

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В РЕЛИКТОВОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ (НЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

А.П. Рябушко, д.ф.-м.н., профессор, Т.А. Жур, к.ф.-м.н., доцент

Экономика всех развитых стран в настоящее время связана в значительной мере с успехами в освоении космического пространства. Связь, метеопрогнозы, картография, разведка полезных ископаемых, служба безопасности самой Земли от космических пришельцев и многое другое на Земле успешно развивается благодаря информации, передаваемой искусственными спутниками Земли и различными программными космическими аппаратами и лабораториями, передвигающимися в гравитационном поле Солнечной системы (С.с.). Под космические исследования выделяются значительные средства, что существенно влияет на бюджет страны, его распределение в других сферах: здравоохранение, образование, АПК, наука, различные социальные программы.

В работах [1–4] рассмотрены различные модели сферически симметричного распределения плотности материи в шаре радиусом R , в центре которого находится сосредоточенная масса m (гравитирующий центр), и найдены соответствующие этим распределениям масс гравитационные поля и уравнения движения тел внутри шара в ньютоновском приближении (НП) и постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности (ОТО). Эти модели могут интерпретировать ситуацию в некоторых системах типа «сосредоточенная масса плюс окружающее ее материальное облако» и определять особенности движения тел внутри облака. Но они не отражают всех тонкостей распределения *реликтовой материи* (РМ) в С.с., т.е. материи, которая осталась (relict — остаточный, остаток) после образования Солнца и планет со спутниками.

Данная работа посвящена исследованию влияния *реликтового гравитационного поля* (РГП), порожденного РМ С.с., на движение малых по сравнению с планетами С.с. тел. Для этого следует: 1) прежде всего построить близкую к реальности модель распределения плотности РМ С.с.; 2) используя построенную модель, найти РГП; 3) в этом поле получить уравнения движения (УД) тел; 4) проинтегрировать эти УД; 5) выявить особенности (реликтовые эффекты) в движении тел; 6) дать числовые оценки предсказываемым эффектам в НП и ПНП ОТО.

В настоящей работе будут осуществлены три первых пункта намеченной программы исследований и только в НП ОТО. Попутно будет окончательно обосновано при использовании полученных УД утверждение: Pioneer anomaly является *реликтовым ускорением* (РУ) пробного тела в С.с. Предварительное обоснование этого утверждения содержится в [3].

1. Построение экспериментально обоснованной модели распределения плотности РМ в С.с. Согласно современным представлениям (см., например, [5–8]) С.с. является облаком неоднородной материи, заполняющей шар радиусом $R \approx (1,5 - 2) \cdot 10^5 \text{ а.е.}$ ($1 \text{ а.е.} \approx 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$ — астрономическая единица, равная среднему расстоянию Земли до Солнца), в центре которого находится Солнце. Далее располагаются девять планет (от 0,4 а.е. — Меркурий до 40 а.е. — Плутон), «плавающие» в газопылевой составляющей межпланетной среды. Кроме газопылевой среды, в С.с. находится, как это выяснилось в последние два десятка лет в связи с бурным прогрессом в области наблюдательной техники (см. обзор в монографии [6–8]), огромное количество порядка 10^{13} малых тел (комет, астероидов) диаметром от 1 км до 1000 км. Они образуют целые пояса и облака, в которых тела распределены с разной плотностью.

В близком к Солнцу *сферически-симметричном* слое от поверхности Солнца до 2 а.е. находится сравнительно небольшое количество малых тел, но зато эта область заполнена плазмой хромосферы и солнечной короны, плотность которых достаточно высока и, по оценкам специалистов [9–11], меняется от $10^{-8} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ в нижних слоях до $10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ в верхних слоях солнечной короны. Далее плотность короны и газопылевой составляющей падает и в окрестностях орбиты Земли оценивается $10^{-24} - 10^{-22} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Масса РМ в этом первом слое примерно равна 10^{29} г .

Следующий, второй, *сферически-симметричный* слой 2 а.е.- 6 а.е. замечателен тем, что в нем находится так называемый главный астероидный пояс и примерно $1,2 \cdot 10^7$ комет семейства Юпитера диаметром более 50-100 км, общая масса которых примерно равна $0,5m_3$ [12], [13] ($m_3 = 6 \cdot 10^{27} \text{ г}$ - масса Земли). Объем шарового слоя 2 а.е.- 6 а.е. примерно равен $3 \cdot 10^{42} \text{ см}^3$. Если массу этого шарового слоя разделить на его объем, то получим усредненную плотность РМ во втором слое: $\bar{\rho}_2 = 0,5m_3 / 3 \cdot 10^{42} \approx 10^{-15} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$.

Особого внимания заслуживает насыщенная малыми телами область околосолнечного пространства, находящаяся примерно от 30 а.е. до 60 а.е. от Солнца, которую называют транснептунным поясом или поясом Эджеверса-Койпера. Согласно наблюдениям и оценкам астрономов, число тел диаметром более 1 км в этом поясе имеет порядок 10^{10} [14], [15] или даже 10^{11} [16]. Общая масса тел транснептунного пояса оценивается учеными по-разному: от $0,25m_3$ [17], $0,42m_3$ [18] до $10m_3$ [19], [20] или даже больше.

В области от 45 а.е. до 10^3 а.е. согласно проведенным исследованиям [21] находится 10^{13} объектов, суммарная масса которых равна нескольким сотням масс Земли.

Несколько уплощенное почти *сферически симметричное* облако Хиллса находится на расстоянии порядка $10^3 \text{ а.е.} - (2-3) \cdot 10^4 \text{ а.е.}$ от Солнца, содержит огромное количество комет и астероидов с общей массой порядка $1600m_3$ [22], [23].

И, наконец, на периферии С.с. на расстояниях $(2-3) \cdot 10^4 \text{ а.е.} - 2 \cdot 10^5 \text{ а.е.}$ от Солнца находится *сферически симметричное* облако Оорта, которое содержит $10^{12} - 10^{13}$ комет и астероидов, общая масса которых равна $16m_3$ (см. [6-8, 24-26]).

Согласно сделанному обзору распределения РМ можно утверждать, что она в *среднем* в С.с. распределена сферически симметрично, но с разной плотностью ρ . Отсюда следует, что ρ является функцией расстояния r до центра С.с., т.е. $\rho = \rho(r)$. Кроме того, всю С.с. следует разделить не менее, чем на *четыре* сферических слоя: 0 а.е. - 1 а.е., 1 а.е. - 5 а.е., 5 а.е. - 1005 а.е., 1005 а.е. - $2 \cdot 10^5 \text{ а.е.}$, в каждом из которых характер изменения плотности РМ подчинен своей закономерности. Если ввести на плоскости условную прямоугольную декартовую систему координат $O r \rho$, то получим опорные экспериментальные точки $M_0(0, \rho_0)$, $M_1(r_1, \rho_1)$, $M_2(r_2, \rho_2)$, $M_3(r_3, \rho_3)$, $M_4(R, 0)$, через которые должна проходить кривая распределения плотностей РМ $\rho = \rho(r)$ (см. рисунок 1). Для параметров $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, r_1, r_2, r_3, R$ выбираем экспериментально обоснованные значения:

$$\rho_0 = 3 \cdot 10^{-11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \rho_1 = 10^{-24} - 10^{-22} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \rho_2 = 3 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \rho_3 = 3 \cdot 10^{-23} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad (1)$$

$$r_1 = 1 \text{ а.е.}, r_2 = 5 \text{ а.е.}, r_3 = 1005 \text{ а.е.}, R = 2 \cdot 10^5 \text{ а.е.} \quad (2)$$

Уравнение кривой распределения плотностей $\rho = \rho(r)$ неизвестно, но эту кривую мы можем аппроксимировать ломаной из четырех звеньев, вершины которой находятся в опорных точках $M_\alpha, \alpha = \overline{0,4}$ (рисунок 1). Таким образом, принимаем полигональную модель распределения плотности РМ из *четырёх* звеньев (в [3], [27] рассмотрена полигональная модель из *трех* звеньев и тем самым не учитывались облака Хиллса и Оорта). Тогда формулы для $\rho = \rho(r)$ в каждом слое имеют вид:

$$\rho = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) \frac{r}{r_1}, \quad 0 = r_0 < r \leq r_1; \quad (3)$$

$$\rho = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}, \quad r_1 \leq r \leq r_2; \quad (4)$$

$$\rho = \rho_2 + (\rho_3 - \rho_2) \frac{r - r_2}{r_3 - r_2}, \quad r_2 \leq r \leq r_3; \quad (5)$$

$$\rho = \rho_3 - \rho_3 \frac{r-r_3}{R-r_3} = \rho_3 \frac{R-r}{R-r_3}, \quad r_3 \leq r \leq r_4 = R; \quad (6)$$

$$\rho = 0, \quad R \leq r < +\infty. \quad (7)$$

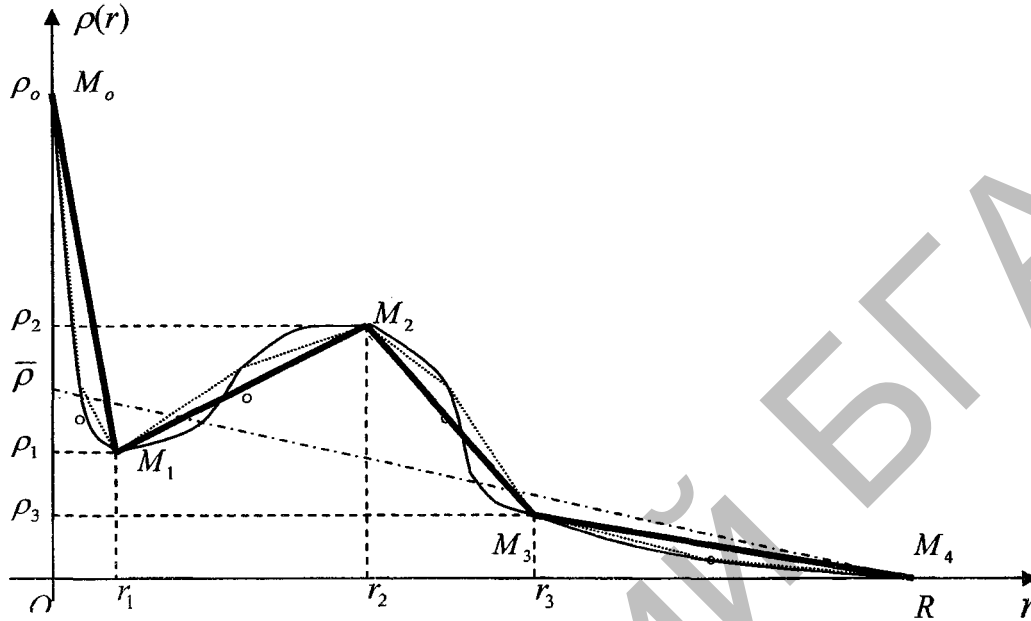


Рисунок 1

Схема качественного распределения плотности $\rho(r)$ реликтовой материи Солнечной системы согласно (3)-(7), (1), (2) (масштабы по осям не соблюдаются).

Сплошная тонкая гладкая линия изображает примерное поведение истинной плотности реликтовой материи. Эту линию можно аппроксимировать с любой степенью точности ломаной с нужным количеством звеньев n . Одна из таких возможных ломаных при $n=8$ изображена пунктирными отрезками. Штрихпунктирная линия изображает усредненное значение реликтовой материи в Солнечной системе.

2. Нахождение РГП и вывод УД пробного тела в С.с. В НП ОТО уравнения Эйнштейна с помощью аппроксимационной процедуры Эйнштейна-Инфельда сводятся в случае нашей задачи к одному уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^1{}^2} + \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^2{}^2} + \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^3{}^2} = 8\pi\gamma[m\delta(\vec{r}) + \rho(r)], \quad (8)$$

а три уравнения геодезической, которые являются УД пробного тела, имеют вид:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = 0, \quad (9)$$

где x^i — координаты точки M в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой находится в центре С.с.; $r = (x^1{}^2 + x^2{}^2 + x^3{}^2)^{1/2}$, $\vec{r} = x^i \vec{e}_i$ — радиус-вектор точки $M(x^i)$, \vec{e}_i — базисные векторы, $|\vec{e}_i| = 1$, $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$; $\delta(\vec{r})$ — трехмерная функция Дирака; $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$ — ньютоновская постоянная тяготения; t — ньютоновское время (более подробно см. [1], [28]).

С помощью стандартных методов решаем уравнение (8) (см., например, [29]), учитывая выражения для $\rho(r)$ в слоях (3)-(7), и находим выражения для функции g_{00} в каждом слое, которые не выписываем из-за их громоздкости. Эти выражения для g_{00} на гра-

ницах слоев гладко «сшиваются», т.е. g_{00} и $\frac{\partial g_{00}}{\partial x_i}$ на границах слоев являются, как и всюду, непрерывными функциями r .

Наконец, найденные выражения для g_{00} подставляем в (9) и приходим к точным ньютоновским УД пробного тела в слоях (3)-(7) С.с.. В векторной форме эти впервые выведенные УД имеют вид:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3} \vec{r} + \frac{1}{3} \pi \gamma \left(4\rho_0 - 3\rho_0 \frac{r}{r_1} + 3\rho_1 \frac{r}{r_1} \right) \vec{r} = 0, \quad 0 < r \leq r_1; \quad (10)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3} \vec{r} + \frac{1}{3} \pi \gamma \left[4\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} (3r - 4r_1) + \left(\rho_0 - \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} r_1 \right) \frac{r_1^3}{r^3} \right] \vec{r} = 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2; \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3} \vec{r} + \frac{1}{3} \pi \gamma \left\{ 4\rho_2 + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2} (3r - 4r_2) + \frac{1}{r^3} \left[(\rho_0 - \rho_1) r_1^3 + 4(\rho_1 - \rho_2) r_2^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} (r_1^4 - 4r_1 r_2^3 + 3r_2^4) + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2} r_2^4 \right] \right\} \vec{r} = 0, \quad r_2 \leq r \leq r_3; \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3} \vec{r} + \frac{1}{3} \pi \gamma \left\{ \left[(\rho_0 - \rho_1) r_1^3 + 4\rho_1 r_2^3 + 4\rho_2 (r_3^3 - r_2^3) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} (r_1^4 - 4r_1 r_2^3 + 3r_2^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2} (r_2^4 - 4r_2 r_3^3 + 3r_3^4) + \frac{\rho_3 r_3^3}{R - r_3} (3r_3 - 4R) \right] \frac{1}{r^3} + \frac{\rho_3}{R - r_3} (4R - 3r) \right\} \vec{r} = 0, \quad r_3 \leq r \leq R; \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3} \vec{r} + \frac{1}{3} \pi \gamma \left\{ (\rho_0 - \rho_1) r_1^3 + 4\rho_1 r_2^3 + 4\rho_2 (r_3^3 - r_2^3) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} (r_1^4 - 4r_1 r_2^3 + 3r_2^4) + \right. \\ \left. + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2} (r_2^4 - 4r_2 r_3^3 + 3r_3^4) + \frac{\rho_3}{R - r_3} (R^4 - 4R r_3^3 + 3r_3^4) \right\} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad R \leq r < +\infty. \quad (14)$$

Следствием непрерывности $\frac{\partial g_{00}}{\partial x_i}$ на границах слоев является непрерывность ускорения $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ во всем интервале $0 < r < +\infty$, т.е. УД (10)-(14) также непрерывно «сшиваются» на границах слоев.

3. Простейшие следствия из УД (10)-(14). Рассмотрим внимательнее структуру УД (10)-(14).

Прежде всего при экспериментально обоснованных для С.с. значениях восьми параметров (1), (2) коэффициенты в (10)-(14), зависящие от РМ и стоящие перед \vec{r} , всегда положительны, что проверяется прямой подстановкой значений (1), (2) в (10)-(14). Отсюда немедленно следует, что в любой точке С.с. на пробное тело действует дополнительное ускорение, названное нами *реликтовым ускорением* (РУ), которое строго направлено на Солнце, как и основное ускорение $\vec{a}_c = -\gamma m \vec{r} / r^3$, создаваемое гравитационным полем Солнца.

Нас особо будет интересовать величина РУ в третьем слое $r_2 = 5a.e. \leq r \leq 1005a.e. = r_3$, с которым связана так называемая проблема Pioneer anomaly и суть которой состоит в следующем. С целью исследования межпланетного пространства С.с. в 1972 г. и 1973 г. были запущены космические аппараты (КА) Pioneer 10 и Pioneer 11. После тщательной обработки информации, переданной этими КА при их движении к Юпитеру, Сатурну и далее в открытый космос, выяснилось, что на КА, кроме ускорений, вызываемых гравитационными полями Солнца и планет со спутниками, воздейст-

вовало некоторое дополнительное неизвестной природы ускорение, которое было *строго* направлено на Солнце и в диапазоне расстояний от Солнца 20 а.е.-70 а.е. по модулю равнялось величине

$$a_p = (8,74 \pm 1,33) \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2} \quad (15)$$

(см. обзорные работы [30], [31]). Возникла проблема: выяснить природу, постоянный источник этого дополнительного ускорения. Эта проблема получила название «Pioneer anomaly» и для ее решения было выдвинуто и обсуждено на протяжении десятков лет множество идей и гипотез, опубликованы сотни работ. Но специалисты в этой области до сих пор считают, что проблема не получила своего разрешения.

В настоящей работе выдвигается и обосновывается гипотеза: Pioneer anomaly является РУ, порожденным РГП, которое в свою очередь возникает в С.с. благодаря наличию РМ, причем основную роль играет не газопылевая составляющая РМ, а совокупное гравитационное поле множества малых тел С.с. (комет, астероидов семейства Юпитера, объектов пояса Эджеверса-Койпера, облаков Хиллса и Оорта).

Для обоснования этой гипотезы в НП ОТО все подготовлено. Как отмечено выше, РУ пробного тела в любом слое *строго* направлено на Солнце. Остается вычислить модуль РУ в третьем слое, выражение для которого находим из (12):

$$a_3 = |\vec{a}_3| = \frac{1}{3} \pi \gamma \left\{ 4\rho_2 r + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2} (3r - 4r_2)r + \frac{1}{r^2} [(\rho_0 - \rho_1)r_1^3 + 4(\rho_1 - \rho_2)r_2^3 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} (r_1^4 - 4r_1 r_2^3 + 3r_2^4) + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2} r_2^4] \right\}. \quad (16)$$

Подставляя в (16) экспериментально обоснованные значения параметров (1), (2), в диапазоне $20 \text{ а.е.} \leq r \leq 70 \text{ а.е.}$ легко находим:

$$\begin{aligned} a_3(20 \text{ а.е.}) &= 10,34 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_3(30 \text{ а.е.}) &= 7,20 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_3(40 \text{ а.е.}) &= 6,85 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_3(50 \text{ а.е.}) &= 7,41 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_3(60 \text{ а.е.}) &= 8,24 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_3(70 \text{ а.е.}) &= 9,01 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Как видим, значения (17) для a_3 практически повторяют значения (15) для a_p и тем самым есть основания считать, что наше предположение из разряда гипотез переходит в разряд научно обоснованных истин: $a_p = a_3 = \text{РУ}$ пробного тела в С.с.

Отметим также, что структура a_3 (16) указывает на ничтожное влияние четвертой зоны, где находятся облака Хиллса и Оорта, на величину a_3 , т.к. последний член в (16) для r в диапазоне $r_2 \leq r \leq r_3$ имеет наибольшее значение $\approx 8 \cdot 10^{-12} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$ при параметрах (1), (2). Отсюда следует, что облака Хиллса и Оорта непричастны к Pioneer anomaly, но создают РУ в зоне $r_3 \leq r \leq R$. Поэтому вывод работы [3], основанный на полигональной *трехзвенной* модели и утверждающий, что a_p является РУ пробного тела в С.с., можно также считать обоснованным уже в 2007 году.

Будет интересным привести прогнозные значения РУ пробных тел и планет в других диапазонах расстояний r до Солнца.

Пользуясь (10) и (1), (2) находим РУ: в окрестностях орбиты Меркурия $a_1(0,4 \text{ а.е.}) = 3,52 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$; в окрестностях орбиты Венеры $a_1(0,7 \text{ а.е.}) = 4,18 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$; в окрестностях орбиты Земли $a_1(1,0 \text{ а.е.}) = 3,14 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$. Далее из (11) и (1), (2) находим РУ: в окрестностях орбиты Марса $a_2(1,5 \text{ а.е.}) = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$; в окрестностях орбиты Юпитера $a_2(5,0 \text{ а.е.}) = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$. На ближней к Солнцу границе облака Хиллса, согласно (12) и (1), (2) РУ $a_3(10^3 \text{ а.е.}) = 0,33 \cdot 10^{-6} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$; на интервале $1850 \leq r \leq 2100 \text{ а.е.}$ РУ меняется от $9,82 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$ до $7,62 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$, находясь в диапазоне (15); на дальней границе согласно (13) и (1), (2) РУ $a_4(3 \cdot 10^4 \text{ а.е.}) = 0,36 \cdot 10^{-9} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$. Наконец, на границе С.с.

РУ $a_4(2 \cdot 10^5 a.e.) = 0,147 \cdot 10^{-10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$ (воспользовались (14) при $r=R$ и (1), (2)). На рисунке 2 дан график РУ.

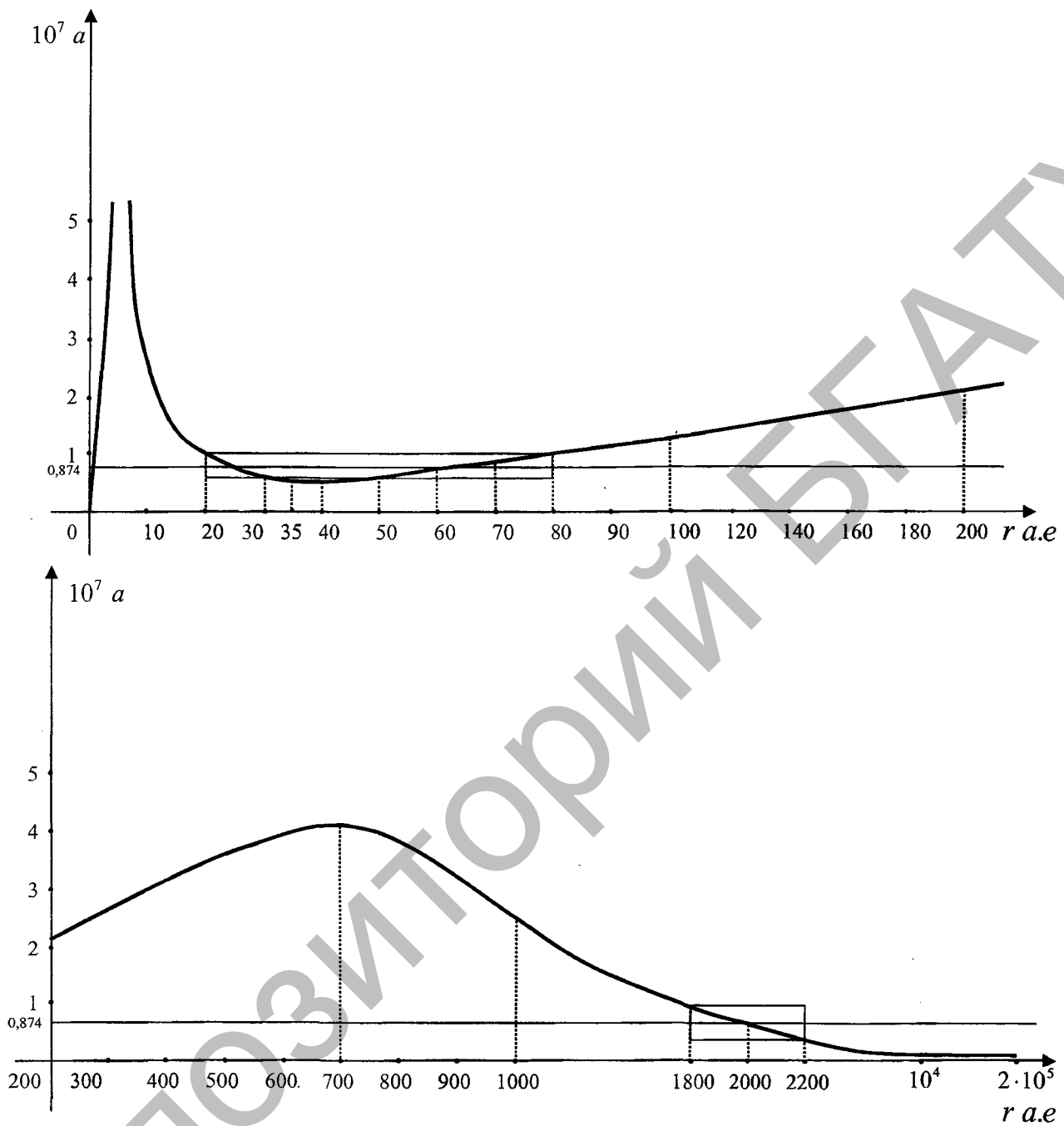


Рисунок 2

График поведения РУ a в интервале $0 < r < R = 2 \cdot 10^5 a.e.$ (масштаб по оси Or — меняющийся) для параметров (1), (2). В интервалах $0 < r < 1$, $100 < r < 1005$ график выпуклый, в интервалах $1 < r < 100$, $1005 < r < 2 \cdot 10^5$ график вогнутый. В точках $r = 1$, $r = 100$, $r = 1005$ имеем точки перегиба. В точках $r = \frac{2}{3}$, $r = 700$ локальный максимум, в точке $r \approx 35$ - локальный минимум. В интервалах $20 a.e. < r < 80 a.e.$ и $1800 a.e. < r < 2200 a.e.$ РУ $a \approx a_p = (8,74 \pm 1,33) \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$.

Для сравнения выпишем значения ускорений, которые испытывают пробные тела и планеты под воздействием гравитационного поля Солнца, т.е. укажем значения

$a_c = |\vec{a}_c| = \gamma m / r^2$ на разных расстояниях от Солнца. Имеем:

$$\begin{aligned} a_c(0,4a.e.) &= 3,69 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_c(0,7a.e.) &= 1,21 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_c(1a.e.) &= 0,59 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_c(5a.e.) &= 2,38 \cdot 10^{-2} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_c(20a.e.) &= 1,48 \cdot 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_c(40a.e.) &= 0,37 \cdot 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_c(10^3 a.e.) &= 0,59 \cdot 10^{-6} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_c(3 \cdot 10^4 a.e.) &= 0,66 \cdot 10^{-9} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_c(2 \cdot 10^5 a.e.) &= 0,148 \cdot 10^{-10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) следует, что значения РУ a_1, a_2 малы по сравнению с a_c на тех же расстояниях, но вдали от Солнца в диапазоне $10^3 a.e. \leq r \leq 2 \cdot 10^5 a.e.$ РУ a_3, a_4 практически сравниваются с a_c , что должно существенно влиять на формирование орбит и орбитальных скоростей малых тел в этом диапазоне.

Отметим, что на основе построенной модели распределения плотности РМ в С.с. (3)–(7) можно получать оценки величин РУ, еще лучше согласующиеся с (15), чем (17), варьируя параметры (1), (2), не нарушая наблюдательные данные. Так, например, взяв значения для $\rho_0 = 2,8 \cdot 10^{-11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $\rho_2 = 3,4 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ (остальные параметры в (1), (2) не меняем) вместо (17) получаем таблицу значений для a_3 :

$$\begin{aligned} a_3(20a.e.) &= 10,12 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_3(30a.e.) &= 7,47 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_3(40a.e.) &= 7,41 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_3(50a.e.) &= 8,08 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_3(60a.e.) &= 9,04 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_3(70a.e.) &= 10,07 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \end{aligned} \quad (19)$$

которые еще лучше согласуются с экспериментальными значениями (15).

В заключение заметим, что наше исходное предположение (3)–(7) о полигональном законе распределения плотности РМ является хорошим, но все-таки приближением к истине. Не испытывая принципиальных затруднений, это приближение можно неограниченно улучшать, вписывая в истинную кривую распределения плотности РМ $\rho = \rho(r)$ ломаную не из четырех, а из пяти, шести и т.д. звеньев (см. рисунок 1). Кроме того, дальнейшее приближение к истине может происходить по пути экспериментального уточнения значений параметров ρ_i, r_i , замены сферически симметричного распределения РМ, например, на осесимметричное, эллипсоидальное и т.д.

1. Рябушко А.П., Жур Т.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2006. № 3.- С. 64-71.
2. Рябушко А.П., Жур Т.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2007. № 2.- С. 86-90.
3. Рябушко А.П., Жур Т.А. // Сб. научн. статей 2-й Межд. н.-практ. конф. «Научно-инновационная деятельность и предпринимательство в АПК: проблемы эффективности и управления». -Мн., 2007. Часть 1.-С. 95-102.
4. Рябушко А.П., Жур Т.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2009. № 1.
5. Маров М.Я. Планеты Солнечной системы. М., 1986.
6. Ипатов С.И. Миграция небесных тел в Солнечной системе. М., 2000.
7. Кононович Э.В., Мороз В.И. Общий курс астрономии. М., 2004.
8. Стражев В.И. К тайнам Вселенной. Мн., 2006.
9. Всехсвятский С.К. Космогония Солнечной системы. В сб. «Проблемы современной космогонии». М., 1972.
10. Никольский Г.М. Солнечная система и межпланетное пространство. М., 1975.
11. Лившиц М.А. Солнечная корона. Маленькая Энциклопедия «Физика космоса». -М., 1976.
12. Bailey M.E. // Celest.Mech. and Dyn.Astron. 1992. V. 54. № 1. P. 49-61.
13. Levison H.F., Duncan M.J. // Icarus. 1997. V. 127. P. 13-23.
14. Duncan M.J., Levison H.F., Budd S.M. // Astron.J. 1995. V. 110. P. 3073-3081.
15. Davis D., Farinella P., Marzari F. // Abstracts of 28th Lunar and Planetary Science Conference. Houston, USA. 1997.
16. Jewitt D. // Annu.Rev.Earth.Planet.Sci. 1999. V. 27. P. 287-312.
17. Jewitt D., Lun J., Chen J. // Astron. J.1996. V. 112. P. 1225-1238.
18. Stern S.A. // Astron. J. 1995. V. 110. №2. P. 856-868.
19. Энеев Т.М. // Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. 1979. №166.
20. Fernandez J.A. // Monthly Notices Roy.Astron.Soc. 1980. V. 192. №2. P. 481-491.
21. Weissman P.R. // Annu.Rev.Astron.Astrophys. 1995. V. 33. P. 327-357.

22. Hills J.G. // Astron.J. 1981. V. 86. №11. P. 1730-1740.
23. Bailey M.E. // Nature. 1990. V. 345. P. 21-22.
24. Weissman P.R., Levison H.F. // Abstracts of 28th Lunar and Planetary Science Conference. Houston, USA. 1997.
25. Talkot R. // Astronomy. August 1999. P. 24.
26. Wiegert P., Tremaine S. // Icarus. 1999. V. 137. P. 84-121.
27. Рябушко А.П., Жур Т.А. // Тезисы докл. XII Международной научн. конф. по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения -2007). Мн., май 2007.-С. 112-113.
28. Рябушко А.П., Жур Т.А.// Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 2005. № 4.- С. 77-85.
29. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2. -М., 1961.
30. Anderson J.D. [и др.]// Phys. Rev.D. 2002. V.65. P. 1-50.
31. Nieto M.M., Turyshev S.G. // Class.Quant.Grav. 2004. V. 21. P. 4005-4023.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТОВ ПОСТАВОК ПРОДУКЦИИ И УСЛУГ В АПК

Б.М. Астрахан, к.т.н., доцент, В.В. Плюгачев, к.т.н., доцент, П.В. Клавсуть

Концепция энергетической безопасности Республики Беларусь предусматривает мероприятия по энергосбережению ресурсов во всех сферах народного хозяйства. Снабжение продукцией и услугами с минимальными затратами является одним из реальных путей экономии топливно-энергетических ресурсов в АПК. В ходе выполнения Государственной программы возрождения и развития села созданы предпосылки для снижения транспортной составляющей в затратах — создана развитая дорожная сеть, обеспечивающая устойчивую транспортную связь с населенными пунктами и производственными объектами. В связи с этим является актуальной задача оптимизации маршрутов поставок продукции и услуг в АПК на основе применения информационных технологий. Одним из вариантов применения информационных технологий является использование пакета программ математического моделирования *MATLAB*. Изложим методику применения пакета *MATLAB* для указанной оптимизации.

Общим критерием оптимизации является минимизация суммарных затрат при доставке автотранспортом товаров и услуг потребителям. При использовании автомобилей разных марок с двигателями одного типа (потребляющими один вид топлива) за критерий оптимизации можно принять минимизацию суммарного расхода топлива. При использовании для доставки товаров и услуг автомобилей одной марки с двигателями одного типа за критерий оптимизации можно принять минимизацию суммарного пробега автотранспорта. В ходе решения задачи следует учитывать, что грузопместимость автомобиля должна быть не меньше суммарного заказа на соответствующем маршруте.

Рассматриваемая задача может быть решена посредством процедуры пакета **vrpsavings** (*VRP — vehicle routing problems*), которая решает задачу приближенно, реализуя алгоритм «функций выгод» Кларка-Райта.

Если на одном автомобиле невозможно доставить товары и услуги во все пункты назначения (общее количество пунктов, включая базу поставки, которую рассматриваем как исходный пункт 1, обозначим через n_0), то на первом этапе процедуру **vrpsavings** целесообразно применить в виде:

$$[rte, TC, L, XFlg] = vrpsavings (C, q, Q) \quad (1)$$

где **C** — матрица размерности $n_0 \times n_0$ затрат (расстояний) между пунктами (диагональные элементы матрицы равны 0); **q** = [**q**(1), **q**(2), ..., **q**(n_0)] — вектор размерности $1 \times n_0$ объемов заказов в пунктах 2, ..., n_0 , (**q**(1) соответствует исходному пункту 1 и равно 0); **Q** — грузопместимость автомобиля; **rte** (*route*) — вектор размерностей каждого из маршрутов с началом и концом в исходном пункте 1; следовательно, если размерность равна n , то в маршрут помимо начального входит $n - 2$ пункта доставки; **TC** (*total costs*) — вектор затрат (длин) соответствующих маршрутов; **L** (*loads*) — вектор загрузки автомобилей, направляемых на соответствующие маршруты; **XFlg** (*feasible, infeasible*) — показатель существования решения (= 1, если решение существует; = - 1, если решение не существует).