получим вектор ускорения точки D в масштабе μ_a , то есть вектор $\overline{\pi d}$.

Величина ускорения точки D определяется по формуле:

$$a_D = \mu_a \cdot \pi d.$$

Определим величины угловых ускорений звеньев 2 и 3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^\tau}{l_{BC}}.$$

Направления угловых ускорений звеньев 2 и 3 зависят от направлений векторов относительных ускорений $\overline{a_{BA}^\tau}$ и $\overline{a_{BC}^\tau}$. Для этого вектор $\overline{a_{BA}^\tau}$, на плане ускорений это вектор $\overline{n_1 b}$, необходимо перенести в точку B на схеме механизма и посмотреть в каком направлении под действием этого вектора будет вращаться звено 2 относительно точки A (в данном случае против часовой стрелки). Вектор относительного ускорения $\overline{a_{BC}^\tau}$, на плане ускорений это вектор $\overline{n_2 b}$, перенесенный в точку B на схеме механизма поворачивает звено 3 относительно точки C также против часовой стрелки.

Приведем пример кинематического исследования кривошипно-ползунного механизма методом планов (рис. 2.5). Согласно теореме о сложении движения, движение звена BC (рис. 2.5, a) рассматривается как сложное, состоящее из двух движений: переносного поступательного движения полюса и относительного вращательного вокруг полюса.

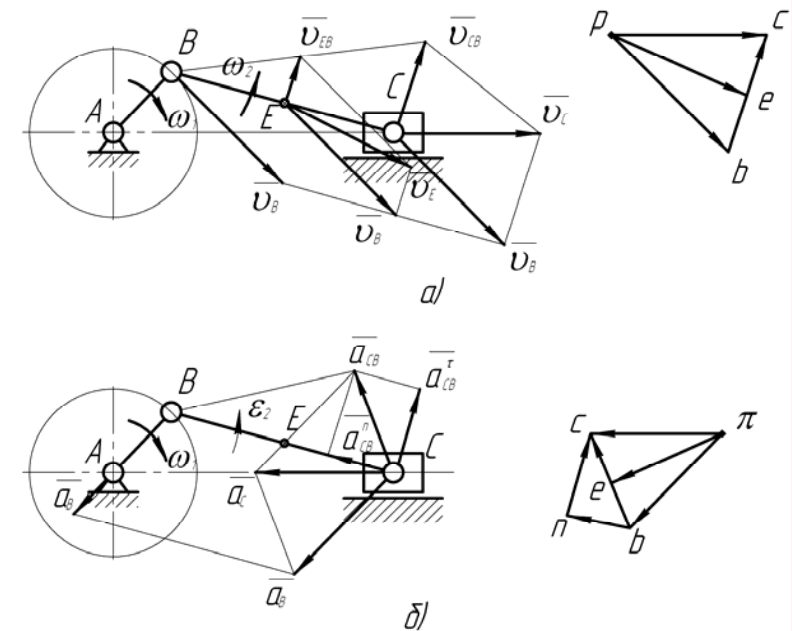


Рис. 2.5. Кинематическое исследование кривошипно-ползунного механизма методом планов: a – построение плана скоростей; b – построение плана ускорений

Рассмотрим движение точки C , относящейся к звеньям 2 и 3, относительно точек B и C_0 , принадлежащей неподвижному звену (направляющей). Для скоростей двух точек C и B звена 2 можно записать следующее векторное уравнение:

$$\bar{\vartheta}_C = \bar{\vartheta}_B + \bar{\vartheta}_{CB}, \quad (2.36)$$

где $\bar{\vartheta}_B$ – абсолютная скорость точки B ;

$\bar{\vartheta}_{CB}$ – скорость точки C при вращении звена BC относительно точки B (относительная скорость).

Для поступательного движения ползуна 3 относительно неподвижной направляющей составим следующее уравнение:

$$\bar{\vartheta}_C = \bar{\vartheta}_{C_0} + \bar{\vartheta}_{CC_0}, \quad (2.37)$$

где $\bar{\vartheta}_{C_0}$ – скорость неподвижной направляющей ($\vartheta_{C_0} = 0$);

$\bar{\vartheta}_{CC_0}$ – относительная поступательная скорость точки C по отношению к неподвижной направляющей.

На рис. 2.5, *а* показан план скоростей, в котором абсолютные скорости точек B , E , C исходят из полюса p .

Для определения ускорения точек B и C можно написать векторное уравнение $\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}$, \bar{a}_B – ускорение точки B ; \bar{a}_{CB} – полное ускорение точки C относительно точки B .

Ускорение \bar{a}_{CB} можно геометрически разложить на два ускорения (рис. 2.5, *б*): $\bar{a}_{CB} = \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^{\tau}$, где \bar{a}_{CB}^n – нормальное ускорение; \bar{a}_{CB}^{τ} – тангенциальное ускорение точки C во вращательном движении относительно точки B .

Величины этих ускорений:

$$a_{CB}^n = \frac{\vartheta_{CB}^2}{l_{CB}} = \omega_2^2 \cdot l_{CB}; \quad a_{CB}^{\tau} = \frac{d\vartheta_{CB}}{dt} = l_{CB} \cdot \varepsilon_2. \quad (2.38)$$

На рис. 2.5, *б* показан план ускорений звена BC , в котором все абсолютные ускорения точек B , C , E и других исходят из полюса π , а между концами векторов абсолютных ускорений проведены векторы относительных ускорений.

Кинематическое исследование методом планов кулисного механизма представлено на рис. 2.6.

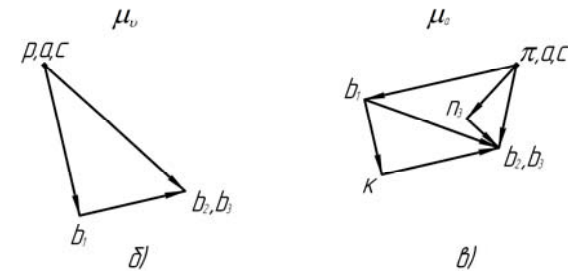
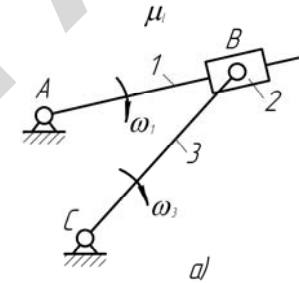


Рис. 2.6. Кинематическое исследование кулисного механизма методом планов
а – схема кулисного механизма; *б* – план скоростей; *ε* – план ускорений

В данном случае абсолютное движение ползуна 2 рассматривается как сумма переносного движения ползуна вместе с подвижной направляющей 1 (кулисой) и относительного движения вдоль кулисы 1. Тогда для абсолютной скорости точки B , относящейся к звену 2 (B_2), запишем следующее векторное уравнение:

$$\bar{\vartheta}_{B_2} = \bar{\vartheta}_{B_3} = \bar{\vartheta}_{B_1} + \bar{\vartheta}_{B_2B_1}, \quad (2.39)$$

где ϑ_{B_2} и ϑ_{B_3} – абсолютные скорости точек B_2 и B_3 ;

$\vartheta_{B_1} = \omega_1 \cdot l_{AB}$ – скорость точки B_1 кулисы, рассматриваемая по отношению к ползуну 2 как переносная;

$\vartheta_{B_2B_1}$ – поступательная скорость ползуна 2 (точки B_2) относительно кулисы 1 (относительно точки B_1).

Графически последнее векторное уравнение представлено на рис. 2.6, б для случая, когда входным звеном является кулиса 1. Для абсолютного ускорения точки B_2 запишем следующее векторное уравнение:

$$\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{B_1} + \bar{a}_k + \bar{a}_{B_2B_1}, \quad (2.40)$$

где \bar{a}_{B_1} – ускорение точки B_1 кулисы 1, равное при $\omega_1 = \text{const}$ нормальному ускорению $a_{B_1}^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$;

a_k – кориолисово ускорение точки B ;

$a_{B_2B_1}$ – ускорение точки B_2 относительно точки B_1 кулисы 1.

Так как угловая скорость переносного движения $\omega_{\text{пер}} = \omega_1 \neq 0$, то ускорение a_k в рассматриваемом случае отлично от нуля. Вектор ω_1 перпендикулярен плоскости чертежа, а модуль кориолисова ускорения равен:

$$a_k = 2\omega_1 \vartheta_{B_2B_1} = 2\omega_1 (b_1 b_2) \mu_{\vartheta}, \quad (2.41)$$

где μ_{ϑ} – масштабный коэффициент плана скоростей;

$b_1 b_2$ – длина вектора, изображающего относительную скорость $\vartheta_{B_2B_1}$ на плане скоростей.

Направление ускорения a_k получают, учитывая, что это результат векторного произведения: вектор ускорения a_k в данном случае направлен в ту сторону, в которую окажется направленным вектор скорости $\vartheta_{B_2B_1}$, если его повернуть на 90° по направлению угловой скорости $\omega_{\text{пер}} = \omega_1$.

План ускорений для кулисного механизма (рис. 2.6, в) построен согласно формулы (2.40) и уравнению:

$$\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{B_3} = \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau, \quad (2.42)$$

где \bar{a}_{BC}^n и \bar{a}_{BC}^τ – нормальное и тангенциальное ускорения точки B относительно точки C .

2.3. Кинематика зубчатых механизмов

2.3.1. Передачи с неподвижными осями

Рассмотрим преобразование движения в механизмах. Линейные скорости и ускорения точек, угловые скорости и угловые ускорения колес определяются по зависимостям 2.8–2.12. При этом следует учитывать закон движения определенного звена передаточного механизма.

При расчете скоростей и ускорений колес зубчатых передач следует исходить из того, что вращательная (линейная) скорость в точке соприкосновения колес относится к точкам обоих колес.

Значение скорости ϑ равно произведению угловой скорости колеса на его радиус:

$$\vartheta = r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2.$$

Из этого соотношения получаем:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

При ременных передачах скорости всех точек ремня одинаковы, если скольжение ремня отсутствует. К ременной передаче применяются те же соотношения, что и для зубчатой:

$$\vartheta = r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2.$$

Направление движения всех звеньев определяет направление движения ведущего звена.

Для передачи вращательного движения от ведущего к ведомому валу используют механизмы, позволяющие обеспечить изменение

скорости, направления вращения или положения оси ведомого вала. Передача вращательного движения возможна при помощи зубчатых, фрикционных и других механизмов.

В простой передаче имеются только два вала. Если в передаче имеются также промежуточные валы, то такая передача называется сложной.

Передаточным отношением передачи вращения называется отношение угловых скоростей ω валов или их частот вращения n . Передаточное отношение u_{1n} от вала 1 к валу n :

$$u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{n_1}{n_n},$$

а от вала n к валу 1:

$$u_{n1} = \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{1}{u_{1n}}.$$

Кинематические схемы наиболее часто применяемых простых передач вращения показаны на рис. 2.7.

Скорость точек окружностей, совпадающих с полюсом p , равна:

$$v_p = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2.$$

Поэтому абсолютная величина передаточного отношения этой передачи:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Число зубьев z пропорционально радиусам r или диаметрам колес d , поэтому в простых передачах:

$$u_{12} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

Знак передаточного отношения у зубчатой передачи с наружным зацеплением – отрицательный, а у зубчатой передачи с внутренним зацеплением – положительный.

В сложной передаче с n валами каждые два соседних вала образуют простую передачу. Найдем произведение их передаточных отношений:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \dots \cdot \frac{\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}.$$

Следовательно,

$$u_{1n} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot \dots \cdot u_{(n-1)n}.$$

Таким образом, передаточное отношение сложной передачи равно произведению передаточных отношений простых передач.

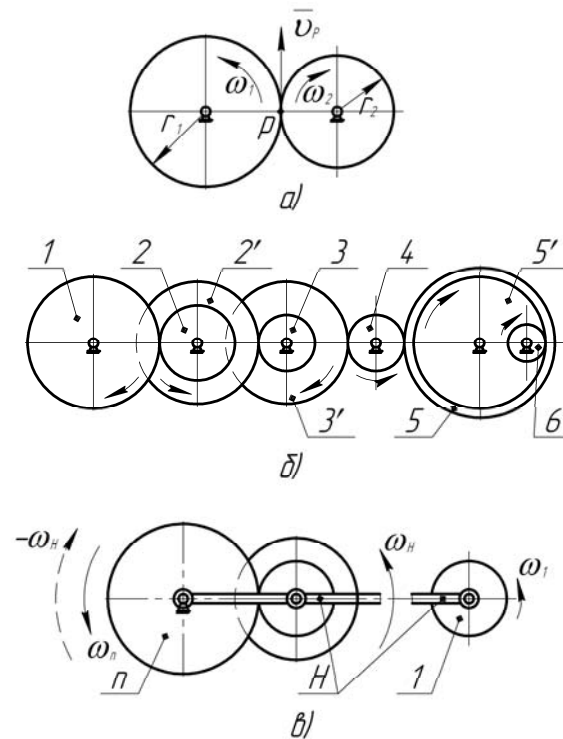


Рис. 2.7. Кинематические схемы наиболее часто применяемых простых передач вращения

Применяя эту формулу для зубчатой передачи, показанной на рис. 2.7, б, получаем:

$$u_{16} = -\frac{z_2}{z_1} \left(-\frac{z_3}{z_2'} \right) \left(-\frac{z_4}{z_3'} \right) \left(-\frac{z_5}{z_4} \right) \frac{z_6}{z_5'} = \frac{z_2 z_3 z_5 z_6}{z_1 z_2' z_3' z_5'}$$

Из последней формулы видно, что на числовое значение передаточного отношения промежуточное колесо 4 не влияет. Такие колеса называют паразитными колесами; они устанавливаются для изменения направления вращения и связи между валами с большим межосевым расстоянием.

2.3.2. Передачи с подвижными осями

Передачи вращения, у которых одна или несколько осей вращения зубчатых колес подвижны, называют планетарными передачами, а колеса с осями, связанными с вращающимся водилом, – сателлитами. Число сателлитов обычно составляет 2–4. Если в передаче имеется неподвижное зубчатое колесо, то оно называется солнечным колесом. Планетарные передачи можно разделить на следующие группы:

- 1) планетарные;
- 2) дифференциальные;
- 3) замкнутые дифференциальные;
- 4) комбинированные планетарные.

Кинематический расчет всех этих передач может быть произведен с помощью формулы Виллиса.

Для вывода формулы Виллиса рассмотрим показанный на рис. 2.7, в планетарный механизм. Водило H и центральное колесо n вращаются вокруг одной и той же неподвижной оси. Остальные колеса являются сателлитами.

При движении механизма абсолютные угловые скорости крайних колес и водила следующие: $\omega_1, \omega_n, \omega_H$. Если зададим всему механизму общую угловую скорость $(-\omega_H)$ вокруг неподвижной оси, то водило становится неподвижным, а крайние колеса приобретут угловые скорости $\omega_1 - \omega_H$ и $\omega_n - \omega_H$, отношение которых будет равняться:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_n - \omega_H} = u_{1n}^H \quad (2.43)$$

В формуле Виллиса (2.43) угловые скорости можно заменить пропорциональными им частотами вращения n ; можно поменять местами индексы 1 и n , не меняя их в механизме; можно индекс 1 заменить индексом какого-либо промежуточного колеса, чтобы определить его скорость вращения. Формула Виллиса остается верной также тогда, когда механизм преобразуем так, что ось колеса 1 совпадает с осью неподвижного колеса и водила H ; тогда колесо 1 также является центральным, и механизм преобразуется в соосную планетарную передачу, которая наиболее часто применяется в технике.

Планетарные передачи

Характерной чертой планетарных передач является неподвижное центральное (солнечное) колесо.

Если в механизме на рис. 2.7, в остановим колесо n , то получим планетарную передачу с $W = 1$. Поэтому она имеет только два крайних вала: на одном посажено колесо 1 , на втором – водило H . Выражение для передаточного отношения между этими валами получим, если в формуле Виллиса (2.43) положим $\omega_n = 0$:

$$u_{1H} = 1 - u_{1n}^H \quad (2.44)$$

где n – индекс неподвижного центрального колеса.

Эта формула называется формулой для определения передаточного отношения планетарной передачи.

Рассмотрим пример определения передаточного отношения многоступенчатого зубчатого механизма, в состав которого входит планетарная передача. Для зубчатого механизма (рис. 2.8) при $z_1 = 17, z_2 = 34, z_2' = 40, z_3' = 20, z_4 = 100, z_5 = 14, z_6 = 42, \omega_6 = 10 \text{ с}^{-1}$ определить: число степеней свободы механизма W , число зубьев колеса 3 из условия соосности валов O_2 и O_H , передаточное отношение механизма U_{16} , угловую скорость колеса 1 ω_1 .

Число степеней свободы механизма W определяем по формуле Чебышева для плоских механизмов (1.6):

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1. \quad (2.45)$$

Число зубьев колеса 3 определим из условия соосности валов O_2 и O_H :

$$a_{w_{23}} = a_{w_{34}} \quad (2.46)$$

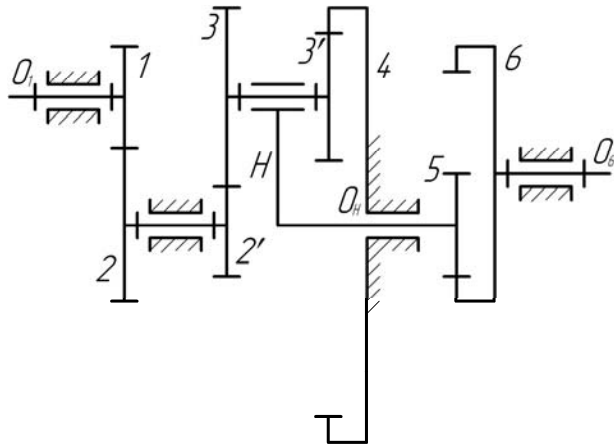


Рис. 2.8. Схема многоступенчатого зубчатого механизма

Выразим межосевые расстояния через радиусы начальных окружностей:

$$r_{w_2'} + r_{w_3} = r_{w_4} - r_{w_3'} \quad (2.47)$$

Для нулевого колеса радиус начальной окружности r_w совпадает с радиусом делительной окружности r :

$$r_2' + r_3 = r_4 - r_3' \quad (2.48)$$

Радиус делительной окружности r определяется по формуле:

$$r = \frac{mz}{2}, \quad (2.49)$$

где m – модуль зубчатого колеса.

Формула (2.48) с учетом формулы (2.49) примет вид:

$$\frac{mz_2'}{2} + \frac{mz_3}{2} = \frac{mz_4}{2} - \frac{mz_3'}{2}, \quad (2.50)$$

Отсюда, принимая модули зубчатых колес m равными, запишем:

$$z_2' + z_3 = z_4 - z_3'. \quad (2.51)$$

Окончательно из (2.51) выразим число зубьев колеса 3:

$$z_3 = z_4 - z_3' - z_2' = 100 - 20 - 40 = 40.$$

Передаточное отношение механизма U_{16} вначале запишем как передаточное отношение сложной передачи, включающей планетарную передачу:

$$U_{16} = U_{12} \cdot U_{2H} \cdot U_{56}. \quad (2.52)$$

Передаточное отношение простой передачи с наружным зацеплением U_{12} найдем по формуле:

$$U_{12} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{34}{17} = -2. \quad (2.53)$$

Передаточное отношение планетарной передачи U_{2H} :

$$U_{2H} = 1 - U_{24} = 1 - U_{23}U_{34} = 1 - \left(-\frac{z_3}{z_2'}\right) \frac{z_4}{z_3} = 1 + \frac{40}{40} \cdot \frac{100}{20} = 6. \quad (2.54)$$

Передаточное отношение простой передачи с внутренним зацеплением U_{56} найдем по формуле:

$$U_{56} = +\frac{z_6}{z_5} = \frac{42}{14} = 3. \quad (2.55)$$

Подставляя результаты формул 2.53–2.55 в формулу (2.52) находим передаточное отношение механизма U_{16} :

$$U_{16} = U_{12} \cdot U_{2H} \cdot U_{56} = -2 \cdot 6 \cdot 3 = -36. \quad (2.56)$$

Знак «-» указывает на то, что входное колесо 1 механизма и выходное колесо 6 вращаются в противоположных направлениях.

Угловую скорость колеса 1 ω_1 найдем из зависимости:

$$U_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6}. \quad (2.57)$$

Отсюда:

$$\omega_1 = U_{16} \cdot \omega_6 = 36 \cdot 10 = 360 \text{ с}^{-1}.$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоят задачи кинематического анализа механизма? Какими методами они решаются?
2. Что такое масштабный коэффициент?
3. Как определяются скорость и ускорение точки начального звена механизма?
4. Как определяются величины и направления нормальных и тангенциальных ускорений точек?
5. Как формулируется теорема подобия для планов скоростей и ускорений?
6. Каким образом из построенных планов скоростей и ускорений определяются направления угловых скоростей и ускорений для звеньев, совершающих относительно вращательное движение?
7. Чем простая зубчатая передача отличается от сложной?
8. Что такое передаточное отношение и как оно определяется для простой зубчатой передачи?
9. Как передаточное отношение определяется для сложной зубчатой передачи?
10. Какие бывают виды зубчатых механизмов с подвижными осями колес и по какой формуле для них определяется передаточное отношение?

3. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Задачи силового анализа

В главе 2 «Кинематический анализ механизмов» изучались геометрические свойства движений элементов механизмов вне зависимости от причин, вызвавших эти движения. В задачах динамики изучаются законы механических движений в зависимости от свойств сил, обуславливающих эти движения.

Для получения дифференциальных уравнений движения используется основной закон динамики:

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (3.1)$$

Выразим вектор ускорения \bar{a} через радиус-вектор \bar{r} :

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Тогда дифференциальное уравнение движения точки массой m в векторной форме примет вид:

$$m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}. \quad (3.2)$$

В декартовой системе координат дифференциальные уравнения движения точки получатся после проектирования правой и левой частей уравнения (3.2) на оси координат:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X, \\ m\ddot{y} &= Y, \\ m\ddot{z} &= Z, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где x, y, z – координаты точки;

X, Y, Z – проекции силы \bar{F} на оси координат.

На основании дифференциальных уравнений движения точки (3.3) решаются две основные задачи движения точки. Первая задача динамики свободной материальной точки (прямая задача) заключается в следующем: зная кинематический закон движения точки и ее массу, требуется найти равнодействующую сил, приложенных к точке. Допустим, заданы уравнения движения точки в координатной форме:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (3.4)$$

Чтобы найти проекции равнодействующей сил нужно дважды проинтегрировать уравнения (3.4) по времени и результаты подставить в дифференциальные уравнения движения (3.3). Проекции равнодействующей на ось полностью определяют вектор равнодействующей, т. е. модуль вектора равнодействующей и его направление.

Вторая задача динамики (обратная задача) заключается в следующем: по заданным силам, действующим на точку, и ее массе требуется найти закон движения. Так как сила может зависеть от координат движущейся точки, времени и скорости движения, то дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Общий интеграл системы уравнений (3.5) может быть представлен в форме, решенной относительно x, y, z :

$$\begin{aligned} x &= x(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \\ y &= y(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \\ z &= z(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где c_1, c_2, \dots, c_6 – постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования определяются с учетом начальных условий, т. е. значений координат x_0, y_0, z_0 и проекций скорости $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ для начального момента времени t_0 .

Законы Ньютона применимы для изучения законов движения свободных систем. Система называется свободной, если на движения ее

точек не наложены кинематические ограничения. Несвободной называется система материальных точек, если на движения принадлежащих ей точек наложены наперед заданные кинематические ограничения.

Аксиома об освобождаемости от связей позволяет формально свести изучение движения несвободной системы к изучению движения свободной системы. При этом согласно аксиоме об освобождаемости от связей движение системы не изменится, если связи отбросить, а их действие заменить силами, равными реакциям отброшенных связей.

Существуют общие непосредственные способы решения задач механики несвободных систем. Для рассмотрения движения несвободных систем Даламбер предложил специальный принцип, который является синтезом второго закона Ньютона и аксиомы об освобождаемости от связей.

Для несвободной системы n материальных точек, отбросив связи и заменив их действие силами, равными реакциям связей, можно применить второй закон Ньютона:

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i + \bar{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Формально перепишем эти равенства так:

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i + (-m_i \bar{a}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.7)$$

Выражение, стоящее в скобках, называется силой инерции:

$$\bar{F}_{wi} = -m_i \bar{a}_i; \quad (3.8)$$

с учетом зависимости (3.8) равенство (3.7) примет вид:

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i + \bar{F}_{wi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.9)$$

Равенство (3.9) выражает принцип Даламбера. Практическое значение данного принципа заключается в том, что он позволяет формально свести задачи динамики к задачам статики.

Силовой анализ механизмов основан на решении прямой задачи динамики – по заданному движению определить действующие силы. Поэтому законы движения начальных звеньев при силовом анализе

считаются заданными. Внешние силы, приложенные к звеньям механизма, тоже считаются заданными. Поэтому подлежат определению только реакции в кинематических парах.

Иногда внешние силы, приложенные к начальным звеньям, считают неизвестными. Тогда задачей силового анализа является определение сил, при которых выполняются принятые законы движения начальных звеньев.

При решении обеих задач используется принцип Даламбера, согласно которому для механизма в любой момент времени геометрическая сумма главных векторов задаваемых сил, реакций связей и сил инерции материальных точек системы равна нулю.

Силовой расчет механизма позволяет:

- 1) определить оптимальные конструктивные формы звеньев механизма путем проведения расчета их на прочность, жесткость, вибростойкость;
- 2) рассчитать опоры и направляющие на долговечность;
- 3) выбрать мощность двигателя;
- 4) выполнить регулирование механизма;
- 5) уравновесить движущиеся массы.

3.2. Силы, действующие в механизмах

Выходными звеньями механической системы являются рабочие органы машины, движения которых непосредственно связаны с выполнением рабочего процесса. Такими рабочими органами являются, например, плуг, ковш экскаватора, фреза почвообрабатывающей машины, поршень компрессора, осуществляющий сжатие воздуха в рабочей камере и т. д. При выполнении рабочего процесса возникают активные силы сопротивления, действующие на рабочие органы: сила сопротивления почвы, сила давления сжимаемого газа в компрессоре. Как правило, эти силы зависят от параметров движения рабочих органов машины, их координат, скоростей и ускорений.

Рассмотрим рабочий процесс, происходящий в цилиндре поршневого компрессора (рис. 3.1, а). При рабочем ходе поршня (вправо) воздух в цилиндре сжимается до тех пор, пока не открывается выпускной клапан. При обратном ходе происходит засасывание воздуха через впускной клапан.

В машинах-двигателях какой-либо вид энергии преобразуется в механическую энергию. Механической характеристикой двигателя внутреннего сгорания является индикаторная диаграмма (рис. 3.1, б).

Силы подразделяют на движущие F_d и сопротивления F_c или моменты этих сил.

К движущим силам F_d или моментам M_d относят такие, которые обеспечивают движение механизма. Векторы движущих сил или совпадают с векторами скоростей тех точек звеньев механизма, к которым они приложены, или составляют острые углы. С энергетической точки зрения работа движущих сил положительна.

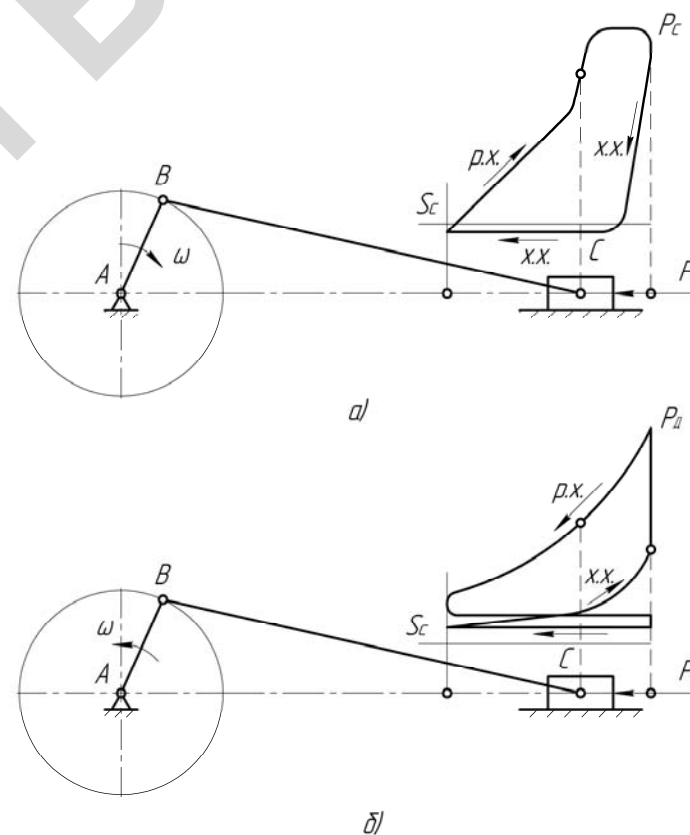


Рис. 3.1. Схемы рабочих процессов, происходящих в цилиндрах механизмов:
а – компрессора; б – двигателя

Силы сопротивления F_c или моменты этих сил M_c делятся на силы полезных, или технологических (производственных), сопротивлений $F_{п.с.}$ и силы вредных сопротивлений $F_{в.с.}$.

Силами полезных сопротивлений называют такие, для преодоления которых создана машина. Векторы этих сил направлены в противоположную сторону векторов скоростей точек звеньев механизма или составляют с ними тупые углы. С энергетической точки зрения работа сил полезных сопротивлений отрицательна.

К силам вредных сопротивлений относятся силы трения в кинематических парах, силы аэродинамических сопротивлений и др. На преодоление этих сил затрачивается дополнительная работа сверх той, которая необходима для преодоления сил полезного сопротивления.

Деление сил на движущие и силы сопротивления имеет некоторую условность. Так, силы тяжести звеньев при подъеме их центров масс оказываются силами сопротивлений, а при опускании центров – силами движущими; силы трения между шкивом и ремнем в ременной передаче являются движущими.

Силы инерции $F_{и}$ и моменты $M_{и}$ этих сил возникают при движении звеньев. В быстроходных механизмах по величине эти силы могут превосходить другие силы. Силы инерции, действующие на каждое звено механизма, приводятся к главному вектору и главному моменту инерционных сил:

$$\bar{F}_{и} = -m \cdot \bar{a}_s, \quad (3.10)$$

$$\bar{M}_{и} = -J_s \cdot \bar{\varepsilon}, \quad (3.11)$$

где m – масса звена;

a_s – ускорение центра масс звена;

ε – угловое ускорение звена;

J_s – момент инерции масс звена относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения звена.

Направление сил инерции и моментов сил инерции обратно направлениям соответствующих ускорений.

Реакции в кинематических парах R_{ji} – это усилия, с которыми одно звено i воздействует на другое j в местах их соприкосновения ($\bar{R}_{ji} = -\bar{R}_{ij}$). Во вращательной кинематической паре пятого класса

известна точка приложения реакции и неизвестны направление и числовое значение реакции. В поступательной кинематической паре пятого класса известно направление реакции и неизвестны точка приложения реакции и ее величина. В высшей кинематической паре плоского механизма известны точка приложения реакции и ее направление, но неизвестно числовое значение реакции.

Реакцию связей можно разделить на нормальную и тангенциальную составляющие. Нормальная составляющая к элементам поверхностей, образующим кинематическую пару, не производит работу, а тангенциальная составляющая реакции – это сила трения. Работа, совершаемая этой силой отрицательна.

3.3. Определение реакций в кинематических парах

При проектировании механизма силовой расчет выполняется следующим образом: на первом этапе задаются законом движения ведущего звена, массами и моментами инерции звеньев и определяют реакции в кинематических парах без учета сил трения. Затем определяют силы трения и с их учетом определяют истинные реакции в кинематических парах.

Уравнения равновесия называют уравнениями кинестатики. Для каждого звена можно написать три уравнения равновесия; для n звеньев число уравнений равновесия будет $3n$.

Реакция каждой низшей пары содержит два неизвестных. Следовательно, условие кинестатической определенности кинематической цепи имеет вид:

$$3n = 2p_5.$$

Для цепи с низкими и высшими кинематическими парами четвертого класса:

$$3n = 2p_5 + p_4.$$

Решение последнего уравнения удовлетворяется при $n = 1$, $p_5 = 1$ и $p_4 = 1$.

Это совпадает с условиями, которым удовлетворяют структурные группы Ассур. Следовательно, группы Ассур являются статически определенными системами.

Силовой расчет начинается с последней группы Ассур и кончается расчетом ведущего звена.

Силовой расчет начинается со структурной группы, к которой приложена движущая сила, или сила полезного сопротивления. Затем переходят к соседней группе. В конце рассчитывается структурная группа, к которой приложена уравнивающая сила или уравнивающий момент. При расчете последней группы находят как уравнивающую силу, так и оставшуюся реакцию.

Приведем методику силового расчета шарнирного четырехзвенника (рис. 3.2, а).

Вначале рассмотрим силовой расчет группы Ассур второго класса первого вида (рис. 3.2, б), входящей в состав четырехзвенного шарнирного механизма (рис. 3.2, а). В точках *B* и *D* в произвольном направлении прикладываем реакции \bar{R}_{12} и \bar{R}_{03} отброшенных начального звена *1* и опоры (стойки) *0* соответственно на звенья *2* и *3*. Уравнение равновесия данной группы имеет вид:

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{03} = 0.$$

Разложим векторы реакций на составляющие по направлениям звеньев и перпендикулярно звеньям:

$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t;$$

$$\bar{R}_{03} = \bar{R}_{03}^n + \bar{R}_{03}^t.$$

Тогда уравнение равновесия примет вид:

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^t + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{03}^n + \bar{R}_{03}^t = 0.$$

Составляющие реакции \bar{R}_{12}^t и \bar{R}_{03}^t определяют из условия равновесия звеньев *2* и *3*. Для этого составляют уравнения моментов для каждого из звеньев относительно точки *C*.

Уравнения равновесия для звена *2*:

$$M_C(\bar{F}_2) + M_C(\bar{R}_{12}^t) + M_2 = 0.$$

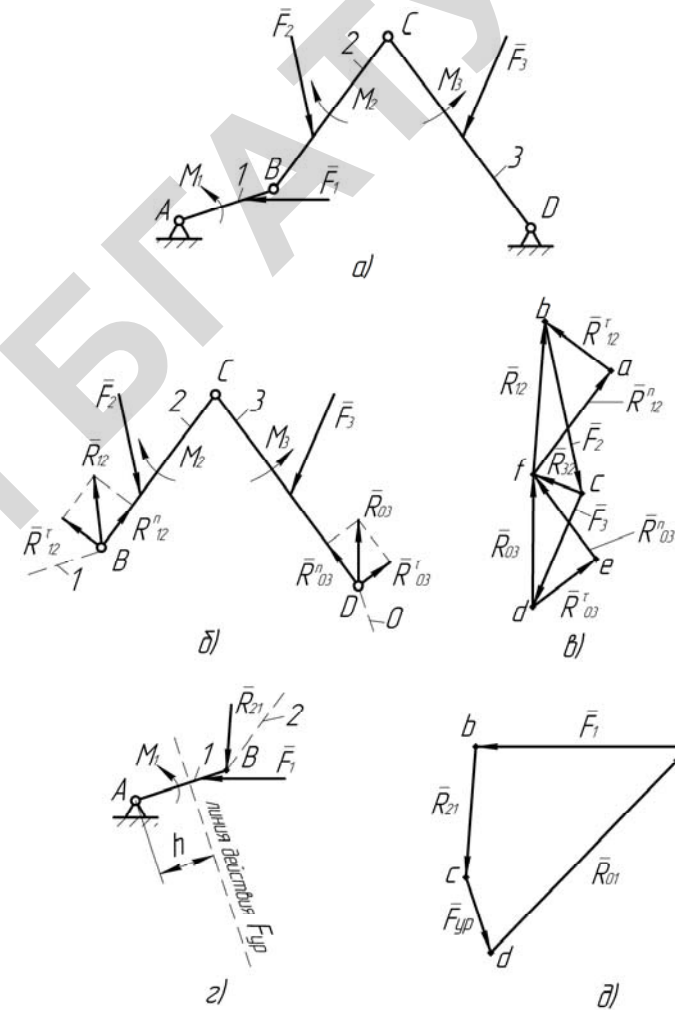


Рис. 3.2. Силовой расчет механизма шарнирного четырехзвенника: а – схема механизма; б, в – силовой расчет структурной группы второго класса первого вида; г, д – силовой расчет начального звена

Значение тангенциальной составляющей R_{12}^t :

$$R_{12}^t = -\frac{1}{l_{BC}} [M_C(\bar{F}_2) + M_2].$$

Уравнения равновесия для звена 3:

$$M_C(\bar{F}_3) + M_C(\bar{R}_{03}^\tau) + M_3 = 0.$$

Величина тангенциальной составляющей R_{03}^τ равна:

$$R_{03}^\tau = -\frac{1}{l_{CD}} [M_C(\bar{F}_3) + M_3].$$

Составляющие реакций \bar{R}_{12}^n и \bar{R}_{03}^n и полные их значения определяем из плана сил, построенного на основе уравнения равновесия (рис. 3.2, в). Для этого из точки a в масштабе μ_F проводим вектор найденной выше тангенциальной составляющей реакции \bar{R}_{12}^τ , конец которого обозначаем точкой b . Затем из точки b ведем вектор силы F_2 и из его конца (точка c) – вектор силы F_3 . Из конца вектора F_3 (точка d) проводим вектор тангенциальной составляющей реакции \bar{R}_{03}^τ – вектор de . Для нахождения нормальных составляющих реакций \bar{R}_{12}^n и \bar{R}_{03}^n из начальной точки a проводим прямую параллельную звену BC , то есть в направлении составляющей реакции \bar{R}_{12}^n , а из конечной точки e проводим прямую параллельную звену CD – в направлении составляющей реакции \bar{R}_{03}^n . Точка f пересечения этих двух прямых определит числовые значения и направления полных реакций и их составляющих:

$$\begin{aligned} R_{12}^n &= (fa) \cdot \mu_F, & R_{03}^n &= (ef) \cdot \mu_F, \\ R_{12} &= (fb) \cdot \mu_F, & R_{03} &= (df) \cdot \mu_F. \end{aligned}$$

Реакцию в шарнире C ($\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$) определим из уравнения равновесия, составленного для одного из звеньев рассматриваемой группы. Так, для звена 2 согласно рис. 3.2, б запишем следующее уравнение:

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{R}_{32} = 0.$$

На плане сил (рис. 3.2, в) реакцией \bar{R}_{32} является вектор \bar{ef} .

Произведем расчет начального звена механизма.

На рис. 3.2, з представлена схема расчета реакции стойки на начальное звено R_{01} .

К ведущему звену приложена уравновешивающая сила F_{yp} . Как правило, если начальным звеном механизма является кривошип, совершающий вращательное движение относительно стойки, уравновешивающая сила F_{yp} прикладывается к крайней точке кривошипа и направляется перпендикулярно ему. Для ее определения составим уравнение равновесия для ведущего звена относительно точки A :

$$M_A(\bar{F}_{yp}) + M_A(\bar{F}_1) + M_1 + M_A(\bar{R}_{21}) = 0,$$

откуда

$$M_A(\bar{F}_{yp}) = F_{yp}h = -[M_A(\bar{F}_1) + M_1 + M_A(\bar{R}_{21})] = 0,$$

или

$$F_{yp} = -\frac{1}{h} [M_A(\bar{F}_1) + M_1 + M_A(\bar{R}_{21})].$$

Величина и направление реакции «отброшенного» звена 2 на начальное звено 1 определим по следующей зависимости:

$$\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}.$$

Запишем векторное уравнение равновесия для ведущего звена:

$$\bar{R}_{21} + \bar{F}_1 + \bar{F}_{yp} + \bar{R}_{01} = 0,$$

согласно которому из плана сил начального звена определим реакцию R_{01} (рис. 3.2, д). Численное значение реакции R_{01} равно:

$$R_{01} = (da) \cdot \mu_F.$$

Произведем силовой расчет группы Ассур второго класса второго вида и начального звена (кривошипа), которые входят в состав четырехзвенного кривошипно-ползунного механизма, выполненного в масштабе μ_l (рис. 3.3, а). Вначале из механизма выделяем группу

Ассура второго класса второго вида, состоящую из шатуна 2 и ползуна (поршня) 3, и производим ее силовой расчет.

На шатун 2 и ползун 3 действуют соответственно следующие силы: движущая сила F_3 , силы инерции $F_{и2}$ и $F_{и3}$, силы тяжести G_2 и G_3 , момент инерции $M_{и2}$ (рис. 3.3, б). Действие отброшенных звеньев механизма заменяем соответствующими реакциями: реакция направляющей на ползун 3 – R_{03} и реакция кривошипа 1 на шатун 2 – R_{12} .

Запишем уравнение равновесия рассматриваемой структурной группы:

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_{и2} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{и3} + \bar{G}_3 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{03} = 0.$$

Так как направление реакции R_{03} известно (перпендикулярно направляющей), то ее сразу же можно определить, составив сумму моментов всех сил, действующих на структурную группу, относительно точки B:

$$\sum M_B(\bar{F}_i) = 0,$$

$$(F_{и2} \cdot h_2 - G_2 \cdot h_3 + R_{03} \cdot h_4 - G_3 \cdot h_4 + F_{и3} \cdot h_1 - F_3 \cdot h_1) \mu_l - M_{и2} = 0,$$

откуда

$$R_{03} = \frac{(-F_{и2} \cdot h_2 + G_2 \cdot h_3 + G_3 \cdot h_4 - F_{и3} \cdot h_1 + F_3 \cdot h_1) \mu_l + M_{и2}}{h_4 \cdot \mu_l}.$$

Построив план сил группы, состоящей из звеньев 2 и 3, в масштабе μ_F по рассмотренной выше методике (рис. 3.3, в), найдем реакцию \bar{R}_{12} отброшенного кривошипа 1 на шатун 2, величина которой $R_{12} = (ga) \cdot \mu_F$.

Для нахождения реакции в шарнире C необходимо рассмотреть равновесие одного из звеньев 2 или 3 (рассмотрим равновесие звена 2) и принять во внимание то, что $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$:

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_{и2} + \bar{G}_2 + \bar{R}_{32} = 0.$$

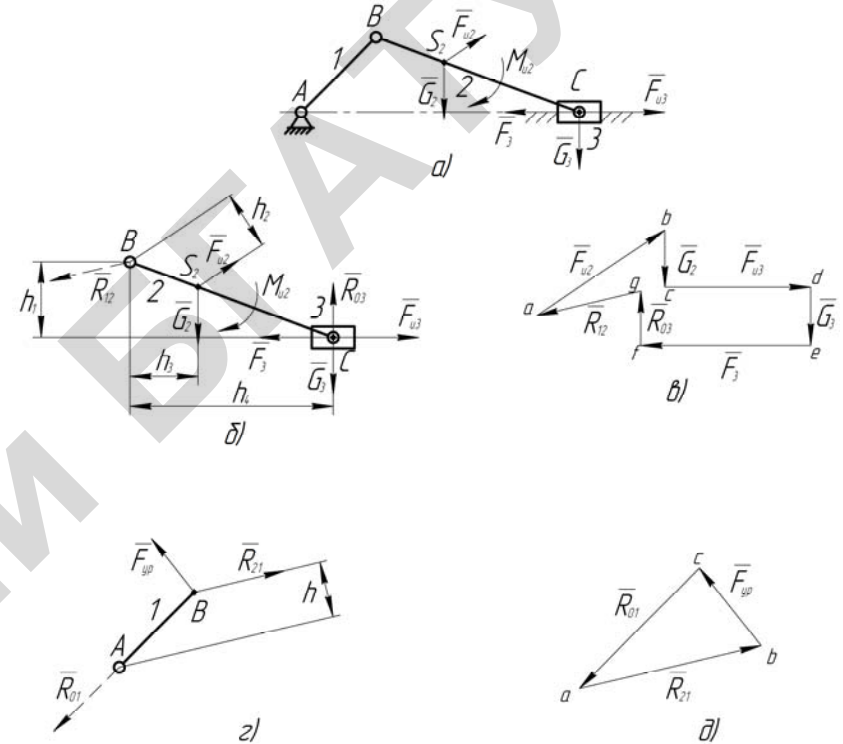


Рис. 3.3. Силовой расчет кривошипно-ползунного механизма: а – схема механизма; б, в – силовой расчет структурной группы второго класса второго вида; г, д – силовой расчет начального звена

Таким образом, из плана сил, построенного для рассматриваемой структурной группы в масштабе μ_F (рис. 3.3, в), вектором, изображающим реакцию \bar{R}_{32} ползуна 3 на шатун, будет являться вектор cg .

Произведем расчет начального звена механизма с учетом того, что $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$.

Кривошип 1 принимаем уравновешенным, то есть равномерно вращающимся вокруг своего центра тяжести. Следовательно, сила инерции кривошипа $F_{и1}$ и его сила тяжести G_1 при силовом анализе не учитываются.

Уравновешивающую силу F_{yp} , которая условно приложена в точке B и направлена перпендикулярно кривошипу в произвольном

направлении, определим из уравнения моментов всех сил, действующих на кривошип, относительно точки A (рис. 3.3, z):

$$F_{yp} \cdot l_{AB} - R_{21} \cdot h = 0,$$

откуда:

$$F_{yp} = \frac{R_{21} \cdot h}{l_{AB}}.$$

Чтобы определить реакцию опоры на кривошип R_{01} , составим уравнение равновесия кривошипа с учетом того, что $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$:

$$\bar{R}_{21} + \bar{F}_{yp} + \bar{R}_{01} = 0.$$

Из данного уравнения равновесия построим план сил начального звена (кривошипа) и из него определим реакцию R_{01} , численное значение которой $R_{01} = (ca) \cdot \mu_F$ (рис. 3.3, d).

Приведем пример силового расчета группы Ассур второго класса третьего вида, который входит в состав четырехзвенного кулисного механизма (рис. 3.4, a). Звено 2 называется камень, звено 3 – кулиса. Порядок проведения силового расчета группы Ассур второго класса третьего вида, в состав которой входит внутренняя поступательная пара A , отличается от расчета предыдущих групп тем, что рассматривается равновесие не всей группы в целом, а равновесие отдельных ее звеньев.

На кулису 3 действуют известные силы: сила полезных сопротивлений F_3 , сила инерции $F_{и3}$ и сила тяжести G_3 . Неизвестны реакция камня 2 на кулису 3 – R_{23} и реакция опоры на кулису 3 R_{03} .

Запишем уравнение равновесия кулисы 3 (рис. 3.4, b):

$$\bar{R}_{23} + \bar{F}_{и3} + \bar{G}_3 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{03} = 0.$$

Так как направление реакции R_{23} известно (перпендикулярно кулисе 3), то ее сразу же можно определить, составив сумму моментов всех сил, действующих на кулису, относительно точки O_2 :

$$R_{23} \cdot l_{O_2A} - F_3 \cdot h_2 - F_{и3} \cdot h_1 - G_3 \cdot h - M_{и3} = 0,$$

откуда:

$$R_{23} = \frac{F_3 \cdot h_2 + F_{и3} \cdot h_1 + G_3 \cdot h + M_{и3}}{l_{O_2A}}.$$

Построив план сил кулисы в масштабе μ_F по рассмотренной выше методике (рис. 3.4, b), найдем реакцию опоры на кулису 3 R_{03} .

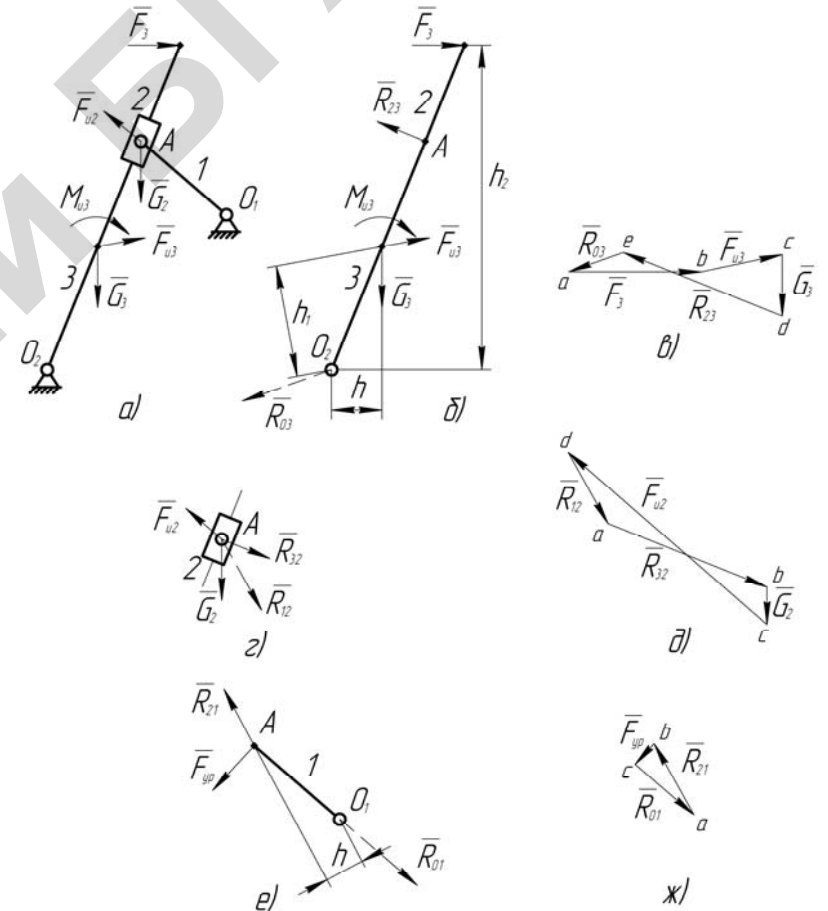


Рис. 3.4. Силовой расчет кулисного механизма:
 a – схема механизма; $b, в, z, d$ – силовой расчет структурной группы второго класса третьего вида; $e, ж$ – силовой расчет начального звена

Далее рассмотрим равновесие звена 2 с учетом того, что $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$ (рис. 3.4, з):

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_{и2} + \bar{G}_2 + \bar{R}_{32} = 0.$$

Из плана сил, построенного для камня 2 в масштабе μ_F (рис. 3.4, д), определим величину и направление реакции R_{12} кривошипа 1 на камень 2.

Произведем расчет начального звена механизма. Кривошип 1 принимаем уравновешенным, то есть равномерно вращающимся вокруг своего центра тяжести. Следовательно, сила инерции кривошипа $F_{и1}$ и его сила тяжести G_1 при силовом анализе не учитываются.

Уравновешивающую силу $F_{уп}$, которая условно приложена в точке A и направлена перпендикулярно кривошипу в произвольном направлении, определим из уравнения моментов всех сил, действующих на кривошип, относительно точки O_1 (рис. 3.4, е):

$$F_{уп} \cdot l_{O_1A} - R_{21} \cdot h = 0,$$

откуда:

$$F_{уп} = \frac{R_{21} \cdot h}{l_{O_1A}}.$$

Чтобы определить реакцию опоры на кривошип 1 R_{01} составим уравнение равновесия кривошипа с учетом того, что $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$:

$$\bar{R}_{21} + \bar{F}_{уп} + \bar{R}_{01} = 0.$$

Из данного уравнения равновесия построим план сил начального звена (кривошипа) и определим реакцию R_{01} (рис. 3.4, ж).

В приведенном выше кинестатическом расчете механизмов были определены реакции в кинематических парах и уравновешивающая сила. Однако уравновешивающую силу можно определить намного проще, не связывая ее расчет с определением реакций в кинематических парах. Для определения уравновешивающей силы Жуковский Н. Е. предложил метод, основанный на применении принципа возможных перемещений для решения задач динамики механических систем.

Аналитические условия равновесия механических систем были сформулированы Лагранжем как принцип возможных скоростей. В настоящее время принцип, определяющий условия равновесия механических систем называется принципом возможных перемещений и формулируется следующим образом: для равновесия механической системы с наложенными на нее голономными стационарными удерживающими и идеальными связями необходимо и достаточно, что сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы равнялась нулю. Данной формулировке соответствует условие равновесия системы:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad (3.12)$$

или в декартовых координатах:

$$\sum_{k=1}^N (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = 0,$$

где \bar{F}_k – активная сила;

$\delta \bar{r}_k$ – возможное перемещение точки.

Голономные связи описываются конечными уравнениями и интегрируемыми дифференциальными уравнениями. Таким образом, к голономным связям принадлежат геометрические связи и дифференциальные связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы. Например, к голономной связи относятся кинематическая пара «колесо – опорное основание» (рис. 3.5, а).

Уравнения данной связи имеют вид:

$$y_B = r = \text{const}; \quad (3.13)$$

$$\dot{x}_B = r \dot{\varphi}, \quad (3.14)$$

где φ – угол поворота колеса.

Из уравнения (3.13) следует, что:

$$\vartheta_B = \dot{y}_B = 0.$$

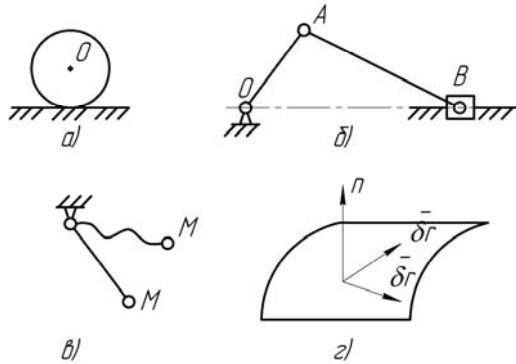


Рис. 3.5. Виды связей

Проинтегрировав уравнение (3.14) найдем связь между координатой x_B и углом поворота колеса:

$$x_B = r\varphi + c,$$

где c – постоянная интегрированная.

Неголономной связью обладает кинематическая пара «шар–плоскость». Уравнения связей для шара и плоскости не интегрируются, т. е. являются уравнениями неголономных связей.

Связь является стационарной, если в уравнение связи в явном виде не входит время. Уравнение стационарной связи имеет вид:

$$f_j(x_k, y_k, z_k) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, m.$$

Для голономной нестационарной связи:

$$f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0.$$

Связь называется удерживающей, или двухсторонней, если она описывается равенством. Примером удерживающих связей являются связи, наложенные на точки A и B кривошипно-ползунного механизма (рис. 3.5, б). Точка A кривошипа перемещается по окружности радиуса r и уравнение связи имеет вид:

$$x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0.$$

Точка B ползуна перемещается по оси x , уравнение связи будет:

$$y_B = 0.$$

Неудерживающая, или односторонняя связь описывается неравенством. Если подвес маятника представляет собой гибкую нить, то она препятствует перемещению точки M в направлении от оси подвеса O и не препятствует перемещению ее в обратном направлении (рис. 3.5, в). Координаты точки M в последнем случае могут быть равны или меньше координат сферы радиуса l :

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2.$$

Связи называются идеальными, если сумма элементарных работ реакций этих связей на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^n R_k \cdot \delta r_k \cdot \cos(\bar{R}_k, \delta \bar{r}_k) = 0.$$

Примером идеальной связи является перемещение точки по абсолютно гладкой поверхности (рис. 3.5, г). Полная реакция направлена перпендикулярно к поверхности и составляет с возможным перемещением прямой угол. Поэтому элементарная работа реакции связи:

$$\delta A = \bar{R} \cdot d\bar{r} = 0.$$

Рассмотренный ранее принцип Даламбера позволяет решать задачи динамики методами статики. Суть принципа заключается во введении сил инерции, благодаря чему уравнения динамики по форме принимают вид уравнений равновесия.

Принцип возможных перемещений, предложенный Лагранжем, применяют к решению задач статики.

Объединение принципов Даламбера и Лагранжа образует новый принцип Даламбера-Лагранжа, суть которого состоит в их последовательном применении. В результате получается общий метод решения многих задач динамики.

Умножим скалярно уравнение (3.9) на возможное перемещение точки $\delta \bar{r}_k$ и просуммируем по всем точкам системы:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{F}_{nk} \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (3.15)$$

Преобразуем уравнение (3.15) к виду:

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{F}_{nk}) \delta \bar{r}_k = 0. \quad (3.16)$$

Для систем с удельными связями выполняется условие:

$$\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta z_k = 0. \quad (3.17)$$

Заменяя силы инерции их значениями $F_{nk} = -m_k \ddot{r}_k$ и учитывая соотношение (3.12) получим уравнение Даламбера-Лагранжа:

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m_k \ddot{r}_k) \delta r_k = 0. \quad (3.18)$$

Формула (3.18) является математическим выражением общего уравнения динамики, которое формулируется следующим образом: в любой момент движения системы с идеальными связями сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции точек системы равна нулю на любом возможном перемещении системы. Общее уравнение динамики в скалярной форме имеет вид:

$$\sum_{k=1}^N (F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos \alpha_k + M_k \cdot \delta \varphi_k) = 0, \quad (3.19)$$

где F_k – приложенная в точке k сила;
 δs_k – возможное перемещение точки k ;
 α_k – угол между направлениями силы F_k и перемещением δs_k ;
 M_k – момент пары сил, приложенный звену k ;
 $\delta \varphi_k$ – возможный угол поворота звена k .

Заменяв возможные перемещения действительными и разделив обе части уравнения (3.19) на дифференциал времени, получим:

$$\sum_{k=1}^N (F_k \vartheta_k \cos \alpha_k + M_k \omega_k) = 0, \quad (3.20)$$

где $\bar{\vartheta}_k$ – скорость точки k ;

ω_k – угловая скорость звена k .

Таким образом, в подвижном механизме сумма мощностей активных сил и сил инерции равна нулю. Исходя, из этого можно записать следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^N P_k + \sum_{i=1}^N P_{ui} = 0, \quad (3.21)$$

где P_k – мощность внешней k -й силы;

P_{ui} – мощность i -й силы инерции.

Пусть на точку A звена механизма действует сила \bar{F} (рис. 3.6, а). Элементарная работа силы F равна:

$$dA = F \cdot ds_A \cdot \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением силы \bar{F} и направлением вектора скорости $\bar{\vartheta}_A$.

Мгновенная мощность силы \bar{F} равна:

$$P = F \cdot \vartheta_A \cdot \cos \alpha. \quad (3.22)$$

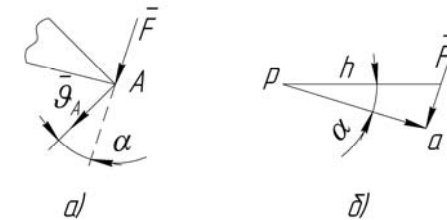


Рис. 3.6. Схемы к выводу теоремы Жуковского о жестком рычаге

Повернем вектор скорости \bar{v}_A на 90° и перенесем силу \bar{F} параллельно самой себе в точку a (рис. 3.6, б).

Момент силы F относительно полюса p равен:

$$M = F \cdot h = F |pa| \cos \alpha. \quad (3.23)$$

Из сравнения равенств (3.22) и (3.23) видно, что момент действующей на точку A силы \bar{F} , перенесенной параллельно самой себе в точку a относительно полюса p , пропорционален мощности этой силы. Зависимость (3.23) обоснована Жуковским Н. Е.

Согласно теореме Жуковского о жестком рычаге уравнение (3.21) равносильно уравнению моментов относительно полюса повернутого на 90° плана скоростей:

$$\sum_{k=1}^N M_p(\bar{F}_k) + \sum_{i=1}^n M_p(\bar{F}_{ui}) = 0. \quad (3.22)$$

Приведем формулировку теоремы Жуковского: если силу, приложенную в какой-либо точке звена механизма, перенести параллельно самой себе в одноименную точку повернутого на 90° плана скоростей, то момент этой силы относительно полюса плана скоростей будет пропорционален мощности, развиваемой данной силой.

Рассмотрим пример определения уравновешивающей силы \bar{F}_{yp} по методу Жуковского для кривошипно-ползунного механизма, представленного ранее на рис. 3.3.

Вначале для заданного положения кривошипно-ползунного механизма (рис. 3.7, а) в соответствии с изложенным выше графо-аналитическим методом кинематического анализа плоских рычажных механизмов необходимо построить план скоростей данного положения механизма (рис. 3.7, б). Затем построенный план скоростей в произвольном масштабе и в произвольном направлении (в нашем случае по часовой стрелке) поворачивается на 90° относительно полюса p . В соответствующие точки плана скоростей со схемы механизма (рис. 3.7, а) переносятся внешние силы (без учета реакций в кинематических парах), действующие на звенья механизма (рис. 3.7, в). При этом необходимо момент инерции шатуна 2 (M_{i2}) заменить парой сил (\bar{F}_{u2}' и \bar{F}_{u2}''). Обозначаем плечи перенесенных внешних сил относи-

тельно полюса p и согласно зависимости (3.22) записываем уравнение моментов относительно того же полюса p :

$$F_{u2}' \cdot h_1 + F_{u2}'' \cdot h_2 + F_3 \cdot h_3 - F_{u3} \cdot h_3 - \\ - F_{u2} \cdot h_4 - G_2 \cdot h_5 - F_{yp} \cdot ab = 0,$$

откуда

$$F_{yp} = \frac{F_{u2}' \cdot h_1 + F_{u2}'' \cdot h_2 + F_3 \cdot h_3 - F_{u3} \cdot h_3 - F_{u2} \cdot h_4 - G_2 \cdot h_5}{ab}.$$

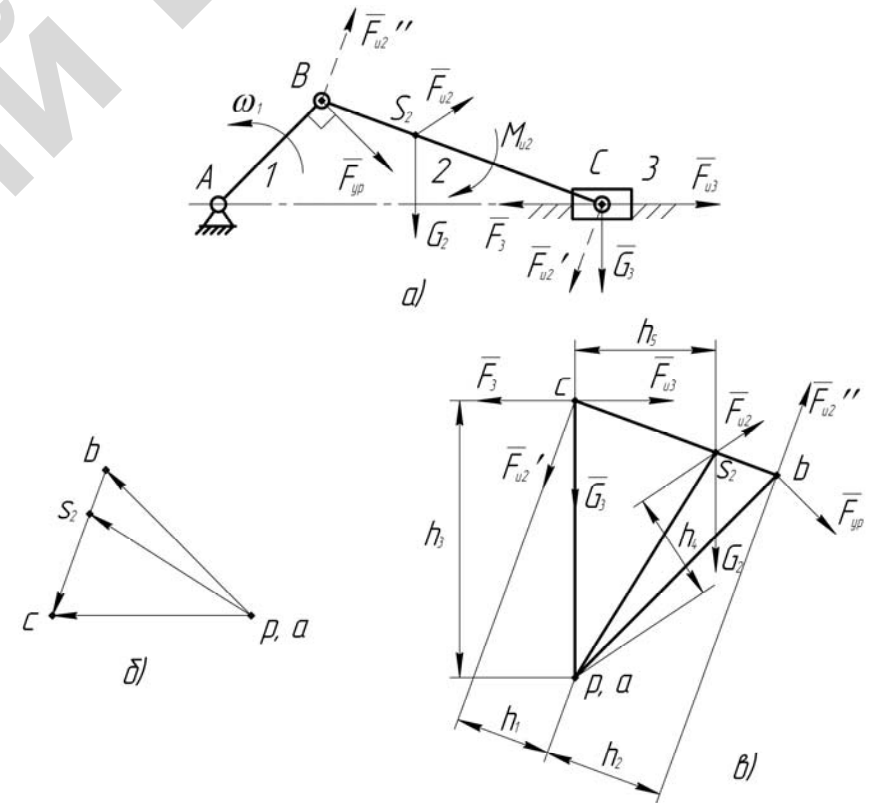


Рис. 3.7. Определение уравновешивающей силы по методу Жуковского

Определим реакции в кинематических парах механизма навесного устройства колесного трактора, на который навешен трехкорпусный плуг (рис. 3.8, а). В механизме начальным звеном является поршень гидроподъемника 7, на который передается сила \bar{Q} . Равнодействующая \bar{F} всех остальных сил, приложенных к плугу, известна.

Вначале рассмотрим равновесие последней присоединенной группы ACB и закончим силовой расчет путем рассмотрения равновесия начального звена – поршня 7.

Для определения реакции в шарнире C (рис. 3.8, б) разъединим кинематическую цепь в точке C и приложим к ней реакцию \bar{R}_{21}' , перпендикулярную к AC . Составив уравнение моментов сил, приложенных к звену, относительно точки A , получим:

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = F \cdot h - R_{21}' \cdot AC = 0.$$

Найдем реакцию R_{21}' :

$$R_{21}' = \frac{F \cdot h}{AC}.$$

Вторая проекция реакции \bar{R}_{21} на направление, перпендикулярное к BC , равна нулю, так как на звено 2 не действуют внешние силы. Поэтому конец вектора полной реакции \bar{R}_{21} будет находиться в точке пересечения продолжения BC с перпендикуляром к \bar{R}_{21}' , проведенным из конца этого вектора.

На рис. 3.8, в в масштабе μ_F построен замкнутый треугольник сил (план сил), приложенных к звену 1, из которого определяются реакции \bar{R}_{31} и $\bar{R}_{21} = \bar{R}_{02}$.

При рассмотрении равновесия двухповодковой группы AEM (рис. 3.8, з) считаем, что реакция $\bar{R}_{13} = -\bar{R}_{31}$ задана. Аналогично предыдущему определяем реакцию \bar{R}_{43} , и из плана сил, построенного для реакций, действующих на звено 3 (рис. 3.8, д), определяем реакции \bar{R}_{03} и $\bar{R}_{43} = \bar{R}_{54}$.

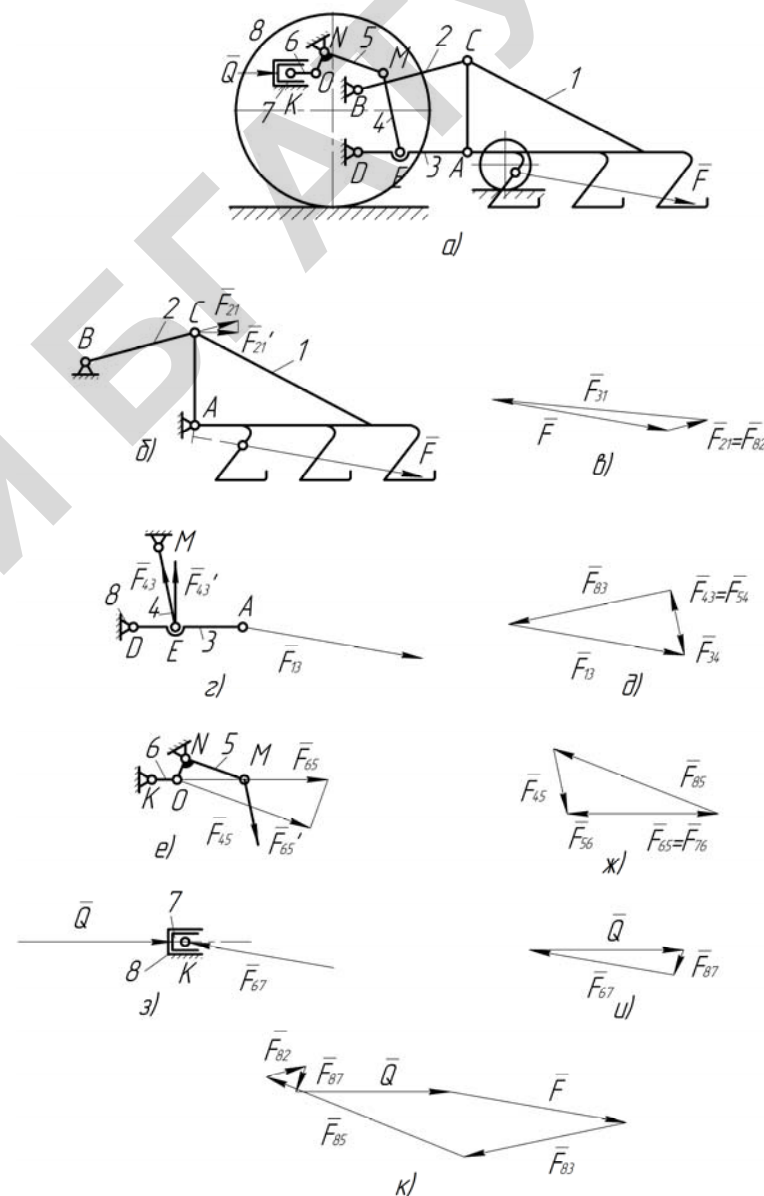


Рис. 3.8. Определение реакций в кинематических парах механизма навесного устройства колесного трактора

Для следующей двухповодковой группы *КОМ* (рис. 3.8, *е*) реакция $\bar{R}_{45} = -\bar{R}_{54}$ известна. Определив аналогично предыдущей реакцию \bar{R}_{65} , строим для сил и реакций, приложенных к звену 5, план сил, из которого определяем реакции \bar{R}_{05} и $\bar{R}_{65} = \bar{R}_{76}$ (рис. 3.8, *ж*).

Из рассмотрения равновесия механизма I класса (рис. 3.8, *з*) по известной реакции $\bar{R}_{67} = -\bar{R}_{76}$ строим план сил (рис. 3.8, *и*), определяем силу давления масла \bar{Q} и реакцию \bar{R}_{07} между стенками цилиндра и поршнем.

Для проверки правильности графических построений воспользуемся векторным уравнением:

$$\bar{F} + \bar{R}_{03} + \bar{R}_{05} + \bar{R}_{02} + \bar{R}_{07} + \bar{Q} = 0,$$

выражающим условие равновесия навесного устройства под действием внешних сил. Построив план сил (рис. 3.8, *к*), следуя последнему векторному уравнению, убеждаемся в том, что конец последней силы \bar{Q} совпадает с началом первой силы \bar{F} .

Вопросы для самопроверки

1. Какие задачи решает силовой расчет механизмов?
2. Какие виды сил действуют в механизмах?
3. Как определяется величина и направление силы и момента инерции?
4. Что такое реакция в кинематической паре?
5. Каков порядок силового расчета плоского рычажного механизма?
6. Сформулируйте теорему Жуковского.
7. Как определяется уравновешивающая сила по методу Жуковского?

4. ДВИЖЕНИЕ МЕХАНИЗМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЗАДАННЫХ СИЛ

4.1. Динамическая модель механизма

Силы, действующие на исполнительное звено рабочей машины, задаются в виде графика $F_c = f(s)$ (см. рис. 3.1, *а*), иллюстрирующего зависимость между силой полезного сопротивления F_{nc} и ходом рабочего органа s . Кроме силы F_{nc} на движение механизма оказывают влияние силы тяжести звеньев, силы инерции и др.

В машинах-двигателях какой-либо вид энергии преобразуется в механическую энергию, необходимую для приведения рабочей машины. Механической характеристикой двигателя внутреннего сгорания является индикаторная диаграмма, отражающая зависимость между движущей силой F_d и ходом поршня s .

Если все приложенные к звеньям силы известны, то можно определить законы движения звеньев механизма. Однако практическое решение этой задачи оказывается весьма сложным. Поэтому прибегают к отдельным частным решениям, применяя способы приближенного определения движения механизма. Для этого сложный многосвязный механизм заменяют его динамической моделью.

Рассмотрим силовую установку, в которой потребитель механической энергии (рабочая машина) приводится в движение двигателем внутреннего сгорания (рис. 4.1, *а*). На поршень 3 действует движущая сила F_3 , на шкив 4 рабочей машины – момент сопротивления M_4 . Поскольку механизм имеет одну степень свободы ($W = 1$), в качестве модели механизма примем одно условное звено, а в качестве начального звена выберем коленчатый вал двигателя 1. Примем момент инерции J_{Σ}^{np} и момент M_{Σ}^{np} , которым нагружено условное звено, таким, что закон его движения и закон движения начального звена будут совпадать. При этом угловые скорости начального и условного звеньев будут равны (рис. 4.1, *б*).

4.2. Приведение сил и моментов сил

Если на звенья механизма действуют силы и моменты сил, то их можно привести к одному звену, которое называется звеном приведения. При этом должно соблюдаться следующее условие: мощность, развиваемая приведенной силой или приведенным моментом сил должна быть равной сумме мощностей всех сил и моментов, приложенных к n звеньям механизма.

Сформулированное условие для мощности в общем виде имеет вид:

$$P_n = \sum_{i=1}^n P_i. \quad (4.1)$$

Правая и левая части формулы (4.1) соответственно равны:

$$\begin{cases} P_n = F_n v_B \\ \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \omega_i, \end{cases} \quad (4.2)$$

где v_B – скорость точки приложения приведенной силы;

F_i – сила, действующая на i -е звено;

v_i – скорость точки, в которой действует сила F_i ;

α_i – угол между векторами силы и скорости;

M_i – момент силы, действующий на i -е звено;

ω_i – угловая скорость i -го звена.

Так как левые части уравнений системы (4.2) равны между собой, приравняем их правые части:

$$F_n v_B = \sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \omega_i.$$

Тогда приведенная сила F_n , приложенная в точке B кривошипа 1 , равна:

$$F_n = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{v_i}{v_B} \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{v_B}. \quad (4.3)$$

Аналогично определяем приведенный момент M_n , приложенный к звену приведения. Мощность, развиваемая приведенным моментом:

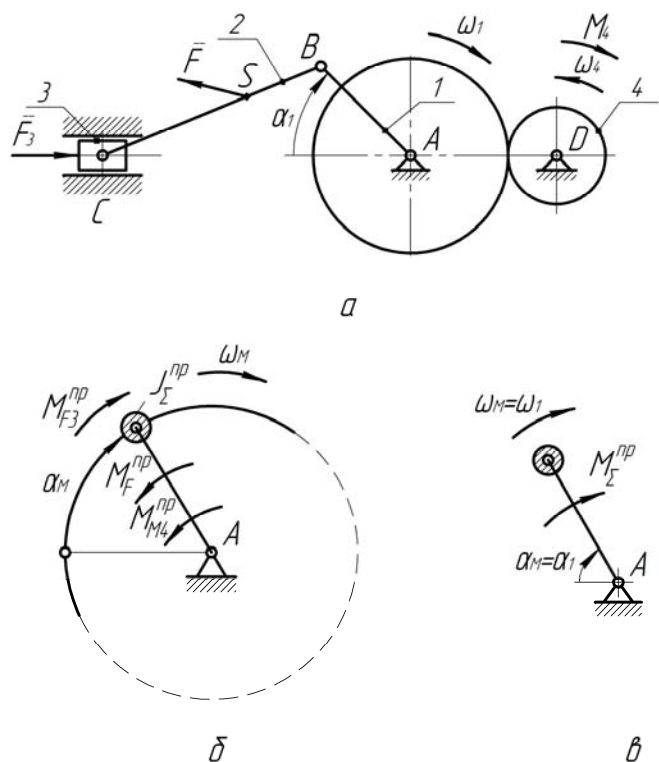


Рис. 4.1. Приведение сил и масс:

a – рабочая машина; b – приведение сил и масс; $в$ – динамическая модель

При построении динамической модели механизма все силы и моменты, действующие на его звенья, должны быть приведены к одному звену и заменены приведенной силой или приведенным моментом сил M_{Σ}^{np} , являющимися эквивалентами всей заданной нагрузки, приложенной к механизму.

Таким же образом массы всех звеньев приводят к одному звену и заменяют суммарным приведенным моментом инерции J_{Σ}^{np} , являющимся эквивалентом всей инертности механизма. В итоге многозвенный механизм, нагруженный сложной системой сил и моментов, заменяют простой моделью, состоящей из одного звена приведения (рис. 4.1, в).

$$P_{\text{п}} = M_{\text{п}} \cdot \omega_1. \quad (4.4)$$

Так как левые части уравнения (4.4) и системы (4.2) равны, приравняем их правые части:

$$M_{\text{п}} \cdot \omega_1 = \sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot \omega_i.$$

Тогда приведенный момент сил равен:

$$M_{\text{п}} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{v_i}{\omega_1} \cdot \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{\omega_1}. \quad (4.5)$$

4.3. Приведение масс и моментов инерции

Каждое i -е звено механизма обладает массой m_i , сосредоточенной в центре масс звена, и моментом инерции J_i относительно оси, проходящей через центр масс. Эти массы и моменты инерции можно заменить приведенной массой $m_{\text{п}}$, сосредоточенной в точке C ползуна 3 , выбранного в качестве звена приведения (рис. 4.1).

Приведение масс и моментов инерции производится из условия равенства кинетических энергий.

Кинетическая энергия приведенной массы, сосредоточенной в точке C звена приведения, равная $\frac{m_{\text{п}} v_C^2}{2}$, должна равняться сумме кинетических энергий всех звеньев, т. е.:

$$\frac{m_{\text{п}} v_C^2}{2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{J_i \omega_i^2}{2} \right),$$

где v_C – скорость точки звена приведения, м/с;

$m_{\text{п}}$ – приведенная масса, кг;

m_i – масса i -го звена, кг.

Из последнего уравнения найдем приведенную массу механизма:

$$m_{\text{п}} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_i}{v_C} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{v_C} \right)^2 \right]. \quad (4.6)$$

Полученная формула позволяет вычислить приведенную массу механизма, когда в качестве звена приведения выбран ползун 3 совершающий поступательное движение (рис. 4.1).

Если в качестве звена приведения выбран кривошип 1 , совершающий вращательное движение, то все массы и моменты инерции звеньев заменяют приведенным моментом инерции, приписываемым звену приведения.

Кинетическая энергия звена приведения с моментом инерции $J_{\text{п}}$ должна равняться сумме кинетических энергий звеньев механизма, т. е.:

$$\frac{J_{\text{п}} \omega_1^2}{2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{J_i \omega_i^2}{2} \right).$$

Приведенный момент инерции равен:

$$J_{\text{п}} = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_i}{\omega_1} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \right]. \quad (4.7)$$

В формулах (4.6) и (4.7) отношения скоростей зависят от положения звеньев механизма, включая и звено приведения. Следовательно, приведенная масса и приведенный момент инерции являются функциями только положения звена приведения. Если звено приведения совершает поступательное движение, то $m_{\text{п}} = f(s)$, а если вращательное, то $J_{\text{п}} = f(\varphi)$.

4.4. Уравнение движения механизма

Основой для составления уравнения движения механизма служит теорема об изменении кинетической энергии. Для вывода теоремы об изменении кинетической энергии точки воспользуемся основным законом динамики:

$$m \bar{a} = \bar{F},$$

или:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}, \quad (4.8)$$

где \bar{F} – сила, под воздействием которой движется точка со скоростью \bar{v} .

Умножим обе части соотношения (4.8) скалярно на дифференциал радиус-вектора точки $d\bar{r}$:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (4.9)$$

Преобразуем левую часть равенства (4.9):

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = m \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot d\bar{v} = m\bar{v} \cdot d\bar{v} = \frac{m d\bar{v}^2}{2} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Учитывая, что элементарная работа $dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}$, уравнение (4.9) примет вид:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA. \quad (4.10)$$

Если точка k массой m движется под действием приложенных к ней сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_m$, то:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^m dA_k. \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) отражает теорему об изменении кинетической энергии для точки в дифференциальной форме: дифференциал кинетической энергии материальной точки равен сумме элементарных работ сил действующих на точку.

В интегральной форме уравнение движения механизма имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n T_i - \sum_{i=1}^n T_{i0} = \sum_{k=1}^m A_k, \quad (4.12)$$

где T_i – кинетическая энергия i -го звена в конце рассматриваемого промежутка времени;

T_{i0} – кинетическая энергия i -го звена в начальный период времени;

A_k – работа каждой из внешних и внутренних сил, действующих на звенья механизма, за рассматриваемый промежуток времени;

n – число подвижных звеньев;

m – число сил.

Уравнение (4.12) получается в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения звеньев механизма, поэтому его называют уравнением движения механизма в форме интеграла энергии.

После приведения сил и масс уравнение движения механизма в форме интеграла энергии (4.12) принимает следующий вид:

$$\frac{J_n \omega^2}{2} - \frac{J_{n0} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_n d\varphi, \quad (4.13)$$

где J_n – значение приведенного момента инерции в конце рассматриваемого промежутка времени;

J_{n0} – значение приведенного момента инерции в начале рассматриваемого промежутка времени;

ω – значение угловой скорости звена приведения в конце рассматриваемого промежутка времени;

ω_0 – значение угловой скорости звена приведения в начале промежутка времени;

M_n – приведенный момент сил;

φ_0 и φ – значения обобщенной координаты (угла поворота звена приведения) в начале и конце изучаемого промежутка времени.

Из теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме получаем:

$$dT = dA,$$

где dT – дифференциал кинетической энергии;

dA – элементарная работа сил.

При вращающемся звене приведения уравнение движения в дифференциальной форме имеет вид:

$$d\left(\frac{J_n \omega^2}{2}\right) = M_n d\varphi. \quad (4.14)$$

Приведенный момент сил будет равен:

$$M_n = (M_n)_д - (M_n)_с,$$

где $(M_n)_д$ – приведенный момент движущих сил;
 $(M_n)_с$ – приведенный момент сил сопротивления.
 С учетом этого уравнение (4.14) примет вид:

$$d\left(\frac{J_n \omega^2}{2}\right) = [(M_n)_д - (M_n)_с] d\varphi. \quad (4.15)$$

Представим уравнение (4.14) в следующем виде:

$$M_n = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J_n \omega^2}{2} \right). \quad (4.16)$$

Продифференцируем уравнение (4.16) как функцию двух независимых переменных ω и J_n :

$$M_n = J_n \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\omega^2}{2} \right) + \frac{dJ_n}{d\varphi} \left(\frac{\omega^2}{2} \right).$$

После преобразований дифференциальное уравнение движения для вращающегося звена приведения механизма принимает вид:

$$M_n = J_n \left(\frac{d\omega}{dt} \right) + \frac{dJ_n}{d\varphi} \left(\frac{\omega^2}{2} \right). \quad (4.17)$$

Если $(M_n)_д$, $(M_n)_с$ и J_n являются функциями положения звеньев механизма, то уравнение движения в энергетической форме (4.12) примет вид:

$$T_n - T_i = (A_n)_i - (A_c)_n = \Delta A_{i-n} = A_{i-n}^{изб}, \quad (4.18)$$

где $\Delta A_{i-n} = A_{i-n}^{изб}$ – избыточная работа при перемещении звена приведения из i -го в n -е положение.

Для вращательного движения звена приведения уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(J_n)_n \omega_n^2 - (J_n)_i \omega_i^2] = \\ & = \int_{\varphi_i}^{\varphi_n} [M_n(\varphi)]_д d\varphi - \int_{\varphi_i}^{\varphi_n} [M_n(\varphi)]_с d\varphi, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $(J_n)_n$ и $(J_n)_i$ – приведенный момент инерции механизма в положениях n и i звена приведения;

ω_n и ω_i – соответствующие угловые скорости;
 $[M_n(\varphi)]_д$ и $[M_n(\varphi)]_с$ – приведенные моменты сил движущих и сопротивления, зависящие от положения механизма.

4.5. Графоаналитический метод построения диаграммы энергомасс

Если на вращающееся начальное звено действует постоянный движущий момент сил $M_д$, то приведенный к этому звену момент сил сопротивления $M_с$ является функцией угла поворота начального звена φ . Найдем закон движения начального звена, если известно значение угловой скорости звена $\omega = \omega_0$ при $\varphi = 0$.

Решение задачи начинаем с построения графиков $M_д(\varphi)$ и $M_с(\varphi)$ (рис. 4.2, а), которые используются при последующем определении приращений кинетической энергии.

Из условия установившегося движения находим момент сил $M_д$:

$$M_д 2\pi + \int_0^{2\pi} M_n d\varphi = 0,$$

или

$$M_д = \mu_m \mu_\varphi \frac{S}{2\pi},$$

где μ_M и μ_φ – масштабные коэффициенты моментов сил и углов поворота, равные отношению этих моментов и углов к отрезкам, изображающим их значения на графиках;

S – площадь, заключенная между осью абсцисс и графиком $M_c(\varphi)$.

Уравнение движения (4.13) представим в виде:

$$\Delta T = \int_0^{\varphi} (M_d - M_c) d\varphi, \quad (4.20)$$

где ΔT – приращение кинетической энергии по отношению к начальному положению при $\varphi = 0$.

По уравнению (4.20) строится график приращений кинетической энергии ΔT как функция угла φ . Для этого измеряется площадь S_0 (мм²), заключенную между графиками $M_d(\varphi)$ и $M_c(\varphi)$ в пределах от $\varphi = 0$ до текущего значения $\varphi = \varphi_i$ ($i = 1, \dots, 12$).

Приращение кинетической энергии равно $\Delta T = S_{0i} \mu_M \mu_\varphi$.

Метод замера площади, заключенной между графиками $M_d(\varphi)$ и $M_c(\varphi)$ неудобен и им редко пользуются. Более распространен метод графического интегрирования диаграммы приведенных моментов сил сопротивления. Полученная диаграмма работ сил сопротивления показана на рис. 4.2, б (метод ее построения не приведен).

Диаграмма работ движущих сил является прямой линией, так как момент движущих сил принят постоянным. Диаграмма избыточных работ $\Delta T(\varphi)$ (рис. 4.2, в) строится вычитанием ординат диаграммы $A_c(\varphi)$ из ординат диаграммы $A_d(\varphi)$, т. е. $\Delta T = A_d - A_c$.

По расчетам с помощью формулы (4.7) строим график зависимости приведенного момента инерции J_n от угла φ (рис. 4.2, г). Пересечение вертикалей, проведенных из точек графика $J_n(\varphi)$ с горизонталями, проведенными из точек графика $\Delta T(\varphi)$, дает график зависимости приращения кинетической энергии ΔT от приведенного момента инерции J_n (рис. 4.2, д). По полученной диаграмме Виттенбауэра можно определить угловую скорость ω начального звена в любом его положении.

Рассмотрим, как изменяется угловая скорость начального звена ω в зависимости от кинетической энергии T и приведенного момента инерции J_n . Кинетическая энергия механизма равняется:

$$T = \frac{J_n \omega^2}{2}. \quad (4.21)$$

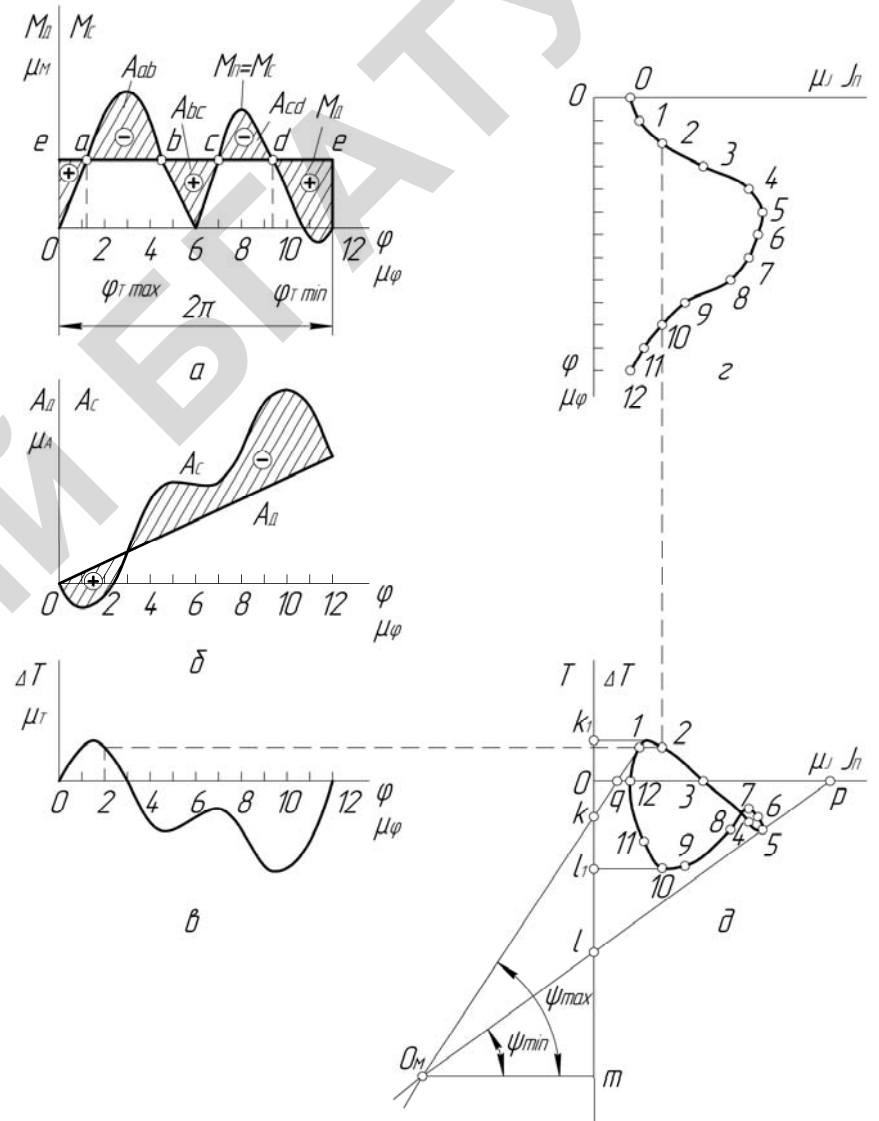


Рис. 4.2. Графоаналитический метод Виттенбауэра: а – диаграмма приведенных к валу кривошипа моментов сил сопротивлений и движущих сил; б – диаграмма работ сил сопротивления и движущих сил; в – диаграмма приращения кинетической энергии; г – диаграмма приведенных к валу кривошипа моментов инерции движущихся масс; д – диаграмма Виттенбауэра

Из (4.21) имеем:

$$\omega^2 = 2 \frac{T}{J_n} \quad (4.22)$$

На рис. 4.3 приведен график зависимости между кинетической энергией T и приведенным моментом инерции J_n . Кинетическая энергия в точке N равна $T = 0a \mu_T$, приведенный момент инерции в точке N равен $J_n = 0b \mu_J$. После подстановки этих значений в формулу (4.22) получим:

$$\omega^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi, \quad (4.23)$$

где ψ – угол между отрезком ON и осью абсцис OJ_n .

Из (4.23) найдем:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega^2; \quad (4.24)$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{\max}^2; \quad (4.25)$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_{\min}^2. \quad (4.26)$$

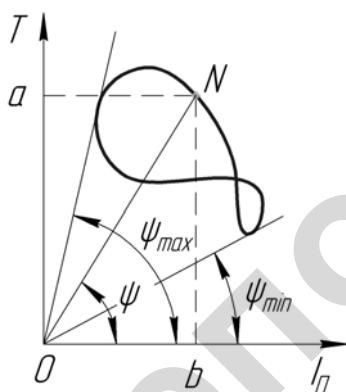


Рис. 4.3. Диаграмма энергомасс
91

4.6. Определение момента инерции маховика

Важной характеристикой механизма является коэффициент неравномерности движения δ :

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{cp}}}, \quad (4.27)$$

где ω_{\max} и ω_{\min} – максимальная и минимальная угловые скорости, с^{-1} .

Средняя угловая скорость:

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \quad (4.28)$$

Установлены интервалы допустимых значений коэффициента δ для различных типов машин. Например, для насосов – от 1/5 до 1/30, для двигателей внутреннего сгорания – от 1/80 до 1/150.

Коэффициент неравномерности движения механизма можно регулировать, уменьшая или увеличивая массу одного из вращающихся звеньев. Добавочная масса вращающегося звена, предназначенная для обеспечения заданного коэффициента неравномерности движения механизма, называется маховой массой. Конструктивно эта масса выполняется в виде маховика.

Из соотношений (4.27) и (4.28) получим:

$$\omega_{\max} - \omega_{\min} = \delta \omega_{\text{cp}}, \quad (4.29)$$

$$\omega_{\max} + \omega_{\min} = 2 \omega_{\text{cp}}. \quad (4.30)$$

После соответствующих преобразований зависимостей (4.29) и (4.30) найдем:

$$\omega_{\max} = (1 + 0,5 \delta) \omega_{\text{cp}}, \quad (4.31)$$

$$\omega_{\min} = (1 - 0,5 \delta) \omega_{\text{cp}}. \quad (4.32)$$

После возведения в квадрат левых и правых частей зависимостей (4.31) и (4.32), получим:

$$\omega_{\max}^2 = (1 + \delta + \delta^2/4) \omega_{\text{cp}}^2,$$

$$\omega_{\min}^2 = (1 - \delta + \delta^2/4) \omega_{\text{cp}}^2.$$

Пренебрегая членом $\delta^2/4$ получим:

$$\omega_{\max}^2 = (1 + \delta) \omega_{\text{cp}}^2, \quad (4.33)$$

$$\omega_{\min}^2 = (1 - \delta) \omega_{\text{cp}}^2. \quad (4.34)$$

Определим влияние коэффициента неравномерности δ на значения тангенсов углов наклона касательных к диаграмме энергомасс (Виттенбауэра). Подставляя значения ω_{\max}^2 и ω_{\min}^2 в (4.25) и (4.26), находим:

$$\text{tg}\psi_{\max} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} (1 + \delta) \omega_{\text{cp}}^2, \quad (4.35)$$

$$\text{tg}\psi_{\min} = \frac{\mu_J}{2\mu_T} (1 - \delta) \omega_{\text{cp}}^2. \quad (4.36)$$

Проводим касательные к диаграмме Виттенбауэра под углами ψ_{\max} и ψ_{\min} к оси J_{Π} (рис. 4.2, δ). Пересечение касательных определит положение начала координат O_M графика $T=T(J_{\Pi})$, при котором коэффициент неравномерности движения механизма δ и средняя угловая скорость ω_{cp} имеют заданные значения. По расстоянию от нового начала координат до прежней оси ординат $O_M m$ можно найти значение приведенного момента инерции маховика:

$$J_M = (O_M m) \mu_J. \quad (4.37)$$

Рассмотрим случай, когда точка O_M выходит за пределы чертежа (рис. 4.2, δ).

Умножим числитель и знаменатель выражения (4.27) на $(\omega_{\max} + \omega_{\min})$:

$$\delta = \frac{(\omega_{\max} - \omega_{\min}) \cdot (\omega_{\max} + \omega_{\min})}{\omega_{\text{cp}} (\omega_{\max} + \omega_{\min})} = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2\omega_{\text{cp}}^2}. \quad (4.38)$$

При этом учитывалось, что $(\omega_{\max} + \omega_{\min}) = 2\omega_{\text{cp}}$.

С учетом зависимости (4.23) формула (4.38) примет вид:

$$\delta = \frac{\mu_J}{2\mu_T} \cdot \frac{\text{tg}\psi_{\max} - \text{tg}\psi_{\min}}{\omega_{\text{cp}}^2}. \quad (4.39)$$

Из $\Delta O_M m k$ и $\Delta O_M m l$:

$$\text{tg}\psi_{\max} = \frac{km}{O_M m}, \quad \text{tg}\psi_{\min} = \frac{lm}{O_M m}.$$

Тогда:

$$\text{tg}\psi_{\max} - \text{tg}\psi_{\min} = \frac{km - lm}{O_M m} = \frac{kl}{O_M m}. \quad (4.40)$$

Формула коэффициента неравномерности δ (4.38) с учетом (4.40) примет вид:

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_J} \cdot \frac{kl}{O_M m} \cdot \frac{1}{\omega_{\text{cp}}^2}. \quad (4.41)$$

С учетом значения приведенного момента инерции маховика (4.37) коэффициент неравномерности δ будет равен:

$$\delta = \frac{\mu_T \cdot kl}{J_M \cdot \omega_{\text{cp}}^2}. \quad (4.42)$$

Из зависимости (4.42) найдем момент инерции маховика:

$$J_M = \frac{\mu_T \cdot kl}{\delta \cdot \omega_{\text{cp}}^2}. \quad (4.43)$$

найдем:

$$kl = O_M m \cdot (\text{tg}\psi_{\max} - \text{tg}\psi_{\min}). \quad (4.33)$$

При углах ψ_{\max} и ψ_{\min} , близких к 90° , касательные могут не пересекать ось ординат в пределах чертежа. Из $\Delta O l p$ и $\Delta O k q$ (рис. 4.2, δ) находим:

$$O l = O p \cdot \text{tg}\psi_{\min},$$

$$O k = O q \cdot \text{tg}\psi_{\max}.$$

Тогда:

$$kl = Ol - Ok = Op \operatorname{tg}\psi_{\min} - Oq \operatorname{tg}\psi_{\max}. \quad (4.34)$$

где Op и Oq – расстояния от центра O до точек p и q пересечения касательных с осью абсцисс, проведенных соответственно под углами ψ_{\max} и ψ_{\min} .

При постоянном приведенном моменте инерции диаграмма Виттенбауэра вырождается в отрезок прямой, параллельной оси T , экстремумы кинетической энергии и угловой скорости совпадают, а (4.34) принимает вид:

$$J_M = \frac{A_{\text{изб}}}{\delta \omega_{\text{ср}}^2}, \quad (4.35)$$

где $A_{\text{изб}}$ – избыточная работа, под которой понимается сумма работ сил движущих и сил сопротивления на интервале, соответствующем изменению кинетической энергии от наименьшего до наибольшего значения.

Рассмотрим пример. Массы звеньев машинного агрегата и силы, действующие на них, приведены к звену AB (рис. 4.4, *a*). Движение этого звена установилось. Угловая скорость звена приведения в начале цикла установившегося движения $\omega_0 = 40 \text{ с}^{-1}$. Приведенные моменты движущих сил M_d и сил сопротивления M_c измеряются в соответствии с заданными графиками (рис. 4.4, *б*). Приведенный момент инерции постоянен и равен $I_n = 0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Определить максимальную ω_{\max} и минимальную ω_{\min} угловые скорости звена приведения при его установившемся движении и коэффициент неравномерности движения δ . Построить графики изменения кинетической энергии $T = T(\varphi)$, угловой скорости $\omega = \omega(\varphi)$ и углового ускорения $\varepsilon = \varepsilon(\varphi)$ звена приведения AB .

Решение. Делим угол, соответствующий одному циклу установившегося движения φ_n , на ряд равных частей, в нашем случае на 4. Определим приращение кинетической энергии на участках 0–1, 1–2, 2–3, 3–4. Их значения будут пропорциональны площадям, заштрихованным на графике (рис. 4.4, *б*).

$$\Delta T_{0-1} = \left| A_d - A_c \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (M_d - M_c) d\varphi.$$

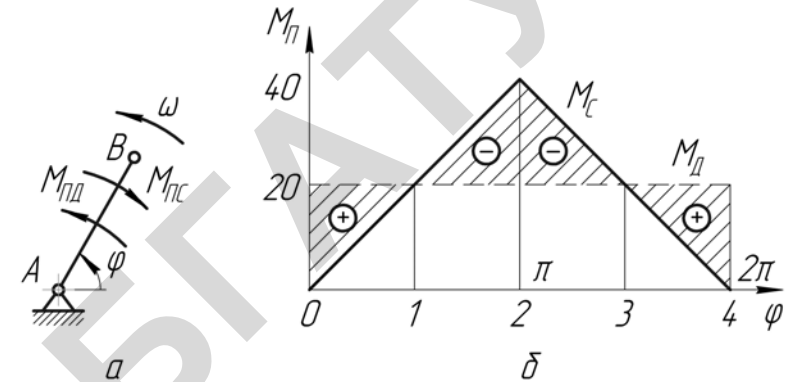


Рис. 4.4. Схема звена приведения (*a*) и график приведенных моментов (*б*)

На графике 0–1 заштрихованная площадка имеет знак «плюс», так как $M_d > M_c$ (из площади прямоугольника вычисляется площадь треугольника); затем на участках 1–2 и 2–3 знак площади «минус» ($M_d < M_c$) и, наконец, на участке 3–4 знак «плюс» ($M_d > M_c$).

Определим числовые значения этих площадей:

$$\Delta T_{0-1} = 5\pi \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad \Delta T_{1-2} = -5\pi \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\Delta T_{2-3} = -5\pi \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad \Delta T_{3-4} = 5\pi \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Вычисляем значения кинетических энергий для каждого положения звена приведения:

$$T_0 = \frac{I_n \omega_0^2}{2} = \frac{0,1 \cdot 40^2}{2} = 80 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$T_1 = T_0 + \Delta T_{0-1} = 80 + 5\pi = 80 + 5 \cdot 3,14 = 95,7 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T_{1-2} = 95,7 - 5\pi = 95,7 - 5 \cdot 3,14 = 80 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$T_3 = T_2 + \Delta T_{2-3} = 80 - 5\pi = 80 - 5 \cdot 3,14 = 64,3 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$T_4 = T_3 + \Delta T_{3-4} = 64,3 + 5\pi = 64,3 + 5 \cdot 3,14 = 80 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

По полученным значениям кинетической энергии строим график зависимости $T = T(\varphi)$ (рис. 4.5, *б*) и повернутый на 90° график

зависимости $I_n = I_n(\varphi)$ (рис. 4.5, а). Масштабный коэффициент по оси ординат принимаем $\mu_T = 2 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{мм}}$, а по оси абсцисс –

$$\mu_\varphi = 0,1 \frac{\text{рад}}{\text{мм}}.$$

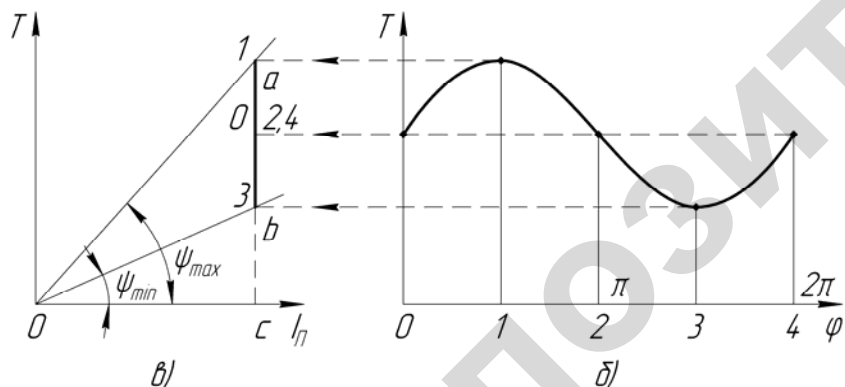
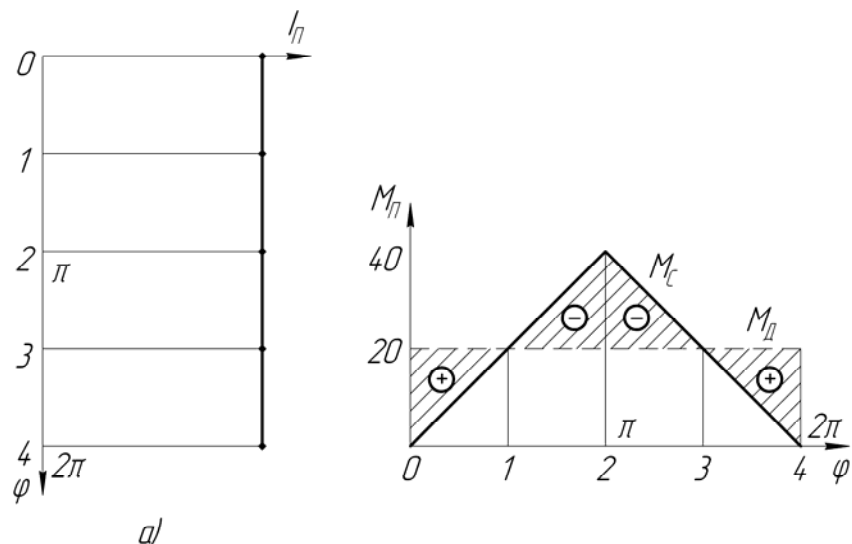


Рис. 4.5. График приведенных моментов инерции (а), график приращения кинетической энергии (б) и диаграмма энергомасс (в)

Вычисляем значения угловой скорости ω звена приведения в каждом положении:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 40 \text{ с}^{-1}; \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{2T_1}{I_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 95,7}{0,1}} = 43,75 \text{ с}^{-1}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{2T_2}{I_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{0,1}} = 40 \text{ с}^{-1}; \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{2T_3}{I_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 64,3}{0,1}} = 35,86 \text{ с}^{-1}; \\ \omega_4 &= \sqrt{\frac{2T_4}{I_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{0,1}} = 40 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Строим диаграмму Виттенбауэра (диаграмму энергомасс) $T = T(I_n)$. Для этого продолжаем оси абсцисс построенных графиков до пересечения в точке O (рис. 4.5, в). Эта точка является началом системы координат диаграммы $T = T(I_n)$. Точки самой диаграммы строятся таким образом: из одноименных точек диаграмм проводятся прямые, параллельные осям абсцисс φ . Пересечение этих линий дает продолжение на диаграмме Виттенбауэра. В данном случае диаграмма получилась в виде прямой линии ab . Соединим точки a и b с началом системы координат O и получим углы ψ_{\max} и ψ_{\min} . Определим с их помощью максимальную ω_{\max} и минимальную ω_{\min} угловые скорости звена приведения:

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_{I_n}} \cdot \text{tg}\psi_{\max}} = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_{I_n}} \cdot \frac{(ac)}{(Oc)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{0,0025} \cdot \frac{48}{40}} = 43,82 \text{ с}^{-1}; \\ \omega_{\min} &= \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_{I_n}} \cdot \text{tg}\psi_{\min}} = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_{I_n}} \cdot \frac{(bc)}{(Oc)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{0,0025} \cdot \frac{32}{40}} = 35,86 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

По значениям угловых скоростей строим график $\omega = \omega(\varphi)$ (рис. 4.6, а), масштаб по оси ординат принимаем $\mu_\omega = 1 \frac{\text{с}^{-1}}{\text{мм}}$.

Находим среднее значение угловой скорости ω_{cp} и коэффициент неравномерности движения δ :

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} = \frac{43,75 + 35,86}{2} = 39,81 \text{ с}^{-1};$$

$$\delta = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{\omega_{cp}} = \frac{43,75 + 35,86}{39,81} = 0,2 \text{ с}^{-1}.$$

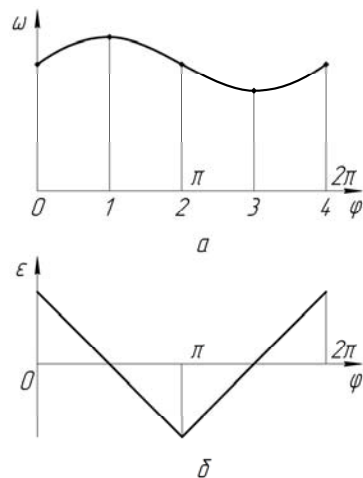


Рис. 4.6. График зависимости угловой скорости (а) и углового ускорения (б) от угла поворота звена привода

Находим значения углового ускорения ϵ звена привода:

$$\epsilon_0 = \frac{M_{д0} - M_{с0}}{I_n} = \frac{20 - 0}{0,1} = 200 \text{ с}^{-2};$$

$$\epsilon_1 = \frac{M_{д1} - M_{с1}}{I_n} = \frac{20 - 20}{0,1} = 0 \text{ с}^{-2};$$

$$\epsilon_2 = \frac{M_{д2} - M_{с2}}{I_n} = \frac{20 - 40}{0,1} = -200 \text{ с}^{-2};$$

$$\epsilon_3 = \frac{M_{д3} - M_{с3}}{I_n} = \frac{20 - 20}{0,1} = 0 \text{ с}^{-2};$$

$$\epsilon_4 = \frac{M_{д4} - M_{с4}}{I_n} = \frac{20 - 0}{0,1} = 200 \text{ с}^{-2}.$$

По найденным значениям ϵ строим график зависимости его от угла поворота звена привода $\epsilon = \epsilon(\varphi)$ (рис. 4.6, б), масштаб по оси ординат принимаем равным $\mu_\epsilon = 0,1 \frac{\text{с}^{-2}}{\text{мм}}$.

Вопросы для самопроверки

1. Для чего используется динамическая модель механизма?
2. Что такое приведенная сила, приведенный момент?
3. Как определить приведенную массу, приведенный момент инерции?
4. В чем заключается графоаналитический метод Виттенбауэра?
5. Как определить момент инерции маховика?

5. ТРЕНИЕ В МЕХАНИЗМАХ

5.1. Основные понятия о трении

Трение бывает внешнее и внутреннее. Внешнее трение – это противодействие относительному перемещению соприкасающихся тел в плоскости их соприкосновения; внутреннее трение – противодействие относительному перемещению отдельных частей одного и того же тела.

По признаку наличия или отсутствия относительного движения различают трение покоя и трение движения. Трение, возникающее при относительном покое соприкасающихся тел, называется трением покоя, а трение, возникающее при относительном движении, – трением движения.

По виду относительного движения тел различают: трение скольжения (внешнее трение при относительном скольжении соприкасающихся тел), трение качения (внешнее трение при относительном качении соприкасающихся тел) и трение вращения.

Трение скольжения (трение первого рода) характеризуется тем, что относительная скорость точек контакта поверхностей тел (рис. 5.1, а) не равна нулю, т. е.:

$$v_{K_{1,2}} \neq 0,$$

где K – контактная точка тел 1 и 2 (одна из многих).

Трение качения (трение второго рода) характеризуется тем, что относительная скорость точек контакта тел (рис. 5.1, б) при движении равна нулю, т. е.:

$$v_{K_{1,2}} = 0.$$

Трение вращения (трение третьего рода) имеет место в подпятниках (рис. 5.1, в) и характеризуется тем, что площадь обеих поверхностей трения одинакова, а скорости относительного перемещения

различных точек неодинаковы и зависят от их удаления от центра контактной площадки. Скорости точек находятся в интервале от нуля до v_{\max} .

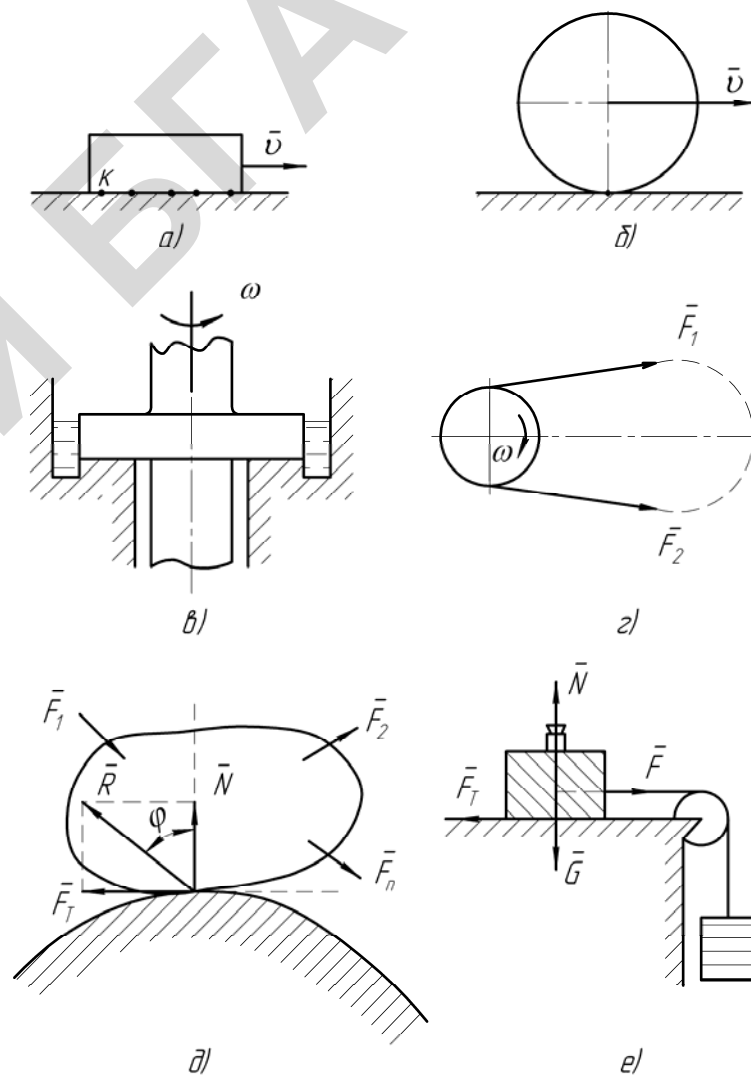


Рис. 5.1. Виды трения

В ременных передачах крутящий момент передается за счет сил трения, возникающих между шкивами и ремнем (рис. 5.1, *з*). Связь между натяжениями ведущей и ведомой ветвей F_1 и F_2 устанавливается на основе решения задачи трения нити о цилиндрическую поверхность (задача Эйлера).

По физическим признакам состояния взаимодействующих тел различают: чистое трение – внешнее трение при полном отсутствии на трущихся поверхностях примесей; сухое трение – внешнее трение, при котором трущиеся поверхности покрыты пленками окислов и адсорбированными молекулами газов или жидкостей; граничное трение – внешнее трение, при котором между трущимися поверхностями есть тонкий слой смазки.

Сила реакции \bar{R} шероховатой поверхности при равновесии тела зависит от величины и направления активных сил (рис. 5.1, *д*). Разложим полную реакцию на составляющие:

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}_T,$$

где \bar{N} – нормальная реакция;

\bar{F}_T – касательная составляющая.

Касательная составляющая \bar{F}_T называется силой трения и зависит от материала контактирующих тел и шероховатости поверхности. Свойства силы трения проанализируем с помощью работы устройства, показанного на рис. 5.1, *е*. При весьма малой силе \bar{F} тело I , нагруженное гирей, будет находиться в покое. Из уравнений равновесия получим:

$$N = G;$$

$$F_T = F.$$

При увеличении силы F сила трения F_T будет нарастать до предельной величины, равной силе трения покоя.

Силой трения покоя называется составляющая полной реакции для трущихся тел, лежащая в общей касательной плоскости к поверхностям контакта. Величина этой силы и ее направление зависят

от внешних сил, приложенных к трущимся телам. Величину силы трения покоя можно определить по следующим формулам:

Формула Амонтона:

$$F_T = f \cdot N, \quad (5.1)$$

где F_T – величина предельной силы трения покоя;

f – коэффициент трения;

N – величина результирующей силы нормальных давлений на поверхности трения.

Формула Кулона:

$$F_T = A + f \cdot N, \quad (5.2)$$

где A – сцепленность, зависящая от площади касания.

Формула Ишлинского и Крагельского:

$$F_T = F_\infty - (F_\infty - F_0)e^{-xt},$$

где F_∞ – величина силы трения при бесконечно большом времени контакта;

F_0 – величина силы трения при нулевом времени контакта;

t – время контакта;

x – коэффициент.

После достижения предельной силы трения покоя начинается скольжение трущихся поверхностей. Сила трения скольжения лежит в общей касательной плоскости к поверхностям контакта и направлена в сторону, противоположную их относительному смещению. Коэффициент трения скольжения имеет меньшее значение по сравнению с коэффициентом трения покоя.

5.2. Трение в поступательной и вращательной кинематических парах

Рассмотрим, как будут направлены силы трения при относительном движении двух тел. На рис. 5.2, *а* представлена поступательная кинематическая пара. Пусть тело i движется относительно неподвижного тела j со скоростью \bar{v}_i . Сила трения \bar{F}_{Tij} , действующая на тело i со стороны тела j , будет направлена противоположно скорости \bar{v}_i . Рассмотрим движение тела j относительно тела i . Для этого

сообщим обоим телам скорость $-\bar{\vartheta}_i$, тогда тело i станет неподвижным, а тело j начнет двигаться относительно i со скоростью $-\bar{\vartheta}_i$. Следовательно, сила трения \bar{F}_{Tji} будет направлена противоположно скорости $-\bar{\vartheta}_i$. Силы \bar{F}_{Tij} и \bar{F}_{Tji} равны между собой по модулю и имеют противоположное направление. Таким образом, сила трения всегда имеет направление противоположное относительной скорости движения.

Модуль силы трения скольжения \bar{F}_{Tij} определяется по формуле:

$$F_{Tij} = f \cdot R_{ij}^n,$$

где R_{ij}^n – нормальная составляющая полной реакции R_{ij} .

В абсолютном движении относительно стойки сила трения может быть как силой сопротивления, так и движущей силой. В случае, показанном на рис. 5.2, б, при $\vartheta_i > \vartheta_j$ сила трения \bar{F}_{Tij} – сила движущая, т. е. звено i увлекает звено j .

Работа внутренних сил трения равна:

$$A_{i,j} = \int_0^t (\bar{F}_{Tij} \cdot \bar{\vartheta}_i + \bar{F}_{Tji} \cdot \bar{\vartheta}_j) dt. \quad (5.3)$$

Согласно третьему закону Ньютона:

$$\bar{F}_{Tij} = -\bar{F}_{Tji}.$$

С учетом этого зависимость (5.3) примет вид:

$$A_{i,j} = \int_0^t (\bar{F}_{Tij} \cdot \bar{\vartheta}_i - \bar{F}_{Tij} \cdot \bar{\vartheta}_j) dt = \int_0^t \bar{F}_{Tij} (\bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_j) dt.$$

Так как сила трения \bar{F}_{Tij} всегда направлена в сторону противоположную относительной скорости, то угол между векторами силы трения и относительной скорости равен 180° . Поэтому их скалярное произведение, а следовательно и работа трения, будут отрицательными.

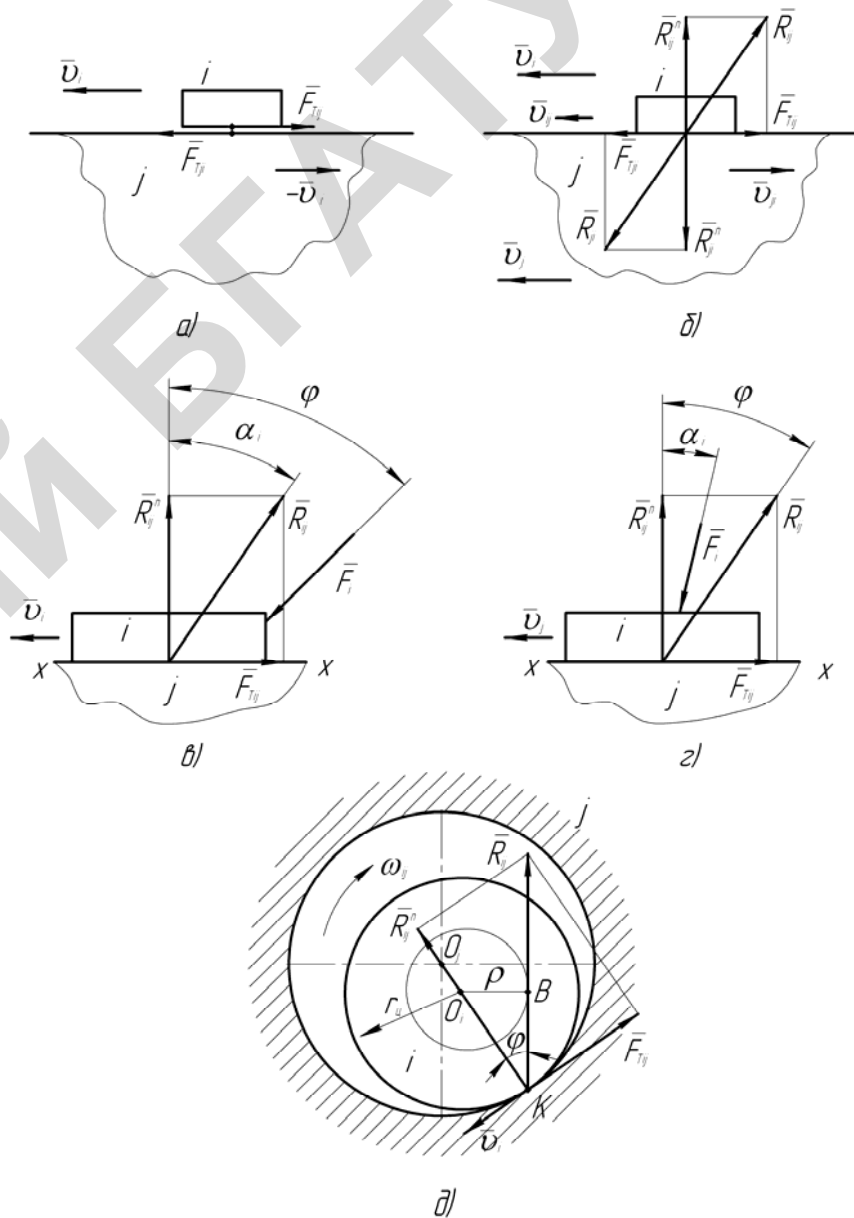


Рис. 5.2. Трение в кинематических парах

Мощность внутренних сил трения также отрицательна:

$$-F_{Tij} \vartheta_i + F_{Tji} \vartheta_j = F_{Tij}(\vartheta_j - \vartheta_i) < 0.$$

Угол φ , который реакция R_{ij} составляет с нормальной составляющей R_{ij}^n , называется углом трения. Из формулы 5.3 и рис. 5.1, б видно, что:

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \quad (5.4)$$

При действии сил трения в поступательной паре возможен случай, когда относительное движение звена в требуемом направлении не может начаться независимо от модуля результирующей движущей силы. Этот случай называют самоторможением.

Пусть на звено i действует сила F_i , которая составляет со скоростью ϑ_i угол $\pi/2 - \alpha_i$ (рис. 5.2, в). При $\alpha_i > \varphi$ звено i движется ускоренно в направлении, указанном вектором $\bar{\vartheta}_i$, так как проекция сил F_i на ось xx больше силы трения F_{Tij} . При $\alpha_i < \varphi$ звено i движется замедленно, если в начальный момент времени оно двигалось со скоростью $\bar{\vartheta}_i$ (рис. 5.2, г). Если же начальная скорость равна нулю, то движение звена не может начаться независимо от модуля движущей силы. При $\alpha_i = \varphi$ возможно равномерное движение звена i со скоростью $\bar{\vartheta}_i$. При начальной скорости, равной нулю, движение не может начаться. Отсюда следует, что условие самоторможения выражается неравенством:

$$\alpha_i \leq \varphi, \quad (5.5)$$

т. е. при самоторможении направление движущей силы проходит внутри угла трения. Геометрическое место возможных положений полной реакции R_{ij} изображается конусом с углом при вершине равным 2φ . Этот конус называется конусом трения.

Рассмотрим вращательную пару (рис. 5.2, д). Нормальная составляющая реакции R_{ij}^n , которую считаем приложенной в точке касания K , проходит через центры O_i и O_j элементов пары. Сила трения \bar{F}_{Tij} направлена в сторону, противоположную направлению

скорости $\bar{\vartheta}_{ij}$ точки касания K звена i . Полная реакция R_{ij} отклонена от общей нормали к цилиндрическим поверхностям в точке K на угол трения φ и при любом положении точки касания K направлена по касательной к кругу радиуса ρ с центром в точке O_i . Этот круг называется кругом трения. Из треугольника BO_iK находим радиус круга трения:

$$\rho = r_{ц} \cdot \sin \varphi \approx r_{ц} \cdot f, \quad (5.6)$$

где $r_{ц}$ – радиус цапфы.

5.3. Трение качения

Соппротивление качению зависит от механических свойств материалов соприкасающихся тел, кривизны соприкасающихся поверхностей и величины нагрузки на каток. При качении тел затрачивается работа на деформацию поверхностей касания колеса и основания.

В зоне касания неподвижного колеса, нагруженного силой F , и плоскости (рис. 5.3, а) возникает местная деформация контактного сжатия на площадке длиной b . Напряжения распределены симметрично и линия действия равнодействующей \bar{N} этих напряжений совпадает с линией действия силы \bar{G} .

При перекатывания колеса участок bc площадки контактного сжатия будет находиться в зоне нарастающих деформаций, а участок ab – в зоне уменьшающихся деформаций. Из-за внутреннего трения в материале кривые нагрузки и разгрузки не совпадают. Поэтому кривая напряжений в области нарастающих деформаций выше кривой в области уменьшающихся деформаций. Из-за этого распределение напряжений по длине является несимметричным с максимумом, сдвинутым в сторону движения на величину b' (рис. 5.3, б).

В общем случае на колесо действует сила тяжести \bar{G} , сила \bar{F} и пара сил с моментом M_d (рис. 5.3, в). Следует различать чистое качение, когда точка соприкосновения A колеса не скользит по неподвижной плоскости, от качения со скольжением, когда наряду с вращением колеса есть и скольжение. При чистом скольжении, колесо движется по плоскости без вращения.

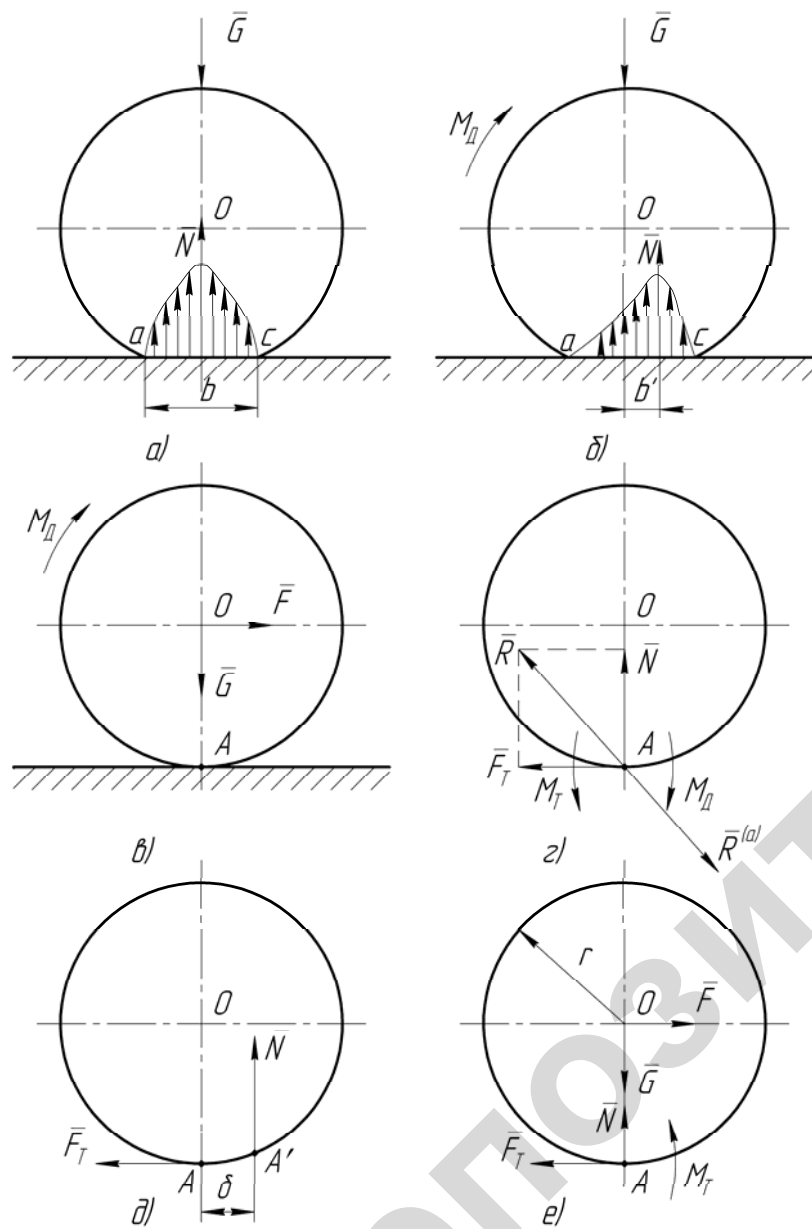


Рис. 5.3. Трение качения

Если привести активные силы к точке A , то в этой точке получим главный вектор этих сил \bar{R}^a и пару сил, момент которой равен главному моменту M_D . Если же привести к точке A распределенные силы, то получим главный вектор реактивных сил \bar{R} составляющими \bar{N} (нормальная реакция) и \bar{F}_T (сила трения скольжения), а также пару сил с моментом M_T (рис. 5.3, c).

При равновесии колеса активные силы уравновешиваются силами реакций связи и, следовательно:

$$-\bar{R} = \bar{R}^a, \quad \bar{R}^a = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i;$$

$$-\bar{M}_T = \bar{M}_D, \quad M_D = \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i).$$

Изменим активные силы, приложенные к катку так, чтобы увеличивался момент M пары активных сил. Пока колесо находится в равновесии, увеличивается и момент M_T пары сил, препятствующий качению колеса и возникающий от действия на колесо неподвижной плоскости. Предельное значение момента M_{Tmax} пропорционально нормальному давлению, а следовательно, и нормальной реакции N :

$$M_{Tmax} = \delta N. \quad (5.7)$$

Коэффициент пропорциональности δ называют коэффициентом трения качения.

Найдем величину коэффициента трения качения δ . Для этого сложим нормальную реакцию \bar{N} с парой сил, препятствующей качению $M_T = M_{Tmax}$. Получим силу \bar{N} , сдвинутую параллельно самой себе на расстояние δ (рис. 5.3, d). Величина плеча δ равна:

$$\delta = \frac{M_{Tmax}}{N}. \quad (5.7)$$

Рассмотрим случай ведомого колеса, к которому, кроме силы тяжести \bar{G} приложена еще горизонтальная активная сила \bar{F} (рис. 5.3, e).

Если каток находится в равновесии, то из условий равновесия плоской системы сил, приложенных к катку относительно точки A , получаем:

$$F_T = F; N = G; r \cdot F = M.$$

В случае отсутствия скольжения:

$$F = F_T \leq fG.$$

При отсутствии качения:

$$r \cdot F = M \leq \delta G.$$

Из этого условия находим, что для отсутствия качения сила F должна удовлетворять условию:

$$F \leq \frac{\delta}{r} G. \quad (5.9)$$

Для того чтобы колесо катилось без скольжения, должно выполняться условие:

$$fG > F \geq \frac{\delta}{r} G \quad (5.10)$$

Обычно $\frac{\delta}{r} \leq f$ и, следовательно, для начала качения катка требуется значительно меньшая по величине сила F , чем для начала его скольжения. Поэтому при увеличении силы F каток сначала начинает катиться, а при дальнейшем ее росте к качению добавляется еще и скольжение.

Колеса сельскохозяйственных машин перемещаются по деформируемой поверхности (почве). Для такой опорной поверхности наиболее подходит теория качения колес, разработанная Ф. А. Опейко.

Расположение сил, действующих на пассивное ходовое колесо, показано на рис. 5.4, а. Колесо нагружено силой \bar{G} , приложенной вблизи его центра. Нормальные составляющие сил, действующих

со стороны почвы, имеют равнодействующую \bar{N} , проходящую через центр колеса. Колесо движется под действием толкающей силы \bar{F} . Реакция почвы \bar{R} , т. е. равнодействующая сил \bar{N} и \bar{F}_T , отклонена от \bar{N} в сторону, противоположную качению колеса. Это является особенностью расположения сил, действующих на пассивное ходовое колесо.

На рис. 5.4, б показано расположение сил, действующих на приводное колесо. Равнодействующая сил трения \bar{F}_T , действующих со стороны опорной поверхности на колесо, направлена в сторону движения его центра. Реакция \bar{R} отклонена от нормального давления \bar{N} в сторону качения колеса, что является характерной особенностью расположения сил, действующих на приводное ходовое колесо.

Теорема Опейко Ф. А. о направлении равнодействующих сил трения: если пассивное или приводное ходовое колесо находится в состоянии скольжения по почве и элементарные силы трения пропорциональны нормальному давлению, то равнодействующая сил трения перпендикулярна равнодействующей нормальных давлений и равна произведению коэффициента трения на равнодействующую нормального давления.

Равнодействующая нормальных давлений, действующих на пассивное ходовое колесо (рис. 5.4, в):

$$\bar{N} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} d\bar{N},$$

где dN – элементарная нормальная реакция почвы, Н;

Элементарная нормальная реакция почвы dN при воздействии элементарным участком длиной dL и шириной b равна:

$$d\bar{N} = -\bar{n} \cdot q \cdot b \cdot dL,$$

где q – равнодействующая нормальных давлений, приходящаяся на единицу длины дуги соприкосновения ходового колеса с почвой, Па;

b – ширина колеса, м.

\bar{n} – единичный вектор внешней нормали окружности ходового колеса;

$dL = r \cdot d\alpha$ – длина элементарного участка дуги соприкосновения колеса с почвой, м;

r – радиус колеса, м;

$d\alpha$ – элементарный угол дуги колеса, рад.

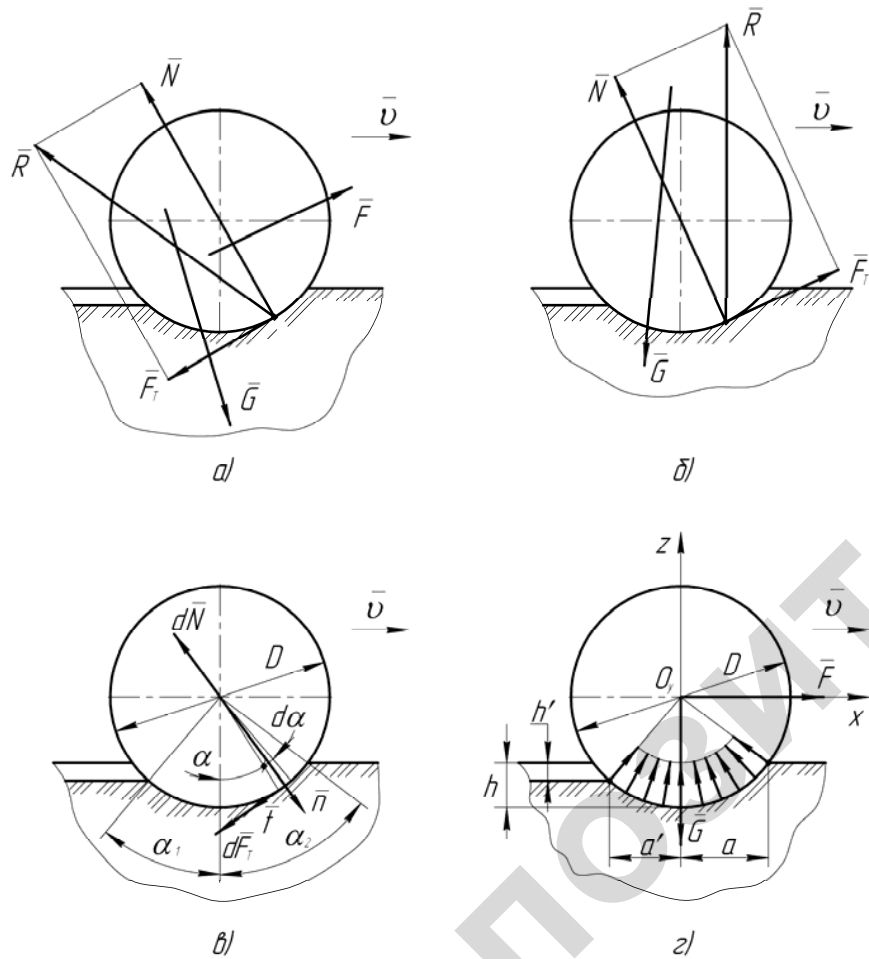


Рис. 5.4. Схемы к определению сил, возникающих при качении колеса по поверхности почвы

Тогда равнодействующая нормальных давлений:

$$\bar{N} = -r \cdot b \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{n} \cdot q \cdot d\alpha. \quad (5.11)$$

Равнодействующая сил трения:

$$\bar{F}_T = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} d\bar{F}_T = f \cdot r \cdot b \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{t} \cdot q \cdot d\alpha, \quad (5.12)$$

где f – коэффициент трения между колесом и почвой;

\bar{t} – единичный вектор дуги окружности колеса.

Умножив левую и правую части уравнения (5.11) векторно на $\bar{t} \times \bar{n} = \bar{k}$, получим:

$$\bar{N} \times \bar{k} = -r \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{k} \times \bar{n} \cdot q \cdot d\alpha.$$

Поскольку $\bar{k} \times \bar{n} = -\bar{t}$.

$$\bar{N} \times \bar{k} = r \cdot b \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \bar{t} \cdot q \cdot d\alpha = \frac{\bar{F}_T}{f}.$$

Следовательно:

$$\bar{F}_T = f \cdot \bar{k} \times \bar{N}, \quad (5.13)$$

т. е. векторы \bar{F}_T и \bar{N} взаимно перпендикулярны. Скалярный же множитель f не меняет направления вектора $\bar{k} \times \bar{N}$, но показывает во сколько раз модуль его меньше модуля F_T . Таким образом, соотношение величин этих векторов, выражается формулой:

$$F_T = f \cdot N. \quad (5.14)$$

На рис. 5.4, *г* изображено пассивное жесткое колесо прямоугоньного меридионального сечения. На колесо действует сила \bar{G} , приложенная в центре его, перпендикулярно опорной плоскости. Тяговая сила \bar{F} также приложена в центре колеса и направлена перпендикулярно оси колеса и параллельно опорной плоскости. Эта сила служит для преодоления сопротивления мятию почвы.

Если центр колеса пройдет некоторый путь s , то сила \bar{F} совершит работу W :

$$W = F \cdot s = p \cdot s \cdot A_x, \quad (5.15)$$

где A_x – проекция поверхности соприкосновения колеса с почвой на плоскость перпендикулярную оси Ox , м²;

p – нормальная составляющая давления между колесом и почвой, Па.

Если через b обозначить ширину колеса, а через h' результирующую деформацию почвы в направлении, перпендикулярном опорной плоскости, то площадь проекции поверхности соприкосновения колеса с почвой A_x будет равна:

$$A_x = b \cdot h' \quad (5.16)$$

и, следовательно:

$$F = p \cdot A_x = p \cdot b \cdot h'.$$

Нагрузка, передаваемая колесом на почву, равна:

$$G = p \cdot A_z, \quad (5.17)$$

где $A_z = (a + a') \cdot b$ – проекция поверхности соприкосновения колеса с почвой на плоскость перпендикулярную оси Oz , м².

Коэффициент сопротивления мятию почвы равен отношению силы сопротивления качению F к нагрузке G :

$$\mu = \frac{F}{G}. \quad (5.18)$$

Согласно исследований Ф. А. Опейко:

$$\mu = \frac{h}{a}. \quad (5.19)$$

Так как $G = p \cdot a \cdot b$, то давление между колесом и почвой:

$$p = \frac{G}{a \cdot b},$$

где $a = \sqrt{r^2 - (r - h)^2} = \sqrt{2r \cdot h + h^2}$.

Величиной h^2 можно пренебречь, тогда:

$$a = \sqrt{D \cdot h}, \quad (5.20)$$

где $D = 2r$ – диаметр колеса, м.

Тогда давление колеса на почву будет равно:

$$p = \frac{G}{b \sqrt{D \cdot h}}. \quad (5.21)$$

При расчетах удобнее исходить из допустимого коэффициента сопротивления мятию почвы, а не ее деформации h . Согласно формуле (5.19):

$$a = \frac{h}{\mu}. \quad (5.22)$$

Приравняв правые части формул (5.20) и (5.22) найдем, что:

$$h = \mu^2 \cdot D. \quad (5.23)$$

Подставив это выражение h в формулу (5.21), получим:

$$p = \frac{G}{\mu \cdot b \cdot D}; \quad (5.24)$$

Из зависимости (5.24) найдем, что коэффициент сопротивления мятию почвы μ равен:

$$\mu = \frac{G}{p \cdot b \cdot D}. \quad (5.25)$$

На основании изложенных выше закономерностей трения качения предложена конструкция колесно-гусеничного движителя, отличительные признаки которого позволяют повысить проходимость транспортного средства [патент на изобретение № 14390].

На рис. 5.5, *а* представлен колесно-гусеничный движитель с установленными на нем промежуточными роликами. Он состоит из колеса 1, установленного на оси транспортного средства, гибкого обода 2, роликов 3, установленных на направляющих, обжимных катках 4 и гидравлической части устройства 5 для автоматического изменения положения обжимных катков 4. Между колесом 1 и роликами 3 на направляющих, закрепленных на раме транспортного средства, установлены промежуточные ролики 6, которые соприкасаются с колесом 1 и роликами 3. Оси вращения колеса 1, роликов 3 и промежуточных роликов 6 лежат в одной плоскости.

Исследования показали, что при взаимодействии выпуклой гусеницы с почвой давления по опорной поверхности распределяются равномерно. Благодаря этому снижается глубина следа.

При расчетах глубины следа и уплотнения почвы выпуклой гусеницей ее можно заменить колесом с эквивалентным диаметром большего размера (рис. 5.5, *б*). Согласно формуле (5.25) коэффициент сопротивления мятию μ уменьшается с увеличением диаметра колеса D . Увеличение эквивалентного диаметра $D_{\text{экв}}$ колесно-гусеничного движителя в два–три раза будет способствовать значительному снижению коэффициента сопротивления мятию μ .

5.4. Жидкостное трение

Внешнее трение деталей сопровождается изнашиванием контактирующих поверхностей. Способность трущихся поверхностей сопротивляться изнашиванию называется износостойкостью. Вид изнашивания во многом определяется характером смазки и состоянием трущихся поверхностей. Недостаточное смазывание узлов трения и повышенные режимы нагрузочных факторов могут привести к нарушению в отдельных точках масляной пленки. Возникающее ювиальное, или сухое трение сопровождается схватыванием вследствие молекулярного взаимодействия твердых тел.

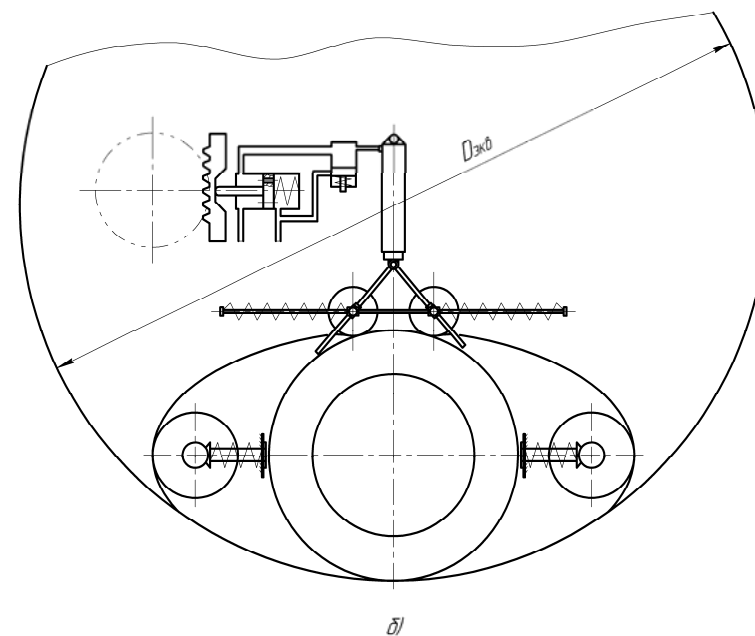
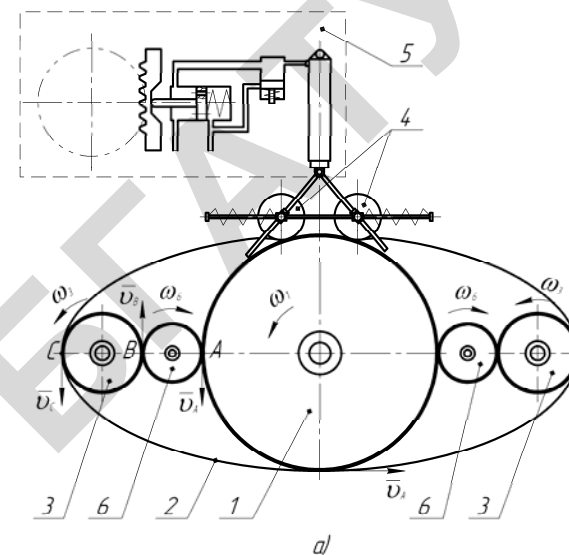


Рис. 5.5. Колесно-гусеничный движитель

Процесс возникновения и развития изнашивания вследствие схватывания называется заеданием. При дальнейшей эксплуатации происходит задираание и вырывание из более слабого материала частиц, которые повреждают сопряженную поверхность.

В условиях граничной смазки наиболее вероятно механическое изнашивание в форме истирания поверхностей. Для повышения износостойкости трущихся поверхностей следует применять антифрикционные пары и смазочные материалы с противоизносными присадками.

В условиях полужидкостной или жидкостной смазок наиболее распространенным видом изнашивания является выкрашивание, которое наступает в результате накопления усталостных повреждений в поверхностном слое. Дефекты кристаллического строения металлов вызывают беспорядочное образование микропор. Под воздействием циклического нагружения происходит постепенный рост микропор и возникновение микротрещин, превращающихся в усталостные трещины.

При вращении цилиндров под нагрузкой контактные напряжения σ_H в отдельных точках изменяются по отнулевому циклу (рис. 5.6, а), когда каждая точка нагружается в период прохождения зоны контакта и свободна от напряжений в остальное время каждого оборота. Переменные контактные напряжения вызывают усталость поверхностных слоев деталей. На поверхности образуются микротрещины с последующим выкрашиванием мелких частиц металла. Если детали работают в масле, то оно проникает в микротрещины (рис. 5.6, б). Попадая в зону контакта, трещина закрывается, а заполняющее ее масло подвергается высокому давлению, которое способствует развитию трещины и выкрашиванию частиц металла (рис. 5.6, в).

Масло образует на поверхности защитные пленки, которые уменьшают трение. При контакте деталей через масляную пленку контактные напряжения уменьшаются. При работе без масла увеличивается интенсивность абразивного износа, который сокращает срок службы деталей.

Работа трения является основным показателем, работоспособности подшипника. Для уменьшения трения подшипники скольжения смазывают. В зависимости от режима работы подшипника в нем может быть полужидкостное или жидкостное трение.

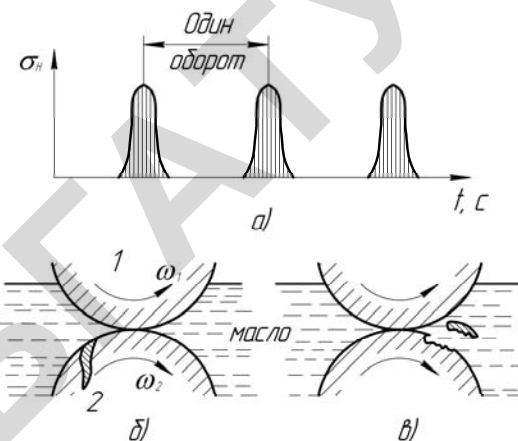


Рис. 5.6. Жидкостное трение

Так как при жидкостном трении рабочие поверхности вала и вкладыша разделены слоем масла, толщина которого больше суммы высот шероховатостей поверхностей, то масло воспринимает внешнюю нагрузку, предотвращая непосредственное соприкосновение рабочих поверхностей. Сопротивление движению в этом случае определяется внутренним трением в смазочной жидкости.

Исследование режима жидкостного трения в подшипниках основано на гидродинамической теории смазки. Эта теория связывает давление, скорость и сопротивление вязкому сдвигу. Для того чтобы трение было жидкостным, необходимо в слое смазки создать давление, которое бы уравновешивало давление от нагрузки.

Приведем гидродинамическую теорию смазки применительно к движению двух пластин, между которыми помещен слой жидкости. Пластина *Б* неподвижна, а пластина *А* движется со скоростью ϑ (рис. 5.7, а). Зазор между пластинами имеет форму клина. Поток жидкости примем плоским, так как ширина пластины значительно больше высоты зазора.

Сила внутреннего трения равна:

$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dy}, \quad (5.26)$$

где μ – динамическая вязкость жидкости, Па · с;

A – площадь слоя жидкости, м².

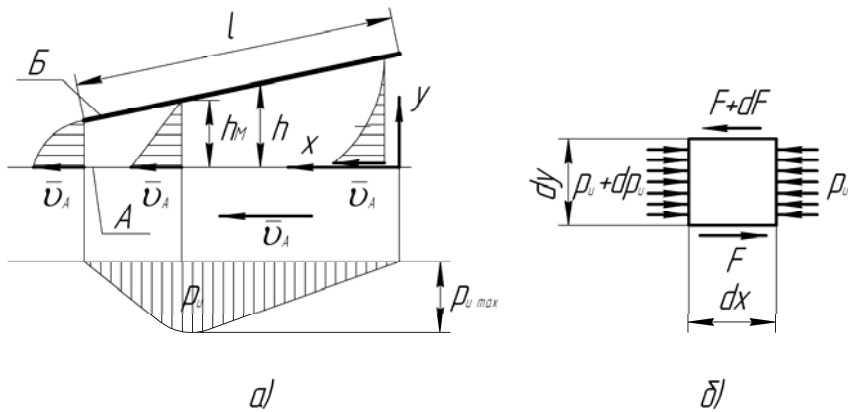


Рис. 5.7. Схемы к расчету при жидкостном трении

Сила вязкого сдвига на единицу поверхности, или напряжение сдвига, равно:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \cdot \frac{d\vartheta}{dy}, \quad (5.27)$$

где τ – напряжение сдвига от внутреннего трения при сдвиге слоев жидкости, Па;

ϑ – скорость течения, м/с.

Зависимость (5.27) является законом Ньютона. Физический смысл закона Ньютона заключается в том, что сопротивление сдвигу пропорционально интенсивности изменения скоростей в поперечном направлении или производной $d\vartheta/dy$.

Продифференцировав уравнение (5.27), получим:

$$\frac{d\tau}{dy} = \mu \cdot \frac{d^2\vartheta}{dy^2}.$$

Из рис. 5.7, б и зависимости (5.27) видно, что элементарная сила сдвига равна:

$$dF = A \cdot d\tau = b \cdot dx \cdot d\tau.$$

Для пластины единичной ширины:

$$dF = dx \cdot d\tau.$$

Тогда из условия равновесия элементарного объема жидкости получим:

$$dp_u \cdot dy = d\tau \cdot dx,$$

или

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{dp_u}{dx},$$

где $\frac{dp_u}{dx}$ – градиент избыточного давления в зазоре.

После преобразований получим:

$$\frac{d^2\vartheta}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp_u}{dx}. \quad (5.28)$$

Проинтегрируем уравнение (5.28):

$$\frac{d\vartheta}{dy} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dp_u}{dx} \cdot y + C_1.$$

После повторного интегрирования получаем:

$$\vartheta = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp_u}{dx} \cdot y^2 + C_1 \cdot y + C_2. \quad (5.29)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем по граничным условиям: при $y = 0$, $\vartheta = \vartheta_A$. Подставив эти значения в уравнение (5.29), найдем $C_2 = \vartheta_A$.

При $y = h$, $\vartheta = 0$. Подставив эти значения в уравнение (5.29), найдем:

$$C_1 = -\frac{\vartheta_A}{h} - \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp_u}{dx} \cdot h.$$

Подставив найденные значения C_1 и C_2 в уравнение (5.29) получим:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp_u}{dx} y^2 - \frac{\vartheta_A}{h} y - \frac{1}{2\mu} \frac{dp_u}{dx} h \cdot y + \vartheta_A = \\ &= \vartheta_A \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{y}{2\mu} \frac{dp_u}{dx} (y - h), \end{aligned} \quad (5.30)$$

где h – текущая толщина слоя масла в зазоре.

Объемный расход на единицу ширины пластины равен:

$$Q = \int_0^h \vartheta dy. \quad (5.31)$$

Решение интеграла (5.31) с учетом (5.30) имеет вид:

$$Q = \frac{1}{12\mu} \cdot \frac{dp_u}{dx} \cdot h^3 + \frac{\vartheta_A \cdot h}{2}. \quad (5.32)$$

Воспользуемся условием сплошности жидкости, согласно которому объемный расход Q в любом поперечном сечении должен быть одним и тем же. Обозначим через h_m величину зазора в том сечении, где давление p_u имеет экстремум (рис. 5.7, а). Тогда из формулы (5.32) получим:

$$Q = \frac{\vartheta_A \cdot h_m}{2}. \quad (5.33)$$

Так как расход жидкости Q одинаков во всех сечениях сужающегося зазора, то средняя скорость течения должна увеличиваться справа налево. В то же время на границах с пластинами скорости жидкости постоянны и равны скоростям пластин. В сечении, совпадающем с максимумом давлений $\frac{dp_u}{dx} = 0$. При этом, согласно уравнению (5.30), скорость ϑ в этом сечении изменяется по линейному закону пропорционально y .

На основании условия сплошности приравняем правые части формул (5.32) и (5.33):

$$\frac{\vartheta_A \cdot h_m}{2} = \frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{dp_u}{dx} + \frac{\vartheta_A \cdot h}{2}. \quad (5.34)$$

Из уравнения (5.34) получим:

$$\frac{dp_u}{dx} = \frac{6\mu \cdot \vartheta_A (h - h_m)}{h^3}. \quad (5.35)$$

Это уравнение называется уравнением Рейнольдса и используется для определения закона изменения давления по длине пластины.

Условием образования режима жидкостного трения является сужающийся зазор, который принято называть клиновым. В радиальных подшипниках клиновая форма зазора свойственна самой конструкции подшипника. Она образуется за счет смещения центров цапфы вала и вкладыша.

При достижении угловой скоростью ω критической величины $\omega_{кр}$ цапфа всплывает в масле и несколько смещается в сторону вращения. С увеличением угловой скорости увеличивается толщина разделяющего масляного слоя h_{min} , а центр цапфы сближается с центром вкладыша. При $\omega \rightarrow \infty$ расстояние между центрами $e \rightarrow 0$. Полного совпадения центров быть не может, так как при этом нарушается клиновидная форма зазора.

На рис. 5.8, а показаны пластины A и B , нагруженные силой F . Пластина A движется относительно пластины B со скоростью ϑ_A . Если скорость ϑ_A мала, то пластина A выжимает смазку с пластины B . Поверхности пластин непосредственно соприкасаются. При этом образуется полужидкостное трение.

При достаточно большой скорости ϑ_A (рис. 5.7, б) пластина A поднимается и принимает наклонное положение, подобно тому, как поднимаются водные лыжи, скользящие по воде. Между пластинами образуется сужающийся зазор, а движение происходит в условиях жидкостного трения. Переход к режиму жидкостного трения происходит при некоторой скорости, называемой критической $\vartheta_{кр}$.

На основе теории жидкостного трения с целью повышения проходимости колесно-гусеничного движителя предложена следующая конструкция (рис. 5.8, в). Движитель состоит из колеса I ,

установленного на оси транспортного средства, гибкого обода 2, передней направляющей 3, на которой установлен ролик 4, задней направляющей 5, на которой установлен ролик 6, переднего гидроцилиндра 7, заднего гидроцилиндра 8, обжимных катков 9 и гидравлической части устройства 10 для автоматического изменения положения обжимных катков 9 [патент на полезную модель № 2334].

Так как колесно-гусеничный движитель применяется на машинах, передвигающихся на скоростях ниже критических, то для создания подъемной силы предлагается изменить угол наклона движителя к горизонту с помощью соответствующей конструкции.

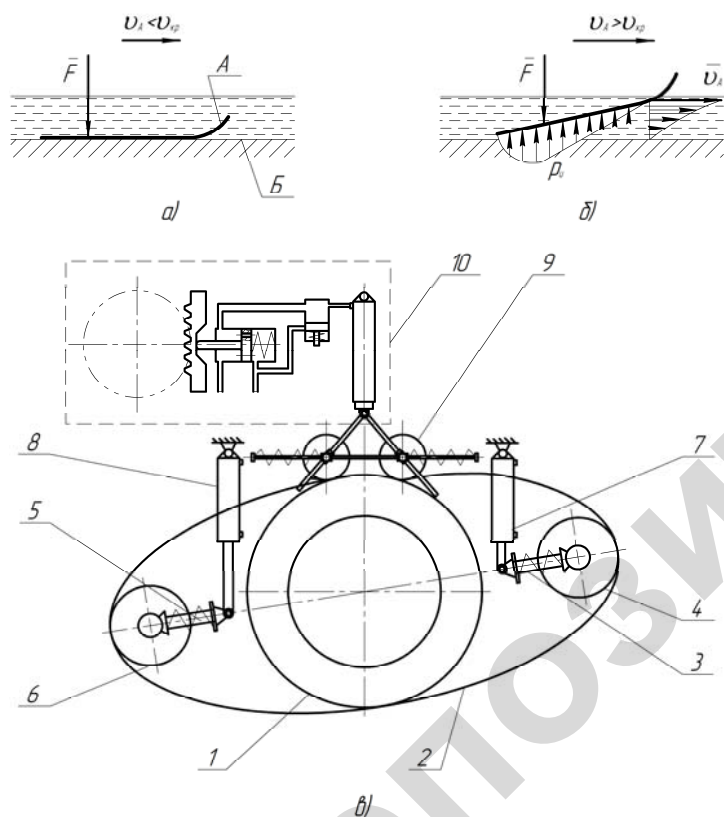


Рис. 5.8. Колесно-гусеничный движитель транспортного средства в режиме повышенной проходимости

Передняя направляющая 3 и гидроцилиндр 7, а также задняя направляющая 5 и гидроцилиндр 8 находятся в шарнирном соединении при помощи горизонтальной оси. Гидроцилиндры 7 и 8 шарнирно установлены на раме транспортного средства между ободом 2 и самой рамой. Маслопровод, соединяющий гидросистему транспортного средства со штоковой полостью переднего гидроцилиндра 7, параллельно соединен с надштоковой полостью заднего гидроцилиндра 8 и, наоборот, маслопровод, соединяющий гидросистему транспортного средства со штоковой полостью заднего гидроцилиндра 8, параллельно соединен с надштоковой полостью переднего гидроцилиндра 7.

При движении транспортного средства по переувлажненной почве при помощи рычага управления гидросистемой масло под давлением одновременно подается в штоковую полость переднего гидроцилиндра 7 и надштоковую полость заднего гидроцилиндра 8. Шток гидроцилиндра 7 вдвигается, а шток гидроцилиндра 8 выдвигается на ту же величину. Вследствие чего, передняя направляющая 3 вместе с роликом 4 поднимается вверх относительно оси колеса 1, а задняя направляющая 5 с роликом 6 опускаются вниз относительно той же оси. Обжимные катки 9 натягивают обод 2. Таким образом, передняя часть движителя, между передним роликом 4 и колесом 1, приподнимается, а задняя часть обода 2 движителя, между задним колесом 1 и роликом 6, выравнивается относительно поверхности почвы, что приводит к снижению сопротивления перекачиванию движителя и повышению несущей способности почвы.

Вопросы для самопроверки

1. Какие виды трения различают?
2. Каковы отличительные особенности трения в поступательной и вращательной кинематических парах?
3. Что такое угол трения?
4. Что такое трение качения и в чем его особенности?
5. Опишите процесс жидкостного трения.

6. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

6.1. Коэффициент полезного действия механизмов при последовательном и параллельном соединении

Механическим коэффициентом полезного действия η называется отношение работы сил полезных сопротивлений W_Q к работе движущих сил W_p :

$$\eta = \frac{W_Q}{W_p}. \quad (6.1)$$

Работа движущих сил превышает работу сил полезных сопротивлений на величину работы сил вредных сопротивлений W_F :

$$W_p = W_Q + W_F.$$

Поэтому КПД можно представить в виде:

$$\eta = \frac{W_Q}{W_Q + W_F}.$$

Силы полезных сопротивлений Q обычно задаются, а в предыдущих параграфах изложено, как определяются силы трения при различных условиях, поэтому определение КПД любого отдельного механизма не вызывает затруднений.

Рассмотрим, как определяется КПД сложной машины. При последовательном соединении механизмов (рис. 6.1, а) от двигателя в первый механизм поступает работа движущих сил W_p , в нем происходят потери на трение, следовательно работа W_1 , передающаяся из первого механизма на второй, будет уже меньше и т. д. Из последнего n -го механизма работа W_Q идет на преодоление сил полезных сопротивлений.

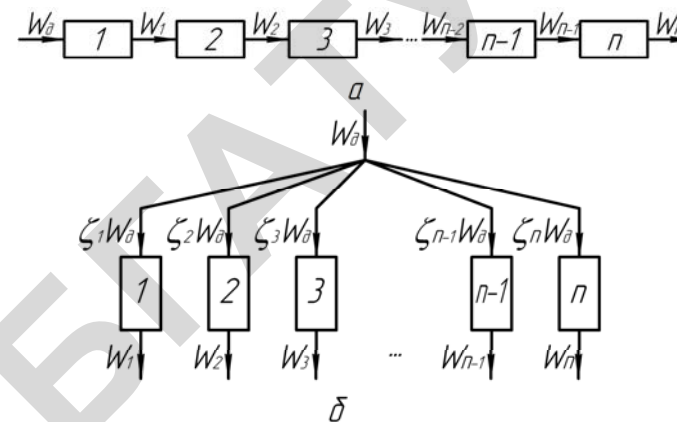


Рис. 6.1. Типы соединения механизмов: а – последовательное; б – параллельное

Коэффициент полезного действия первого механизма:

$$\eta_1 = \frac{W_1}{W_p}.$$

Следовательно:

$$W_1 = W_p \eta_1.$$

Коэффициент полезного действия второго механизма:

$$\eta_2 = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_2}{W_p \eta_1}.$$

Значит:

$$W_2 = W_p \eta_1 \eta_2.$$

Работа, поступающая из третьего механизма:

$$W_3 = W_p \eta_1 \eta_2 \eta_3.$$

Полезная работа, совершающаяся последним n -м механизмом:

$$W_Q = W_p \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n.$$

Коэффициент полезного действия всей машины, состоящей из механизмов, соединенных последовательно, можно определять по формуле:

$$\eta = \frac{W_Q}{W_p} = \frac{W_p \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n}{W_p},$$

или

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n, \quad (6.2)$$

т. е. при последовательном соединении механизмов общий КПД равен произведению КПД всех механизмов.

Из формулы (6.2) следует, что КПД всей машины будет меньше самого низкого КПД отдельного механизма.

Если машина состоит из n механизмов, соединенных параллельно (рис. 6.1, б), работа движущих сил (поступающая от двигателя) разветвляется на каждый механизм:

$$W_p = W_{p1} + W_{p2} + \dots + W_{pn}.$$

В каждом механизме происходят потери на трение и каждый механизм совершает полезную работу. Сложив полезные работы всех механизмов, найдем общую полезную работу:

$$W_Q = W_{Q1} + W_{Q2} + \dots + W_{Qn}.$$

Следовательно, общий КПД всей машины:

$$\eta = \frac{\eta_1 W_{p1} + \eta_2 W_{p2} + \dots + \eta_n W_{pn}}{W_{p1} + W_{p2} + \dots + W_{pn}}. \quad (6.3)$$

Согласно формуле (6.3) при параллельном соединении механизмов низкое качество отдельного механизма меньше влияет на величину КПД всей машины, чем при последовательном соединении механизмов. КПД всей машины будет выше, чем самый низкий КПД, и ниже, чем самый высокий КПД отдельных механизмов.

6.2. Коэффициент полезного действия машинно-тракторных агрегатов

При передвижении ходовых систем по почве сопротивление качению обуславливается, в основном, потерями энергии на деформацию почвы. На рис. 6.2 показана схема деформации почвы колесом и штампом.

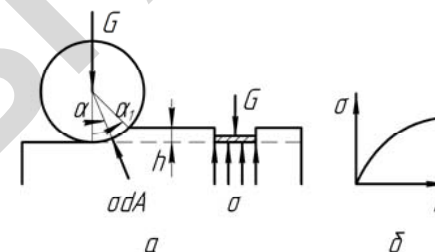


Рис. 6.2. Деформация почвы:

а – схема деформирования почвы колесом и штампом;
б – зависимость между напряжением σ и деформацией почвы h

Для того чтобы можно было применить закономерности деформирования почвы штампом применительно к качению колеса, примем следующие допущения:

1. Сила реакции почвы на элементе поверхности колеса проходит через его ось и равна напряжению σ , умноженному на площадь элемента dA .

2. Напряжение σ под колесом равно напряжению под штампом, вдавленным в почву на глубину, на которой находится рассматриваемый элемент поверхности колеса.

При выполнении данных допущений можно применять зависимость между напряжением σ и осадкой штампа h (рис. 6.2, б) для определения напряжений в размеченных точках контакта колеса с почвой.

Работа вертикальной деформации почвы при i -м проходе колеса:

$$W_{\sigma_i} = A \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_i(h) dh,$$

где A – площадь пятна контакта колеса с почвой, m^2 ;

h_{i-1} – глубина следа при $(i - 1)$ -м проходе колеса, м;
 h_i – глубина следа при i -м проходе колеса, м;
 $\sigma_i(h)$ – зависимость между напряжением и осадкой при i -м проходе колеса.

Суммарная величина работы после n нагружений:

$$W_{\sigma} = A \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_i(h) dh.$$

Значения работы при i -м проходе колеса за один оборот и после n проходов будут равны соответственно:

$$W_{\sigma_i} = 2\pi \cdot r \cdot B_k \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_i(h) dh, \quad (6.4)$$

$$W_{\sigma_n} = 2\pi \cdot r \cdot B_k \cdot \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_i(h) dh, \quad (6.5)$$

где B_k – ширина контакта колеса с почвой, м.

С другой стороны, работа сил сопротивления качению равна:

$$W = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot F_f, \quad (6.6)$$

где F_f – сила сопротивления качению колесного хода, Н.

Приравняв правые части уравнений (6.4) и (6.6), находим значение силы сопротивления качению при i -м проходе колеса:

$$F_{fi} = B_k \cdot \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_i(h) dh. \quad (6.7)$$

Аналогично, из уравнений (6.5) и (6.6) находим суммарную силу сопротивления качению n -осного колесного хода:

$$F_{fn} = B_k \cdot \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \sigma_i(h) dh. \quad (6.8)$$

Для связных почв суммарную силу сопротивления качению n -осного хода найдем исходя из того, что функция $\sigma(h)$ для сильно уплотняющихся почв является непрерывной (рис. 6.3, а). Поэтому к уравнению (6.8) можно применить свойство аддитивности интеграла:

$$F_{fn} = B_k \cdot \int_0^{h_n} \sigma(h) dh.$$

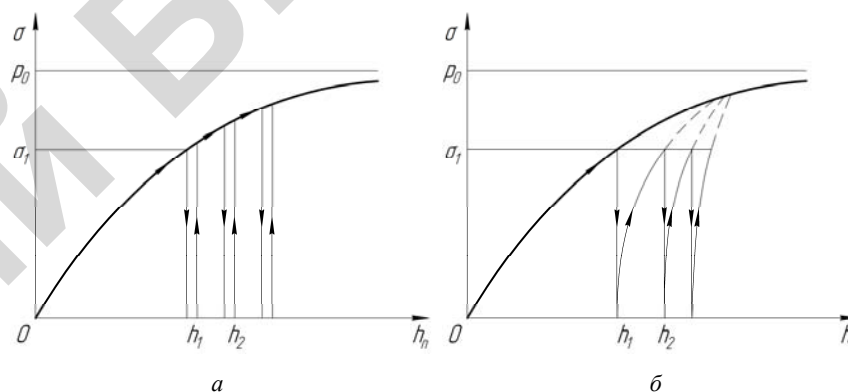


Рис. 6.3. Зависимость между напряжением и деформацией:
 а – сильно уплотняющихся почв; б – слабо уплотняющихся почв

Зависимость между сопротивлением σ и осадкой почвы h подчиняется функции гиперболического тангенса:

$$\sigma = p_0 \cdot th \frac{k}{p_0} \cdot h, \quad (6.9)$$

где p_0 – предел несущей способности почвы, Па;

k – коэффициент объемного смятия почвы, Н/м³.

С учетом зависимости (6.9) суммарная сила сопротивления будет равна:

$$F_{fn} = B_k \int_0^{h_n} p_0 \cdot th \frac{k}{p_0} \cdot h dh. \quad (6.10)$$

Значение этого интеграла:

$$F_{fn} = B_k \cdot \frac{p_0^2}{k} \left| \ln ch \frac{k}{p_0} \cdot h \right|_0^{h_n}.$$

Значение осадки сильно упрочняющейся почвы (рис. 6.3, а) при повторных нагружениях, определяется по следующей зависимости:

$$h_n = \frac{p_0}{k} \cdot Arch \left(\frac{h^B}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{p_0^2}}} \right), \quad (6.11)$$

где B – коэффициент накопления повторных осадок сильно упрочняющейся почвы.

Подставив вместо верхнего предела интегрирования h_n его значение, определяемое формулой (6.11) и с учетом того, что контактное напряжение σ_1 равно давлению колеса на почву q , получим:

$$F_{fn} = B_k \cdot \frac{p_0^2}{k} \cdot \ln ch \left(Arch \sqrt{\frac{n^B}{1 - \frac{q^2}{p_0^2}}} \right),$$

или

$$F_{fn} = B_k \cdot \frac{p_0^2}{k} \cdot \ln \frac{n^B}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{p_0^2}}}. \quad (6.12)$$

При первом нагружении ($n = 1$):

$$F_{f1} = B_k \cdot \frac{p_0^2}{k} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{p_0^2}}}. \quad (6.13)$$

Найдем сопротивление качению при повторных проходах колеса на слабо упрочняющихся почвах. Для этого воспользуемся зависимостью суммарной силы сопротивления качению n -осного колесного хода (6.8), и зависимостями напряжений от деформаций слабо упрочняющейся почвы (рис. 6.3, б). Зависимость $\sigma = \sigma(h)$ при повторных нагружениях для слабо упрочняющейся почвы имеет вид:

$$\sigma_i = p_0 \cdot th \left(\frac{k}{p_0} \cdot \frac{h_i}{k_u \cdot \lg \frac{i}{i-1}} \right), \quad (6.14)$$

где k_u – коэффициент интенсивности накопления повторных осадок для слабо упрочняющейся почвы.

Подставив зависимость (6.14) в (6.8) найдем силу сопротивления качению на слабо упрочняющейся почве:

$$F_{fn} = B_k \cdot \frac{p_0^2}{k} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{p_0^2}}} \cdot (1 + k_u \lg n). \quad (6.15)$$

Рассмотрим развитие ходовыми системами касательной силы тяги. При взаимодействии ведущего колеса с почвой действуют силы сопротивления почвы продольному сдвигу, силы трения между опорной поверхностью шины и почвой и силы среза почвенных кирпичей боковыми гранями почвозацепов.

Передача крутящего момента колесом связана с буксованием δ . При этом происходит деформация и сдвиг почвы в горизонтальной плоскости. Наибольший сдвиг почвы S_{\max} равен:

$$S_{\max} = \delta \cdot L,$$

где L – длина опорной поверхности колеса.

Касательная сила тяги, развиваемая i -й осью многоосного колесного хода, включает силу сопротивления почвы сдвигу и силу трения протектора по почве:

$$F_{ki} = F_{сдв} + F_{тр}. \quad (6.16)$$

Составляющая касательной силы тяги, развиваемая за счет сопротивления почвы сдвигу, равна:

$$F_{сдi} = (1 - k_H) \int_0^{L_i} v \cdot B \cdot \tau(x) dx, \quad (6.17)$$

где k_H – коэффициент насыщенности рисунка протектора;

L_i – длина контакта i -го колеса с почвой, м;

v – коэффициент, зависящий от состояния почвы и давления воздуха в шине;

$\tau(x)$ – функциональная зависимость между напряжением сдвига и деформацией почвы.

Для определения напряжений сдвига τ в зависимости от деформации x Г. И. Покровский использовал гипотезу о «контактной» сущности прочности почв и предложил следующую формулу:

$$\tau = (c_1 e^{-c_b x} + c_2) \cdot (1 - e^{-c_3 x}), \quad (6.18)$$

где c_1 , c_2 , c_3 и c_b – постоянные эмпирические коэффициенты.

В. В. Кацыгин предложил следующую зависимость между напряжением сдвига и деформацией почвы:

$$\tau = f_{ск} \cdot \sigma \left[1 + \frac{f_{пр}}{ch \left(\frac{x}{k_d} \right)} \right] \cdot th \left(\frac{x}{k_d} \right), \quad (6.19)$$

где $f_{ск}$ – коэффициент трения скольжения;

$f_{пр}$ – приведенный коэффициент трения;

k_d – коэффициент деформации, м.

Приведенный коэффициент трения в свою очередь равняется:

$$f_{пр} = \frac{4f_n - 3f_{ск}}{2f_{ск}},$$

где f_n – коэффициент трения покоя;

$$k_d = \frac{x_0}{Arch \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 8f_{пр}^2}}{2f_{пр}} \right)},$$

где x_0 – величина деформации, соответствующая максимальному касательному напряжению, м.

Из зависимостей (6.17) и (6.18) находим:

$$F_{сдi} = (1 - k_H) \int_0^{L_i} v \cdot B \cdot f_{скi} \cdot \sigma_i \cdot \left[1 + \frac{f_{при}}{ch \left(\frac{\delta \cdot x}{k_d} \right)} \right] \cdot th \left(\frac{\delta \cdot x}{k_d} \right) dx, \quad (6.20)$$

где dx – длина элементарной площадки.

Контактное напряжение распределено по длине неравномерно. При аппроксимации эпюры распределения напряжения параболой получено следующее соотношение между максимальным и средним напряжениями:

$$\sigma_{max i} = \frac{3}{2} \cdot \sigma_{срi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R_i}{v \cdot B \cdot L_i}, \quad (6.21)$$

где R_i – нормальная реакция почвы, действующая на колесо, Н.

Интегрируя зависимость (6.20), получаем с учетом формулы (6.21) составляющую касательной силы тяги за счет сдвига почвы:

$$F_{сдi} = (1 - k_H) \cdot \frac{f_{ск} \cdot k_d \cdot R_i}{\delta \cdot L_i} \cdot \left\{ \ln ch \left(\frac{\delta \cdot L_i}{k_d} \right) - f_{пр} \left[\frac{1}{ch \left(\frac{L_i}{k_d} \right)} - 1 \right] \right\}. \quad (6.22)$$

Составляющая касательной силы тяги за счет трения резины протектора по почве:

$$F_{трi} = k_H \cdot \sigma_{срi} \cdot v \cdot B_k \cdot L_i \cdot \mu_{ск}, \quad (6.23)$$

где $\mu_{ск}$ – коэффициент трения скольжения резины протектора по почве.

Коэффициент трения скольжения зависит от проскальзывания и нормального давления в пятне контакта:

$$\mu_{ск} = \mu_n + \left[(\mu_{усл} - U \cdot \sigma) - \mu_n \right] \left[1 - \frac{1}{\theta^n} \right], \quad (6.24)$$

где μ_n – коэффициент трения резины протектора о почву при отсутствии буксования;

$\mu_{\text{усл}}$ – условный коэффициент трения скольжения резины протектора при $\theta \rightarrow \infty$ и $\theta \rightarrow 0$;

U – угловой коэффициент;

θ – коэффициент проскальзывания, $\theta = \frac{1}{1-\delta}$;

n – параметр, зависящий от типа и состояния почвы.

На рис. 6.4 приведен график зависимости коэффициента трения скольжения пневматической шины от проскальзывания. Правая ветвь графика отображает влияние буксования шины, а левая – скольжения при движении колеса юзом.

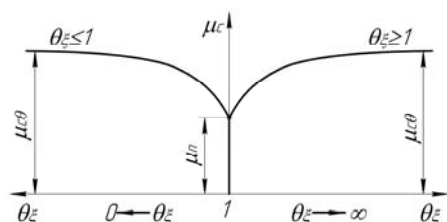


Рис. 6.4. Расчетный вид функциональной зависимости $\mu_{\text{ск}} = \mu_{\text{ск}}(\theta)$

Касательная сила тяги i -го колеса равна:

$$F_{ki} = (1 - k_n) \cdot \frac{f_{\text{ск}} \cdot k_d \cdot R_i}{\delta \cdot L_i} \left\{ \ln \operatorname{ch} \left(\delta \cdot \frac{L_i}{k_d} \right) - f_{\text{пр}} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \left(\delta \cdot \frac{L_i}{k_d} \right)} - 1 \right] \right\} + k_n R_i \left\{ \mu_n + \left[\left(\mu_{\text{усл}} - U \frac{R_i}{v \cdot B \cdot L_i} \right) - \mu_n \right] \cdot \left[1 - (1 - \delta)^n \right] \right\}. \quad (6.25)$$

Зависимость (6.25) позволяет определить соотношение сил сопротивления почвы сдвигу и трения протектора о почву, определяющих касательную силу тяги. Особенно большое значение приобретает указанное соотношение сил для колесных систем, когда каждое последующее колесо движется по следу предыдущего.

Если шины оснащены развитыми почвозацепами, то след от прохода первого колеса имеет рифленую поверхность. При проходе второго колеса по следу первого затрачивается определенная работа на разрушение выступов почвы (почвенных «кирпичей») и последующее сжатие почвы под колесом в вертикальном и горизонтальном направлениях (образование новых «кирпичей»). Опытами установлено, что в данном случае сопротивление качению заднего колеса больше, чем переднего.

Проанализируем возможности развития высокой касательной силы тяги без образования почвенных «кирпичей». Сцепление колеса с почвой осуществляется при буксовании колеса. Величина буксования зависит не только от состояния почвенной поверхности, но и от рисунка протектора шины. При развитых почвозацепах поверхность сдвига колеса при предельном буксовании, т. е. при срезе почвенных «кирпичей», проходит чаще всего по поверхности выступов почвозацепов. В этом случае составляющая касательной силы тяги за счет трения колеса о почву менее существенна, чем составляющая силы, осуществляемая за счет сопротивления сжатию и сдвигу почвы в продольном направлении. В описанном случае наблюдается рифленая поверхность в следе колес, что имеет отрицательные последствия в случае ходовой системы, когда колеса движутся по одному следу.

Если же протектор шины обеспечивает высокое сцепление с почвой не за счет сдвига почвы развитыми почвозацепами, а в результате трения протектора шины с почвой, то можно добиться отсутствия впадин и выступов почвы в следе качения колеса. Исследованиями установлено, что при продольном сдвиге тела по почве имеет место деформация почвы не только на поверхности сдвига, но и на достаточно больших глубинах в почвенном массиве. Эти «глубинные» деформации почвы и способствуют увеличению касательного напряжения при сдвиге. Зависимость касательного напряжения от градиента смещения слоев почвы имеет вид:

$$\tau = \mu_r \frac{dS}{dh} \cdot f(\sigma), \quad (6.26)$$

где μ_r – коэффициент, зависящий от трения частиц почвы друг относительно друга;

$\frac{dS}{dh}$ – градиент смещения слоев почвы по высоте;

$f(\sigma)$ – функция, выражающая зависимость трения в почве от напряженного состояния.

Рассмотрим, чему равно значение составляющих тягового КПД, зависящих от деформации почвы. Значение тягового КПД $\eta_{\text{тяг}}$ равно:

$$\eta_{\text{тяг}} = \eta_{\text{тр}} \cdot \eta_f \cdot \eta_d, \quad (6.27)$$

где $\eta_{\text{тр}}$ – механический КПД трансмиссии;

η_f – КПД, учитывающий потери на качение.

$$\eta_f = 1 - \frac{F_f}{F_{\text{кр}} + F_f}, \quad (6.28)$$

где F_f – сила сопротивления качению, Н;

$F_{\text{кр}}$ – тяговое сопротивление на крюке, Н;

η_d – КПД, учитывающий потери на буксование движителей.

$$\eta_d = 1 - \delta. \quad (6.29)$$

Составляющие тягового КПД η_f и η_d учитывают потери энергии на вертикальную и горизонтальную деформацию почвы и увеличиваются при уменьшении последних.

При сохранении постоянной общей нагрузки увеличение количества осей ходовой системы ведет к уменьшению удельного давления колес на почву. Известно, что при уменьшении давления коэффициенты трения покоя и скольжения возрастают. Поэтому увеличение количества осей колесной ходовой системы при постоянной общей нагрузке способствует увеличению касательной силы тяги, а, следовательно, снижению буксования. Таким образом, увеличение количества осей ходовой системы снижает глубину следа и повышает тяговый КПД.

Применительно к многоосному колесному ходу зависимость (6.28) примет вид:

$$\eta_f = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N F_{fi}}{\sum_{i=1}^N F_{ki}}. \quad (6.30)$$

С учетом формулы (6.30) зависимость тягового КПД от параметров многоосного колесного хода примет вид:

$$\eta_{\text{тяг}} = \eta_{\text{тр}} (1 - \delta) \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^N F_{fi}}{\sum_{i=1}^N F_{ki}} \right). \quad (6.31)$$

Зависимость (6.31) можно представить в виде:

$$\eta_{\text{тяг}} = \eta_{\text{тр}} \cdot \eta_{\text{хс}}, \quad (6.32)$$

где $\eta_{\text{хс}} = (1 - \delta) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^N F_{fi}}{\sum_{i=1}^N F_{ki}} \right)$ – КПД ходовой системы.

Согласно зависимости (6.2) КПД трансмиссии $\eta_{\text{тр}}$ снижается по линейной зависимости при увеличении числа осей.

Расчеты по формулам (6.12), (6.25) и (6.31) показали, что увеличение числа осей ведет к росту КПД ходовой части. Тяговый КПД возрастает менее интенсивно из-за усложнения трансмиссии. При увеличении числа осей свыше четырех–пяти начинается снижение тягового КПД. Увеличение числа осей при сохранении постоянной нагрузки на ось ведет к повышению КПД ходовой части, однако менее интенсивно (рис. 6.5).

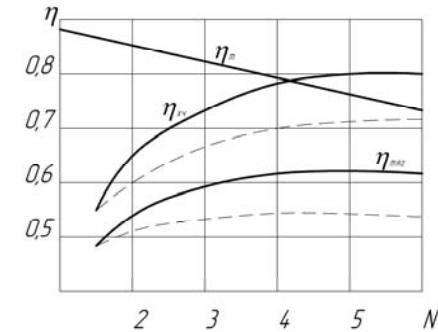


Рис. 6.5. Зависимость тягового КПД от числа осей

Вопросы для самопроверки

1. Что такое механический коэффициент полезного действия?
2. Как определить коэффициент полезного действия машины при последовательном и параллельном соединении механизмов?
3. Как соединение механизмов влияет на значение коэффициента полезного действия машины?
4. От чего зависит значение тягового коэффициента полезного действия?
5. Как число осей ходовой системы влияет на коэффициент полезного действия тягового средства?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алексеева, Т. В. Дорожные машины. Часть I. Машины для земляных работ / Т. В. Алексеева, К. А. Артемьев, А. А. Бромберг. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Машиностроение, 1972. – 504 с.
2. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин: учебник для вузов / И. И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.
3. Артоболевский, И. И. Сборник задач по теории механизмов и машин: учеб. пособие для вузов / И. И. Артоболевский, Б. В. Эдельштейн. – Москва : Наука, 1973. – 256 с.
4. Вopilкин, Е. А. Расчет и конструирование механизмов приборов и систем: учебное пособие для студентов вузов / Е. А. Вopilкин. – Москва : Высшая школа, 1980. – 463 с.
5. Иванов, М. Н. Детали машин: учебник для вузов / М. Н. Иванов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Высш. школа, 1991. – 383 с.
6. Иосилевич, Г. Б. Прикладная механика: учебник для вузов / Г. Б. Иосилевич, Г. Б. Строганов, Г. С. Маслов. – Москва : Высшая школа, 1989. – 351 с.
7. Козик, А. А. Теория механизмов и машин в примерах и задачах. Часть 1. Структурное и кинематическое исследование механизмов: учебно-методическое пособие / БГАТУ, [Кафедра термех и ТММ]; сост.: А. А. Козик, И. С. Крук. – Минск, 2004. – 220 с.
8. Кулен, А. Современная земледельческая механика / А. Кулен, Х. Куиперс; пер. с англ. А. Э. Габриэляна; под ред. и с предисл. Ю. А. Смирнова. – Москва : Агропромиздат, 1986. – 349 с.
9. Лачуга, Ю. Ф. Теоретическая механика: учебник для студентов вузов по агроинженерным специальностям / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. – Москва : Колос, 2000. – 576 с.
10. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин: учебное пособие для вузов / Н. И. Левитский. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1990. – 592 с.
11. Леонов, И. В. Теория механизмов и машин (основы проектирования по динамическим критериям и показателям экономичности):

учебное пособие / И. В. Леонов, Д. И. Леонов. – Москва : Высшее образование, Юрайт-Издат, 2009. – 239 с.

12. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики: учебник для студентов машиностроит. и приборостроит. спец. вузов / Н. Н. Никитин. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1990. – 607 с.

13. Опейко, Ф. А. Колесный и гусеничный ход / Ф. А. Опейко. – Минск : Изд. АСХН БССР, 1960. – 228 с.

14. Тимофеев, С. И. Теория механизмов и механика машин / С. И. Тимофеев. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2011. – 349 с.

15. Фролов, К. В. Теория механизмов и машин: учебник для вузов / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др.; под ред. Фролов К. В. – Москва : Высшая школа, 1987. – 496 с.

Учебное издание

**Орда Александр Николаевич, Шкляревич Виктор Александрович,
Алешкевич Сергей Владимирович**

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Учебное пособие

В двух частях

Часть 1

**Основы строения и исследования
механизмов**

Ответственный за выпуск *А. Н. Орда*
Редактор *В. А. Гошко*
Компьютерная верстка *В. А. Гошко*

Подписано в печать 11.10.2012 г. Формат 60×84¹/₁₆.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 6,54. Тираж 300 экз. Заказ 653.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
ЛИ № 02330/0552984 от 14.04.2010.
ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.
Пр. Независимости, 99–2, 220023, Минск.