МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики

ФИЗИКА

Механика. Молекулярная физика

Лабораторный практикум

Минск
БГАТУ
2010

УДК 53(07)
ББК 22.3я7
Ф50

Рекомендовано научно-методическим советом агроэнергетического факультета БГАТУ. Протокол № 1 от 24 сентября 2009 г.

Составители:
старший преподаватель *С. Л. Быкова*,
кандидат физико-математических наук, доцент *И. Т. Неманова*

Рецензенты:
доцент кафедры теоретической механики БГАТУ,
кандидат физико-математических наук *Ю. С. Биза*;
старший научный сотрудник НПЦ НАН Беларуси
по материаловедению, доцент кафедры физики БГАТУ,
кандидат физико-математических наук *Т. М. Ткаченко*

Физика. Механика. Молекулярная физика : лабораторный практикум / сост. : С. Л. Быкова, И. Т. Неманова. –
Ф50 Минск : БГАТУ, 2010. – 108 с.
ISBN 978-985-519-259-7.

Издание включает теоретический раздел, содержащий основные сведения по обработке результатов и оценке погрешностей измерений, а также лабораторные работы по механике, молекулярной физике и термодинамике. Каждая работа содержит краткое введение, описание лабораторной установки и хода выполнения лабораторной работы, а также разноуровневые контрольные задания к ней.

Предназначено для студентов агротехнических специальностей.

УДК 53(07)
ББК 22.3я7

ISBN 978-985-519-259-7

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Издание включает вводную часть «Основные сведения по обработке результатов и оценке погрешностей измерений» и описания лабораторных работ, предназначенных для выполнения студентам I курса в лабораторном практикуме по разделам физики «Механика» и «Молекулярная физика. Термодинамика».

Вводная часть содержит основные понятия и положения теории погрешностей измерений, описание способов их расчета, а также правила оформления отчета по лабораторной работе (построение графиков, составление таблиц результатов измерений и вычислений) и приближенных вычислений.

Лабораторные работы полностью соответствуют программе первой части курса физики и модульной системе обучения: тематика каждой лабораторной работы относится к определенному модулю курса «Механика. Молекулярная физика. Термодинамика». Описание каждой лабораторной работы содержит основные теоретические сведения по данной теме программы в виде формулировок законов, определений и определяющих формул. Дается описание лабораторной установки, методики выполнения лабораторной работы и вывод расчетных (рабочих) формул. Задания, предлагаемые студентам для выполнения, разделены по уровням сложности (не менее двух). Завершают методическое описание лабораторной работы контрольные вопросы двух видов: вопросы предварительного контроля, которые составлены в виде тестов и могут быть использованы для компьютерного допуска к выполнению лабораторной работы, и контрольные вопросы для защиты лабораторной работы. Последние разделены по уровням сложности (2−3 уровня), что дает возможность оценить работу студента по подготовке и выполнению лабораторной работы соответствующим баллом.

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1. Классификация погрешностей измерений

Физика − наука экспериментальная. Это означает, что физические закономерности и законы первоначально получены экспериментально, в лаборатории, а затем уже осмыслены теоретически. Любой эксперимент предполагает проведение некоторых измерений и обработку результатов этих измерений.

Измерение − это определение численного значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств. Существуют прямые и косвенные измерения.

Прямое измерение − измерение, при котором значение физической величины находится непосредственно опытным путем.

При *косвенном измерении* искомое численное значение физической величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Каждому измерению присуща *погрешность измерения (или ошибка измерения)*, которая представляет собой отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Если измеряется величина x, то погрешность измерения $\delta x = x_{изм} - x_{ист}$, где $x_{изм}$ − результат измерения. Уменьшения величины погрешности измерения можно добиться многократным повторением данного измерения. Поэтому при выполнении лабораторных измерений опыты, как правило, повторяются несколько раз (количество опытов $n \geq 5$).

Причины возникновения погрешностей измерения разнообразны. Можно выделить ошибки систематические, случайные и промахи.

Систематическими погрешностями измерений называются погрешности, которые при многократном измерении одной и той же величины остаются постоянными либо изменяются по определенному закону. Систематические погрешности включают в себя методические и приборные (инструментальные) погрешности измерений.

Методические погрешности вызываются недостатками применяемого метода измерений, несовершенством теории физического явления, неточностью расчетной формулы, используемой для нахождения измеряемой величины. Например, при взвешивании тела на аналитических весах будет допущена систематическая методическая погрешность, если не будет вноситься поправка на различие выталкивающих сил, действующих со стороны воздуха на взвешиваемое тело и разновесы. Методические погрешности можно уменьшить путем совершенствования метода измерений, а также введения уточнений в расчетную формулу.

Приборные (инструментальные) погрешности вызываются несовершенством и неточностью измерительных приборов (например, несовпадение в стрелочном приборе центра шкалы с осью вращения стрелки, изменение хода секундомера при изменении температуры и т. д.). Полностью устранить приборную погрешность невозможно, но ее следует учесть, зная класс точности прибора.

Случайными погрешностями измерений называются погрешности, абсолютная величина и знак которых изменяются при многократных измерениях одной и той же физической величины. Случайные погрешности вызываются многими факторами, не поддающимися учету, например, несовпадение момента включения секундомера с моментом начала опыта, влияние незначительного движения воздуха на ход наблюдаемого физического процесса и др.

Полностью избавиться от случайных погрешностей невозможно, но их можно уменьшить путем многократного повторения измерений. При этом происходит частичная компенсация случайных отклонений результатов измерений в сторону завышения и в сторону занижения. Расчет случайных погрешностей производится методами теории вероятностей и математической статистики.

К *промахам* относятся грубые ошибки измерения, величина которых сильно искажает результат (уже в первых цифрах отсчета). Промахи вызываются обычно невнимательностью экспериментатора, резким изменением условий эксперимента, неисправностью прибора. Такие результаты измерений должны быть отброшены.

1.2. Вычисление ошибок прямых измерений

1. Случайные погрешности измерений. Пусть при измерении некоторой физической величины x было проведено n одинаковых опытов и получено n результатов измерений $x_1, x_2, ...x_n$, которые из-за наличия погрешностей измерений различны, хотя некоторые могут совпадать друг с другом. Предположим, что основную роль играют случайные ошибки, и рассмотрим способы их вычисления.

Истинное значение измеряемой величины x неизвестно, но наиболее близким к нему является среднее арифметическое полученных результатов измерений, которое и принимается за результат многократных измерений:

$$x_{\text{изм}} = \langle x \rangle = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (1)$$

Установить, насколько величина $\langle x \rangle$ отличается от истинного значения, можно только с определенной вероятностью.

Отклонение результата каждого измерения от среднего значения называется *случайным отклонением*. Например, случайное отклонение результата i-го измерения

$$\Delta x_i = \langle x \rangle - x_i \,. \qquad (2)$$

Случайные отклонения отдельных измерений в серии n опытов имеют различную величину и знак, но при бесконечно большом числе измерений число положительных отклонений становится равно числу отрицательных отклонений, так что их сумма стремится к нулю:

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \,.$$

При этом проявляется определенная закономерность в появлении случайных отклонений: результаты измерений, характеризующиеся большой величиной Δx_i, встречаются гораздо реже, в то время как увеличивается число результатов, близких к $\langle x \rangle$. Закон

распределения случайной величины (случайных ошибок при измерении некоторой физической величины) называется *нормальным распределением или распределением Гаусса*. Для измеряемой величины x он записывается следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\langle x \rangle - x)^2}{2\sigma^2}} \,, \qquad (3)$$

где $f(x)$ означает вероятность того, что при измерении получим значение x_i, лежащее в единичном интервале значений около x, либо вероятность того, что истинное значение величины лежит в этом единичном интервале. Функция $f(x)$ называется *функцией распределения вероятностей.* Она является *плотностью вероятности*, так как относится к единичному интервалу переменной x. Вероятность P того, что результат измерения x_i лежит, например, в интервале значений от $\langle x \rangle - \Delta x$ до $\langle x \rangle + \Delta x$ (либо истинное значение находится в этом интервале), равна

$$P(\langle x \rangle - \Delta x \le x \le \langle x \rangle + \Delta x) = \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(x)dx \,. \qquad (4)$$

Соответственно для всевозможных значений результатов измерений, т. е. для $-\infty \le x_i \le +\infty$, вероятность должна быть равна 1:

$$P(-\infty \le x \le +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \,. \qquad (5)$$

Условие (5) называется условием нормировки функции распределения *f(x)*.

Функция распределения (3) содержит два параметра: $\langle x \rangle$ и σ. Первый из них − среднее (арифметическое) результатов измерений − может быть вычислен по формуле (1). Величина σ^2 называется *дисперсией (случайной величины).* Она представляет собой среднее значение квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения, т. е. $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$. Если число измерений величины x достаточно велико, то дисперсию можно приближенно вычислить по результатам измерений x_i следующим образом:

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\langle x\rangle - x_i)^2 . \qquad (6)$$

В общем случае $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\langle x\rangle - x)^2 f(x)dx$. Корень квадратный из величины дисперсии называется *стандартной (среднеквадратичной) погрешностью или стандартным отклонением S*:

$$S = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\langle x\rangle - x_i)^2}{n-1}} . \qquad (7)$$

Во всех приведенных выше выражениях истинное значение измеряемой величины x было заменено ее средним арифметическим результатов n измерений согласно формуле (1). Но величина $\langle x\rangle$ сама носит статистический характер. Действительно, если серию из n опытов повторить несколько (например, n) раз, то вычисленные по формуле (1) средние (арифметические) значения $\langle x\rangle_1, \langle x\rangle_2, \ldots$ будут различны и, как показано в теории вероятностей, также будут подчиняться распределению Гаусса (3) с дисперсией $\frac{\sigma^2}{n}$. С учетом этого стандартное отклонение S принимает окончательный вид:

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\langle x\rangle - x_i)^2}{n(n-1)}} . \qquad (8)$$

Эта величина и определяет ошибку измерения с учетом вероятности появления этой ошибки. С помощью формулы (4) можно получить, что вероятность того, что результат измерения лежит:

в интервале $\left[\langle x\rangle - S_n, \langle x\rangle + S_n\right]$ равна $P = 0,683$;

в интервале $\left[\langle x\rangle - 2S_n, \langle x\rangle + 2S_n\right]$ равна $P = 0,954$;

в интервале $\left[\langle x\rangle - 3S_n, \langle x\rangle + 3S_n\right]$ равна $P = 0,997$ и т. д.

В каждом из этих случаев вероятность получения результата измерения (или нахождения истинного значения) в интервале длиной $2kS_n$ около среднего значения $\langle x\rangle$ ($k = 1, 2, 3$ соответственно) называется *надежностью результата* $P(k)$. Имеем: $P(1) = 0,683$ (приблизительно 2/3), $P(2) = 0,954$, $P(3) = 0,997$. Соответствующий каждому из указанных выше случаев интервал $\left[\langle x\rangle - kS_n, \varphi\langle x\rangle + kS_n\right]$, куда с данной вероятностью попадает результат измерения или где находится истинное значение, равен $2kS_n$. Он называется *доверительным интервалом.* Следовательно, можно сказать, что в указанных трех случаях результат измерения величины x и ее истинное значение с надежностью (вероятностью) $P(k)$ лежат в доверительном интервале $2kS_n$ (т. е. $\langle x\rangle - kS_n \le x_i \le \langle x\rangle + kS_n$), где $k = 1, 2, 3$. В этих случаях случайная погрешность измерений есть положительная величина

$$\Delta x_{\text{сл}} = kS_n . \qquad (9)$$

Эти результаты справедливы при большом количестве опытов по измерению искомой величины x.

При малом количестве измерений вводится специальный коэффициент − коэффициент Стьюдента $t_{n,P}$, заменяющий число k и зависящий от числа измерений n и задаваемой надежности $P(t)$. При небольшом числе измерений величина коэффициента Стьюдента значительно превышает число k для выбранной надежности результата. С увеличением числа измерений численное значение $t_{n,P}$ приближается к числу k для данного P:

$$t \to k \text{ при } n \to \infty .$$

Значения коэффициентов Стьюдента $t_{n,P}$ приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Коэффициенты Стьюдента

	P = 0,5	**P = 0,9**	**P = 0,95**	**P = 0,99**
***n* = 2**	1,60	6,31	12,7	63,7
***n* = 3**	0,82	2,92	4,30	9,92
***n* = 4**	0,77	2,35	3,18	5,94
***n* = 5**	0,74	2,13	2,78	4,60
***n* = 6**	0,73	2,02	2,57	4,03
***n* = 7**	0,72	1,94	2,45	3,71
***n* = 8**	0,71	1,89	2,36	3,50
***n* = 9**	0,71	1,86	2,31	3,36
***n* = 10**	0,70	1,83	2,26	3,25
***n* = 15**	0,69	1,76	2,14	2,98

Таким образом, *стандартная случайная (среднеквадратичная) погрешность* измерений с надежностью P вычисляется по формуле

$$\Delta x_{\text{сл}} = t_{n,P}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\langle x\rangle - x_i)^2}{n(n-1)}}\,. \tag{10}$$

2. Полная погрешность измерений. В общем случае при прямых измерениях необходимо принимать во внимание как случайные, так и систематические погрешности. Последние, в основном, являются приборными погрешностями, так как ошибки методического характера должны быть устранены либо минимизированы.

Приборная (инструментальная) погрешность определяется на основании паспортных данных прибора и его класса точности.

Классом точности прибора называется выраженное в процентах отношение погрешности прибора к его верхнему пределу измерений:

$$K = \frac{\Delta' x_{\text{приб}}}{x_{\max}}\cdot 100\,, \tag{11}$$

откуда

$$\Delta' x_{\text{приб}} = \frac{K}{100}x_{\max}\,. \tag{12}$$

Применяются следующие классы точности измерительных приборов: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Обозначение класса точности прибора записывается на его шкале в виде соответствующих цифр (не заключенных в кружок).

Класс точности прибора и, следовательно, абсолютная погрешность прибора, найденная по формуле (12), задаются с доверительной вероятностью P = 99,7 %. Значит, приборная погрешность для наиболее используемой в лабораторном практикуме доверительной вероятности P = 95 % определится следующим образом:

$$\Delta x_{\text{приб}} = \frac{t_{0,95}}{t_{0,99}}\Delta' x_{\text{приб}} = \frac{2}{3}\Delta' x_{\text{приб}}\,. \tag{13}$$

Если класс точности прибора не указан и в паспорте прибора нет данных о его инструментальной погрешности, то считают, что эта погрешность равна половине цены наименьшего деления шкалы. В случае прибора, стрелка которого перемещается не равномерно, а «скачками» (например, у ручного секундомера), приборную погрешность считают равной цене деления шкалы.

Полная абсолютная погрешность прямого измерения, включающая случайное стандартное отклонение и приборную погрешность, вычисляется по формуле

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сл}})^2 + (\Delta x_{\text{приб}})^2}\,, \tag{14}$$

а *полная относительная погрешность*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x\rangle}100\,\%\,. \tag{15}$$

Окончательный результат серии из n измерений величины x должен быть записан в виде выражения

$$x = \langle x\rangle \pm \Delta x,\ \varepsilon,\ P\,, \tag{16}$$

которое означает следующее: измерениями с вероятностью P (с надежностью P) установлено, что истинное значение искомой величины лежит в интервале значений $\left[\langle x\rangle - \Delta x, \langle x\rangle + \Delta x\right]$, при этом относительная ошибка измерений равна ε.

Упрощенный способ вычисления погрешностей состоит в том, что за абсолютную ошибку прямых измерений принимают среднее значение модулей случайных отклонений от среднего значения (см. формулу (2)), т. е. считают, что средняя абсолютная ошибка $\langle \Delta x \rangle$ вычисляется следующим образом:

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + ... + |\Delta x_n|}{n} =$$
$$= \frac{|\langle x \rangle - x_1| + |\langle x \rangle - x_2| + ... + |\langle x \rangle - x_n|}{n} = \qquad (17)$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} |\langle x \rangle - x_i|}{n}.$$

Но тогда не определена надежность результата; это значит, не известна вероятность, с которой истинное значение измеряемой величины x находится в интервале $\langle x \rangle - \langle \Delta x \rangle \le x \le \langle x \rangle + \langle \Delta x \rangle$. В таком случае окончательный результат прямых измерений записывается в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle, \quad \varepsilon . \qquad (18)$$

Результат в виде формулы (16) или (18) должен быть записан с соблюдением правил приближенного вычисления (см. пункт 1.4).

1.3. Вычисление ошибок косвенных измерений

Пусть физическая величина A не может быть измерена непосредственно, но известна ее функциональная зависимость от других физических величин $x, y, z, t, ...w$, которые могут быть найдены путем прямых измерений, т. е. задана функция

$$A = f(x, y, z, ...w). \qquad (19)$$

Наиболее вероятным значением физической величины A является ее среднее значение

$$\langle A \rangle = f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle ... \langle w \rangle). \qquad (20)$$

Погрешность ΔA определения величины A является малой добавкой к величине $\langle A \rangle$, поэтому ΔA можно считать дифференциалом dA функции многих переменных A. При этом стандартные отклонения (абсолютные ошибки) измерения величин $x, y, z, ...$, являющихся аргументами этой функции, удовлетворяют условиям:

$$\Delta x << \langle x \rangle, \Delta y << \langle y \rangle, ..., \Delta w << \langle w \rangle \qquad (21)$$

и поэтому могут быть заменены соответствующими дифференциалами $dx, dy, ..., dw$. Тогда стандартная абсолютная погрешность величины A принимается равной:

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, ...)}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, ...)}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + ...} . \qquad (22)$$

Окончательный результат представляется в стандартной форме:

$$A = \langle A \rangle \pm \Delta A, \quad \varepsilon = \frac{\Delta A}{\langle A \rangle}. \qquad (23)$$

Вычисления абсолютной погрешности ΔA по формуле (22) и относительной ε с учетом условий (21) дают для наиболее часто встречающихся элементарных функций результаты, сведенные в таблицу 2.

Таблица 2 – Формулы для абсолютных и относительных погрешностей косвенных измерений

Вид функции A	Абсолютная погрешность ΔA	Относительная погрешность $\Delta A_{/A}$
$x + y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{\lvert x + y \rvert}$
$x - y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{\lvert x - y \rvert}$

Окончание таблицы 2

Вид функции A	Абсолютная погрешность ΔA	Относительная погрешность $\Delta A/A$
Cx	$C\Delta x$	$\dfrac{\Delta x}{\lvert x\rvert}$
xy	$\lvert x\rvert\cdot\Delta y+\lvert y\rvert\cdot\Delta x$	$\dfrac{\Delta x}{\lvert x\rvert}+\dfrac{\Delta y}{\lvert y\rvert}$
$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\lvert x\rvert\cdot\Delta y+\lvert y\rvert\cdot\Delta x}{y^2}$	$\dfrac{\Delta x}{\lvert x\rvert}+\dfrac{\Delta y}{\lvert y\rvert}$
x^n	$\lvert n\rvert\cdot\lvert x\rvert^{n-1}\cdot\Delta x$	$\lvert n\rvert\cdot\dfrac{\Delta x}{\lvert x\rvert}$
$\ln x$	$\dfrac{\Delta x}{x}$	$\dfrac{\Delta x}{x\cdot\lvert\ln x\rvert}$
$\sin x$	$\lvert\cos x\rvert\cdot\Delta x$	$\dfrac{\Delta x}{\lvert\mathrm{tg}x\rvert}$
$\cos x$	$\lvert\sin x\rvert\cdot\Delta x$	$\lvert\mathrm{tg}x\rvert\cdot\Delta x$
$\mathrm{tg}x$	$\dfrac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\dfrac{2\Delta x}{\lvert\sin 2x\rvert}$

Замечания.

1. Все значения аргументов *x, y*, записанные в таблице 2, понимаются, как соответствующие средние значения $\langle x\rangle,\langle y\rangle$ физических величин, найденные с помощью прямых измерений (см. формулу (22)).

2. Скобки модуля величины (например, $\lvert x\rvert$ либо $\lvert\sin x\rvert$ и т. д.) появляются по той причине, что при выводе формул для абсолютной или относительной погрешности косвенных измерений, с использованием выражения (22), принимается случай максимально возможной погрешности. Это достигается в случаях, когда ошибки, вносимые в результат всеми измеряемыми величинами (аргументами

функции $A=f(x,y,...)$), имеют одинаковый знак и складываются их абсолютные величины. К тому же, за относительную ошибку всегда принимается положительная величина.

3. В приведенной выше таблице C означает постоянную величину. Если это известная константа (например, число π), то ее нужно брать с такой точностью, чтобы относительная погрешность этой величины была значительно меньше относительной погрешности всех остальных величин, входящих в выражение для искомой величины A.

4. Для всех измеряемых величин ($x, y, z,...$) задается одно и то же значение надежности P.

В каждом конкретном случае вида функции $f(x,y,...)$ вывод формул для абсолютной и относительной погрешностей величины A может быть облегчен благодаря следующим рассуждениям.

Относительная погрешность при замене ΔA на dA может быть записана в виде

$$\varepsilon=\frac{\Delta A}{A}=\frac{dA}{A}=d\ln A=d\ln\lvert f(x,y,...)\rvert, \tag{24}$$

тогда абсолютная погрешность (стандартное отклонение от среднего значений):

$$\Delta A=dA=\langle A\rangle\cdot d\ln\lvert f(x,y,...)\rvert. \tag{25}$$

Следуя выражениям (24) и (25), для вывода формулы относительной погрешности ε необходимо вначале прологарифмировать функцию $f(x,y,...)$, затем вычислить дифференциал полученного выражения и, наконец, учитывая замечание 2, заменить в полученном выражении все знаки «−» на «+», а дифференциалы аргументов – на абсолютные ошибки (стандартные отклонения) соответствующих измеренных физических величин.

Рассмотрим пример. При наблюдении поступательного прямолинейного равноускоренного движения тела без начальной скорости было измерено время движения t и пройденный путь S (прямые измерения). Необходимо найти численное значение ускорения a (косвенное измерение). Как известно, функциональная зависимость a от t и S следующая:

$$a = f(t, S) = \frac{2S}{t^2}.$$

Следуя этим рассуждениям, проводим следующие выкладки:

$$\ln a = \ln(2S) - 2\ln t, \qquad d\ln a = \frac{2dS}{2S} - \frac{2dt}{t} = \frac{da}{a},$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{\langle a\rangle} = \frac{\Delta S}{\langle S\rangle} + \frac{2\Delta t}{\langle t\rangle}, \qquad \Delta a = \langle a\rangle\left(\frac{\Delta S}{\langle S\rangle} + \frac{2\Delta t}{\langle t\rangle}\right),$$

где средние значения $\langle S\rangle$ и $\langle t\rangle$ вычисляются по результатам n измерений:

$$\langle S\rangle = \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n), \qquad \langle t\rangle = \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n),$$

и среднее значение ускорения:

$$\langle a\rangle = \frac{2\langle S\rangle}{\langle t\rangle^2}.$$

1.4. Приближенные вычисления

При вычислении средних значений и погрешностей прямых и косвенных измерений необходимо выполнять простые правила приближенных вычислений.

Все результаты измерений и вычислений, округленные значения точных чисел, табличные значения (кроме тех, после которых в скобках указано «точно») являются приближенными числами.

Значащими цифрами числа являются все его цифры, в том числе и нули, если они не расположены в начале числа. Например, 1,2345 − 5 значащих цифр, 1,200 − 4 значащие цифры; 0,012 − 2 значащие цифры. Приближенные числа принято представлять в *нормальной форме*: первую значащую ставят в разряд единиц, остальные − в десятичных разрядах после запятой, и полученное число умножается на множитель вида 10^n. Например, $2003 = 2{,}003\cdot 10^3$.

Записывая результат измерений и вычислений в виде формул (16), (18) либо (23), необходимо помнить, что количество значащих цифр величин $\langle x\rangle$ и $\langle A\rangle$ определяется абсолютными ошибками Δx и ΔA, полученными при определении этих величин:

а) величину погрешности Δx и ΔA следует округлить до двух значащих цифр, если первая из них единица, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях;

б) при записи значений $\langle x\rangle$ и $\langle A\rangle$ необходимо указывать все цифры вплоть до последнего десятичного разряда, использованного для записи погрешности.

При округлении должны быть выполнены простые правила. Для округления числа до n значащих цифр отбрасывают все его цифры, стоящие после n-го разряда. При этом последняя из сохраняемых цифр не изменяется, если первая из отбрасываемых цифр меньше 5; последняя из сохраняемых цифр увеличивается на 1, если первая из отбрасываемых равна или больше 5. Приведем пример правильной и неправильных записей результата прямого измерения диаметра шарика:

правильная запись $d = (5{,}290 \pm 0{,}013)$ мм;

неправильная запись $d = (5{,}29 \pm 0{,}01)$ мм, нарушено правило а);

неправильная запись $d = (5{,}29 \pm 0{,}013)$ мм, нарушено правило б);

неправильная запись $d = (5{,}2900 \pm 0{,}0134)$ мм, нарушено правило а).

1.5. Построение графика

Для правильного построения графика необходимо соблюдать некоторые правила:

1) график строят на бумаге с миллиметровой сеткой;

2) значение функции откладывают по оси ординат, аргумента − по оси абсцисс;

3) на осях приводится только тот интервал аргумента, в котором проводились измерения;

4) масштаб осей выбирается независимо друг от друга и определяется абсолютными погрешностями откладываемых по осям величин;

5) на осях необходимо указывать обозначение и единицы измерения физической величины;

6) точки, соответствующие полученным результатам, наносят на график и обводят кружком. Кривую проводят между точками плавно, желательно, чтобы по обе стороны кривой располагалось одинаковое количество точек. Если точка ложится на кривую, то внутри кружка линию не проводят;

7) график подписывают; в подписи должно быть отражено содержание графика.

1.6. Правила оформления отчета (протокола) о выполнении лабораторной работы

Отчет о выполнении лабораторной работы должен включать в себя:

1) номер, название и цель работы;

2) схематический рисунок установки с краткими пояснениями;

3) краткую теорию соответствующего явления, включающую формулировки законов, определения физических величин и формул связи между ними;

4) формулы для расчета (рабочие формулы) искомой физической величины и погрешностей;

5) экспериментальные данные в виде таблицы, в которой указаны обозначения и единицы измерения физических величин;

6) непосредственный расчет искомой величины и ее погрешностей;

7) графики (желательно строить на миллиметровой бумаге и прилагать к отчету);

8) окончательный результат определения физической величины и ее вывод.

2. МЕХАНИКА

Лабораторная работа 2.1

ИЗУЧЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И СВЯЗИ МЕЖДУ НИМИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные понятия, определения и формулы кинематики

Простейшей формой движения материи является механическое движение, изучаемое в механике. *Механическое движение* − это перемещение тел или частей тел друг относительно друга.

1. Кинематика − раздел механики, в котором изучается механическое движение без учета причин, обуславливающих это движение.

2. Механическая система − совокупность тел, выделенных для рассмотрения их движения. Простейшей механической системой является материальная точка.

3. Материальная точка − тело, размерами которого можно пренебречь при рассмотрении его движения в условиях данной задачи.

Для описания механической системы выбирается система отсчета. *Система отсчета* − это совокупность тела отсчета (т. е. тела, относительно которого рассматривается движение механической системы), системы координат, неподвижно связанной с телом отсчета, и часов с указанием момента начала отсчета времени.

4. Траектория материальной точки − это линия, которую она описывает при своем движении в пространстве.

5. Радиус-вектор материальной точки $\vec{r}$ − это вектор, проведенный из начала выбранной системы координат в ту точку на траектории, в которой в данный момент времени находится материальная точка. Радиус-вектор материальной точки является функцией времени: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

*6. Мгновенная скорость (*или *скорость)* материальной точки − векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора материальной точки по времени:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{\upsilon} = \vec{r}_t\,' .$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории материальной точки в сторону ее движения. Величина скорости

$$\upsilon = \frac{dS}{dt},$$

где S − пройденный путь.

7. Мгновенное ускорение (или *ускорение*) материальной точки − векторная величина, равная первой производной ее скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \vec{\upsilon}\,'$$

или второй производной радиуса-вектора материальной точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \vec{r}_t\,'' .$$

При криволинейном движении материальной точки (в том числе при движении по окружности) ее ускорение можно представить в виде векторной суммы *тангенциального и нормального ускорений:*

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n , \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

Тангенциальное ускорение учитывает изменение величины скорости и направлено по касательной к траектории движения по направлению скорости в случае ускоренного движения (рисунок 1) и против направления скорости в случае замедленного движения (рисунок 2):

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} .$$

Нормальное ускорение учитывает изменение направления скорости материальной точки и направлено перпендикулярно траектории в сторону ее центра кривизны:

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n} .$$

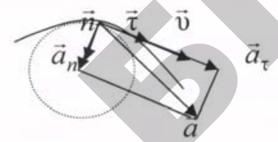


Рисунок 1

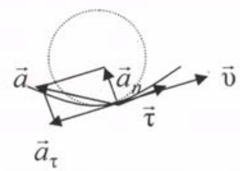


Рисунок 2

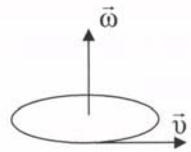


Рисунок 3

При движении с постоянным ускорением ($\vec{a}$ = const) можно получить:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t , \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} ,$$

откуда следуют формулы для проекций векторов $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$ на ось X:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t , \qquad x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} .$$

8. Абсолютно твердое (твердое) тело − тело, расстояние между любыми двумя точками которого неизменно.

9. Поступательное движение твердого тела − такое его движение, при котором любая прямая, связанная с ним, остается параллельной самой себе. При поступательном движении твердого тела все его точки в каждый данный момент времени имеют одинаковые скорости и одинаковые ускорения.

При *вращении твердого тела вокруг неподвижной оси* его точки движутся по окружностям, расположенным в перпендикулярных к оси вращения плоскостях; центры окружностей лежат на этой оси.

10. Величина *мгновенной угловой скорости вращения* (угловой скорости) твердого тела вокруг неподвижной оси, а значит, и движения любой его точки по окружности, есть первая производная угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \omega = \varphi_t' \ .$$

Направлен вектор угловой скорости по оси вращения в сторону, определяемую по правилу правого винта относительно направления вращения (рисунок 3).

11. Мгновенное угловое ускорение (угловое ускорение) вращающегося вокруг неподвижной оси твердого тела или материальной точки, движущейся по окружности, есть первая производная угловой скорости по времени:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{\beta} = \vec{\omega}'.$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все точки тела в каждый момент времени имеют одинаковые угловые скорости и одинаковые угловые ускорения.

Для вращения с постоянным угловым ускорением ($\vec{\beta} = \text{const}$) получим векторное равенство

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\beta}t ,$$

спроектировав которое на ось вращения *Z*, будем иметь:

$$\omega_z = \omega_{0z} + \beta_Z t , \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_{0z}t + \frac{\beta_z t^2}{2}.$$

12. При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси выполняются следующие соотношения между линейной скоростью $\vec{\upsilon}$, тангенциальным ускорением $\vec{a}_\tau$, нормальным ускорением $\vec{a}_n$ данной точки тела, радиусом-вектором, проведенным из центра окружности вращения в эту точку, угловой скоростью и угловым ускорением твердого тела:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} , \qquad \upsilon = \omega r , \ \text{так как} \ \ \vec{\omega} \perp \vec{r} .$$

$$\vec{a}_\tau = \vec{\beta} \times \vec{r} , \qquad a_\tau = \beta r , \ \text{так как} \ \ \vec{\beta} \perp \vec{r} .$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} , \qquad a_n = \omega^2 r .$$

Описание лабораторной установки и хода выполнения лабораторной работы

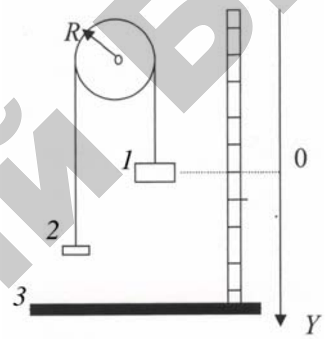


Рисунок 4

Пусть к концам нити, перекинутой через блок, подвешены два груза различной массы (рисунок 4). Если системе, состоящей из грузов *1*, *2* и блока, предоставить возможность двигаться, то опытным путем можно убедиться в том, что грузы будут двигаться поступательно с постоянным ускорением, а блок будет вращаться с постоянным угловым ускорением. Для описания движения груза *1* выберем систему отсчета. Пусть закрепленная на стенде линейка будет телом отсчета, начало координат (точку 0) выберем в точке начального положения груза *1* ($y_0 = 0$), ось *Y* направим вертикально вниз. В данном случае достаточно одной оси координат, так как движение груза прямолинейное. В качестве часов будем использовать секундомер, который включается в момент $t = 0$ начала движения груза *1* (следовательно, $\upsilon_0 = 0$). Если расстояние, пройденное грузом до приемного столика *3* обозначить *h*, то по формулам для равноускоренного движения можно записать:

$$h = \frac{at^2}{2}, \tag{1}$$

$$\upsilon = at , \tag{2}$$

где υ – проекция вектора скорости груза 1 на ось *Y* в момент достижения им столика;

a – проекция ускорения груза на эту ось.

Из выражения (1) получаем:

$$a = \frac{2h}{t^2} \tag{3}$$

и, подставив формулу (3) в выражение (2):

$$\upsilon = \frac{2h}{t}. \tag{4}$$

Очевидно, что тангенциальное ускорение a_τ точек, лежащих на краю блока, равно ускорению a груза *1*. Поэтому, используя связь между тангенциальным и угловым ускорениями, можем найти угловое ускорение, с которым вращается блок:

$$\beta = \frac{a}{R}$$

или с учетом выражения (3):

$$\beta = \frac{2h}{t^2 R}, \tag{5}$$

где R – радиус блока.

Далее, используя выражения для угла поворота при равноускоренном вращении, можно найти угол, на который повернется блок:

$$\varphi = \frac{\beta t^2}{2}$$

и угловую скорость его вращения в момент достижения грузом *1* приемного столика:

$$\omega = \beta t.$$

С учетом формулы (5) последние выражения принимают вид

$$\varphi = \frac{h}{R}, \tag{6}$$

$$\omega = \frac{2h}{tR}. \tag{7}$$

Число оборотов N блока за время t можно найти из следующего выражения:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Подставив в последнее равенство формулу (6), получаем:

$$N = \frac{h}{2\pi R}. \tag{8}$$

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

I уровень

1. Для двух заданных преподавателем значений h (h_1 и h_2) произвести по 5 измерений времени движения груза *1* (t_1 и t_2).
2. Измерить радиус блока R.
3. Результаты измерений занести в таблицу 1.
4. Вычислить средние значения $t_{1ср}$ и $t_{2ср}$. Полученные значения занести в таблицу 1.
5. По полученным средним значениям $t_{1ср}$ и $t_{2ср}$, используя формулы (3)−(5), (7), (8), вычислить значения $a, \upsilon, \beta, \omega, N$ для каждого из значений h_1 и h_2. Результаты вычислений занести в таблицу 1.

II уровень

1. Используя данные таблицы 1, произвести необходимые расчеты и заполнить таблицу 2.
2. Объяснить (письменно или устно по указанию преподавателя) связь между численными значениями величин, приведенных в таблице 2.
3. Рассчитать погрешности для одной из величин t_1, t_2. При расчетах использовать данные таблицы 1.

Таблица 1

R =	h_1 =						h_2 =					
№ опыта	t_1	a_1	υ_1	β_1	ω_1	N_1	t_2	a_2	υ_2	β_2	ω_2	N_2
1.												
2.												
3.												
4.												
5.												
Среднее значение												

Таблица 2

$\frac{t_1}{t_2}$	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$	$\frac{\beta_1}{\beta_2}$	$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	$\frac{N_1}{N_2}$

III уровень

1. По данным таблицы 1 найти величину полного ускорения произвольной точки на ободе блока в момент времени t_1 или t_2. Для выбранного момента времени вычислить также угол между векторами скорости и ускорения точки на ободе блока.

2. Пусть ускорение груза *1* не постоянно, а зависит от времени по линейному закону $a = bt$, где b = const. Каким в этом случае будет время прохождения грузом пути h_1 (или h_2)?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Вопросы предварительного контроля (компьютерный допуск к лабораторной работе)

Скорость материальной точки.
Путь, пройденный материальной точкой

1. Первую половину пути автомобиль двигался со скоростью 40 км/ч, а вторую − 60 км/ч. С какой средней скоростью двигался автомобиль?

2. Мгновенная скорость материальной точки – это:
   1) производная пути по времени;
   2) отношение пути к промежутку времени движения;
   3) производная радиуса-вектора материальной точки по времени;
   4) интеграл от пути по времени.

3. Какое из написанных ниже выражений правильно определяет вектор скорости?

1) $\frac{dS}{dt}$; 4) $\frac{d\vec{r}}{dt}$;

2) $\frac{S}{t}$; 5) $\frac{S}{t_2 - t_1}$;

3) $\vec{r}(t_2 - t_1)$; 6) $\frac{d\upsilon}{dt}$.

4. Материальная точка движется в плоскости XY так, что ее координаты зависят от времени следующим образом:

$$x = 3t + 2t^2;$$
$$y = 5.$$

Найти величину скорости материальной точки в момент времени 1 с.

5. Радиус-вектор материальной точки, движущейся в плоскости XY, изменяется с течением времени по закону

$$\vec{r} = 3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}.$$

Найти величину скорости материальной точки в момент времени 1 с.

6. Величина вектора скорости материальной точки, движущейся в пространстве, зависит от времени по закону

$$\upsilon = 6t \text{ м/с}.$$

Какой путь прошла материальная точка за первые 2 с движения?

7. Величина вектора скорости материальной точки, движущейся по окружности, зависит от времени по закону

$$\upsilon = (3 + 6t) \text{ м/с}.$$

Какой путь прошла материальная точка за первые 2 с движения?

Ускорение материальной точки

1. Мгновенное ускорение материальной точки (ускорение) – это:
   1) производная радиуса-вектора материальной точки по времени;
   2) производная пути по времени;
   3) отношение скорости ко времени;
   4) производная скорости по времени.

2. Материальная точка движется в плоскости XY так, что ее координаты зависят от времени по законам

$$x = 2t + 5t^2;$$
$$y = 3.$$

Найти нормальное ускорение материальной точки в момент времени 1 с.

3. Какое из написанных ниже выражений определяет вектор ускорения?

1) $\dfrac{dS}{dt}$;	4) $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$;
2) $\dfrac{\upsilon}{t}$;	5) $\dfrac{d\bar{\upsilon}}{dt}$;
3) $\bar{\upsilon}(t_2 - t_1)$;	6) $\dfrac{d\upsilon}{dt}$.

4. Материальная точка движется по окружности радиусом 6 м со скоростью, величина которой зависит от времени по закону

$$\upsilon = 2t.$$

Найти нормальное и тангенциальное ускорения материальной точки в момент времени 3 с.

5. Материальная точка равномерно движется по окружности радиусом 2 м со скоростью 6 м/с. Чему равны тангенциальное, нормальное и полное ускорения материальной точки?

6. Небольшое тело брошено вертикально вверх. Какие составляющие вектора ускорения имеет тело во время движения?
   1) тангенциальное ускорение;
   2) нормальное ускорение;
   3) тангенциальное и нормальное ускорения.

7. Небольшое тело брошено в горизонтальном направлении. Какие составляющие вектора ускорения имеет тело во время движения?
   1) тангенциальное ускорение;
   2) нормальное ускорение;
   3) тангенциальное и нормальное ускорения.

Угловая скорость и угловое ускорение

1. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что угол поворота зависит от времени по закону

$$\varphi = 2t^2 + 3t.$$

Вычислить величину угловой скорости для момента времени 1 с.

2. Тело вращается вокруг неподвижной оси так, что угол поворота зависит от времени по закону

$$\varphi = 4\sin t + 2t.$$

Чему равна величина угловой скорости тела в момент времени $t = 0$?

3. Материальная точка движется по окружности. Как направлен вектор угловой скорости материальной точки?
   1) вдоль радиуса окружности от ее центра;
   2) по касательной к окружности;
   3) вдоль радиуса окружности к ее центру;
   4) перпендикулярно окружности вверх;
   5) перпендикулярно окружности по правилу правого винта относительно вращения.

4. Материальная точка движется по окружности радиуса R так, что угол поворота зависит от времени по закону

$$\varphi = At^2 + Bt.$$

Как зависит величина линейной скорости материальной точки от времени?

5. Материальная точка движется по окружности с угловой скоростью, зависящей от времени по закону

$$\omega = 5t.$$

Как направлен вектор углового ускорения?
   1) вдоль радиуса окружности;
   2) также, как вектор угловой скорости;

3) по касательной к окружности;
4) перпендикулярно окружности по правилу правого винта относительно вращения;
5) перпендикулярно окружности вниз.

6. Угловое ускорение материальной точки при ее движении по окружности – это:
1) производная радиуса-вектора материальной точки по времени;
2) производная пути по времени;
3) производная скорости по времени;
4) производная угловой скорости по времени;
5) отношение угловой скорости ко времени.

7. Линейная скорость материальной точки, движущейся по окружности радиуса 3 м, меняется по закону

$$\upsilon = 6t^2 .$$

Вычислить угловое ускорение материальной точки в момент времени 1 с.

Вопросы по выполнению лабораторной работы

1. Какие из написанных ниже величин измеряются в данной лабораторной работе?

1) a ;	4) S ;	7) R ;
2) υ ;	5) h_1 ;	8) T ;
3) t_1 ;	6) t_2 ;	9) N .

2. Какие из написанных ниже величин вычисляются в данной лабораторной работе?

1) t_1 ;	4) h_1 ;	7) υ_1 ;
2) a ;	5) h_2 ;	8) T ;
3) t_2 ;	6) N_1 ;	9) υ_2 .

3. Нить с привязанными к ее концам грузами перекинута через блок. За время t каждый груз проходит расстояние h, начиная свое движение из положения равновесия. По какой формуле можно вычислить скорость грузов в последний момент движения?

4. Нить с привязанными к ее концам грузами перекинута через блок. Первый раз грузы проходят расстояние h_1 за время t_1, второй

раз − расстояние h_2 за время t_2. Величина ускорения грузов в первом опыте a_1, во втором – a_2. Какое соотношение справедливо для величин этих ускорений?

1) $a_1 > a_2$; 2) $a_1 = a_2$; 3) $a_1 < a_2$.

5. Пусть за время 2 с грузы, которые привязаны к нити, перекинутой через блок, прошли расстояние 0,5 м. Какую угловую скорость в последний момент времени движения будут иметь грузы, если радиус блока равен 0,1 м?

6. Грузы в лабораторной установке первый раз двигались 2 с, второй раз − 1 с. Во втором случае блоком был сделан 1 оборот. Сколько оборотов сделал блок в первом опыте?

2. Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

I уровень

1. Дать определение кинематическим величинам: (мгновенной) скорости, (мгновенному) ускорению, тангенциальному и нормальному ускорениям, угловой скорости и угловому ускорению.
2. Найти связь между линейной скоростью и угловой скоростью точки, движущейся по окружности.
3. Записать для равнопеременного (равноускоренного и равнозамедленного) движения выражения, определяющие скорость и пройденный путь в зависимости от времени.
4. Знать рабочие формулы, по которым в данной лабораторной работе вычисляются линейное ускорение грузов, угловое ускорение точек блока, линейная и угловая скорости точек блока в момент приземления груза, число оборотов блока за время движения блока.
5. Знать последовательность измерений и вычислений.

II уровень

1. Исходя из общих выражений, определяющих вектор (мгновенной) скорости, вектор (мгновенного) ускорения, получить выражения для координаты движущейся точки (груза) и проекции ее скорости на некоторую ось при равноускоренном движении.
2. Исходя из общего выражения для пути, пройденного материальной точкой (поступательно движущимся телом), вывести формулу пути для равноускоренного движения.

3. Получить рабочие формулы (3), (4), (5), (6), (7).

4. Проанализировать отношения, записанные в таблице 2. Какие из них должны быть теоретически равны 1? Какие из них должны совпадать?

III уровень

1. Проанализировать движение точки обода вращающегося блока: найти зависимость тангенциального, нормального и полного ускорений указанной точки от времени. Определить также зависимость от времени угла между скоростью и ускорением указанной точки.

2. Пусть грузы в лабораторной установке движутся с ускорением, которое зависит от времени по закону $a = bt$, где $b = \text{const}$. Найти время t_1, которое потребуется грузам в таком случае, чтобы пройти выбранное расстояние h_1.

Лабораторная работа 2.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ ТЕЛА ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Основные понятия, определения и формулы динамики поступательного движения абсолютно твердого тела

1. Первый закон Ньютона. Существуют такие системы отсчета, относительно которых тело движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или действие других тел скомпенсировано.

Такие системы отсчета называются *инерциальными системами отсчета.*

2. Масса тела − мера его инертности, т. е. способности тела сохранять свою скорость постоянной. *Сила* − векторная физическая величина, описывающая механическое действие тел друг на друга.

3. Второй закон Ньютона. Ускорение, с которым тело поступательно движется, прямо пропорционально векторной сумме действующих на тело сил и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}{m}.$$

4. Закон динамики поступательного движения тела:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i .$$

5. Третий закон Ньютона. Тела взаимодействуют друг с другом с силами, равными по величине и противоположными по направлению.

Если тела представляют собой материальные точки, то эти силы взаимодействия направлены по прямой, их соединяющей.

6. Величина массы тела равна отношению модуля ускорения эталона массы к модулю ускорения тела при их взаимодействии друг с другом, причем масса эталона принимается за единицу массы:

$$m = \frac{a_{\text{эт}}}{a} \cdot m_{\text{эт}}, \quad m_{\text{эт}} = 1 \text{ (массы)}.$$

В единицах СИ $m_{\text{эт}} = 1$ кг.

7. Коэффициентом трения μ при скольжении одного тела по поверхности другого называется величина, равная отношению модуля силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, действующей на движущееся тело, к модулю силы реакции опоры $\vec{N}$, действующей на него:

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N}.$$

При скольжении тела сила трения направлена против вектора скорости.

8. Весом тела называется сила, с которой тело действует на опору или подвес.

9. Импульсом тела $\vec{p}$ называется физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

10. Импульсом системы N тел называется векторная сумма импульсов всех тел, входящих в систему:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i.$$

11. Замкнутой системой тел называется система, на которую не действуют силы со стороны тел, не входящих в систему (внешние силы).

12. Закон сохранения импульса. Импульс замкнутой системы поступательно движущихся тел остается постоянным:

$$\vec{P} = \text{const}.$$

13. Импульсом силы называется произведение вектора силы на промежуток времени ее действия.

14. Изменение импульса системы тел за промежуток времени Δt равно векторной сумме импульсов внешних сил, действующих на тела системы:

$$\Delta\vec{P} = \sum_i \vec{F}_i \Delta t.$$

15. В механике *элементарной работой* δA силы $\vec{F}$ над телом, совершающим бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$, называется величина, равная скалярному произведению векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha = FdS\cos\alpha.$$

16. Кинетической энергией тела $W_{\text{к}}$ называется физическая величина, изменение которой равно алгебраической сумме работ всех *N* сил, действующих на тело:

$$\Delta W_{\text{к}} = \sum_{i=1}^{N} A_i, \qquad W_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Кинетическая энергия есть количественная мера способности движущегося тела совершать работу.

17. Сила, работа которой при перемещении тела из начальной точки в конечную, не зависит от формы траектории, соединяющей эти точки, называется *консервативной силой.*

18. Потенциальной энергией тела $W_{\text{п}}$ называется физическая величина, изменение которой, взятое со знаком «–», равно работе действующей на него консервативной силы:

$$-\Delta W_{\text{п}} = A_{\text{кон}}.$$

Потенциальная энергия есть количественная мера способности тела, находящегося под действием консервативных сил, совершать работу.

19. Между консервативной силой $\vec{F}_{\text{кон}}$, действующей на тело, и его потенциальной энергией существует связь:

$$\vec{F}_{\text{кон}} = -\text{grad}W_{\text{п}}.$$

20. Механической (полной механической) энергией тела называется алгебраическая сумма кинетической и потенциальной энергий тела.

21. Механической (полной механической) энергией системы тел называется алгебраическая сумма механических энергий всех N тел, входящих в систему

$$W_{\text{мех}} = \sum_{i=1}^{N} (W_{\text{к}\,i} + W_{\text{п}\,i}).$$

22. Закон сохранения механической энергии. Полная механическая энергия системы тел, на каждое из которых действуют только консервативные силы, постоянна:

$$W_{\text{мех}} = \text{const}.$$

Изменение полной механической энергии системы тел равно алгебраической сумме работ всех неконсервативных N сил, действующих на тела системы:

$$\Delta W_{\text{мех}} = \sum_{i=1}^{N} A_{\text{нек}\,i}.$$

Описание лабораторной установки и хода выполнения лабораторной работы

Коэффициент трения можно определить, рассматривая движение тела по наклонной плоскости (рисунок 1). Если тело положить на наклонную плоскость, то оно под действием силы тяжести придет в движение с постоянным ускорением. В самом деле, на тело действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила реакции опоры $\vec{N}$. Применяя второй закон Ньютона, можем записать:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}. \tag{1}$$

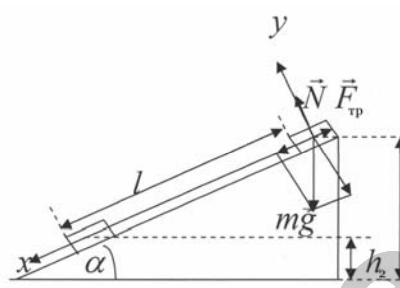


Рисунок 1

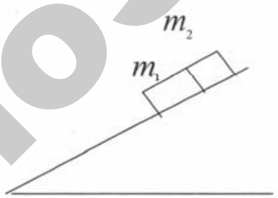


Рисунок 2

Так как каждую из этих сил можно считать постоянной, то и сумма векторов этих сил будет постоянной. Следовательно, и ускорение также будет постоянным.

Уравнение движения (1) в проекции на оси OX, OY примет вид

$$mg \cdot \sin\alpha - F_{\text{тр}} = ma, \tag{2}$$

$$-mg \cdot \cos\alpha + N = 0. \tag{3}$$

Модуль силы трения через коэффициент трения μ математически выражается так:

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где N − модуль силы реакции опоры.

Тогда из равенства (3) получим:

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \cdot \cos\alpha. \tag{4}$$

С учетом соотношения (4) выражение (2) примет вид

$$mg \cdot \sin\alpha - \mu mg \cdot \cos\alpha = ma,$$

или

$$g \cdot \sin\alpha - \mu g \cdot \cos\alpha = a. \tag{5}$$

Если $\cos\alpha \neq 0$ (т. е. $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$), получим равенство

$$g(\text{tg}\alpha - \mu) = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

Из последнего соотношения видно, что существует такой минимальный угол наклона плоскости к горизонту ($\alpha = \alpha_{\min}$), при котором тело будет скользить с постоянной скоростью ($a = 0$). В этом случае будет выполняться равенство

$$g(\text{tg}\alpha_{\min} - \mu) = 0,$$

из которого определяем:

$$\mu = \text{tg}\alpha_{\min}. \tag{6}$$

При вычислении коэффициента трения скольжения μ по формуле (6) через измеренные в опытах значения $\alpha_{\min}$ абсолютная и относительная ошибки определения величины μ находятся по правилам вычисления ошибок косвенных измерений. Применяя эти правила, указанные в таблице 2 (см. подразд. 1.3), легко получим для относительной ошибки:

$$\varepsilon = \frac{\langle \Delta\mu \rangle}{\langle \mu \rangle} = \frac{2\langle \Delta\alpha_{\min} \rangle}{\sin\langle 2\alpha_{\min} \rangle}, \tag{6'}$$

для абсолютной ошибки:

$$\langle \Delta\mu \rangle = \frac{\langle \alpha_{\min} \rangle}{\cos^2\langle \alpha_{\min} \rangle}. \tag{6''}$$

Однако найденное по формуле (6) значение μ будет весьма приближенным, так как экспериментально трудно с высокой точностью определить величину $\alpha_{\min}$. Для более точного определения коэффициента трения можно поступить следующим образом: если установить угол α несколько больший, чем $\alpha_{\min}$ ($\alpha = \alpha_1$), то тело будет скользить с ускорением. Пусть за время t_1 от начала движения оно пройдет путь *l*. Тогда

$$l = \frac{at_1^2}{2}, \tag{7}$$

откуда

$$a = \frac{2l}{t_1^2},$$

и равенство (5) примет вид

$$g \cdot \sin\alpha_1 - \mu g \cdot \cos\alpha_1 = \frac{2l}{t_1^2}. \tag{8}$$

Из этого выражения можно определить величину коэффициента трения:

$$\mu = \mathrm{tg}\alpha_1 - \frac{2l}{gt_1^2 \cdot \cos\alpha_1}. \tag{9}$$

Для уменьшения возможной систематической ошибки в определении угла α, а значит, и величины μ, измерения можно провести при двух значениях угла α.

Увеличив угол наклона плоскости от значения α_1 до значения α_2 и измерив время прохождения того же пути *l*, получим значение $t_2 < t_1$. При этом будет справедливо следующее соотношение:

$$g \cdot \sin\alpha_2 - \mu g \cdot \cos\alpha_2 = \frac{2l}{t_2^2}. \tag{10}$$

Умножив обе части равенств (8) и (10) соответственно на $\sin\alpha_2$ и $\sin\alpha_1$, а затем, вычтя из первого второе, получим:

$$\mu g(\sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cdot \sin\alpha_1) = 2l\left(\frac{\sin\alpha_1}{t_2^2} - \frac{\sin\alpha_2}{t_1^2}\right).$$

Из последнего равенства выражаем коэффициент трения:

$$\mu = \frac{2l\left(\frac{\sin\alpha_1}{t_2^2} - \frac{\sin\alpha_2}{t_1^2}\right)}{g \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}. \tag{11}$$

Для определения μ по формуле (9) или (11) необходимо знать расстояние *l*, проходимое телом за измеряемый промежуток времени. Если оно одинаково при обоих значениях угла, то его можно не измерять. Разделив равенство (8) на выражение (10), получим соотношение

$$\frac{\sin\alpha_1 - \mu \cdot \cos\alpha_1}{\sin\alpha_2 - \mu \cdot \cos\alpha_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2},$$

из которого получается еще одна формула для коэффициента трения:

$$\mu = \frac{t_1^2 \cdot \sin\alpha_1 - t_2^2 \cdot \sin\alpha_2}{t_1^2 \cdot \cos\alpha_1 - t_2^2 \cdot \cos\alpha_2}. \qquad (12)$$

Рабочую формулу (9) (следовательно, и формулы (11), (12)) можно получить из равенства, выражающего изменение механической энергии движущегося по наклонной плоскости тела.

Пусть рассматриваемая система тел состоит из одного тела − тела, движущегося по наклонной плоскости. При его движении отличную от нуля механическую работу совершают только сила тяжести $m\vec{g}$ и сила трения $F_{\text{тр}}$, причем сила трения − неконсервативная сила. Поэтому можно записать:

$$W_{\text{п}2} + W_{\text{к}2} - (W_{\text{п}1} + W_{\text{к}1}) = A_{\text{тр}}. \qquad (13)$$

Если за нулевой уровень потенциальной энергии принять горизонтальную плоскость, проходящую через основание наклонной плоскости, то

$$W_{\text{к}1} = 0, \qquad W_{\text{п}1} = mgh_1,$$

$$W_{\text{к}2} = \frac{m\upsilon^2}{2}, \quad W_{\text{п}2} = mgh_2,$$

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} l.$$

Подставляя эти выражения в равенство (13), получим:

$$mg(h_2 - h_1) + \frac{m\upsilon^2}{2} = -F_{\text{тр}} l. \qquad (14)$$

Учитывая соотношение (4), а также очевидные равенства:

$$\upsilon = at, \qquad h_2 - h_1 = -l \sin\alpha,$$

вместо выражения (14) можно записать:

$$-mgl\sin\alpha + \frac{ma^2t^2}{2} = -\mu mg \cdot \cos\alpha \cdot l.$$

С учетом выражения (7) из последнего равенства вытекает формула (9).

Рабочую формулу (9) можно получить, рассматривая изменение импульса движущегося тела. Действительно, на основании утверждения, сформулированного в подп. 14 (см. с. 36), можно записать следующее:

$$m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1 = \vec{F}_{\text{тр}} t + m\vec{g}t + \vec{N}t,$$

но $\upsilon_1 = 0$, $\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon} = \vec{a}t$, поэтому получаем:

$$m\vec{a}t = \vec{F}_{\text{тр}} t + m\vec{g}t + \vec{N}t. \qquad (15)$$

В проекции на ось OX равенство (15) примет вид

$$mat = -F_{\text{тр}} t + mg\sin\alpha \cdot t,$$

или, учитывая равенства (4) и (7):

$$m\frac{2l}{t} = -\mu mg\cos\alpha \cdot t + mg\sin\alpha \cdot t.$$

Выражая из последнего равенства коэффициент трения μ, приходим к рабочей формуле (9).

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

I уровень

1. Измерить минимальный угол наклона наклонной плоскости $\alpha_{\min}$ 5 раз. Вычислить среднее значение минимального угла наклона плоскости $\langle\alpha_{\min}\rangle$. Определить среднее значение коэффициента трения $\langle\mu\rangle$ по формуле (6) через среднее значение $\langle\alpha_{\min}\rangle$. По формулам (6') и (6'') вычислить относительную и среднюю абсолютную ошибки. Данные измерений и результатов вычислений занести в таблицу 1.

2. Установить угол наклона плоскости $\alpha > \alpha_{\min}$, наблюдая ускоренное движение тела по плоскости; измерить путь l, проходимый

телом, и время движения t. Измерения проводить 5 раз при неизменном значении l. Вычислить среднее значение времени движения $\langle t \rangle$ как среднее арифметическое значение пяти результатов измерения времени.

3. По формуле (9), подставляя в нее $\langle t \rangle$, значения l, α, g, найдем среднее значение коэффициента трения скольжения $\langle \mu \rangle$. Если считать, что погрешность определения μ появляется только из-за неточного измерения времени, а все остальные величины, входящие в формулу (9), известны с высокой степенью точности, то можно по правилам определения погрешностей для косвенных величин (см. подразд. 1.3) вывести следующую формулу относительной погрешности величины μ:

$$\varepsilon = \frac{\langle \Delta\mu \rangle}{\langle \mu \rangle} = \frac{4l\langle \Delta t \rangle}{\langle \mu \rangle g \cos\alpha \cdot \langle t \rangle^3}. \tag{16}$$

Абсолютная погрешность определения μ в таком случае равна:

$$\langle \Delta\mu \rangle = \varepsilon \cdot \langle \mu \rangle = \frac{4l\langle \Delta t \rangle}{g \cos\alpha \cdot \langle t \rangle^3}. \tag{17}$$

Вычислить по формулам (16) и (17) относительную и абсолютную погрешности определения коэффициента трения скольжения μ. Результаты занести в таблицу 2.

Таблица 1

№ опыта	α_{min}	μ	$\Delta\mu$	$\frac{\Delta\mu_{ср}}{\mu_{ср}} \cdot 100\%$
1. … 5.				
Среднее значение				

Таблица 2

№ опыта	$l =$		$\alpha =$	$\frac{\Delta\mu_{ср}}{\mu_{ср}} \cdot 100\%$
	t	μ	$\Delta\mu$	
1. … 5.				
Среднее значение				

II уровень

1. Измерить минимальный угол наклона наклонной плоскости α_{min} 5 раз. Вычислить среднее значение минимального угла наклона плоскости $\langle \alpha_{min} \rangle$. Определить среднее значение коэффициента трения $\langle \mu \rangle$ по формуле (6) через среднее значение $\langle \alpha_{min} \rangle$. По формулам (6') и (6'') вычислить относительную и среднюю абсолютную ошибки. Данные измерений и результатов вычислений занести в таблицу 1.

2. При двух различных углах наклона плоскости $\alpha_1 > \alpha_{min}$ и $\alpha_2 > \alpha_{min}$ измерить время движения тела по наклонной плоскости t_1 и t_2 соответственно (по 5 раз каждое из этих времен). Измерить также одинаковое для всех опытов расстояние l. Вычислить для каждого опыта коэффициент трения по формуле (11) или (12). Рассчитать среднее значение этой величины (как для величины, полученной при прямых измерениях), среднюю абсолютную и относительную ошибки. Результаты измерений и вычислений записать в таблицу 3.

3. Вычислить вес тела, движущегося по наклонной плоскости.

Таблица 3

№ опыта	$l =$		$\alpha_1 =$		$\alpha_2 =$
	t_1	t_2	μ	$\Delta\mu$	$\frac{\Delta\mu_{ср}}{\mu_{ср}}$
1. … 5.					
Среднее значение					

Ш уровень

1. Для каждого из двух брусков с массами m_1 и m_2, которые имеют различные коэффициенты трения μ_1 и μ_2 соответственно, определить эти коэффициенты, проводя измерения пункта 2 задания I уровня. С каждым бруском проводить измерения 3 раза и найти $\mu_{1ср}$ и $\mu_{2ср}$.

2. Положить на наклонную плоскость оба соприкасающихся бруска, причем брусок, имеющий больший коэффициент трения, должен на наклонной плоскости лежать ниже другого бруска. На рисунке 2 показан случай $\mu_1 > \mu_2$. Измерить время движения соприкасающихся брусков t, длину пути l и из формулы (7) найти ускорение грузов $a_{экс}$.

3. Теоретически рассмотреть задачу: два соприкасающихся бруска с известными массами и коэффициентами трения движутся по наклонной плоскости, имеющей известный угол наклона к горизонтали. Вывести формулу для ускорения брусков. По полученной формуле вычислить теоретическое значение ускорения брусков $a_{теор}$. Сравнить $a_{экс}$ и $a_{теор}$.

4. Решая далее указанную задачу 3, вывести формулу для силы взаимодействия брусков и вычислить эту силу.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Вопросы предварительного контроля (компьютерный допуск к лабораторной работе)

Законы Ньютона. Импульс

1. Тело под действием двух сил движется равномерно и прямолинейно. Величина одной из сил равна 6 Н. Чему равна величина второй силы?

2. На тело действует постоянная сила, величина которой 2 Н. Как движется тело, если сила направлена в сторону начальной скорости?

   1) равномерно;
   2) покоится;
   3) равноускоренно;
   4) равнозамедленно.

3. Тело массой 10 кг движется по оси X по закону $x = (3t^3 + 2t + 1)$ м. Вычислить величину равнодействующей силы в момент времени 2 с.

4. Мяч массой 2 кг падает вертикально вниз на пол и перед ударом имеет скорость 10 м/с. Он отскакивает с той же по величине и противоположной по направлению скоростью. Вычислить импульс силы, действующей на мяч при ударе.

5. При взаимодействии двух шаров с массами 0,2 кг и 0,4 кг первый шар получил ускорение 10 м/с^2. Какое ускорение получил второй шар?

6. Два шара с массами 0,2 кг и 0,3 кг движутся навстречу друг другу со скоростями 6 м/с и 4 м/с соответственно. С какой скоростью движутся эти шары после абсолютно неупругого удара?

7. На тело массой 5 кг действуют две взаимно перпендикулярные силы, величина одной из них равна 3 Н, второй − 4 Н. С каким ускорением движется тело?

Механическая работа. Кинетическая энергия

1. Санки массой 5 кг равномерно тянут за веревку со скоростью 4 м/с по горизонтальной дороге. Сила натяжения веревки равна 100 Н и направлена под углом 60° к горизонтали. Вычислить работу силы натяжения за промежуток времени 2 с.

2. Санки массой 5 кг равномерно тянут за веревку со скоростью 4 м/с по горизонтальной дороге. Сила натяжения веревки равна 100 Н и направлена под углом 60º к горизонтали. Вычислить работу силы трения, действующей на санки.

3. Коэффициент жесткости пружины, имеющей длину 0,2 м, равен 50 Н/м. Какую работу надо выполнить, чтобы растянуть пружину до длины 3 м.

4. Тело массой 1 кг свободно падает с высоты 5 м. На него действует постоянная сила сопротивления 4 Н. Вычислить кинетическую энергию тела в последней точке движения. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

5. Тело движется равномерно под действием двух сил. Работа одной из них за определенный промежуток времени равна 200 Дж. Каково численное значение работы второй силы?

6. Тело массой 1 кг движется по наклонной плоскости, образующей угол 30° с горизонталью. Вычислить работу силы тяжести тела на пути 20 м. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

7. На толкание ядра массой 2 кг затрачена работа 400 Дж. С какой начальной скоростью полетит ядро?

Потенциальная энергия.
Закон сохранения механической энергии

1. Какие из перечисленных ниже сил являются консервативными?
   1) сила тяжести;
   2) сила трения;
   3) сила упругости;
   4) сила тяги;
   5) сила сопротивления;
   6) центробежная сила;
   7) сила всемирного тяготения.

2. Упругая пружина в недеформированном состоянии имеет длину 0,2 м. Сначала она была растянута до длины 0,25 м, а затем − до 0,3 м. Во сколько раз потенциальная энергия пружины после второго растяжения больше, чем после первого?

3. Тело массой 1 кг брошено горизонтально с начальной скоростью 2 м/с на высоте 6 м. Найти полную механическую энергию тела через 1 секунду после начала движения.

4. В левом столбце записаны выражения потенциальных энергий в случаях действия на тело некоторых консервативных сил, в правом − названия консервативных сил. Для каждой строки левого столбца найти соответствующую строку правого столбца.

1) $G\dfrac{mM}{r}$;	1)сила тяжести;
2) $\dfrac{kx^2}{2}$;	2) сила упругости;
3) mgh .	3) сила всемирного притяжения.

5. Тело массой 1 кг брошено с поверхности земли с начальной скоростью 3 м/с, составляющей угол 45° с горизонтом. Чему равна механическая энергия тела через 0,1 с после начала движения? Сопротивление воздуха не учитывать.

6. Два тела − Земля и Луна − взаимодействуют друг с другом по закону всемирного тяготения. Каждое из них по этому же закону взаимодействует с Солнцем. Выполняется ли для системы двух тел Земля–Луна закон сохранения механической энергии?

7. Тело массой 0,2 кг скользит по наклонной плоскости, начиная с высоты 1 м над горизонтальной поверхностью. Чему равна работа силы трения, если скорость тела у подножья наклонной плоскости равна 4 м/с?

Вопросы по выполнению лабораторной работы

1. Тело массой m движется по наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту при коэффициенте трения μ. Какова связь между величинами α и μ при равномерном движении тела?

2. Тело массой m движется по наклонной плоскости равноускоренно. Какие из перечисленных ниже величин измеряются в данной лабораторной работе?

1) m;	5) a – ускорение;
2) h;	6) α – угол наклона плоскости;
3) t_1;	7) F – сила трения.
4) υ ;	

3. Тело движется по наклонной плоскости равноускоренно. Какие из перечисленных ниже величин необходимо вычислить в данной лабораторной работе?

1) m;	5) a – ускорение;
2) h;	6) α – угол наклона плоскости;
3) t_1 ;	7) μ – коэффициент трения;
4) υ ;	8) F – сила трения.

4. Тело движется по наклонной плоскости равномерно. Выполняется ли для него закон сохранения механической энергии?

5. Тело массой m движется по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α. При этом коэффициент трения между плоскостью и телом μ. Записать величину силы трения, действующей на тело.

6. При движении тела по наклонной плоскости его импульс изменяется от значения $m\upsilon_1$ до значения $m\upsilon_2$. Изменение импульса тела равно:
   1) работе силы трения;
   2) работе силы тяжести;
   3) сумме импульсов сил, действующих на тело;
   4) сумме сил, действующих на тело;
   5) изменению кинетической энергии тела.

2. Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

I уровень

1. Дать формулировки законам Ньютона и записать уравнение поступательного движения тела, т. е. второй закон Ньютона.

2. Рассмотреть поступательное движение тела по наклонной плоскости с учетом силы трения. Получить формулу (9) для вычисления коэффициента трения.

3. Какой угол наклона плоскости называется минимальным? Получить формулу (6), связывающую минимальный угол наклона плоскости с коэффициентом трения.

4. Сформулировать закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

II уровень

1. Рассматривая поступательное движение тела по наклонной плоскости при двух различных углах ее наклона к горизонту, получить из второго закона Ньютона расчетные формулы (11) и (12).

2. Какие силы называются консервативными? Являются ли консервативными силы, действующие на движущееся по наклонной плоскости тело?

2. Применяя закон изменения механической энергии, получить формулу (9) для вычисления коэффициента трения.

3. Применяя закон изменения импульса, получить формулу (9) для вычисления коэффициента трения.

Ш уровень

1. Рассмотреть движение по наклонной плоскости двух соприкасающихся тел, имеющих различный коэффициент трения. Считать, что коэффициент трения тела, находящегося ниже на плоскости, больше, чем второго тела. Для этого случая из законов Ньютона получить аналитические выражения для ускорения тел, а также для силы взаимодействия между ними.

2. Проанализировать полученные в предыдущем пункте формулы для случаев $\mu_1 > \mu_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\mu_1 < \mu_2$.

3. Рассмотреть движение по наклонной плоскости двух соприкасающихся тел, имеющих различные коэффициенты трения, исходя из закона изменения механической энергии. Получить выражение для ускорения тел в этом случае.

Лабораторная работа 2.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные понятия, определения, законы и формулы динамики вращательного движения твердого тела

1. Момент силы относительно точки O − величина, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}.$$

2. Момент силы относительно оси ZZ′ − это составляющая (или проекция) вдоль этой оси момента силы относительно любой точки оси:

$$\vec{M}_{ZZ'} = (\vec{M}_{\text{o}})_{ZZ'}.$$

3. Момент инерции материальной точки относительно оси ZZ′ − это величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от точки до оси:

$$I_{ZZ'} = mr^2.$$

4. Момент инерции тела относительно оси ZZ′ − это величина, равная сумме моментов инерции материальных точек, составляющих тело, относительно этой оси:

$$I_{ZZ'} = \sum_i \Delta m_i r_i^2.$$

5. Формула момента инерции однородного цилиндра (диска) массой m и радиусом R относительно оси, совпадающей с геометрической осью цилиндра:

$$I_{ZZ'} = \frac{1}{2} mR^2.$$

Формула момента инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной l относительно оси, перпендикулярной оси стержня и проходящей через середину стержня:

$$I_{ZZ'} = \frac{1}{12} ml^2 .$$

Формула момента инерции однородного шара массой m, радиусом R относительно оси, проходящей через центр шара:

$$I_{ZZ'} = \frac{2}{5} mR^2 .$$

6. Теорема Штейнера. Момент инерции тела относительно некоторой оси $I_{ZZ'}$ равен моменту инерции этого тела относительно оси, CC' параллельной оси ZZ' и проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы тела m на квадрат расстояния a между указанными осями:

$$I_{ZZ'} = I_{CC'} + ma^2 .$$

7. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела. Угловое ускорение, с которым вращается твердое тело вокруг неподвижной оси, равно отношению векторной суммы моментов сил, действующих на тело, относительно оси вращения к моменту инерции этого тела относительно этой оси:

$$\vec{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{ZZ'i}}{I_{ZZ'}} .$$

8. Момент импульса материальной точки относительно точки O − это векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из точки O в материальную точку, на вектор импульса материальной точки:

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} .$$

9. Момент импульса материальной точки относительно оси ZZ′ − это составляющая (проекция) вдоль этой оси момента

импульса материальной точки относительно любой точки O, лежащей на оси:

$$\vec{L}_{ZZ'} = (\vec{L}_o)_{ZZ'} .$$

10. Момент импульса системы материальных точек относительно оси ZZ′ − величина, равная векторной сумме моментов импульса всех N материальных точек, составляющих систему, относительно этой оси:

$$\vec{L}_{ZZ'} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{ZZ'i} .$$

11. Формула момента импульса твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$\vec{L}_{ZZ'} = I_{ZZ'} \vec{\omega} .$$

12. Закон сохранения момента импульса. Момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{ZZ'i} = \text{const} .$$

13. Формула кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$W_{\text{к}} = \frac{I_{ZZ'} \omega^2}{2} .$$

Описание лабораторной установки и хода выполнения лабораторной работы

Момент инерции твердого тела можно определить аналитически, применяя для расчета известные формулы, и экспериментально, изучая вращение тела вокруг неподвижной оси. Рассмотрим один из способов экспериментального определения момента инерции твердого тела относительно закрепленной оси.

Определим момент инерции блока, представляющего собой однородный диск, относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс блока, наблюдая его вращение вокруг этой оси (рисунок 1). Если к концам нити, перекинутой через блок, подвесить грузы одинаковой массой m_0, то система блок–нить–грузы будет неподвижной.

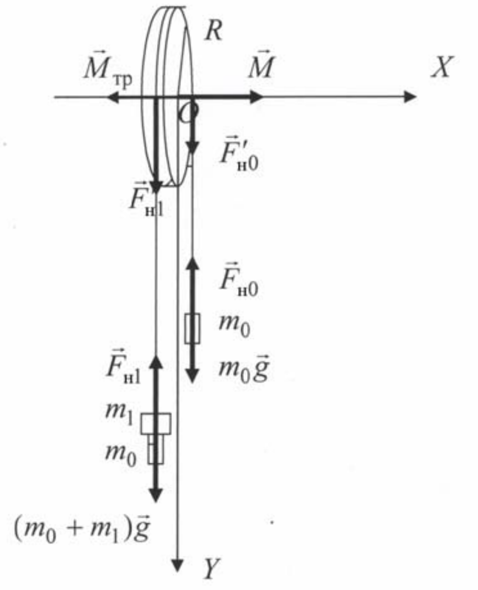


Рисунок 1

На один из грузов массой m_0 положим перегрузок массой m_1, чтобы грузы пришли в движение. Применяя второй закон Ньютона к каждому из грузов, подвешенных к концам нити, можно записать следующие уравнения движения:

$$(m_0 + m_1)\vec{g} + \vec{F}_{н1} = (m_0 + m_1)\vec{a}_1, \tag{1}$$

$$m_0\vec{g} + \vec{F}_{н0} = m_0\vec{a}_0. \tag{2}$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения уравнение движения блока имеет следующий вид:

$$\vec{M} + \vec{M}_{тр} = I\vec{\beta}, \tag{3}$$

где I – момент инерции блока относительно оси вращения;

$\vec{\beta}$ – его угловое ускорении;

$\vec{M}$ – момент силы трения покоя между нитью и блоком, которая вращает блок; действие этой силы приводит к тому, что силы натяжения нити справа и слева от блока имеют разную величину;

$\vec{M}_{тр}$ – момент силы трения на оси закрепления блока.

Момент инерции блока и моменты сил берутся относительно оси вращения.

Запишем уравнения (1), (2) и (3) в проекциях на оси OY и OX соответственно:

$$(m_0 + m_1)g - F_{н1} = (m_0 + m_1)a_1, \tag{1'}$$

$$m_0 g - F_{н0} = -m_0 a_0, \tag{2'}$$

$$M - M_{тр} = I\beta. \tag{3'}$$

Действие силы трения покоя между нитью и блоком приводит к тому, что силы натяжения нити $F_{н0}$ и $F_{н1}$ (и соответственно $F'_{н0}$ и $F'_{н1}$) не равны друг другу. Их разность и составляет величину силы трения между нитью и блоком. Поэтому момент последней силы относительно оси вращения (также как относительно центра блока O) равен:

$$M = (F'_{н1} - F'_{н0})R, \tag{4}$$

где R − радиус блока.

Так как $a_1 = a_0 = a$, $F_{н0} = F'_{н0}$, $F_{н1} = F'_{н1}$, то вместо системы уравнений (1')−(3'), (4) получим систему:

$$(m_1 + m_0)g - F_{н1} = (m_1 + m_0)a, \tag{5}$$

$$m_0 g - F_{н0} = -m_0 a, \tag{6}$$

$$M - M_{тр} = I\beta, \tag{7}$$

$$M = (F_{н1} - F_{н0})R. \tag{8}$$

Из равенств (5) и (6) можно найти:

$$F_{н1} - F_{н0} = m_1 g - (m_1 + 2m_0)a\,. \tag{9}$$

Ускорение a поступательного движения груза является тангенциальным ускорением точек обода блока и поэтому связано с угловым ускорением блока известным соотношением

$$\beta = \frac{a}{R}\,.$$

С другой стороны, из формулы пути при равноускоренном движении $a = \frac{2l}{t^2}$, где l – расстояние, которое прошел каждый груз за время t из состояния покоя. Учитывая это, получим:

$$\beta = \frac{2l}{t^2 R}\,. \tag{10}$$

С учетом соотношений (9) и (10) равенство (8) запишется следующим образом:

$$M = (m_1 g - (m_1 + 2m_0)\beta R)R\,. \tag{11}$$

Если использовать перегрузки сначала массой m_1, а потом массой m_2, то (при $m_1 + 2m_0, m_2 + 2m_0 << M_б$, где $M_б$ – масса блока) момент сил трения на оси блока $M_{тр}$ можно считать постоянным. Но различие масс перегрузков приведет к различным значениям моментов сил трения покоя между нитью и блоком и, следовательно, к различным угловым ускорениям β_1, β_2 в указанных двух случаях. Поэтому на основании формулы (11) в случае перегрузка массой m_1 будем иметь момент силы трения покоя между нитью и блоком

$$M_1 = (m_1 g - (m_1 + 2m_0)\beta_1 R)R\,, \tag{12}$$

$$\beta_1 = \frac{2l}{Rt_1^2}\,, \tag{13}$$

а в случае перегрузка массой m_2:

$$M_2 = (m_2 g - (m_2 + 2m_0)\beta_2 R)R\,, \tag{14}$$

$$\beta_2 = \frac{2l}{Rt_2^2}\,. \tag{15}$$

При этом согласно уравнению (3') указанные моменты сил удовлетворяют равенствам:

$$M_1 - M_{тр} = I\beta_1\,, \tag{16}$$

$$M_2 - M_{тр} = I\beta_2\,. \tag{17}$$

Из уравнений (16) и (17) можно определить момент инерции блока:

$$I = \frac{M_2 - M_1}{\beta_2 - \beta_1} \tag{18}$$

и момент сил трения на оси блока:

$$M_{тр} = \frac{M_1\beta_2 - M_2\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}\,. \tag{19}$$

Величины I и $M_{тр}$ можно определить графически, построив график функции $\beta = \beta(M)$. Он в соответствии с формулой (3) имеет вид прямой линии (рисунок 2), уравнение которой

$$\beta = \frac{1}{I}M - \frac{1}{I}M_{тр}\,.$$

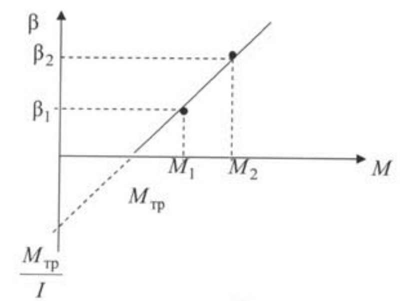


Рисунок 2

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

I уровень

1. Измерить время t_1 прохождения грузом массой m_0 вместе с перегрузком массой m_1 пути l. Опыт повторить 5 раз, результаты занести в таблицу.

2. Повторить действия, отмеченные в задании 1 с перегрузком массой m_2, измеряя таким образом t_2.

3. Для каждого из значений $t_{1ср}$ и $t_{2ср}$ вычислить β_1 и β_2, M_1 и M_2 по формулам (12)−(14). Результаты вычислений занести в таблицу.

4. По формулам (18), (19) рассчитать момент инерции блока I относительно оси вращения, величину момента сил трения на оси блока $M_{тр}$. Результаты вычислений занести в таблицу.

Таблица

№ опыта	m_0 =			m_1 =			m_2 =	
	t_1	t_2	β_1	β_2	M_1	M_2	I	$M_{тр}$
1 … 5								
Среднее значение								

II уровень

1. Выполнить задания 1−4 (I уровень).

2. Используя результаты вычислений, построить график зависимости $\beta = \beta(M)$ по двум точкам (M_1, β_1) и (M_2, β_2).

3. По построенному графику определить (графически) значения величин I и $M_{тр}$ и сравнить их с соответствующими величинами, вычисленными по формулам.

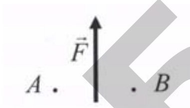
4. Найти момент импульса блока в момент времени $t_{1ср}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Вопросы предварительного контроля (компьютерный допуск к лабораторной работе)

Момент силы, момент импульса

1. На рисунке изображен вектор силы $\vec{F}$ и две точки: A и B. Как направлены моменты силы относительно точек A и B?

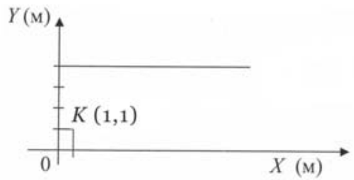


1) вправо; 3) вверх; 5) к нам;
2) влево; 4) вниз; 6) от нас.

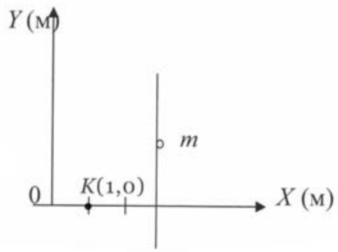
2. К одной из точек поверхности цилиндра приложена сила, направленная по касательной к окружности сечения цилиндра. Как направлен вектор момента силы относительно оси цилиндра?

1) вдоль оси цилиндра;
2) по касательной к поверхности цилиндра;
3) по радиусу окружности сечения цилиндра.

3. Материальная точка массы m = 1 кг движется вдоль прямой $y = 4$ м со скоростью $\upsilon = 3$ м/с. Вычислить момент импульса материальной точки относительно точки K (1,1).

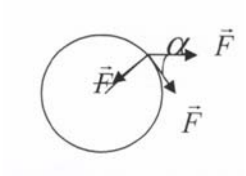


4. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется вдоль прямой $x = 3$ со скоростью $\upsilon = 3$ м/с. Вычислить момент импульса материальной точки относительно точки K(1,0).



5. Материальная точка массой m = 1 кг движется на плоскости XY вдоль прямой $x = y$ со скоростью υ = 5 м/с. Найти момент импульса материальной точки относительно начала координат.

6. Тело имеет форму шара радиусом R = 1 м. К одной из точек поверхности тела приложена сила величиной F = 200 Н в направлении:



1) по касательной к поверхности шара;
2) под углом 60º к этой касательной;
3) по радиусу шара.

Найти момент силы относительно центра шара в каждом из указанных случаев.

7. Тело имеет форму прямого цилиндра радиусом 0,3 м и высотой 1 м. К боковой поверхности тела приложена сила величиной 100 Н в направлении образующей цилиндра. Чему равен момент силы относительно оси симметрии цилиндра?

Момент инерции материальной точки, тела

1. Одна материальная точка массой m находится на расстоянии l от оси Z, другая материальная точка массой M находится на расстоянии L от той же оси. Записать выражение для момента инерции системы этих двух материальных точек относительно оси Z.

2. Материальная точка массой m = 0,3 кг находится в точке K с координатами (1,2,3). Вычислить момент инерции материальной точки относительно оси Z.

3. Материальная точка массой m = 0,2 кг находится на плоскости XY в точке с координатами (15,5). Вычислить момент инерции материальной точки относительно: 1) оси X; 2) оси Y.

4. Записать формулу для определения момента инерции сплошного однородного цилиндра массой m, радиусом R, высотой h относительно оси, совпадающей с одной из образующих цилиндра.

5. Два шара, каждый из которых имеет массу $m = 5$ кг и радиус $R = 2$ м, составляют систему тел. Вычислить момент инерции этой системы относительно оси, соединяющей центры шаров.

6. Два бесконечно тонких стержня, каждый из которых имеет массу 3 кг и длину 2 м, образуют прямой равносторонний крест. Вычислить момент инерции креста относительно одного из стержней.

7. Два бесконечно тонких стержня, каждый из которых имеет массу 3 кг и длину 2 м сложены в форме буквы «Т». Вычислить момент инерции этого тела относительно: 1) горизонтального стержня; 2) вертикального стержня.

Закон сохранения момента импульса.
Закон динамики вращательного движения твердого тела

1. Момент инерции тела относительно оси вращения равен 10 кг·м^2. Угловая скорость вращения тела зависит от времени по закону $\omega = 4t^2$. Найти момент результирующей силы, действующей на тело, в момент времени 2 с.

2. К колесу массы 2 кг, радиуса 0,5 м приложена касательная сила 100 Н. Вычислить угловое ускорение колеса.

3. На цилиндр радиуса 0,1 м намотана проволока, за которую тянут в касательном к цилиндру направлении с силой 20 Н. Цилиндр вращается вокруг собственной центральной оси с угловым ускорением 40 с$^{-2}$. Вычислить массу цилиндра.

4. В каком случае момент импульса системы материальных точек остается с течением времени постоянным:
1) если на систему действуют только консервативные силы;
2) если система замкнута;
3) если внутренние силы системы консервативны;
4) если внешние силы системы консервативны?

5. Тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс. К центру масс тела приложена в перпендикулярном к оси направлении сила 200 Н. Чему равно угловое ускорение тела, вызванное действием этой силы?

6. Считая Землю однородным шаром массой $6\cdot10^{24}$ кг, радиусом $6{,}4\cdot10^{6}$ м, вычислить момент импульса Земли при ее суточном вращении вокруг своей оси.

7. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью 30 с$^{-1}$, равна 60 Дж. Вычислить момент импульса тела.

Вопросы по выполнению лабораторной работы

1. Какие из перечисленных ниже величин измеряются в данной лабораторной работе?

1) t_1;	5) l – путь;
2) υ – скорость;	6) M − момент силы;
3) a – ускорение;	7) L − момент импульса.
4) t_2;	

2. Какие из перечисленных ниже величин вычисляются в этой лабораторной работе?

1) t_1;
2) I – момент инерции;
3) a – ускорение;
4) M − момент силы;
5) β – угловое ускорение;
6) υ – скорость;
7) m – масса груза.

3. К одному концу нити привязан груз массой 0,1 кг, к другому − 0,2 кг. Нить перекинута через блок, имеющий горизонтальную ось вращения. Груз большей массы находится на левом конце нити. Как направлен результирующий момент сил, действующий на блок?

1) влево;
2) вправо;
3) от нас;
4) к нам;
5) вверх;
6) вниз.

4. К нити, перекинутой через блок, привязаны грузы разной массы. Силы натяжения нити равны 100 Н и 450 Н, радиус блока 0,1 м. Трение на оси блока не учитывать. Найти результирующий момент сил относительно оси блока.

5. К двум концам нити, перекинутой через блок, привязаны грузы. Какова связь между ускорением грузов и угловым ускорением блока?

2. Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

I уровень

1. Знать определения момента силы относительно точки, относительно оси; момента инерции материальной точки, тела; момента импульса материальной точки, системы материальных точек, вращающегося тела.

2. Знать формулировки закона сохранения импульса, закона динамики вращательного движения твердого тела. Записать уравнения движения грузов и блока.

3. Как направлены моменты сил, действующих на блок?

II уровень

1. Исходя из закона динамики вращательного движения, вывести рабочие формулы для вычисления моментов сил, действующих на блок, момента инерции блока, момента сил трения на оси блока.

2. Объяснить график зависимости $\beta(M)$.

Лабораторная работа 2.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Основные понятия, определения, законы и формулы гармонического колебательного движения

1. *Гармонические колебания* − это такое движение материальной точки или тела, при котором смещение от положения равновесия зависит от времени по закону синуса или косинуса, а именно:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha), \qquad x = A\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где величины A, ω_0, α – постоянны.

2. *Скорость* материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$\upsilon = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

3. *Ускорение* материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$a = \ddot{x} = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

4. Гармонические колебания совершаются под действием *квазиупругой силы*

$$f_x = -kx,$$

направленной против смещения, т. е. в положение равновесия, и пропорциональной величине смещения.

5. Смещение x как функция времени является решением *дифференциального уравнения гармонических колебаний:*

$$\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

6. Пружинный маятник, состоящий из упругой невесомой пружины жесткости k, к концу которой прикреплена материальная точка массой m, совершает гармонические колебания, период которых

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

7. Физический маятник − это абсолютно твердое тело произвольной формы, подвешенное на горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела. Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}\,,$$

где I – момент инерции маятника относительно оси подвеса;

L – расстояние от оси подвеса до центра масс маятника.

8. Математический маятник − это материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити. Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

где l – длина нити;

g – ускорение свободного падения.

9. Полная механическая энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания, складывается из кинетической и потенциальной энергии и равна

$$W_{\text{мех}} = \frac{kA^2}{2}\,.$$

10. Реальные свободные колебания являются *затухающими.* Если величина силы сопротивления пропорциональна скорости, то при затухающих колебаниях смещение от положения равновесия зависит от времени по закону

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)\,,$$

где $A = A_0 e^{-\beta t}$ является *амплитудой затухающих колебаний*;

β – коэффициент затухания.

11. Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения предыдущей амплитуды к последующей амплитуде:

$$d = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)}\,.$$

Логарифмический декремент затухания связан с периодом колебаний:

$$d = \beta T\,.$$

12. Время релаксации − это промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\tau = \frac{1}{\beta}\,.$$

Если в течение времени релаксации τ происходит N_e колебаний, то

$$d = \frac{1}{N_e}\,.$$

13. Добротностью колеблющейся системы называется безразмерная величина Q, равная произведению 2π на отношение энергии колеблющейся системы в некоторый момент времени к потере энергии за один период колебаний:

$$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}\,.$$

При малых значениях логарифмического коэффициента затухания

$$Q = \frac{\pi}{d}\,.$$

14. Вынужденные колебания − это колебания, происходящие при действии внешней периодической силы. Они происходят с частотой этой вынуждающей силы; амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы по закону

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}\,,$$

где F_0 – амплитуда вынуждающей силы;

Ω – циклическая частота вынуждающей силы.

15. Механический резонанс − это явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебаний системы ω_0.

Резонансная частота

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ .$$

Описание лабораторной установки и хода выполнения лабораторной работы

Момент инерции тела вычисляется с помощью суммирования или (более точно) интегрирования моментов инерции элементарных частей тела:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2\ , \qquad\qquad I = \int_V r^2 dm\ .$$

Вычисление моментов инерции по приведенным формулам для тел неправильной формы является сложной задачей. Поэтому часто момент инерции тела определяют косвенным путем. Одним из них является *способ физического маятника.* Он заключается в том, что тело, момент инерции которого надо определить, подвешивают на горизонтальной оси в виде физического маятника и экспериментально находят период его колебаний. Далее пользуются формулой периода колебаний физического маятника, из которой выражают его момент инерции:

$$I = \frac{mgL}{4\pi^2}\cdot T^2\ .$$

Зная величины m, L, T, по этой формуле вычисляют момент инерции тела относительно оси подвеса.

В данной лабораторной работе в качестве физического маятника используется тело, состоящее из металлического стержня *1* (рисунок 4), к которому с помощью винта *3* крепится массивный металлический цилиндр *2*. Маятник подвешивается на горизонтальной

оси, прикрепленной к стене. Для определения центра масс маятника используется металлическая призма *4*.

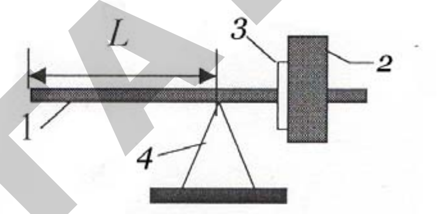


Рисунок 4

Если переместить цилиндр по стержню и закрепить его в другом месте, получим тело с другим моментом инерции, другим расстоянием от оси подвеса до центра масс и, следовательно, другой период колебаний физического маятника.

Для каждого определенного положения цилиндра линейкой измеряют расстояние L от оси до центра масс; время N колебаний t измеряют секундомером (или с помощью часов) и затем находят период колебаний

$$T = \frac{t}{N}\ .$$

Масса маятника написана на цилиндре.

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

I уровень

1. Укрепить цилиндр на нижнем конце стержня и определить центр масс полученного физического маятника с помощью призмы. Измерить расстояние L от центра масс до оси вращения.

2. Повесить маятник на горизонтальную ось (на кронштейн), отклонить его на небольшой угол (не более 10°), отпустить и одновременно начать отсчет времени. Измерить время 10 колебаний. Вычислить период колебаний (см. последнюю формулу).

3. Задания 1 и 2 повторить для 7 различных положений цилиндра, отличающихся друг от друга на 4−5 см. Данные измерений и вычислений занести в таблицу.

4. По данным измерениям для каждого положения цилиндра (и центра масс) вычислить момент инерции маятника по приведенной выше формуле.

Построить графики:

а) $I(L_{\text{ср}})$ – график зависимости момента инерции от расстояния от оси подвеса до центра масс;

б) $T(L_{\text{ср}})$ – график зависимости периода колебаний от расстояния от оси до центра масс.

Таблица

Номер измерения	Расстояние от центра масс до оси вращения L, м	Время 10 колебаний t, с	Период колебаний T, с	Момент инерции маятника. I, кг·м^2
1				
2				
…				
7				

II уровень

1. Выполнить задания I-го уровня для пяти различных положений цилиндра.

2. Для одного из них найти теоретическое значение момента инерции маятника. Для этого рассмотреть мятник как систему двух тел: стержня массой m_1 длиной l и цилиндра массой m_2, радиусом R, высотой h. Известно, что момент инерции цилиндра относительно оси, совпадающей с его диаметром и проходящей через центр масс цилиндра, вычисляется по формуле

$$I = m_2\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right).$$

Найденное теоретическое значение сравнить с экспериментальным.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Вопросы предварительного контроля (компьютерный допуск к лабораторной работе)

Гармонические колебания

1. Под действием какой силы происходят гармонические колебания?
а) постоянной силы;
б) величина силы пропорциональна времени: $f = Ct$ (C = const);
в) сила пропорциональна смещению x от положения равновесия: $f_x = kx$;
г) сила пропорциональна смещению от положения равновесия: $f_x = -kx$.

2. Материальная точка движется по оси X. Как зависит от времени координата точки при ее гармонических колебаниях?
а) $x = at^2$ (a = const);
б) $x = \frac{at^2}{2}$;
в) $x = at \cos \omega_0$ (ω_0 = const);
г) $x = a \cos \omega_0 t$.

3. Как изменяется величина скорости материальной точки, совершающей гармонические колебания?
а) величина скорости постоянна;
б) величина скорости зависит от времени по закону синуса или косинуса;
в) величина скорости растет пропорционально времени;
г) величина скорости уменьшается по экспоненциальному закону.

4. Что такое циклическая частота колебаний?
а) время одного колебания;
б) число колебаний за π секунд;
в) число колебаний за 1 секунду;
г) число колебаний за 2π секунд.

5. Формула связи периода колебаний T и циклической частоты колебаний ω_0:

а) $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$; б) $T = 2\pi\omega_0$; в) $T=\frac{1}{\omega_0}$; г) $T=\frac{2}{\omega_0}$.

6. Как изменится максимальная кинетическая энергия материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону, если амплитуду колебаний увеличить в 2 раза?

а) увеличится в 2 раза; в) не изменится,

б) увеличится в 4 раза; г) уменьшится в 2 раза.

7. По какому закону изменяется амплитуда A затухающих колебаний с течением времени (A_0 – начальная амплитуда, $\beta = \text{const}$)?

а) $A = \dfrac{A_0}{t}$; в) $A = A_0 \ln \beta t$;

б) $A = \dfrac{A_0}{t^2}$; г) $A = A_0 e^{-\beta t}$.

Маятники

1. Формула периода колебаний пружинного маятника:

а) $T = \sqrt{mk}$; в) $T = \dfrac{2\pi m}{k}$;

б) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; г) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

2. На нити длиной 1 м подвешен шар радиусом 1 м. Физическим или математическим маятником является данная механическая система?

3. Бесконечно тонкое кольцо радиусом 1 м висит на гвозде. Это физический маятник или математический?

4. Если массу математического маятника увеличить в 2 раза, то как изменится период колебаний маятника?

а) не изменится; в) уменьшится в 2 раза;

б) увеличится в 2 раза; г) уменьшится в 4 раза.

5. Формула периода колебаний математического маятника длиной l

а) $T = 2\pi\sqrt{l}$; в) $T = \sqrt{\dfrac{l}{2\pi g}}$;

б) $T = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$; г) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

6. В формуле периода колебаний физического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgL}}$ буквой «L» обозначено:

а) длина физического маятника;

б) расстояние от оси подвеса до центра масс маятника;

в) длина оси маятника;

г) приведенная длина физического маятника.

7. Найти период колебаний маятника, представляющего собой невесомую нить длиной l, подвешенную за один конец на горизонтальную ось, если в конце нити и в ее середине находятся материальные точки одинаковой массой m.

Вопросы по выполнению лабораторной работы

1. Какие из перечисленных ниже величин измеряются в данной лабораторной работе?

1) I – момент инерции;
2) n – количество колебаний;
3) R – радиус цилиндра;
4) υ – скорость;
5) L − расстояние от точки подвеса до центра масс;
6) a – ускорение;
7) t – время.

2. Какие из перечисленных ниже величин вычисляются в данной лабораторной работе?

1) υ – скорость маятника;
2) T − период колебаний;
3) a – ускорение маятника;
4) L – расстояние от точки подвеса до центра масс;
5) I – момент инерции;
6) m – масса маятника.

3. Физический маятник представляет собой тонкое кольцо радиусом R массой m, висящее на гвозде. Как изменится его момент инерции, если увеличить массу кольца:

1) момент инерции увеличится;
2) момент инерции не изменится;
3) момент инерции уменьшится.

4. Физический маятник представляет собой шар радиусом 0,5 м массой 1 кг, подвешенный на нити длиной 0,5 м. Вычислить момент инерции этого маятника относительно оси подвеса.

5. На невесомой нити подвешены две материальные точки: одна на конце нити, другая − в середине нити. Нить закреплена за свободный конец на гвозде, вбитом в стену. Какой это маятник?

1) физический;

2) математический.

2. Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

I уровень

1. Записать выражение для смещения от положения равновесия при гармонических колебаниях и объяснить физический смысл входящих в него величин.

2. Дать определение физическому маятнику и объяснить, под действием каких сил (моментов сил) происходят его колебания. При каком условии колебания физического маятника являются гармоническими?

3. Записать формулу периода гармонических колебаний физического маятника и объяснить физический смысл входящих в нее величин.

4. Уметь получать из формулы периода колебаний физического маятника соответствующую формулу для математического маятника.

5. Объяснить порядок выполнения лабораторной работы.

II уровень

1. Рассмотреть колебания физического маятника и получить формулу периода его колебаний.

2. Теоретически получить выражения для момента инерции и периода колебаний физического маятника данного вида, используя известное выражение момента инерции цилиндра относительно диаметральной оси, проходящей через центр масс цилиндра: $I = m\left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{h^2}{12}\right)$.

Ш уровень

Дополнительно к вопросам II-го уровня получить приведенное выше выражение момента инерции цилиндра.

Лабораторная работа 2.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННОЙ ДЛИНЫ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Теоретическое введение

Математический маятник является частным случаем физического маятника, когда вся масса тела сосредоточена в одной материальной точке, которая подвешена на невесомой нерастяжимой нити (см. с. 63, подп. 8). Для малых колебаний формула периода колебаний математического маятника следует из формулы периода колебаний физического маятника (см. с. 63, подп. 9), если в последнюю подставить момент инерции материальной точки $I = ml^2$, где m – масса математического маятника, l – длина нити маятника. Если при этом учесть, что расстояние от оси подвеса до центра масс $L = l$, так как центр масс совпадает с материальной точкой, то получим формулу Гюйгенса для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (1)$$

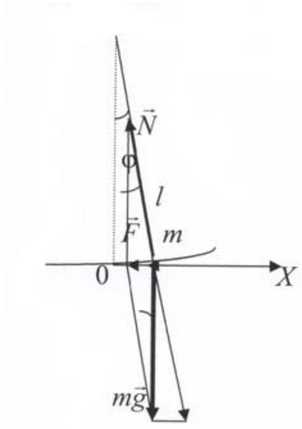


Рисунок 1

Выражение (1) можно получить, непосредственно рассматривая малые колебания математического маятника (рисунок 1).

Можно считать, что малые колебания материальной точки массой m происходят вдоль оси OX, которая касается траектории в точке 0 − в положении равновесия маятника. На материальную точку действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{N}$. Их векторная сумма $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N}$ направлена в положение равновесия 0 и равна для малых углов отклонения

$$F = mg \cdot \text{tg}\varphi \approx mg\varphi \approx mg\frac{x}{l},$$

а проекция силы на ось X:

$$F_x = -mg\frac{x}{l},$$

где x – смещение материальной точки от положения равновесия. Второй закон Ньютона для материальной точки $m\vec{a} = \vec{F}$ в проекции на ось OX запишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{g}{l}x,$$

где $\frac{d^2x}{dt^2} = a_x$ есть проекция ускорения на ось OX, которая обычно обозначается $\ddot{x}$. Сокращая предыдущее равенство на m, приходим к дифференциальному уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где величина $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ является циклической частотой колебаний. Учитывая связь периода колебаний с циклической частотой $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, получаем выражение (1).

В данной лабораторной работе эта формула используется для двух целей: определения ускорения свободного падения g и изучения понятия приведенной длины физического маятника.

Описание лабораторной установки и хода выполнения лабораторной работы

1. Определение ускорения свободного падения

Ускорение, которое сообщает телу сила притяжения к Земле (без учета суточного вращения Земли), называется *ускорением свободного падения* $\vec{g}$. Согласно закону всемирного тяготения сила, с которой материальная точка массой m притягивается к Земле, равна

$$F = G\frac{mM}{R^2},$$

где G − гравитационная постоянная, $G = 6,07 \cdot 10^{-11}$ м^2/(кг·с^2);

M – масса Земли, $M = 5,99 \cdot 10^{24}$ кг;

R – среднее расстояние от точки на поверхности Земли до центра Земли.

Сила притяжения F при условии, что тело находится вблизи поверхности Земли, сообщает телу ускорение свободного падения g: $F = mg$. Следовательно:

$$g = G\frac{M}{R^2} \approx 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Последнее выражение показывает, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела и в данной точке над поверхностью Земли для всех тел одинаковое.

Вращение Земли вокруг своей оси и тот факт, что Земля имеет форму эллипсоида, а не сферы, приводят к тому, что ускорение свободного падения зависит от географической широты местности. По этой причине на полюсах Земли $g = 9,83$ м/с^2, на экваторе $g = 9,78$ м/с^2. Кроме того, при средней плотности Земли 5500 кг/м^3 плотность разных частей земной коры отличается от средней. Это также является причиной отклонения величины ускорения свободного падения от значения 9,8 м/с^2.

Сила тяжести и ускорение свободного падения уменьшаются при удалении от Земли в соответствии с законом

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2},$$

где h – высота над поверхностью Земли.

В данной лабораторной работе ускорение свободного падения определяется с помощью математического маятника. Как следует из формулы (1) периода малых колебаний математического маятника, величину g можно найти, если измерить длину нити маятника l и период колебаний T:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (2)$$

Более удобно измерить периоды малых колебаний математического маятника T_1 и T_2 при двух различных длинах нити l_1 и l_2 и затем определить величину g в зависимости от разности $l_1 - l_2$. При этом из выражений

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

получаем расчетную формулу

$$g = \frac{4\pi^2 (l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (3)$$

По формуле (3) можно вычислить величину g, если предварительно измерить l_1, l_2, t_1, t_2 и вычислить периоды колебаний T_1, T_2, разделив время на число колебаний:

$$T = \frac{t}{n}. \quad (4)$$

ЗАДАНИЕ 1

1. С помощью зажима укрепить маятник так, чтобы его длина была равна l_1 (произвольное значение). Занести значение l_1 в таблицу 1.

2. Отклонить маятник на угол 5°−6°, отпустить его, одновременно включив секундомер. Измерить время t_1, за которое происходит 20 колебаний. Измерения повторить 5 раз. Результаты занести в таблицу 1.

3. Установить другую длину маятника l_2 (разность $l_1 - l_2$ должна быть не менее 50 см) и снова выполнить задание 2. Значения l_2, $l_1 - l_2$, t_2 занести в таблицу 1.

4. Рассчитать периоды колебаний T_1 и T_2 по формуле (4) для каждого опыта, найти средние значения этих величин, т. е. $\langle T_1\rangle, \langle T_2\rangle$; рассчитать абсолютные погрешности ΔT_1 и ΔT_2 каждого опыта, а также средние абсолютные погрешности $\langle \Delta T_1\rangle$ и $\langle \Delta T_2\rangle$; результаты занести в таблицу 1.

5. Вычислить среднее значение ускорения свободного падения $\langle g\rangle$ по формуле (3), подставляя в нее известное значение $l_1 - l_2$ и средние значения периодов колебаний $\langle T_1\rangle$ и $\langle T_2\rangle$.

6. Пользуясь правилами вычисления ошибок косвенных измерений (см. подразд. 1.3), можно получить следующую формулу для вычисления относительной погрешности определения g:

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{\langle g\rangle} = 2\frac{\Delta\pi}{\pi} + 2\frac{\Delta l}{l_1 - l_2} + 2\frac{\langle T_1\rangle\langle \Delta T_1\rangle + \langle T_2\rangle\langle \Delta T_2\rangle}{\langle T_1\rangle^2 - \langle T_2\rangle^2}, \quad (5)$$

где при подстановке значения $\pi = 3{,}14$ следует, согласно табличным данным, считать погрешность этой величины $\Delta\pi = 0{,}002$, $\Delta l = 1$ см. Подставляя перечисленные величины, а также средние значения $\langle T_1\rangle, \langle T_2\rangle$, $\langle \Delta T_1\rangle, \langle \Delta T_2\rangle$ в формулу (5), вычислить относительную погрешность измерения ускорения свободного падения. Результаты занести в таблицу 1.

7. Зная относительную погрешность ε и среднее значение ускорения свободного падения $\langle g\rangle$, вычислить среднюю абсолютную ошибку

$$\Delta g = \varepsilon \cdot \langle g\rangle,$$

занести в таблицу 1 и записать окончательный результат в виде

$$g = (\langle g\rangle \pm \Delta g) \text{ м/с}^2.$$

Таблица 1

$l_1 - l_2 =$									
№	t_1	t_2	T_1	T_2	ΔT_1	ΔT_2	g	$\varepsilon = \Delta g / g$	Δg
1 2 3 4 5									
Среднее значение									

2. Приведенная длина физического маятника

Приведенной длиной физического маятника $L_{пр}$ называется длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

Если данный физический маятник имеет момент инерции относительно оси подвеса I, расстояние от оси подвеса до центра масс L, то для нахождения его приведенной длины необходимо записать равенство периодов колебаний данного физического маятника и математического маятника с длиной нити $L_{пр}$:

$$2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{пр}}{g}},$$

откуда

$$L_{пр} = \frac{I}{mL}. \qquad (6)$$

Точка физического маятника, лежащая на прямой, проходящей через ось подвеса маятника в перпендикулярном к ней направлении и центр масс маятника, на расстоянии $L_{пр}$ от оси, называется центром качаний физического маятника. Можно показать, что если ось подвеса перенести в центр качаний, то период колебаний маятника не изменится.

В лабораторной работе 2.4 определялись моменты инерции I и расстояния L от оси до центра масс нескольких вариантов физического маятника. Теперь необходимо вычислить приведенную длину одного физического маятника с определенными значениями I и L и проверить результат, наблюдая колебания соответствующего математического маятника.

ЗАДАНИЕ 2

1. Выбрать из результатов проделанной лабораторной работы 2.4 какое-либо одно значение L, записать его и соответствующие значения момента инерции I и периода колебаний физического маятника $T_ф$ в таблицу 2.
2. Вычислить по формуле (6) приведенную длину физического маятника $L_{пр}$. Результат записать в таблицу 2.
3. Закрепить математический маятник таким образом, чтобы длина его нити была равна $L_{пр}$. Отклонить этот маятник на угол 5°−6° и, включив секундомер, измерить время t двадцати колебаний маятника. Результат занести в таблицу 2.
4. Вычислить по формуле (4) период колебаний математического маятника $T_м$, результат занести в таблицу 2 и сравнить его с найденным ранее значением $T_ф$.

Таблица 2

L	I	$T_ф$	$L_{пр}$	t	$T_м$

Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

I уровень

1. Дать определение математическому маятнику и объяснить, под действием каких сил происходят его колебания. При каком условии колебания маятника будут гармоническими?
2. Записать формулу периода колебаний математического маятника и объяснить физический смысл входящих в нее величин.

3. Что такое ускорение свободного падения и почему его численное значение зависит от широты местности?

4. Что такое приведенная длина физического маятника? Получить формулу для вычисления этой величины.

5. Объяснить порядок выполнения лабораторной работы.

II уровень

1. Рассмотреть колебания математического маятника и получить формулу (1) для периода его колебаний.

2. Как изменится выражение (1), если точка подвеса математического маятника движется вертикально вверх или вниз с некоторым ускорением $\vec{w}$?

Ш уровень

1. Исходя из закона всемирного тяготения, найти выражение ускорения свободного падения g с учетом центробежной силы инерции, действующей благодаря суточному вращению Земли с угловой скоростью ω на тела, находящиеся на Земле.

3. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Лабораторная работа 3.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ C_p / C_V ПО СПОСОБУ КЛЕМАНА И ДЕЗОРМА

Основные понятия, определения, законы и формулы термодинамики изопроцессов

1. Число степеней свободы молекулы i − это число независимых параметров, однозначно определяющих положение молекулы в пространстве. Одноатомная молекула имеет i = 3, двухатомная с жесткой связью − i = 5 и т. д.

2. По закону распределения энергии по степеням свободы на каждую поступательную и вращательную степень свободы приходится энергия $\frac{1}{2}kT$, на колебательную степень свободы − kT.

3. Внутренняя энергия идеального газа – это сумма кинетических энергий хаотического движения молекул газа. Идеальный газ массой m и молярной массой μ имеет внутреннюю энергию

$$U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} RT,$$

где R – универсальная газовая постоянная;

i – число степеней свободы молекулы газа, считая одну колебательную степень свободы за две.

4. Работа, совершаемая газом при расширении:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

5. *Первое начало термодинамики:* количество теплоты, полученное газом, идет на изменение его внутренней энергии и на совершение газом работы:

$$Q = U_2 - U_1 + A\,.$$

6. *Мольная теплоемкость газа* − это количество теплоты, необходимое одному молю газа для нагревания на один градус (либо на 1 К):

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}\,.$$

7. *Изохорный процесс, происходящий с газом,* – это процесс, при котором объем газа остается постоянным. Параметры газа при этом процессе подчиняются *закону Шарля:*

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}, \qquad V = \text{const}\,.$$

8. *Мольная теплоемкость идеального газа при изохорном процессе:*

$$C_V = \frac{i}{2} R\,.$$

9. *Изобарный процесс, происходящий с газом,* это процесс, при котором давление остается постоянным. Параметры газа при этом процессе подчиняются *закону Гей-Люссака:*

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}, \qquad p = \text{const}\,.$$

10. *Мольная теплоемкость идеального газа при изобарном процессе:*

$$C_p = \frac{i+2}{2} R\,.$$

11. *Изотермический процесс, происходящий с газом,* – это процесс, при котором температура газа остается постоянной. При этом параметры газа подчиняются *закону Бойля–Мариотта:*

$$pV = \text{const}, \qquad T = \text{const}\,.$$

12. *Адиабатным процессом* называется процесс, происходящий без обмена теплом с окружающей средой. При этом параметры газа подчиняются *соотношению Пуассона:*

$$pV^{\gamma} = \text{const}\,,$$

где $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ – *показатель адиабаты.*

13. *Равенство Майера* дает связь между мольными теплоемкостями газа изобарного и изохорного процессов:

$$C_p - C_V = R\,.$$

Описание лабораторной установки и хода выполнения лабораторной работы

Согласно классической молекулярно-кинетической теории теплоемкостей идеальных газов значения мольных теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме не зависят от температуры газа и определяются только числом степеней свободы молекул газа:

$$C_V = \frac{i}{2} R\,, \qquad C_V = \frac{i+2}{2} R\,,$$

где R – универсальная газовая постоянная. Она численно равна работе, которую совершает 1 моль идеального газа при нагревании его на 1 К при постоянном давлении.

Опыты показали, что в некотором интервале температур большинство газов имеют значения теплоемкостей, близкие к теоретическим; особенно хорошее совпадение получено для одноатомных и двухатомных газов при условиях, близких к нормальным.

При высоких температурах теплоемкости оказываются больше, а при низких температурах – меньше теоретически вычисленных значений. Объясняется это на основе квантовой механики.

Непосредственное практическое определение теплоемкостей затруднительно. При рассмотрении многих вопросов достаточно знать отношение теплоемкостей $C_p / C_V = \gamma$.

Целью данной работы является опытное определение отношения теплоемкостей для воздуха. Для этого используется метод Клемана и Дезорма. Этот метод основан на том, что величина γ входит в уравнение Пуассона для адиабатного процесса:

$$pV^{\gamma} = \text{const}\,.$$

Прибор (рисунок 1), используемый для определения отношения C_p / C_V, представляет собой большой стеклянный баллон A, сообщающийся с водяным манометром M, насосом B и наружным воздухом через кран K.

Все дальнейшие рассуждения будем вести для постоянной массы воздуха m, которая при атмосферном давлении и комнатной температуре имеет объем, равный объему сосуда V_0.

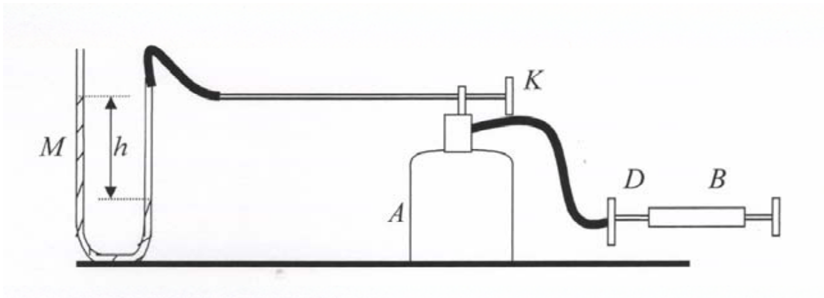


Рисунок 1

Если в начале опыта открыт кран K, сообщающий баллон с наружным воздухом, то указанная масса воздуха будет иметь объем V_0 и находиться под давлением p_0 при комнатной температуре T_0 (p_0 – величина атмосферного давления в условиях опыта). Если, закрыв кран K, накачать в сосуд с помощью насоса B некоторую добавочную массу воздуха Δm, то исходная масса газа m будет сжата до меньшего объема V_1, а давление увеличится. Температура газа также увеличится, так как при накачивании над газом выполняется работа.

Если прекратить накачивать воздух и зажать краном D резиновую трубку, соединяющую баллон с насосом, то обнаружим, что разность уровней жидкости в манометре начинает постепенно уменьшаться, а затем через 2–3 минуты устанавливается постоянной. Уменьшение давления воздуха в баллоне происходит в результате охлаждения газа до комнатной температуры (вследствие теплопроводности стенок баллона) при постоянном объеме.

Установившееся состояние будет характеризоваться следующими параметрами:

$$p_1 = p_0 + \Delta p_1\,, \qquad V_1 \angle V_0\,, \qquad T_1 = T_0\,. \qquad (1)$$

Избыток давления воздуха Δp_1 над атмосферным давлением определяется по разности уровней жидкости в манометре M. Величина этого давления $\Delta p_1 = \rho g h_1$, где h_1 − разность уровней жидкости в манометре.

Если открыть на короткое время (1–2 секунды) кран K, то произойдет быстрое расширение воздуха в атмосферу. Такое расширение можно считать адиабатным процессом. При этом давление газа понизится и достигнет атмосферного, температура также понизится и станет ниже комнатной, так как газ, расширяясь, совершает работу. Новый, увеличенный объем массы воздуха m обозначим V_2. Причем V_2 меньше объема сосуда V_0, так как температура газа теперь ниже комнатной. Полученное состояние газа характеризуется параметрами

$$p_2 = p_0\,, \qquad V_1 < V_2 < V_0\,, \qquad T_2 \angle T_0\,. \qquad (2)$$

Если теперь кран закрыть, то воздух в баллоне начнет нагреваться до температуры окружающей среды T_0. При этом избыточное (над атмосферным) давление будет возрастать до $\Delta p_2 = \rho g h_2$, где h_2 – установившаяся разность уровней жидкости и манометре. Возрастание давления Δp_2 вызвано изохорическим нагреванием воздуха в баллоне. После того, как разность уровней в манометре достигнет h_2, состояние газа будет характеризоваться параметрами

$$p_3 = p_0 + \Delta p_2\,, \qquad V_3 = V_2\,, \qquad T_3 = T_0\,. \qquad (3)$$

При переходе из состояния, характеризуемого параметрами (1), в состояние с параметрами (2) справедливо уравнение Пуассона, так как процесс можно считать адиабатным:

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}\,,$$

или

$$\left(p_0 + \Delta p_1\right) V_1^{\gamma} = p_0 V_2^{\gamma}\,. \qquad (4)$$

К переходу из состояния (1) в состояние (3) применим закон Бойля–Мариотта (постоянная температура $T_1 = T_3 = T_0$):

$$p_1V_1 = p_3V_3 .$$

Учитывая, что $V_3 = V_2$, получим:

$$(p_0 + p_1)V_1 = (p_0 + \Delta p_2)V_2 . \qquad (5)$$

Из формулы (4) находим:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} = \frac{p_0 + \Delta p_1}{p_0}, \qquad (6)$$

а из формулы (5):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_0 + \Delta p_1}{p_0 + \Delta p_2}. \qquad (7)$$

Подставив выражение (7) в формулу (6), получаем:

$$\left(\frac{p_0 + \Delta p_1}{p_0 + \Delta p_2}\right)^{\gamma} = \frac{p_0 + \Delta p_1}{p_0}. \qquad (8)$$

Для определения γ прологарифмируем зависимость (8):

$$\gamma\left(\ln(p_0 + \Delta p_1) - \ln(p_0 + \Delta p_2)\right) = \ln(p_0 + \Delta p_1) - \ln p_0 ,$$

откуда

$$\gamma = \frac{\ln(p_0 + \Delta p_1) - \ln p_0}{\ln(p_0 + \Delta p_1) - \ln(p_0 + \Delta p_2)}. \qquad (9)$$

Это точная формула для определения величины γ. Преобразуем выражение (9) следующим образом:

$$\gamma = \frac{\ln\left[p_0(1 + \Delta p_1/p_0)\right] - \ln p_0}{\ln\left[p_0(1 + \Delta p_1/p_0)\right] - \ln\left[p_0(1 + \Delta p_2/p_0)\right]} =$$

$$= \frac{\ln p_0 + \ln(1 + \Delta p_1/p_0) - \ln p_0}{\ln p_0 + \ln(1 + \Delta p_1/p_0) - \ln p_0 - \ln(1 + \Delta p_2/p_0)} =$$

$$= \frac{\ln(1 + \Delta p_1/p_0)}{\ln(1 + \Delta p_1/p_0) - \ln(1 + \Delta p_2/p_0)}. \qquad (10)$$

Из математического анализа известно, что

$$\ln(1 + x) \approx x \quad \text{при} \quad x \ll 1 . \qquad (11)$$

В условиях опыта значения Δp_1, Δp_2 значительно меньше, чем атмосферное давление p_0. Поэтому, учитывая соотношение (11), будем иметь:

$$\ln(1 + \Delta p_1/p_0) \approx \frac{\Delta p_1}{p_0}, \qquad \ln(1 + \Delta p_2/p_0) \approx \frac{\Delta p_2}{p_0}. \qquad (12)$$

Преобразуя выражение (10) с учетом равенств (12), получим рабочую формулу для определения γ:

$$\gamma \approx \frac{\Delta p_1/p_0}{\Delta p_1/p_0 - \Delta p_2/p_0} = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2} = \frac{\rho g h_1}{\rho g h_1 - \rho g h_2},$$

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}, \qquad (13)$$

где h_1 – разность уровней жидкости в манометре при накачивании воздуха в баллон (в мм столба жидкости);

h_2 – установившаяся (максимальная) разность уровней жидкости в манометре после кратковременного выпуска воздуха из баллона (в мм столба жидкости).

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

I уровень

1. Открыть кран K, сообщающий баллон с наружным воздухом, для выравнивания давления воздуха в баллоне с атмосферным давлением.

2. Закрыть этот кран и накачать в бутыль некоторое количество воздуха так, чтобы разность уровней жидкости в манометре достигла приблизительно 15–20 см. Зажать резиновую трубку, идущую от насоса к баллону, зажимом D. После этого разность уровней жидкости в манометре сначала будет убывать, а затем устанавливается неизменной (через 2–3 минуты). Записать установившуюся разность уровней h_1 в таблицу.

3. Открыть снова кран K на очень короткое время (1–2 секунды), необходимое для того, чтобы уровни в манометре выровнялись, и сразу же его закрыть. После этого уровень жидкости в одном колене манометра будет постепенно подниматься, и через 2–3 минуты установится неизменная разность уровней h_2, которая заносится в таблицу.

4. Повторить опыт не менее 6 раз. Для каждой найденной пары значений h_1 и h_2 вычислить γ по рабочей формуле (13).

5. Найти среднее значение γ, абсолютную и относительную погрешности и внести их в таблицу.

6. Записать окончательный результат эксперимента.

Таблица

№ опыта	h_1	h_2	γ	$\Delta\gamma$	$\frac{\Delta\gamma}{\gamma}100\ \%$
1					
2					
3					
4					
5					
Среднее значение					

II уровень

1. Процесс перехода газа из состояния (2) в состояние (3) изохорный. Записать закон связи параметров газа p, T при этом процессе.

2. Измерив с помощью термометра температуру воздуха в помещении T_0, с помощью барометра атмосферное давление p_0, найти температуру воздуха T_2, которая была в баллоне сразу после адиабатного расширения в одном из проделанных экспериментов.

3. Вычислить плотность воздуха ρ в баллоне в начальном состоянии (ρ_0), а также в состояниях (1), (2), (3), считая массу 1 моля воздуха равной $29\cdot10^{-3}$ кг/моль.

III уровень

Пусть первоначально в баллоне находился 1 моль воздуха. Зная температуру воздуха в помещении, найти работу, совершаемую первоначальной массой газа в баллоне, при ее изотермическом расширении из состояния, описываемого параметрами (1) в состояние с параметрами (3).

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Вопросы предварительного контроля (компьютерный допуск к лабораторной работе)

Уравнение состояния идеального газа. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

1. Какой газ является идеальным?
   1) газ при температуре $T = 0$;
   2) газ, в котором взаимодействие между молекулами можно не учитывать;
   3) газ, который состоит из одинаковых молекул;
   4) газ, молекулы которого взаимодействуют с постоянными силами.

2. Как записывается уравнение состояния одного моля идеального газа?

1) $pT = RV$; 3) $pV = \dfrac{RT}{m}$; 5) $pV = \dfrac{3}{2}T$;

2) $pV = RT$; 4) $RV = pT$; 6) $pV = kT$.

3. Записать уравнение состояния идеального газа, в которое входит концентрация молекул газа n и постоянная Больцмана k.

4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа имеет следующий вид:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \left\langle \upsilon^2 \right\rangle .$$

Какая величина в этом выражении обозначена символом $\left\langle \upsilon^2 \right\rangle$?

1) средняя (арифметическая) скорость молекул газа;
2) средняя квадратичная скорость молекул газа;
3) средний квадрат скорости молекул газа.

5. Если средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул идеального газа увеличилась в два раза, то как изменилась температура газа?

1) увеличилась в 4 раза;
2) осталась неизменной;
3) увеличилась в 2 раза;
4) уменьшилась в 2 раза.

6. Как изменилась средняя квадратичная скорость молекул идеального газа, если его температура увеличилась в 4 раза?

1) уменьшилась в 2 раза;
2) уменьшилась в 4 раза;
3) осталась неизменной;
4) увеличилась в 2 раза.

7. Из закрытого сосуда выпустили половину находящегося в нем газа, после этого температуру газа увеличили в 2 раза. Как изменилось давление газа?

1) увеличилось в 2 раза;
2) уменьшилось в 2 раза;
3) не изменилось;
4) увеличилось в 4 раза;
5) уменьшилось в 2 раза.

I начало термодинамики

1. Идеальный газ получил количество теплоты Q, выполнил работу A, в результате чего его внутренняя энергия изменилась от значения U_1 до значения U_2. Каким соотношением связаны эти величины?

1) $Q = U_1 - U_2 + A$;
3) $Q = U_2 - U_1 + A$;
2) $A = U_1 + U_2 + Q$;
4) $Q = U_2 - U_1 - A$.

2. Идеальный газ расширяется при постоянном давлении $p = 1000$ Па от объема 0,01 м^3 до объема 0,04 м^3. Чему равна величина работы, совершенной газом в этом процессе?

3. Что такое число степеней свободы системы материальных точек?

1) количество материальных точек в системе;
2) размерность пространства, в котором движется система материальных точек;
3) число независимых параметров, однозначно определяющих положение системы в пространстве;
4) количество параметров, определяющих объем системы.

4. Чему равно число степеней свободы абсолютно твердого тела?

5. Средняя кинетическая энергия молекулы определяется формулой

$$W = \frac{i}{2} kT ,$$

где i – число степеней свободы молекулы. Чему равно i для двухатомной молекулы с упругой связью между атомами?

6. Сколько степеней свободы имеют: материальная точка, движущаяся в плоскости; две материальные точки, жестко связанные между собой, движущиеся по плоскости.

7. В одном сосуде находится 1 моль одноатомного газа, в другом – 1 моль трехатомного газа с жесткой связью. Температуры газов одинаковые. Во сколько раз внутренняя энергия второго газа больше, чем первого?

Изопроцессы. Адиабатный процесс

1. В левом столбце записаны названия изопроцессов, в правом − связь параметров газа. Для каждого процесса из левого столбца выбрать соответствующий закон из правого столбца. Записать номера выбранных таким образом законов, не разделяя их запятой.

изотермический	1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$;
изохорный	2) $pV = \text{const}$;
изобарный	3) $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$.

2. Идеальный газ изобарно расширяется. Объем газа увеличился вдвое. Как изменилась внутренняя энергия газа?

1) не изменилась;
2) увеличилась в 2 раза;
3) уменьшилась в 2 раза;
4) увеличилась в 4 раз.

3. Адиабатный процесс – это процесс, в котором:

1) температура не изменяется;
2) температура и объем не изменяются;
3) отсутствует теплообмен газа с окружающей средой;
4) внутренняя энергия газа остается постоянной;
5) работа газа равна нулю.

4. Если при изобарном расширении идеального газа его температура увеличилась в 4 раза, то во сколько раз увеличился объем газа?

5. Если при изохорном нагревании газа его давление увеличилось в 4 раза, то во сколько раз увеличилась внутренняя энергия газа?

6. При изотермическом сжатии идеального газа его объем уменьшился в 2 раза. Как при этом изменилась внутренняя энергия газа?

1) увеличилась в 2 раза;
2) увеличилась в 4 раза;
3) уменьшилась в 2 раза;
4) не изменилась.

7. Уравнение Пуассона для адиабатного процесса имеет вид

$$pV^{\gamma} = \mathrm{const}.$$

Какая величина в этом соотношении обозначена буквой γ?

1) число степеней свободы молекул газа;
2) число молей газа;
3) отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объеме;
4) отношение начальной температуры газа к температуре после адиабатного расширения.

Теплоемкость газа. Порядок выполнения работы

1. Пусть Q – количество теплоты, полученное одним молем идеального газа, T – температура газа. Какое из написанных ниже выражений определяет мольную теплоемкость газа?

1) $\dfrac{Q}{T}$; 2) $\dfrac{Q}{\Delta T}$; 3) QT; 4) $Q \cdot \Delta T$.

2. Если мольная теплоемкость газа при постоянном объеме равна C_V, то чему равна мольная теплоемкость этого газа при постоянном давлении?

3. Отношение теплоемкости идеального газа при постоянном давлении к теплоемкости этого газа при постоянном объеме называется показателем адиабаты. Найти теоретическое значение этой величины для одноатомного газа.

4. Идеальный газ получает количество теплоты Q при изотермическом процессе. Какова теплоемкость газа при этом процессе?

5. Согласно классической теории теплоемкость газа не зависит от температуры. Зависит ли она от давления?

6. Какие из перечисленных ниже величин измеряются в данной лабораторной работе?

1) V; 3) p; 5) h_1; 7) h_2;
2) T; 4) C_V; 6) C_p; 8) Q.

7. Какие из перечисленных ниже величин вычисляются в данной работе?

1) p; 3) h; 5) T; 7) Q;
2) C_V; 4) C_p / C_V; 6) V; 8) C_p.

2. Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

I уровень

1. Сформулируйте I начало термодинамики, объясните его физический смысл. Запишите I начало термодинамики для изопроцессов и для адиабатного процесса.

2. Что называется теплоемкостью? Что такое мольная и удельная теплоемкости и какова связь между ними?

3. Объясните физический смысл универсальной газовой постоянной.

4. Получите выражения мольных теплоемкостей для каждого изопроцесса и для адиабатного процесса.

5. Получите выражения работы при расширении газа для каждого изопроцесса и для адиабатного процесса.

II уровень

1. Какой процесс является адиабатным? Найти уравнение адиабаты. Сравнить адиабату с изотермой на pV-диаграмме.

2. Объясните, что такое число степеней свободы молекул газа. Почему одноатомная, двухатомная и многоатомная молекулы имеют различное число степеней свободы? Найдите значения величин C_p, C_V и их отношения по классической теории теплоемкости для одноатомного, двухатомного и многоатомного газа.

3. Получите выражение, свидетельствующее о физическом смысле универсальной газовой постоянной.

III уровень

1. Выведите расчетную формулу для определения величины C_p/C_V по способу Клемана и Дезорма.

2. На плоскости pV отметьте состояния воздуха в баллоне в ходе эксперимента: начальное состояние и состояния, характеризуемые параметрами (1), (2), (3). Изобразите на pV-диаграмме процессы, происходящие с воздухом в баллоне. Покажите линии процессов при полной теплоизоляции стенок сосуда.

Лабораторная работа 3.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ (ВЯЗКОСТИ) ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ СТОКСА

Основные понятия, определения, формулы явлений переноса

1. Равновесным состоянием системы называется состояние, в котором все термодинамические параметры, характеризующие систему, имеют определенные значения и остаются постоянными при неизменных внешних условиях.

2. Нарушение равновесия в термодинамической системе может быть вызвано различными воздействиями: нагреванием различных частей системы до разных температур, созданием разных давлений (плотностей) в различных частях системы, приданием некоторым частям системы определенных скоростей дрейфа и т. д. Неравновесные процессы, которые в таких случаях приводят систему в равновесие, называются *процессами переноса,* а именно: процесс переноса теплоты из одной части системы в другую, называется *теплопроводностью;* процесс переноса молекул называется *диффузией;* процесс переноса скорости (или импульса) направленного движения (дрейфа) частей системы − *внутренним трением или вязкостью.*

Эти процессы происходят благодаря хаотическому тепловому движению молекул вещества.

3. Количество теплоты q, проходящее в единицу времени через площадку площадью S, перпендикулярную направлению переноса теплоты, называется *потоком теплоты.* По *закону теплопроводности Фурье*

$$q = -\kappa \frac{dT}{dz} S \,,$$

где κ – коэффициент теплопроводности:

$$\kappa = \frac{1}{3} \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle c_V \rho \,,$$

где $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость теплового движения молекул газа или жидкости; $\langle \lambda \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул; c_V – удельная теплоемкость вещества при изохорном процессе, ρ – плотность вещества).

Величина $\frac{dT}{dz}$, показывающая изменение температуры слоев вещества на единицу расстояния между ними, называется *градиентом температуры.*

4. *Средняя арифметическая скорость (средняя скорость) теплового (хаотического) движения молекул* равна:

$$\langle \upsilon \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 1,6\sqrt{\frac{RT}{\mu}}.$$

5. *Средней длиной свободного пробега молекул* $\langle \lambda \rangle$ называется среднее расстояние, которое проходит молекула, двигаясь хаотически, между двумя последовательными соударениями. Эта величина зависит от параметров состояния газа следующим образом:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}p\pi d^2},$$

где p – давление газа;

d – эффективный диаметр молекулы.

6. *Диффузией* называется выравнивание концентрации молекул определенного сорта в смеси нескольких разных газов (в частном случае выравнивание концентрации однородного газа).

В процессе диффузии *поток массы i-го компонента,* представляющий собой массу молекул, переносимых в единицу времени через перпендикулярную площадку площадью *S*, определяется *законом Фика:*

$$M_i = -D\frac{d\rho_i}{dz}S,$$

Коэффициент диффузии *D:*

$$D = \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle,$$

где $\frac{d\rho_i}{dt}$ – градиент плотности *i*-го компонента смеси.

7. Трение между частями сплошной среды (жидкости, газа), движущимися с различными скоростями *u*, называется *внутренним трением или вязкостью.* Эта сила трения ведет к изменению импульса слоев так, что поток импульса *P*, т. е. импульс, переносимый от одного слоя к соседнему за единицу времени через площадку площадью *S, по закону Ньютона для внутреннего трения*

$$P = -\eta\frac{du}{dz}S,$$

где коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{1}{3}\langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle \rho,$$

где $\frac{du}{dz}$ – градиент скорости дрейфа слоев.

Рассмотрим подробнее явление внутреннего трения (вязкости) жидкости. Пусть два слоя жидкости *A* и *B* (рисунок 1) движутся параллельно друг другу со скоростями u_1 и u_2 соответственно. Каждая молекула каждого слоя обладает скоростью теплового движения, среднее значение которой $\langle \upsilon \rangle$, и скоростью направленного (упорядоченного) движения данного слоя, которая обычно называется скоростью дрейфа. Благодаря тепловому движению молекулы из слоя *B* переходят в слой *A* и «переносят» в этот слой импульсы $m_0\vec{u}_2$ своего упорядоченного движения. То же самое происходит с молекулами, переходящими из *A* в *B*. Если $u_2 < u_1$, то молекулы из слоя *B* при столкновениях с молекулами слоя *A* увеличивают скорость своего упорядоченного движения, а молекулы из слоя *A* – уменьшают ее. В результате скорость дрейфа слоя, имеющего большую скорость, уменьшается (слоя *A*), а имеющего меньшую первоначальную скорость − увеличивается. Макроскопически это означает возникновение сил трения между соприкасающимися слоями, направленных по касательной к поверхности соприкосновения. Если нет внешних сил, поддерживающих различные скорости слоев, то с течением времени скорости слоев выравниваются и силы трения между ними исчезают.

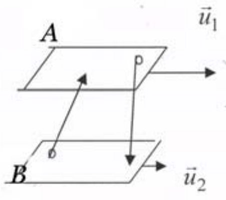


Рисунок 1

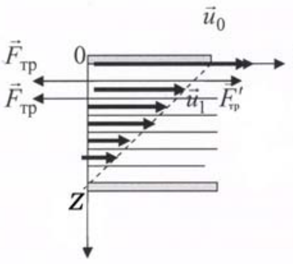


Рисунок 2

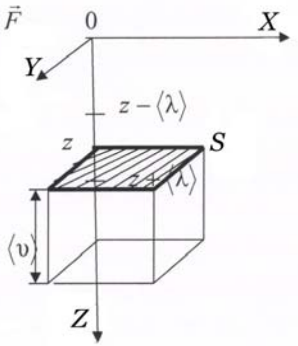


Рисунок 3

Для определения величины силы трения между слоями жидкости, которая носит название силы внутреннего трения, рассмотрим следующий опыт: в жидкость погружены две параллельные друг другу пластины (рисунок 2), расстояние d между которыми значительно меньше линейных размеров пластин. Пусть нижняя пластина неподвижна (закреплена), верхняя приводится в движение относительно нижней со скоростью u_0. Опыт показывает, что для перемещения верхней пластины с постоянной скоростью $\vec{u}_0$ на нее необходимо действовать постоянной внешней силой $\vec{F}$. Так как в этом случае пластина не получает ускорения, то действие этой внешней силы на верхнюю пластину уравновешивается равной ей по величине и противоположно направленной силой − силой трения $\vec{F}_{тр}$. Представим, что среда между пластинами разбита на тонкие параллельные им слои. Слой, прилегающий к верхней пластине (нулевой слой), прилипает к ней и движется со скоростью $\vec{u}_0$. На него действует внешняя сила $\vec{F}$ и сила трения со стороны следующего

(первого) слоя $\vec{F}_{тр} = -\vec{F}$. Первый слой движется с некоторой постоянной скоростью $u_1 < u_0$; на него действует со стороны нулевого слоя сила трения $\vec{F}'_{тр}$, которая по третьему закону Ньютона равна противоположна силе $\vec{F}_{тр}$ ($\vec{F}'_{тр} = -\vec{F}_{тр}$) и приводит этот слой в движение и т. д. Каждый слой вплоть до слоя, прилегающего к нижней неподвижной пластине, движется с определенной постоянной скоростью при действии на него двух равных по величине и противоположно направленных сил трения со стороны двух окружающих слоев. Ньютон опытным путем установил, что величину силы $\vec{F}_{тр}$ и равной ей силы $\vec{F}$ можно вычислить по формуле

$$F_{тр} = \eta S \frac{u_0}{d}, \qquad (1)$$

где S – площадь пластины; η – коэффициент пропорциональности, зависящий от природы жидкости и ее состояния (например, температуры), называемый *коэффициентом внутреннего трения, или вязкости (динамическая вязкость)*.

Отношение $\frac{u_0}{d}$ означает изменение относительной скорости слоев жидкости на единичном расстоянии между ними в направлении, перпендикулярном их движению. В более общем случае это отношение должно быть заменено на величину $\frac{du}{dz}$, называемую *градиентом модуля скорости,* имеющим тот же физический смысл для каждой координаты z. Заменив в формуле (1) отношение $\frac{u_0}{d}$ на градиент модуля скорости, получим окончательно *закон вязкости Ньютона:*

$$F_{тр} = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S. \qquad (2)$$

Единицей измерения коэффициента вязкости (динамической вязкости) в СИ служит такая (динамическая) вязкость, при которой градиент скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, приводит к возникновению силы внутреннего трения в 1 Н на 1м^2 поверхности касания слоев. Эта единица называется паскаль-секундой и обозначается Па·с.

В СГС-системе единицей вязкости является пуаз (П). Между пуазом и паскаль-секундой имеется соотношение:

$$1 \text{ Па·с} = 10 \text{ П}.$$

На основании второго закона Ньютона сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, с которой слой жидкости действует на соседний слой, равна изменению импульса слоя за единицу времени:

$$\vec{F}_{\text{тр}}\Delta t = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 . \qquad (3)$$

С учетом формул (2) и (3) получим:

$$P = -\eta \frac{du}{dz} S , \qquad (4)$$

где P – проекция на ось Z импульса, переданного от одного слоя другому за единицу времени.

Знак «–» показывает, что импульс переходит от слоя, движущегося с большей скоростью, к слою с меньшей скоростью. Величина P называется *потоком импульса через площадку S.*

Рассмотрим явление внутреннего трения с молекулярно-кинетической точки зрения. Пусть слои жидкости движутся вдоль оси OX с различными скоростями дрейфа $\vec{u}$, причем величина этой скорости зависит от координаты z данного слоя, т. е. $\vec{u}(z)$ (рисунок 3). В таком случае импульс направленного движения слоя $\vec{P}$ также зависит от z. Выравнивание величины P происходит вследствие перехода молекул из одного слоя в другой при их хаотическом движении. Подсчитаем количество молекул, переходящих через площадку площадью S, расположенную перпендикулярно оси OZ при координате z. Концентрация n молекул жидкости с двух сторон площадки одинакова; количества молекул, переходящих через площадку S в положительном и отрицательном направлениях оси OZ за определенный промежуток времени, равны друг другу. За единицу времени через площадку в одном указанном направлении

переходят молекулы, содержащиеся в объеме параллелепипеда с основанием S, высотой $\langle \upsilon \rangle$ ($\langle \upsilon \rangle$ – средняя скорость хаотического движения молекул) и движущиеся в данном направлении оси OZ. При хаотическом движении равновероятно движение вдоль положительного и отрицательного направлений осей OX, OY, OZ. Поэтому вдоль выбранного направления оси OZ движется $^1/_6$ часть молекул, находящихся в указанном параллелепипеде:

$$N = \frac{1}{6} n \langle \upsilon \rangle S . \qquad (5)$$

Если считать, что последнее столкновение молекул перед переходом ими площадки S произошло в среднем на расстоянии, равном средней длине свободного пробега $\langle \lambda \rangle$, то каждая переходящая площадку в положительном направлении оси OZ молекула переносит импульс направленного движения слоя с координатой $z - \langle \lambda \rangle$, а в противоположном направлении − импульс слоя с координатой $z + \langle \lambda \rangle$, т. е. $p(z - \langle \lambda \rangle)$ и $p(z + \langle \lambda \rangle)$ соответственно. Импульс P, перенесенный в целом за единицу времени через указанную площадку, называется *потоком импульса*. Он равен разности импульсов, перенесенных за единицу времени перешедшими молекулами в положительном и отрицательном направлениях оси OZ:

$$P = \frac{1}{6} n \langle \upsilon \rangle \left(p(z - \langle \lambda \rangle) - p(z + \langle \lambda \rangle) \right) S . \qquad (6)$$

Разность в скобках есть изменение импульса молекулы со знаком «–». Ее можно заменить на дифференциал и записать с помощью производной $\frac{dp}{dz}$:

$$p(z - \langle \lambda \rangle) - p(z + \langle \lambda \rangle) = -\frac{dp}{dz} \cdot 2 \langle \lambda \rangle .$$

Тогда из выражения (6) получим уравнение переноса потока импульса:

$$P = -\frac{1}{3} n \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle \frac{dp}{dz} S . \tag{7}$$

Подставляя в уравнение (7) выражение величины импульса молекулы $p = m_0 u$ и учитывая, что плотность жидкости (газа) $\rho = m_0 n$, получим окончательно поток импульса в виде:

$$P = -\frac{1}{3} n \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle \rho \frac{du}{dz} S . \tag{8}$$

Сравнивая формулу (8) и эмпирическое уравнение (4), получим выражение для коэффициента вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3} \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle \rho . \tag{9}$$

Описание лабораторной установки и хода выполнения лабораторной работы

В данной лабораторной работе для определения коэффициента вязкости жидкости используется метод Стокса, основанный на измерении скорости падения в жидкости шарика малых размеров.

На шарик, опущенный в вязкую жидкость, действуют три силы (рисунок 4): сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз; выталкивающая сила (сила Архимеда) $\vec{F}_A$, направленная вертикально вверх и равная

$$F_A = \rho g V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g , \tag{10}$$

где ρ – плотность жидкости;

V – объем шарика;

r – радиус шарика.

Сила сопротивления со стороны вязкой жидкости, направленная против движения шарика, т. е. вверх, величина которой определяется по формуле Стокса:

$$F_C = 6\pi r \eta \upsilon , \tag{11}$$

где η – коэффициент вязкости;

υ – скорость шарика.

Под действием указанных трех сил шарик вначале движется ускоренно. Согласно формуле (11), с ростом величины скорости шарика растет также величина силы сопротивления F_C. В некоторый момент времени векторная сумма сил становится равной нулю (величина силы сопротивления равна разности силы тяжести и силы Архимеда), и дальнейшее движение шарика будет происходить с постоянной скоростью, удовлетворяющей векторному равенству:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_C = 0 .$$

Спроектировав последнее равенство на ось OY, выбранную по направлению движения шарика, будем иметь:

$$mg - F_A - F_C = 0, \qquad F_C = mg - F_A . \tag{12}$$

Подставляя в формулы (12) выражения (11) и (10), получим:

$$6\pi r \eta \upsilon = mg - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g . \tag{13}$$

Выразим из соотношения (13) коэффициент вязкости жидкости, заменяя радиус шарика на половину его диаметра ($r = \frac{D}{2}$):

$$\eta = \frac{(6m - \pi D^3 \rho) g}{18 \pi D \upsilon} . \tag{14}$$

Для определения коэффициента вязкости жидкости по формуле (14) необходимо знать скорость установившегося равномерного движения шарика. Ее можно рассчитать по формуле $\upsilon = \frac{l}{t}$, если измерить время t, за которое шарик проходит определенное расстояние l, двигаясь равномерно. Тогда окончательная расчетная формула для коэффициента вязкости принимает следующий вид:

$$\eta = \frac{(6m - \pi D^3 \rho) g t}{18 \pi D l} . \tag{15}$$

Лабораторная установка состоит из стеклянного цилиндра (рисунок 4), заполненного глицерином. Вдоль цилиндра могут перемещаться резиновые кольца, которые фиксируют заданное расстояние. В набор входят несколько одинаковых шариков (равной массы и равного диаметра), линейка, секундомер.

ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Уровень I

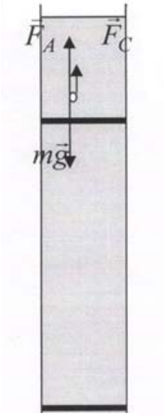


Рисунок 4

1. Выставить метки на расстоянии друг от друга, указанном преподавателем (около 0,5 м, рисунок 4). Измерить это расстояние 5 раз по различным образующим цилиндра, записать результаты измерений в таблицу.

2. Опустить шарик известного диаметра в жидкость и измерить время его движения между метками, записать в таблицу. Измерения повторить 5 раз.

3. Рассчитать среднее значение расстояния $\langle l \rangle$ и среднюю абсолютную ошибку измерения этой величины $\langle \Delta l \rangle$, среднее значение времени движения $\langle t \rangle$ и среднюю абсолютную ошибку $\langle \Delta t \rangle$. Результаты записать в таблицу.

4. Вычислить по формуле (15) среднее значение коэффициента вязкости $\langle \eta \rangle$, подставляя в нее средние значения $\langle l \rangle$ и $\langle t \rangle$, а также значения массы и диаметра шарика, плотности жидкости, ускорения свободного падения и числа π, написанные на лабораторной установке.

5. Если считать, что ошибка определения коэффициента вязкости η обязана только неточным измерениям расстояния l, времени движения шарика t и неточным значениям постоянных g и π, то можно получить следующую формулу относительной ошибки определения величины η:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\eta}{\langle\eta\rangle} = \frac{\langle\Delta t\rangle}{\langle t\rangle} + \frac{\langle\Delta l\rangle}{\langle l\rangle} + \frac{mg\langle t\rangle}{3D\langle l\rangle\pi^2\eta}\Delta\pi + \frac{\Delta g}{g}, \qquad (16)$$

куда должны быть подставлены средние значения измеряемых величин l, t и средние абсолютные ошибки их измерений. Вычислить по формуле (16) относительную ошибку определения η, а затем, умножив ее на среднее значение $\langle\eta\rangle$, вычислить абсолютную ошибку $\Delta\eta$.

6. Записать окончательный результат в виде

$$\eta = \langle\eta\rangle \pm \Delta\eta .$$

Таблица

$D =$, $\rho =$, $m =$, $\pi =$, $g =$							
№ измерения	l, м	Δl, м	t, с	Δt, с	η, Па·с	$\frac{\Delta\eta}{\eta}$	$\Delta\eta$, Па·с
1 2 … 5							
Среднее значение							

Уровень II

1. Из формул для коэффициентов теплопроводности κ, вязкости η и диффузии D получить формулы связи между ними:

$$\eta = D\rho ; \qquad \kappa = \eta c_V ; \qquad D = \frac{\eta}{\rho}.$$

2. Рассчитать для данной жидкости величину $D = \frac{\eta}{\rho}$, которая носит название *кинетической вязкости (η – динамическая вязкость).* Найти коэффициент теплопроводности κ глицерина, зная, что его удельная теплоемкость равна $c_V = 2430$ Дж/кг·К.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Вопросы предварительного контроля (компьютерный допуск к выполнению лабораторной работы)

Основные понятия, определения, законы

1. В чем заключается причина возникновения явления внутреннего трения в газах и жидкостях?
   1) в движении различных слоев жидкости или газа с различными скоростями;
   2) в соприкосновении слоев жидкости или газа с различными плотностями;
   3) в соприкосновении слоев жидкости или газа с различными концентрациями молекул;
   4) в соприкосновении слоев жидкости или газа с различными температурами.

2. Как записывается закон Ньютона для силы вязкости?

1) $F_{TP} = \eta \left| \frac{dm}{dz} \right| S$; 3) $F_{TP} = \eta \left| \frac{dn}{dz} \right| S$;

2) $F_{TP} = \eta \left| \frac{du}{dz} \right| S$; 4) $F_{TP} = \eta \left| \frac{d\rho}{dz} \right| S$.

3. Формула для коэффициента вязкости?

1) $\eta = \langle \upsilon \rangle zm$; 3) $\eta = \frac{1}{3} \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle \rho$;

2) $\eta = \langle \upsilon \rangle \langle \lambda \rangle \rho$; 4) $\eta = \frac{1}{3} \langle \upsilon \rangle nm$.

4. В каких единицах измеряется вязкость (коэффициент вязкости η или динамическая вязкость)?

1) м/с; 3) Па (паскаль);
2) Н (ньютон); 4) Па·с (паскаль-секунда).

5. Какие силы действуют на шарик, движущийся в жидкости?
   1) сила трения, выталкивающая сила, сила тяжести;
   2) сила тяжести, сила упругости;
   3) сила выталкивающая, сила тяжести;
   4) сила трения, сила тяжести.

Вопросы по методике выполнения лабораторной работы

1. На чем основан метод Стокса определения вязкости жидкости в данной лабораторной работе?
   1) на измерении длины свободного пробега молекул жидкости;
   2) на определении скорости равномерного падения шарика в жидкости;
   3) на измерении температуры среды в разных точках;
   4) на измерении плотности среды в разных точках.

2. Какие из перечисленных ниже величин измеряются в данной работе?

1) l, t, ρ; 3) $\langle \lambda \rangle, \langle \rho \rangle$;

2) l, t; 4) $T, \langle \upsilon \rangle$.

3. Какие из перечисленных ниже величин вычисляются в данной лабораторной работе?

1) ρ; 3) V; 5) η; 7) $\langle \upsilon \rangle$.

2) T; 4) Q; 6) c_V;

2. Контрольные вопросы для защиты лабораторной работы

Уровень I

1. Записать закон Ньютона для силы вязкости и объяснить физический смысл величин, входящих в него.
2. Записать формулу для коэффициента вязкости, пояснить входящие в нее величины.
3. Как называется единица измерения (динамической) вязкости? Дать ее определение.

Уровень II

1. Рассмотреть причину возникновения сил вязкости. Получить формулу (4) для потока импульса.
2. Рассмотреть явление внутреннего трения с молекулярно-кинетической точки зрения. Получить уравнение переноса потока импульса (8) и формулу для определения коэффициента вязкости (9).
3. Рассмотрев движение шарика в жидкости, получить формулу (15) для расчета вязкости.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савельев, И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989, т. I.

2. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высшая школа, 1989.

3. Кембровский, Г. С. Приближенные вычисления и методы обработки результатов измерений. – Мн. : Университетское, 1990.

4. Ветрова, В. Т. Введение в лабораторный практикум по физике / В. Т. Ветрова, М. А. Лисенков. – Мн. : Ротапринт БИМСХ, 1981.

5. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М. : Наука, 1990.

6. Близнюк, И. Б. Лабораторный практикум по курсу общей физики / И. Б. Близнюк и [др.]. – Мн. : БГАТУ, 2004.

7. Быкова, С. Л. Механика. Учебно-методический комплекс по дисциплине «Физика» / С. Л. Быкова, И. Т. Неманова. – Мн. : БГАТУ, 2006.

8. Неманова, И. Т. Молекулярная физика. Термодинамика. Учебно-методический комплекс по дисциплине «Физика». – Мн. : БГАТУ, 2006.

Учебное издание

ФИЗИКА

Механика. Молекулярная физика

Лабораторный практикум

Составители:
Быкова Светлана Леонидовна,
Неманова Инесса Тимофеевна

Ответственный за выпуск В. Р. Соболь
Редактор Ю. П. Каминская
Компьютерная верстка Ю. П. Каминской

Подписано в печать 28.06.2010. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 4,90. Тираж 120 экз. Заказ 611.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
ЛИ № 02330/0552841 от 14.04.2010.
ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.
Пр-т Независимости, 99–2, 220023, Минск.