

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

В 3-х частях

Часть 3

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Республики Беларусь
по образованию в области сельского хозяйства
в качестве учебно-методического комплекса
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по специальностям 1-74 06 05 Энергетическое обеспечение
сельского хозяйства (по направлениям)
и 1-53 01 01-09 Автоматизация технологических процессов
и производств (сельское хозяйство)*

Минск
БГАТУ
2011

УДК 621.3 (07)
ББК 31.2я7
Т33

Составители:

кандидат технических наук, доцент *А. В. Крутов*,
кандидат технических наук, доцент *Э. Л. Кочетова*,
старший преподаватель *Т. Ф. Гузанова*
кандидат технических наук, доцент *В. С. Корко*

Рецензенты:

заведующий лабораторией учета электроэнергии
Научно-исследовательского и проектного республиканского унитарного
предприятия «БелТЭИ», доктор технических наук,
старший научный сотрудник *Е. П. Забелло*;
кандидат технических наук, доцент кафедры «Электротехника
и электроника» БНТУ *И. В. Новиш*

Теоретические основы электротехники : в 3 ч. Ч. 3 : учеб-
Т33 но-методический комплекс / сост. : А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова,
Т. Ф. Гузанова. – Минск : БГАТУ, 2011. – 324 с.
ISBN 978-985-519-401-0.

УДК 621.3 (07)
ББК 31.2я7

ISBN 978-985-519-401-0 (ч. 3)
ISBN 978-985-519-022-7

© БГАТУ, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
МОДУЛЬ 7. Нелинейные электрические и магнитные цепи ...	5
МОДУЛЬ 8. Теория электромагнитного поля	161
ЛИТЕРАТУРА	320

Репозиторий БГАТУ

ВВЕДЕНИЕ

В третьей части дисциплины «Теоретические основы электротехники» изучаются в соответствии с образовательным стандартом следующие темы: нелинейные электрические и магнитные цепи, теория электромагнитного поля. На изучение этих тем учебным планом предусмотрено 68 аудиторных часов.

Примерное распределение этих часов по модулям и видам занятий приведено ниже.

УЧЕБНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№ и название модуля	Общее количество часов, отведенных на модуль	Теоретические занятия (лекции)	Лабораторные занятия	Практические занятия	УСРС, в т.ч., контроль
М-7. Нелинейные электрические и магнитные цепи	38	14	9	8	7
М-8. Теория электромагнитного поля	30	14	6	5	5
Итого	68	28	15	13	12

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

ВВОДНЫЙ КОММЕНТАРИЙ К МОДУЛЮ

Студент должен:

- **знать:** понятия нелинейная цепь, нелинейный резистивный элемент, графический метод построения результирующей вольт-амперной характеристики (ВАХ) при последовательном, параллельном и смешанном соединении нелинейных резисторов; расчет нелинейных электрических цепей методом двух узлов и методом итераций; величины, характеризующие магнитное поле и связь между ними, ферромагнитные и неферромагнитные материалы и их характеристики, закон полного тока, магнитодвижущую силу (МДС), падение магнитного напряжения, законы Кирхгофа для магнитной цепи, закон электромагнитной индукции, потери энергии в ферромагнитном сердечнике, методы расчета неразветвленных и разветвленных магнитных цепей; особенности и практическое использование нелинейных цепей переменного тока, методы расчета токов и напряжений, феррорезонансные явления;

- **уметь:** рассчитывать токи и напряжения в нелинейных электрических цепях постоянного тока; составлять уравнения, пользуясь законами Кирхгофа, рассчитывать магнитные цепи, определять МДС или магнитные потоки, рассчитывать нелинейные электрические цепи переменного тока, строить результирующие вольт-амперные характеристики феррорезонансных цепей, определять потери в ферромагнитном сердечнике;

- **формировать:** логическую последовательность действий, аккуратность в оформлении учебной работы и в личной жизни.

Принцип работы целого ряда электротехнических устройств основан на использовании нелинейных элементов, для которых

вольт-амперные, вебер-амперные, кулон-вольтные характеристики являются непрямолинейными.

Благодаря нелинейным элементам возникают явления, принципиально неосуществимые в линейных цепях: выпрямление и стабилизация напряжения, усиление мощности, получение модулированных колебаний различной формы и другие.

В цепях с нелинейными элементами получают переходные процессы, которые применяются для формирования различных импульсов в устройствах автоматики и радиотехники.

Расчет нелинейных цепей сопряжен с определенными математическими трудностями, так как процессы в них описываются нелинейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями, общей методики решения таких уравнений нет. Расчет нелинейных цепей усложняется, когда характеристики нелинейных элементов заданы графически и отсутствует их точное математическое описание.

Инженерная практика требует получения хотя бы ориентировочных расчетных соотношений, которые дают количественную оценку процессов, происходящих в нелинейных цепях. Именно поэтому основой теории нелинейных цепей является получение приближенных решений, дающих в основном качественную оценку процессов. Некоторые методы приближенного расчета установленных и переходных процессов излагаются в данном модуле.

СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ

Нелинейная электрическая цепь — электрическая цепь, электрическое сопротивление, индуктивность или емкость хотя бы одного из участков которой зависят от значений или от направлений токов и напряжений в этом участке цепи.

Дифференциальное сопротивление — скалярная величина, равная пределу отношения приращения напряжения на нелинейном

эlemente к приращению тока в нем, когда последнее приращение стремится к нулю.

Магнитная цепь — совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны при помощи понятий магнитодвижущей силы, магнитного потока и разности магнитных потенциалов.

Магнитная индукция — векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля.

Линия магнитной индукции — всегда замкнутая линия, в каждой точке которой касательная к ней совпадает с направлением вектора магнитной индукции.

Напряженность магнитного поля — векторная величина, равная геометрической разности магнитной индукции, деленной на магнитную постоянную, и намагниченности.

Намагниченность — векторная величина, характеризующая магнитное состояние вещества, равная пределу отношения магнитного момента элемента объема вещества к этому элементу объема, когда последний стремится к нулю.

Основная кривая намагничивания — кривая, представляющая собой геометрическое место вершин симметричных петель гистерезиса, получающихся при различных максимальных значениях напряженности магнитного поля.

Вихревые токи — электрические токи в проводящем теле, вызванные электромагнитной индукцией, замыкающиеся по контурам, образующим односвязную область.

ОСНОВЫ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ПО МОДУЛЮ

Данный модуль посвящен изучению методов расчета нелинейных электрических и магнитных цепей и включает в себя следующие вопросы.

Нелинейные электрические цепи постоянного тока

1. Нелинейные элементы, их характеристики.
2. Графический метод расчета нелинейных цепей постоянного тока с последовательным, параллельным и смешанным соединениями нелинейных элементов.
3. Расчет сложных нелинейных цепей постоянного тока. Метод двух узлов, метод итераций.
4. Статическое и дифференциальное сопротивления, эквивалентные схемы замещения.

Нелинейные магнитные цепи при постоянном токе

1. Основные понятия и законы магнитных цепей.
2. Ферромагнитные материалы, их характеристики.
3. Расчет неразветвленных и разветвленных магнитных цепей.
4. Расчет магнитных цепей с постоянным магнитом.

Нелинейные цепи переменного тока

1. Общие сведения.
2. Методы расчета нелинейных цепей переменного тока.
3. Потери энергии в ферромагнитных сердечниках.
4. Форма кривых тока и напряжения в цепи с индуктивной катушкой с ферромагнитным сердечником.

5. Уравнения, схема замещения, векторная диаграмма индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником.
6. Феррорезонанс напряжений и токов.
7. Переходные процессы в нелинейных электрических цепях.

МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Материалы к лекциям

Основной теоретический материал по модулю 7 “Нелинейные электрические и магнитные цепи” изложен в настоящем учебно-методическом комплексе и в литературе [1, 3].

План лекции 1:

1. Основные понятия о нелинейных электрических цепях, элементах, их характеристики.
2. Общая характеристика методов анализа и синтеза нелинейных электрических цепей постоянного тока.
3. Графический метод расчета нелинейной электрической цепи постоянного тока при последовательном, параллельном, смешанном соединении элементов.

План лекции 2:

1. Вольт-амперная характеристика ветви, содержащей нелинейный элемент и ЭДС (нелинейный активный двухполюсник).
2. Расчет разветвленной нелинейной электрической цепи постоянного тока методом двух узлов.
3. Статическое и дифференциальное сопротивления.
4. Замена нелинейного резистора эквивалентным линейным сопротивлением и источником ЭДС.

5. Расчет нелинейной электрической цепи постоянного тока итерационным методом.

План лекции 3:

1. Основные понятия и разновидности магнитных цепей.
2. Законы магнитных цепей.
3. Вебер-амперная характеристика и ее построение.
4. Расчет неразветвленных магнитных цепей постоянного тока.

План лекции 4:

1. Расчет разветвленных магнитных цепей постоянного тока.

План лекции 5:

1. Нелинейные электрические цепи переменного тока. Общие сведения.
2. Методы расчета нелинейных электрических цепей переменного тока.

План лекции 6:

1. Потери энергии в ферромагнитном сердечнике.
2. Переменный магнитный поток в катушке с ферромагнитным сердечником.
3. Уравнение, векторная диаграмма и схема замещения катушки с ферромагнитным сердечником.

План лекции 7:

1. Феррорезонанс напряжений.
2. Феррорезонанс токов.
3. Переходные процессы в нелинейных электрических цепях, методы расчета.

Лекция 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

7.1. Основные определения.

Вольт-амперные характеристики нелинейных сопротивлений

Нелинейные электрические цепи являются одной из разновидностей электрических цепей и имеют важное практическое значение, поскольку в большом разнообразии электротехнических устройств, созданных на базе нелинейных элементов, возникают явления, принципиально неосуществимые в линейных цепях. На нелинейных эффектах принципиально основаны выпрямление, инвертирование и стабилизация напряжения, умножение и деление частоты, усиление мощности, получение модулированных колебаний различной формы, релейный эффект, запоминание сигналов и другие явления.

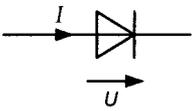
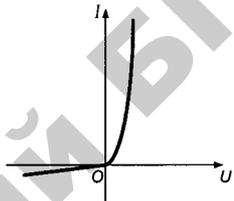
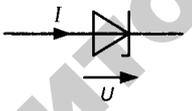
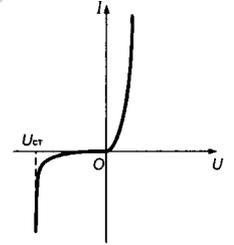
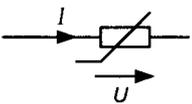
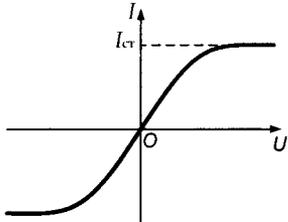
Под нелинейными электрическими цепями понимают электрические цепи, содержащие нелинейные элементы, т.е. элементы с нелинейными характеристиками. Нелинейные элементы, в отличие от линейных, не могут быть описаны при помощи постоянных коэффициентов, а характеристики являются нелинейными функциями одной или нескольких переменных. Пассивные нелинейные элементы подразделяют на резистивные, индуктивные и емкостные. Соответственно используют вольт-амперные, вебер-амперные и кулон-вольтные характеристики, причем они часто бывают справедливы только при постоянных (не зависящих от времени) напряжениях и токах.

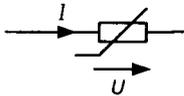
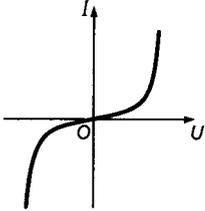
В цепях постоянного тока в установившихся режимах индуктивные элементы не оказывают сопротивления, а емкостные элементы постоянный ток не пропускают. Поэтому в нелинейных электрических цепях постоянного тока рассматривают только резистивные элементы, которые описывают вольт-амперными харак-

теристиками (ВАХ). Примеры ВАХ некоторых нелинейных резистивных элементов приведены в таблице 7.1.

Нелинейность ВАХ различных резистивных элементов могут определять такие факторы, как температура, напряжение, ток и другие, а также скорость их изменения.

Таблица 7.1 — Характеристики нелинейных резистивных элементов

Наименование	Обозначение	Пример ВАХ
Полупроводниковый диод		
Полупроводниковый стабилитрон		
Бареттер (стабилизатор тока)		

Наименование	Обозначение	Пример ВАХ
Терморезистор		

Примеры графических и буквенных обозначений некоторых резисторов в соответствии с ГОСТ в электрических схемах приведены на рисунке 7.1.



Рисунок 7.1 — Графическое и буквенное обозначение нелинейных резисторов, сопротивление которых зависит от температуры (а), от напряжения (б)

При решении электротехнических задач по расчету нелинейных электрических цепей принципиально не важна причина нелинейности ВАХ резистивных элементов, поэтому в дальнейшем с целью упрощения примем графическое и буквенное обозначение их в схемах в виде, показанном на рисунке 7.2.

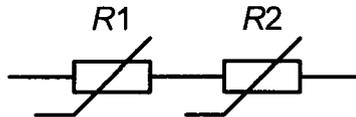


Рисунок 7.2 — Графическое и буквенное обозначение нелинейных резисторов

Нелинейные резисторы подразделяют на две большие группы: неуправляемые и управляемые. Управляемые нелинейные резисторы (транзисторы, тиристоры, трехэлектродные электронные лампы и т.п.) в отличие от неуправляемых (лампы накаливания, бареттеры, тиристорные сопротивления, полупроводниковые выпрямительные диоды и др.) имеют, как правило, вспомогательные или управляющие цепи, воздействуя на ток или напряжение которых можно изменять ВАХ основной цепи.

Вольт-амперные характеристики могут быть заданы в виде графиков, таблиц или математических зависимостей.

7.2. Общая характеристика методов анализа и синтеза нелинейных электрических цепей постоянного тока

При анализе и синтезе электрических цепей с нелинейными двухполюсниками применяют различные методы, сущность которых определяется формой задания нелинейной характеристики. Если она задана в аналитической форме, то решение задачи сводится к решению системы уравнений, состоящих из n нелинейных уравнений вида $I_k(U_k)$ и n линейных уравнений вида:

$$I_k = I_{ko} + G_{k1}U_1 + G_{k2}U_2 + \dots + G_{kn}U_n$$

или
$$U_k = U_{ko} + R_{k1}I_1 + R_{k2}I_2 + \dots + R_{kn}I_n.$$

При $n = 1$ простое решение может быть получено аналитически или графически. При $n > 1$ решение более сложно и выполняется обычно при помощи ЭВМ.

Если нелинейные характеристики заданы в виде таблицы экспериментальных данных, то решение требует графических построений или итерационных интерполяционных процедур, выполняемых при $n > 1$ при помощи ЭВМ.

Синтез электрических цепей с нелинейными двухполюсниками обычно проще, чем анализ. В этом случае задаются рабочие точки на

всех n нелинейных характеристиках и для решения задачи требуется решить линейную задачу синтеза, в которой все нелинейные резистивные элементы заменяют линейными резистивными двухполюсниками с сопротивлениями $R_{kA} = U_{kA} / I_k$, где с индексом A обозначены величины, относящиеся к рабочим точкам.

Если рабочие точки не фиксированы, а заданы только области, прилегающие к рабочим точкам, то в этих случаях применяют линеаризацию нелинейных характеристик на определенных участках. В этом случае, как анализ, так и синтез выполняется средствами теории линейных цепей и все нелинейные элементы заменяют активными линейными двухполюсниками.

Участки электрических цепей с последовательным или параллельным соединением различных нелинейных резистивных двухполюсников можно заменить эквивалентными нелинейными двухполюсниками с результирующими характеристиками, получающимися путем суммирования характеристик исходных нелинейных двухполюсников. Таким образом, схема нелинейной электрической цепи может быть существенно упрощена.

Анализ и синтез электрических цепей с нелинейными четырехполюсниками подробно рассматривается в специальной литературе и в данном разделе не приводится. В дальнейшем будут изложены методики расчета простых цепей (с одним источником энергии) с последовательно, параллельно и последовательно-параллельно соединенными нелинейными резисторами и источниками ЭДС, а также сложных цепей методом двух узлов, методом итераций.

Расчеты и исследования нелинейных электрических цепей постоянного тока во многих случаях производят графоаналитическими методами, в основу которых положены законы Кирхгофа. Если вольт-амперные характеристики можно с достаточной степенью точности выразить аналитическими функциями, то может быть выполнен аналитический расчет.

7.3. Графический метод расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока при последовательном, параллельном и смешанном соединении элементов

Сущность графического метода расчета простых нелинейных электрических цепей постоянного тока состоит в построении результирующих вольт-амперных характеристик участков цепи с последовательным или параллельным соединением элементов на основании уравнений, составленных по законам Кирхгофа. Метод является приближенным, поэтому от аккуратности и точности графических построений зависит точность решения задачи, результат которого проверяется по законам Кирхгофа.

7.3.1. Последовательное соединение нелинейных резисторов

Задана схема электрической цепи (рисунок 7.3, а), вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов $I(U_1)$ и $I(U_2)$. Требуется определить ток I , падения напряжений U_1 и U_2 , если известно напряжение питания U .

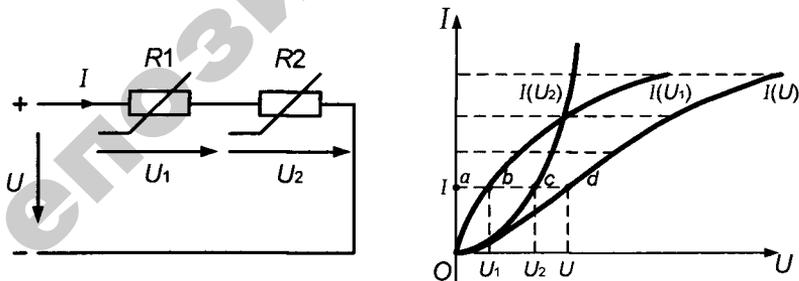


Рисунок 7.3 — Схема электрической цепи (а) и графическое построение результирующей ВАХ (б) при последовательном соединении нелинейных резисторов

Поскольку задано напряжение U на входе цепи, то для определения тока в цепи необходимо построить результирующую вольт-амперную характеристику всей цепи $I(U)$.

Построение результирующей ВАХ равносильно замене нескольких нелинейных резисторов одним эквивалентным с ВАХ $I(U)$. При этом руководствуются законами Кирхгофа.

В схеме (рисунок 7.3, а) через все элементы проходит один и тот же ток I , а напряжение на входе цепи в соответствии со вторым законом Кирхгофа определяется по выражению

$$U = U_1 + U_2. \quad (7.1)$$

Результирующую ВАХ строят, используя уравнение (7.1). Для этого задаются произвольным значением тока I (точка a на рисунке 7.3, б), проводят горизонтальную линию до пересечения с вольт-амперными характеристиками нелинейных элементов и находят соответствующие напряжения U_1 и U_2 , а также их сумму по выражению (7.1). Полученное напряжение будет соответствовать выбранному току, а точка с координатами I, U будет принадлежать результирующей характеристике $I(U)$.

Сложение напряжений можно выполнить графически, складывая отрезки линий, соответствующие напряжениям U_1 и U_2 (рисунок 7.3, б):

$$ab + ac = ad.$$

Точка d будет одной из точек результирующей ВАХ.

Аналогично, задаваясь рядом значений тока I , определяют другие точки, соединяют их плавной кривой и получают результирующую ВАХ цепи.

По заданному напряжению U находят искомый ток I , используя ВАХ $I(U)$. Затем по значению тока I и характеристикам $I(U_1)$ и

$I(U_2)$ определяют напряжения U_1 и U_2 . Результат проверяют по выражению (7.1), при неточности корректируют решение.

Аналогично рассчитывают цепи при последовательном соединении трех и большего числа нелинейных резисторов. Если в цепи имеются линейные резисторы, то их ВАХ строят на основании закона Ома.

7.3.2. Параллельное соединение нелинейных резисторов

Пусть в схеме электрической цепи (рисунок 7.4, а) заданы вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов $I_1(U)$ и $I_2(U)$. Требуется определить напряжение питания U , токи I_1 и I_2 , если известен ток I на входе цепи.

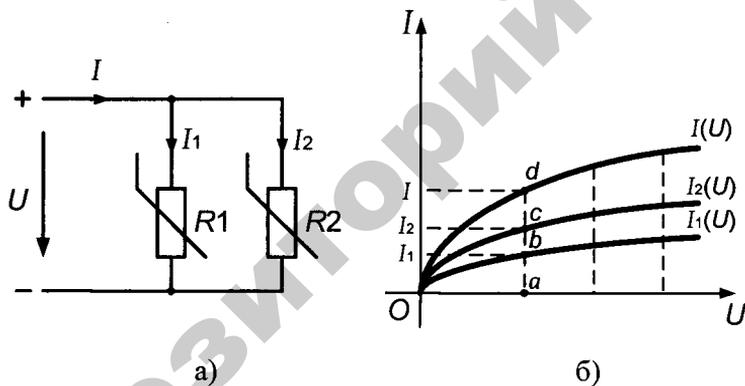


Рисунок 7.4 — Схема электрической цепи (а) и графическое построение результирующей ВАХ (б) при параллельном соединении нелинейных резисторов

При построении результирующей ВАХ исходят из того, что напряжение на обоих нелинейных резисторах одинаково, а ток в неразветвленной части схемы находят по первому закону Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2. \quad (7.2)$$

Задаются произвольным значением напряжения U (точка a на

рисунке 7.4, б), по ВАХ $I(U_1)$ и $I(U_2)$ находят соответствующие значения токов I_1 и I_2 , а также их сумму по выражению (7.2). Полученное значение тока будет соответствовать выбранному напряжению, а точка с координатами I, U будет принадлежать результирующей характеристике $I(U)$. Графически эту точку d можно получить сложением отрезков (линий, соответствующих токам I_1 и I_2):

$$ab + ac = ad.$$

Аналогично определяют другие точки результирующей ВАХ.

По заданному току I и результирующей ВАХ определяют искомого напряжение U и для полученного значения напряжения по ВАХ $I_1(U)$ и $I_2(U)$ находят токи на параллельных участках I_1 и I_2 . Проверку результата осуществляют по выражению (7.2).

7.3.3. Смешанное соединение нелинейных резисторов

При смешанном (последовательно-параллельном) соединении нелинейных резисторов в электрической цепи (рисунок 7.5, а) имеются участки с параллельным (резисторы R_2 и R_3) и последовательным соединением (резистор R_1 и участок с R_2 и R_3).

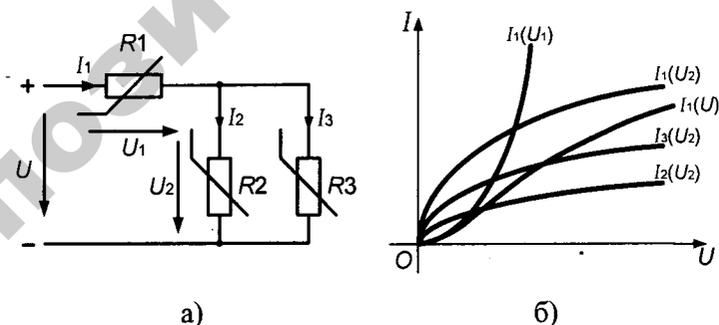


Рисунок 7.5 — Схема электрической цепи (а) и графическое построение результирующей ВАХ электрической цепи со смешанным соединением нелинейных резисторов (б)

Пусть будут известными вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$, $I_3(U_2)$ (рисунок 7.5, б) и питающее напряжение U . Требуется определить токи в ветвях схемы.

Для решения задачи необходимо поэтапно преобразовать схему и построить результирующие характеристики: сначала для параллельного соединения, а затем для последовательного.

Результирующую ВАХ параллельного соединения нелинейных резисторов $I_1(U_2)$ строят в соответствии с методикой рассмотренной в п.7.3.2, по уравнению первого закона Кирхгофа. Задаются значениями напряжения U_2 , по ВАХ $I_2(U_2)$ и $I_3(U_2)$ (рисунок 7.5, б) определяют токи I_2 и I_3 и их сумму.

После замены двух параллельно соединенных нелинейных резисторов одним эквивалентным с ВАХ $I_1(U_2)$ электрическая цепь (рисунок 7.5, а) сводится к последовательному соединению резисторов $R1$ и $R23$. Для построения результирующей ВАХ последовательного соединения и, следовательно, всей цепи используют методику, изложенную в п. 7.3.1. При этом задаются значениями тока I_1 , по ВАХ $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$ (рисунок 7.5, б) определяют напряжения U_1 и U_2 , а также их сумму в соответствии со вторым законом Кирхгофа.

По заданному напряжению источника питания U и результирующей ВАХ цепи $I_1(U)$ находят ток I_1 , по току I_1 и ВАХ $I_1(U_1)$, $I_1(U_2)$ определяют напряжения U_1 и U_2 , по напряжению U_2 и ВАХ $I_2(U_2)$, $I_3(U_2)$ получают значения токов I_2 и I_3 . Результаты расчетов проверяют по выражениям первого и второго законов Кирхгофа.

Лекция 2

7.4. Вольт-амперная характеристика ветви, содержащей нелинейный элемент и ЭДС (нелинейный активный двухполюсник)

При графоаналитических расчетах разветвленных цепей с нелинейными элементами часто возникает необходимость в использовании ВАХ нелинейных активных двухполюсников. На рисунке 7.6, а показана ветвь, содержащая нелинейный резистор $R1$ и ЭДС. Требуется построить ее вольтамперную характеристику $I(U_{ac})$, если даны ВАХ нелинейного резистора $I(U_{ab})$ (рисунок 7.6, б) и ЭДС E .

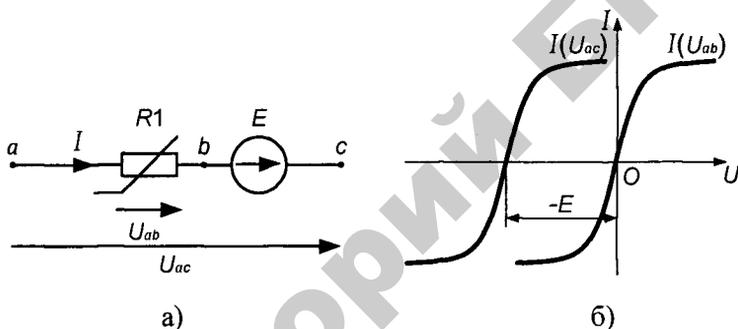


Рисунок 7.6 — Схема нелинейного активного двухполюсника (а) и вольт-амперные характеристики нелинейного резистора $I(U_{ab})$ и двухполюсника $I(U_{ac})$ (б)

Для получения расчетного уравнения выразим напряжение на концах участка U_{ac} через напряжение на нелинейном резисторе U_{ab} и ЭДС. Как известно, напряжение на участке цепи есть разность потенциалов на концах этого участка, то есть

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c. \quad (7.3)$$

Предположим, что потенциал точки a известен, тогда потенци-

ал $\varphi_b < \varphi_a$ на величину падения напряжения U_{ab} , так как ток течет через сопротивление в направлении от большего потенциала к меньшему. Значит:

$$\varphi_b = \varphi_a - U_{ab}. \quad (7.4)$$

По направлению ЭДС потенциал возрастает на величину ЭДС, следовательно:

$$\varphi_c = \varphi_b + E = \varphi_a - U_{ab} + E. \quad (7.5)$$

Напряжение на концах участка ac :

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = U_{ab} - E. \quad (7.6)$$

Это же выражение можно получить на основании второго закона Кирхгофа.

Для построения ВАХ $I(U_{ac})$ (рисунок 7.6, б) задаются произвольным значением тока, по ВАХ нелинейного резистора $I(U_{ab})$ находят соответствующее значение напряжения U_{ab} и подставляют его в уравнение (7.6) для расчета напряжения U_{ac} . Аналогично определяют координаты других точек. Как видно, искомая ВАХ $I(U_{ac})$ (рисунок 7.6, б) сдвинута относительно ВАХ $I(U_{ab})$ влево на величину ЭДС E .

Если участок цепи представлен схемой (рисунок 7.7, а), в которой ЭДС имеет направление противоположное направлению тока, то:

$$\varphi_c = \varphi_a - U_{ab} - E \quad (7.7)$$

и

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = U_{ab} + E. \quad (7.8)$$

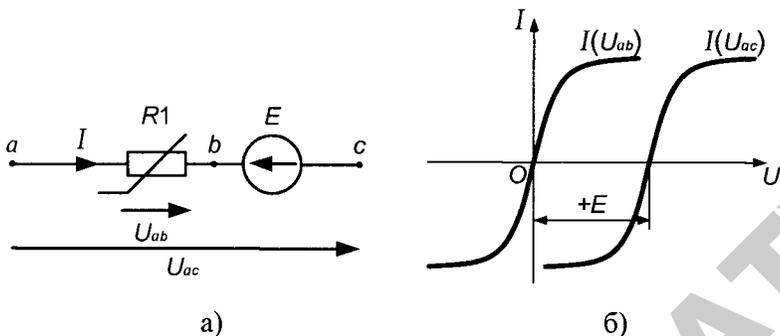


Рисунок 7.7 — Схема нелинейного активного двухполюсника (а) и вольт-амперные характеристики нелинейного резистора $I(U_{ab})$ и двухполюсника $I(U_{ac})$ (б)

Построенная по уравнению (7.8) ВАХ $I(U_{ac})$ оказывается в данном случае сдвинутой относительно ВАХ $I(U_{ab})$ вправо на величину ЭДС E .

Вольт-амперная характеристика участка цепи, содержащего нелинейный элемент и ЭДС (активный нелинейный двухполюсник), позволяет рассматривать этот участок как обычное нелинейное сопротивление и вести расчет цепей с такими участками аналогично рассмотренным ранее расчетам цепей с последовательным, параллельным и смешанным соединением нелинейных элементов.

7.5. Расчет разветвленной нелинейной электрической цепи методом двух узлов

Для расчета цепей, содержащих два узла или приводящихся к ним, применяют метод двух узлов. Сущность метода заключается в нахождении такого напряжения между двумя узлами цепи, при котором выполняется первый закон Кирхгофа.

На рисунке 7.8, а показана разветвленная схема с тремя извест-

ными ЭДС источников E_1, E_2, E_3 , с тремя нелинейными резисторами с вольт-амперными характеристиками $I_1(U_1), I_2(U_2), I_3(U_3)$, (рисунок 7.8, б). Требуется определить токи во всех ветвях схемы.

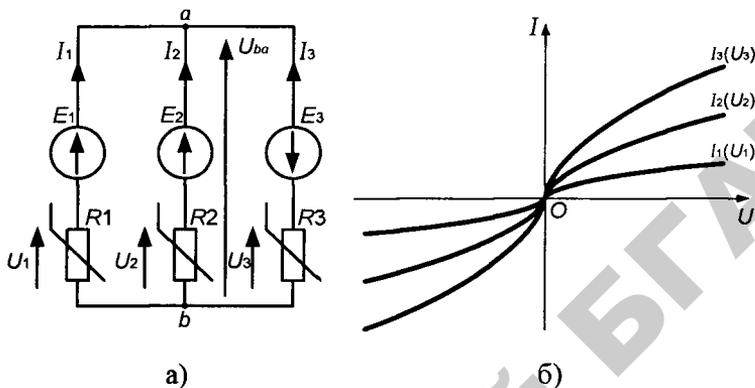


Рисунок 7.8 — Схема разветвленной нелинейной электрической цепи (а) и вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов (б)

Сначала выполняют предварительные действия. Выбирают и обозначают на схеме (рисунок 7.8, а) положительные направления токов I_1, I_2, I_3 . Для единообразия их направляют к одному узлу. Тогда по первому закону Кирхгофа

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (7.9)$$

Ветви, присоединенные к двум одинаковым узлам, находятся под одним и тем же напряжением. Для удобства построения характеристик рекомендуют направление напряжения между двумя узлами принимать совпадающим с направлением токов в ветвях, то есть U_{ba} .

Каждый из токов в ветвях является нелинейной функцией падения напряжения на своем нелинейном резисторе. Выражают все токи в функции одного переменного — напряжения U_{ba} между

двумя узлами. Для этого определяют напряжение U_{ba} через напряжение на нелинейном резисторе и ЭДС каждой ветви, рассматривая соответствующую ветвь как участок цепи, содержащий нелинейный элемент и ЭДС (см. п. 7.4.). По второму закону Кирхгофа для контуров с каждой ветвью получают уравнения:

$$U_{ba} = U_1 - E_1, \quad (7.10)$$

$$U_{ba} = U_2 - E_2, \quad (7.11)$$

$$U_{ba} = U_3 + E_3. \quad (7.12)$$

На основании уравнений (7.10), (7.11), (7.12) и ВАХ нелинейных резисторов осуществляют расчеты для построения ВАХ ветвей $I_1(U_{ba})$, $I_2(U_{ba})$ и $I_3(U_{ba})$, которые удобно свести в таблицу 7.2. Для этого произвольно задаются значением тока в каждой из ветвей, по ВАХ (рисунок 7.8, б) находят соответствующие напряжения U_1 , U_2 , U_3 и подставляют их в уравнения (7.10), (7.11) и (7.12). Получают соответствующие значения напряжения U_{ba} . Расчеты необходимо провести как для положительных, так и отрицательных значений токов ветвей.

Таблица 7.2 — Расчеты для построения ВАХ ветвей

1-ая ветвь			2-ая ветвь			3-я ветвь		
I_1, A	U_1, B	U_{ba}, B	I_2, A	U_2, B	U_{ba}, B	I_3, A	U_3, B	U_{ba}, B
Значения токов в пределах ВАХ $I_1(U_1)$			Значения токов в пределах ВАХ $I_2(U_2)$			Значения токов в пределах ВАХ $I_3(U_3)$		

По данным расчетов (таблица 7.2) строят ВАХ ветвей (рисунок 7.9).

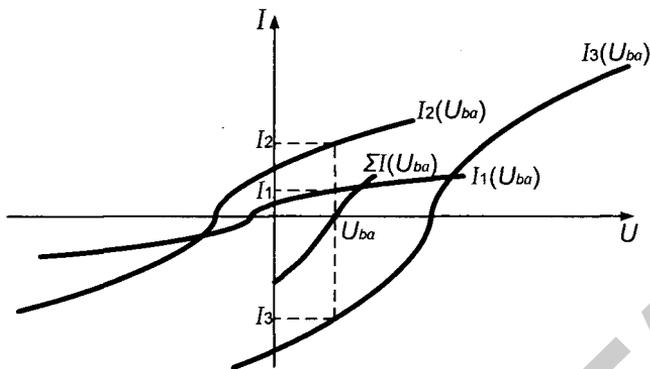


Рисунок 7.9 — ВАХ ветвей схемы

Для нахождения искомого напряжения U_{ba} , при котором будет выполняться первый закон Кирхгофа, необходимо построить зависимость $\sum I(U_{ba})$. Задаваясь рядом значений U_{ba} , по ВАХ $I_1(U_{ba})$, $I_2(U_{ba})$ и $I_3(U_{ba})$ (рисунок 7.9) находят соответствующие значения токов I_1 , I_2 , I_3 и их сумму $I_1 + I_2 + I_3$ и подставляют в таблицу 7.3.

Таблица 7.3 — Расчеты для построения характеристики $\sum I(U_{ba})$

U_{ba} , В	I_1 , А	I_2 , А	I_3 , А	$\sum I = I_1 + I_2 + I_3$, А
Значения напряжения в зоне решения				Значения суммы токов должны быть положительными и отрицательными

По данным таблицы 7.3 строят зависимость $\sum I(U_{ba})$ (рисунок 7.9). Точка пересечения зависимости $\sum I(U_{ba})$ с горизонтальной осью дает искомое напряжение U_{ba} , при котором выполняется условие $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Через эту точку проводят вертикаль и при пересечении с ВАХ $I_1(U_{ba})$, $I_2(U_{ba})$ и $I_3(U_{ba})$ находят соответственно токи I_1, I_2, I_3 по величине и по знаку.

7.6. Статическое и дифференциальное сопротивления

Свойства нелинейного резистора могут быть определены его вольт-амперной характеристикой, а также зависимостями его статического или дифференциального сопротивления от тока или от напряжения.

Статическое сопротивление $R_{ст}$ характеризует поведение нелинейного резистора в режиме неизменного тока, то есть в определенной точке вольт-амперной характеристики. Оно равно отношению напряжения на нелинейном резисторе к протекающему по нему току. Для точки «а» на ВАХ (рисунок 7.10, а):

$$R_{ст} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \alpha_a \quad (7.13)$$

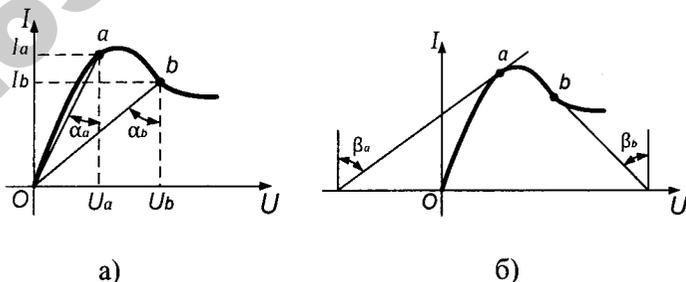


Рисунок 7.10 — Графическое определение статического (а) и дифференциального сопротивлений (б)

Из рассмотрения треугольника OaU_a следует, что статическое сопротивление численно равно тангенсу угла α_a , умноженному на отношение масштабов по осям $\frac{m_U}{m_I}$. При переходе к другой точке

ВАХ (рисунок 7.10, а), например, к точке b , статическое сопротивление изменяется:

$$R_{стb} = \frac{U_b}{I_b} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \alpha_b. \quad (7.14)$$

Предел отношения приращения напряжения на участке цепи к приращению тока в нем или производная от напряжения по току определяет дифференциальное сопротивление. Для удобства рассмотрим ту же ВАХ (рисунок 7.10, б). Для точки «а» дифференциальное сопротивление

$$R_{дифa} = \frac{dU}{dI} = \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \beta_a, \quad (7.15)$$

то есть численно равно тангенсу угла β_a (угла наклона касательной в данной точке ВАХ к оси ординат), умноженному на отношение масштабов $\frac{m_U}{m_I}$.

Соответственно для точки «b»

$$R_{дифb} = \frac{dU}{dI} = -\frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \beta_b. \quad (7.16)$$

Отрицательный знак показывает, что угол β_b расположен во второй четверти. Таким образом, дифференциальное сопротивление может быть отрицательным, если ВАХ имеет падающий характер, когда положительному приращению напряжения соответствует отрицательное приращение тока.

В расчетах и исследованиях нелинейных электрических цепей чаще применяют дифференциальное сопротивление, чем статическое. Дифференциальное сопротивление используют, например, при исследовании устойчивости режимов работы нелинейных цепей, а также при замене нелинейного резистора эквивалентным линейным сопротивлением и источником ЭДС.

7.7. Замена нелинейного резистора эквивалентным линейным сопротивлением и источником ЭДС

Если режим работы цепи обеспечивается на ограниченном участке ВАХ нелинейного резистора и этот участок с известной степенью приближения может быть заменен отрезком прямой линии, то нелинейное сопротивление в расчетном отношении может быть заменено эквивалентным линейным сопротивлением и источником ЭДС.

Пусть ВАХ нелинейного резистора имеет вид, представленный на рисунке 7.11, а.

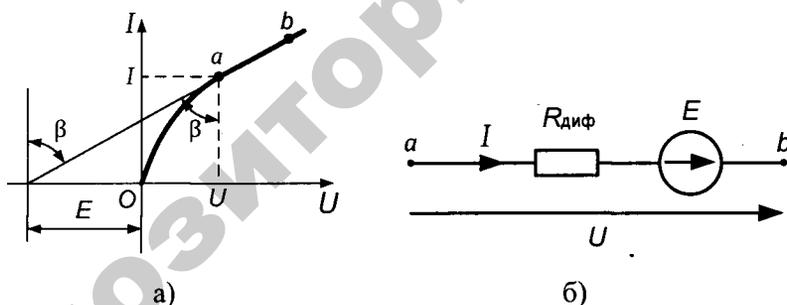


Рисунок 7.11 — ВАХ нелинейного резистора (а) и эквивалентная схема замещения (б)

Предположим, что рабочая точка перемещается лишь по участку ab . Проведем касательную к участку ab и выразим значение напряжения для этого участка ВАХ, исходя из рассмотрения прямоугольного треугольника:

$$U = I \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \beta - E.$$

Представив $\frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \beta = R_{\text{диф}}$, получим

$$U = IR_{\text{диф}} - E \quad (7.17)$$

или
$$I = \frac{U + E}{R_{\text{диф}}}. \quad (7.18)$$

Уравнению (7.17) соответствует участок цепи, представленный на рисунке 7.11, б.

Для доказательства соответствия эквивалентной схемы участка цепи уравнению (7.17) выразим потенциал точки b через потенциал точки a

$$\varphi_b = \varphi_a - IR_{\text{диф}} + E.$$

Значит

$$U = \varphi_a - \varphi_b = IR_{\text{диф}} - E. \quad (7.19)$$

Если ВАХ нелинейного резистора имеет иной вид (рисунок 7.12, а), то значение напряжения на отрезке прямой ab можно записать уравнением

$$U = I \frac{m_U}{m_I} \operatorname{tg} \beta + E = IR_{\text{диф}} + E. \quad (7.20)$$

Соответствующий участок цепи имеет вид (рисунок 7.12, б).

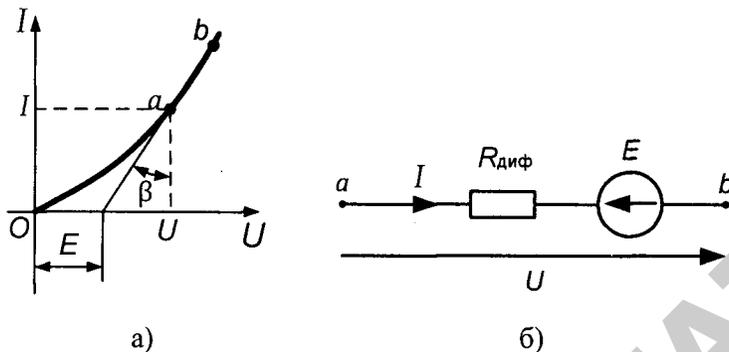


Рисунок 7.12 — ВАХ нелинейного резистора (а) и эквивалентная схема замещения (б)

Замена нелинейного резистора линейным сопротивлением и источником ЭДС удобна тем, что вся схема цепи становится линейной и ее работа может быть исследована методами, разработанными для линейных цепей. Однако при этом рабочая точка не должна выходить за пределы линейного участка ВАХ.

7.8. Расчет нелинейной электрической цепи постоянного тока итерационным методом

Метод итераций (последовательных приближений) является приближенным аналитическим методом решения нелинейных алгебраических уравнений путем последовательного применения одних и тех же математических операций (итераций), приводящих в результате их многократного повторения к получению решения определенной степени точности. В последнее время он находит распространение для расчета нелинейных электрических цепей и имеет несколько разновидностей, основанных на применении различных линейных схем замещения нелинейных элементов.

В наиболее общем виде сущность метода итераций состоит в

составлении расчетной формулы на основе уравнений Кирхгофа и поиска решения путем последовательных приближений к истинному результату.

При расчете нелинейных цепей методом итераций должны быть заданы вольт-амперные характеристики элементов в графическом или аналитическом виде. Сущность метода итераций рассмотрим на примере неразветвленной электрической цепи (рисунок 7.13, а).

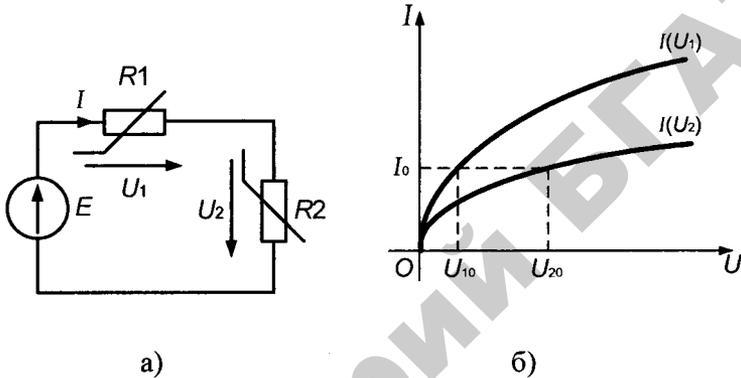


Рисунок 7.13 — Схема электрической цепи (а) и ВАХ нелинейных элементов (б)

На основании второго закона Кирхгофа

$$E = U_1 + U_2,$$

или

$$E = IR_1(I) + IR_2(I), \quad (7.21)$$

где $R_1(I)$ и $R_2(I)$ — значения сопротивлений нелинейных резисторов R_1 и R_2 при данном значении тока I .

Выразим ток из уравнения (7.21) и получим расчетную формулу:

$$I = \frac{E}{R_1(I) + R_2(I)}. \quad (7.22)$$

Вначале задаются произвольным значением тока I_0 — нулевым приближением. По ВАХ $I(U_1)$ и $I(U_2)$ (рисунок 7.13, б) находят значения напряжений U_{10} и U_{20} , соответствующие току I_0 , и рассчитывают сопротивления:

$$R_{10} = \frac{U_{10}}{I_0} \quad \text{и} \quad R_{20} = \frac{U_{20}}{I_0}.$$

Эти значения подставляют в расчетную формулу (7.22) и определяют значение тока в первом приближении:

$$I_1 = \frac{E}{R_{10} + R_{20}}.$$

Очевидно, что найденное значение тока I_1 не будет соответствовать наугад выбранному току I_0 , поэтому необходимо продолжать расчет, повторяя действия. При этом, используя ток I_1 , по ВАХ определяют соответствующие значения напряжений U_{11} и U_{21} , рассчитывают сопротивления:

$$R_{11} = \frac{U_{11}}{I_1} \quad \text{и} \quad R_{21} = \frac{U_{21}}{I_1}.$$

По расчетной формуле (7.22) определяют следующие значение тока (второе приближение)

$$I_2 = \frac{E}{R_{11} + R_{21}}.$$

Аналитический расчет продолжают до тех пор, пока разность между соседними значениями токов не станет малой величиной.

Как известно из курса математики, итерация может быть расходящейся, то есть значения тока не приближаются, а расходятся при каждом следующем шаге.

В случае расходящейся итерации переходят к новой расчетной формуле. Например, для рассмотренного примера можно находить напряжение:

$$U_1 = IR_1(I) = \frac{E}{R_1(I) + R_2(I)} R_1(I).$$

При этом задаются напряжением U_1 .

Метод итераций получает значительное преимущество при аналитическом представлении ВАХ нелинейных элементов и записи алгоритма расчета в виде программы для ЭВМ.

Вопросы для самоконтроля

1. Понятия линейных и нелинейных элементов, линейных и нелинейных электрических цепей.

2. Что понимают под вольт-амперной характеристикой?

3. Законы Кирхгофа для электрических цепей. Правила знаков при составлении уравнений.

4. Сущность графического метода расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока. Последовательность действий при графическом построении результирующих ВАХ электрических цепей с последовательным, параллельным и смешанным соединением нелинейных резисторов.

5. Дайте определение понятиям статического и дифференциального сопротивлений, неуправляемых и управляемых нелинейных резисторов.

6. Как построить ВАХ ветви, содержащей нелинейный резистор и ЭДС?

7. Какова сущность расчета нелинейных электрических цепей методом двух узлов?

8. Сущность метода итераций. На какой основе создается расчетная формула?

МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

7.9. Основные понятия и разновидности магнитных цепей

Магнитной цепью называют совокупность устройств, содержащих катушки с током, ферромагнитные тела или иные среды, образующих замкнутую систему, в которой существует магнитный поток и вдоль которой замыкаются линии магнитной индукции. Магнитные цепи подразделяют на **неразветвленные** и **разветвленные**.

В **неразветвленной** магнитной цепи (рисунок 7.14, а) по всем участкам проходит один и тот же магнитный поток. Основной поток Φ_0 концентрируется в сердечнике, а поток рассеяния Φ_r замыкается частично или полностью по воздуху.

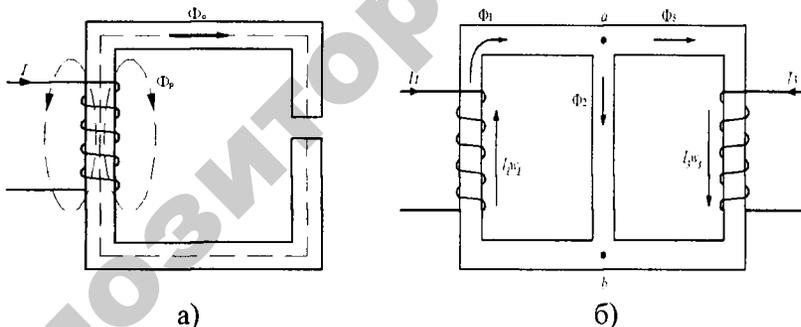


Рисунок 7.14 — Схемы неразветвленной (а) и разветвленной (б) магнитных цепей

В расчетах обычно потоком рассеяния пренебрегают. По аналогии с электрическими цепями при рассмотрении магнитных цепей также используют понятия: ветвь, узел и контур. В схеме **разветвленной магнитной цепи** (рисунок 7.14, б) имеются два узла, в ко-

торых соединяются три ветви. В каждой ветви проходит свой магнитный поток.

Электрические двигатели, генераторы, трансформаторы и другие электромагнитные аппараты конструируют так, чтобы магнитный поток в них был по возможности наибольшим. Введение ферромагнитного материала в магнитную цепь значительно усиливает и концентрирует в заданной области магнитное поле, придает ему нужную конфигурацию.

При расчете магнитных цепей используют такие скалярные величины как магнитный поток Φ , магнитодвижущая сила (МДС) F , магнитное напряжение (падение магнитного напряжения) U_m .

Магнитный поток определяется как поток вектора магнитной индукции \vec{B} через поверхность S поперечного сечения магнитопровода:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

При равномерном магнитном поле

$$\Phi = B S. \quad (7.23)$$

Магнитодвижущая (намагничивающая) сила выражается произведением числа витков катушки w на величину протекающего по ней тока I :

$$F = I w. \quad (7.24)$$

МДС создает магнитный поток в магнитной цепи подобно тому, как ЭДС вызывает электрический ток в электрической цепи. Магнитодвижущая сила есть величина направленная. Для определения положительного направления МДС пользуются правилом правого винта: если винт вращать по направлению тока в обмотке, то движение острия укажет направление МДС (рисунок 7.15).

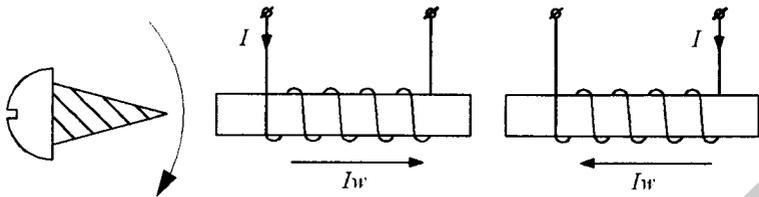


Рисунок 7.15 — Определение положительного направления МДС по правилу правоходового винта

Для этих же целей можно воспользоваться мнемоническим правилом: если сердечник мысленно охватить правой рукой, расположив её пальцы по току в обмотке, то отогнутый под 90° большой палец укажет направление МДС. Очевидно, что направление МДС зависит от направления тока и направления намотки провода в обмотке.

Падением магнитного напряжения между точками a и b магнитной цепи называют линейный интеграл от напряженности и магнитного поля между этими точками по длине участка:

$$U_M = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}, \quad (7.25)$$

где $d\vec{l}$ — элемент длины участка магнитной цепи.

Если напряженность поля по всей длине участка одинакова, то падение магнитного напряжения определяют по выражению:

$$U_M = Hl_{ab}. \quad (7.26)$$

В том случае, когда участок магнитной цепи между точками a и b может быть подразделен на несколько отдельных частей так, что для каждой части напряженность поля неизменна, то падение магнитного напряжения на всем участке равно сумме падений напряжений на всех его частях:

$$U_M = \sum_{k=1}^n H_k l_k. \quad (7.27)$$

Единицей измерения МДС и падения магнитного напряжения является ампер (А).

7.10. Законы магнитных цепей

В основе расчета магнитных цепей лежат определенные законы.

Исходя из принципа непрерывности магнитного потока, сумма вошедшего в объем и вышедшего из объема магнитных потоков равна нулю, т.е.

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (7.28)$$

При охвате замкнутой поверхностью S нескольких сечений магнитопровода

$$\sum \Phi = 0. \quad (7.29)$$

Уравнение (7.29) выражает **первый закон Кирхгофа**: алгебраическая сумма магнитных потоков в любом узле магнитной цепи равна нулю. При этом потоки, направленные к узлу, принимают положительными, а потоки, направленные от узла принимают отрицательными. Значит, первый закон Кирхгофа можно сформулировать иначе: сумма магнитных потоков, подтекающих к узлу, равна сумме магнитных потоков, утекающих от узла:

$$\sum \Phi_{\text{п}} = \sum \Phi_{\text{у}}. \quad (7.30)$$

Одним из основных законов, используемых при расчете магнитной цепи является **закон полного тока**. Он формулируется следующим образом: циркуляция вектора напряженности магнит-

ного поля \vec{H} по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \quad (7.31)$$

Положительное направление интегрирования $d\vec{l}$ связано с положительным направлением тока I правилом правого винта. Если контур интегрирования будет пронизывать обмотку катушки с числом витков w , по которой проходит ток I , то $\sum I = Iw$. Значит выражение (7.31) можно представить в виде:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = Iw. \quad (7.32)$$

Таким образом, закон полного тока представляет собой **второй закон Кирхгофа**: алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме МДС вдоль того же контура:

$$\sum U_M = \sum F \quad \text{или} \quad \sum Hl = \sum Iw \quad (7.33)$$

Перед тем как записать уравнения по законам Кирхгофа, следует указать направления МДС, произвольно выбрать положительные направления магнитных потоков в ветвях и направления обхода контуров.

Если направление магнитного потока на некотором участке совпадает с направлением обхода, то падение магнитного напряжения этого участка входит в левую часть уравнения (7.33) со знаком плюс, если встречно ему, то со знаком минус. Аналогично, если МДС совпадают с направлением обхода, она входит в правую часть уравнения (7.33) со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

Пример 7.1

Составить систему уравнений по законам Кирхгофа для разветвленной магнитной цепи (рисунок 7.14, б)

Решение

Укажем направления МДС $I_1 w_1$ и $I_3 w_3$, используя правило правого винта. Произвольно выберем и укажем на схеме положительные направления магнитных потоков. Обход по контурам — по часовой стрелке.

По первому закону Кирхгофа необходимо составить одно уравнение (на одно меньше числа узлов), по второму закону Кирхгофа — два уравнения, чтобы общее число уравнений было равно числу ветвей. Получим систему уравнений.

$$\begin{cases} \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \\ H_1 l_1 + H_2 l_2 = I_1 w_1 \\ -H_2 l_2 + H_3 l_3 = I_3 w_3. \end{cases} \quad (7.34)$$

7.11. Закон Ома для участка магнитной цепи

Пусть на участке магнитной цепи, не содержащем МДС, проходит магнитный поток Φ . Напряженность магнитного поля

$$H = \frac{B}{\mu_a} = \frac{\Phi}{S\mu_a}, \quad (7.35)$$

где S — площадь сечения магнитопровода, — абсолютная магнитная проницаемость материала.

Магнитное напряжение на участке

$$U_m = Hl = \frac{\Phi l}{S\mu_a} = \Phi R_m, \quad (7.36)$$

где l — длина участка магнитопровода; $R_m = \frac{l}{S\mu_a}$ — магнитное сопротивление.

С учетом уравнения (7.36) в общем случае можно записать выражение второго закона Кирхгофа:

$$\sum U_m = \sum \Phi R_m = \sum I_w, \quad (7.37)$$

а также выразить **закон Ома** для участка магнитной цепи:

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m} = \frac{U_m S\mu_a}{l}. \quad (7.38)$$

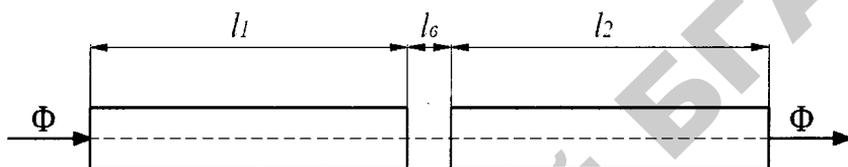
Вследствие того, что магнитное сопротивление R_m зависит от абсолютной магнитной проницаемости среды μ_a , которая, в свою очередь, зависит от напряженности магнитного поля, пользоваться выражением закона Ома для расчетов непосредственно сложно. Однако уравнение (7.38) наглядно показывает, какие параметры влияют на величину магнитного потока и качественно характеризуют работу магнитной цепи. Очевидно, что расчет можно вести по закону Ома при $\mu_a = \text{const}$.

7.12. Вебер-амперная характеристика и ее построение

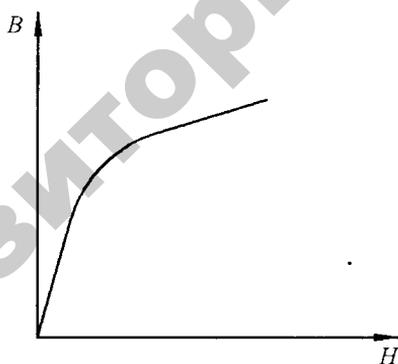
Под **вебер-амперной характеристикой** (ВБАХ) понимают зависимость магнитного потока по какому-либо участку магнитной цепи от падения магнитного напряжения на этом участке, то есть $\Phi(U_m)$.

Вебер-амперные характеристики также необходимы при расчетах и исследовании магнитных цепей, как и вольт-амперные характеристики при расчетах и исследовании нелинейных электрических цепей. При этом ВБАХ в готовом виде не задаются, поэтому нужно уметь их построить на основе кривых намагничивания ферромагнитных материалов, входящих в магнитную цепь.

Пусть на участке магнитной цепи из ферромагнитного материала с воздушным зазором (рисунок 7.16, а) проходит магнитный поток Φ .



а)



б)

Рисунок 7.16 — Схема участка магнитной цепи (а) и кривая намагничивания ферромагнитного материала (б)

Площадь сечения магнитопровода S , длина участков магнитопровода l_1 и l_2 , воздушного зазора l_b обычно задаются. Если указан материал магнитопровода, то кривую намагничивания находят в справочниках. В нашем случае зависимость $B(H)$ приведена на рисунке 7.16, б. Требуется построить ВБАХ данного участка магнитной цепи. Допускаем, что магнитный поток вдоль всего участка одинаков (отсутствует рассеяние) и сечение магнитного потока в воздушном зазоре такое же, как и на участках l_1 и l_2 (отсутствует боковой распор силовых линий в зазоре). Чем больше воздушный зазор, тем менее справедливы оба допущения.

Для построения ВБАХ выполняют необходимые расчеты с целью получения значений магнитного потока Φ и соответствующих значений падения магнитного напряжения U_m .

Благодаря принятым ранее допущениям на всей протяженности участка магнитная индукция будет одинаковой, то есть $B_1 = B_2 = B_b = \frac{\Phi}{S} = B$.

Поэтому можно задаваться рядом значений магнитной индукции B и по кривой намагничивания определять соответствующий ряд значений напряженности магнитного поля H . На участках ферромагнитного материала $H_1 = H_2 = H$, а в воздушном зазоре напряженность определяют по выражению:

$$H_b = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B}{4\pi \times 10^{-7}} \approx 0,8 \times 10^6 \times B, \quad (7.39)$$

где — магнитная проницаемость вакуума.

Для каждого значения магнитной индукции B вычисляют магнитный поток $\Phi = BS$ и падение магнитного напряжения $U_m = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_b l_b$. По результатам расчетов строят зависимость $\Phi(U_m)$.

7.13. Расчет неразветвленных магнитных цепей

К расчету магнитных цепей применимы по аналогии методы расчета нелинейных электрических цепей. Электрические и магнитные цепи подчиняются законам Кирхгофа. Аналогом тока в электрической цепи является магнитный поток в магнитной цепи, аналогом ЭДС — МДС, аналогом вольт-амперной характеристики — вебер-амперная характеристика.

Различают два типа задач по расчету неразветвленных магнитных цепей: определение МДС по заданному магнитному потоку и определение магнитного потока по заданной МДС.

Рассмотрим первый тип задачи на примере магнитной цепи (рисунок 7.17).

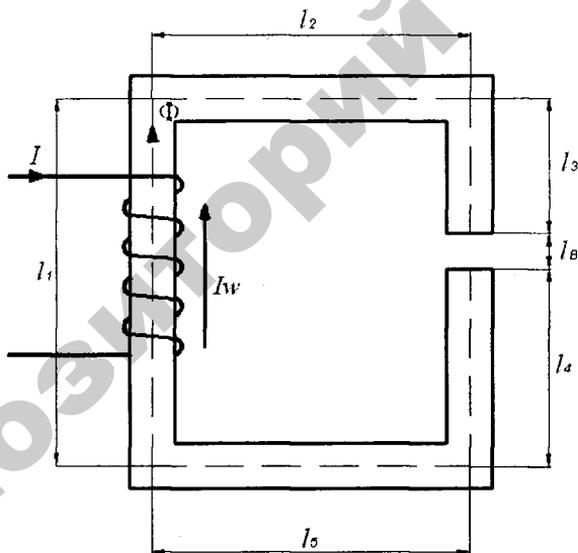


Рисунок 7.17 — Расчетная схема неразветвленной магнитной цепи, где $l_1 \dots l_2$ — длины средней линии участков магнитопровода;

l_B — длина воздушного зазора.

Обычно заданы конфигурация и геометрические размеры магнитопровода (длина участков и площадь сечений), кривые намагничивания ферромагнитных материалов и магнитный поток или магнитная индукция в каком-либо сечении. Требуется определить МДС или, входящие в выражение МДС, ток или число витков.

Исходя из постоянства магнитного потока вдоль всей цепи, по заданному магнитному потоку и сечениям находят значения магнитной индукции на каждом участке:

$$B_k = \Phi/S_k,$$

$$\text{то есть } B_1 = \Phi/S_1; \quad B_2 = \Phi/S_2; \quad B_3 = \Phi/S_3 = B_B = B_4; \quad B_5 = \Phi/S_5.$$

По кривым намагничивания определяют напряженность магнитного поля H_k для участков из ферромагнитного материала. Напряженность поля в воздушном зазоре H_B рассчитывают по формуле (7.39).

Искомую МДС определяют по второму закону Кирхгофа для контура вдоль средней линии магнитопровода

$$Iw = \sum H_k l_k,$$

$$\text{или } Iw = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_B l_B + H_4 l_4 + H_5 l_5.$$

Второй тип задачи — определение магнитного потока по заданной МДС — принципиально сводится к многократному повторению расчетов по алгоритму первого типа задачи, построению зависимости $\Phi(Iw)$ и нахождению рабочей точки. Для этого задаются рядом значений магнитного потока Φ и находят соответствующие значения Iw как в предыдущей задаче и строят зависимость $\Phi(Iw)$. По заданной МДС определяют магнитный поток.

Лекция 4

7.14. Расчет разветвленных магнитных цепей

Наиболее распространены разветвленные магнитные цепи, содержащие два узла. Рассмотрим для примера расчет разветвленной цепи (рисунок 7.18) методом двух узлов (аналог расчета нелинейной электрической цепи был изложен в пункте 7.5).

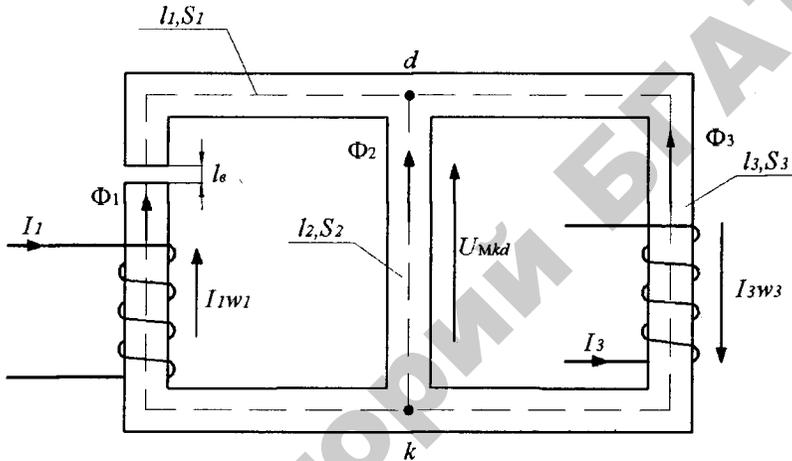


Рисунок 7.18 — Схема разветвленной магнитной цепи с двумя узлами

Заданы конфигурация магнитной цепи, геометрические размеры (длина каждой ветви сердечника l_1, l_2, l_3 , их сечения S_1, S_2, S_3 , длина воздушного зазора l_g), значения МДС $I_1 w_1$ и $I_2 w_2$, кривая намагничивания $B(H)$. Требуется определить магнитные потоки Φ_1, Φ_2 и Φ_3 .

В схеме (рисунок 7.18) определяют направления магнитодвижущих сил $I_1 w_1$ и $I_3 w_3$, пользуясь правилом правого винта. Произвольно выбирают и указывают направления магнитных потоков Φ_1, Φ_2, Φ_3 и магнитного напряжения между двумя узлами U_{mkd} (рекомендуется их направить к одному узлу).

Сущность метода заключается в нахождении такого магнитного напряжения U_{mkd} , при котором выполняется первый закон Кирхгофа:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0. \quad (7.40)$$

Для этого выражают напряжение U_{mkd} через параметры каждой из ветвей, используя второй закон Кирхгофа:

$$U_{mkd} = H_1 l_1 + H_B l_B - I_1 w_1; \quad (7.41)$$

$$U_{mkd} = H_2 l_2; \quad (7.42)$$

$$U_{mkd} = H_3 l_3 + I_3 w_3. \quad (7.43)$$

В соответствии с методикой, изложенной в п. 7.12, выполняют расчеты для построения вебер-амперных характеристик ветвей, то есть зависимостей $\Phi_1(U_{mkd})$, $\Phi_2(U_{mkd})$, $\Phi_3(U_{mkd})$. Для этого задаются значениями магнитной индукции B (положительными и отрицательными) из кривой намагничивания и находят соответствующие значения напряженности H для ферромагнитных участков цепи. Напряженность в воздушном зазоре H_B определяют по формуле (7.39). Для каждого значения B находят магнитный поток Φ по уравнению (7.23) и магнитное напряжение U_{mkd} по выражениям (7.41...7.43).

Расчеты удобно свести в таблицу.

По результатам расчетов строят в одной системе координат зависимости $\Phi_1(U_{mkd})$, $\Phi_2(U_{mkd})$ и $\Phi_3(U_{mkd})$ (рисунок 7.19)

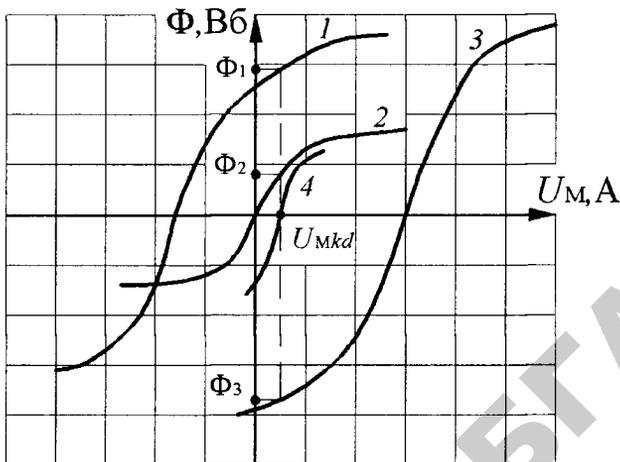


Рисунок 7.19 — Примерный вид расчетных вебер-амперных характеристик ветвей:

$$1 — \Phi_1(U_{Mkd}), 2 — \Phi_2(U_{Mkd}), 3 — \Phi_3(U_{Mkd}), 4 — \sum \Phi(U_{Mkd})$$

Так как вебер-амперные характеристики ветвей представляют собой функции одного и того же напряжения между двумя узлами для трех ветвей, то, задаваясь этим напряжением, можно суммировать магнитные потоки разных ветвей. Для облегчения поиска напряжения U_{Mkd} , при котором $\sum \Phi = 0$, можно построить зависимость $(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)(U_{Mkd})$. Задаются несколькими значениями U_{Mkd} , при которых наиболее вероятно получить сумму, равную нулю, и строят зависимость $\sum \Phi(U_{Mkd})$ (рисунок 7.19). Искомое значение U_{Mkd} будет находиться в точке пересечения этой зависимости с горизонтальной осью.

Пользуясь найденным значением U_{Mkd} , определяют магнитные потоки в каждой ветви. Затем осуществляют проверку решения по первому закону Кирхгофа.

Пример 7.2.

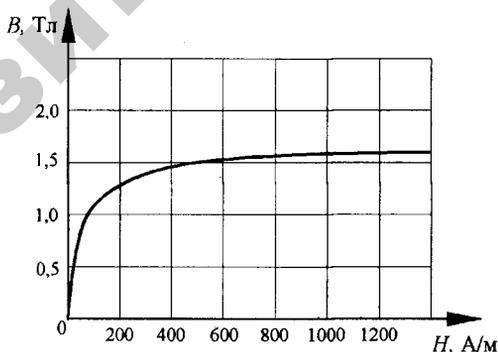
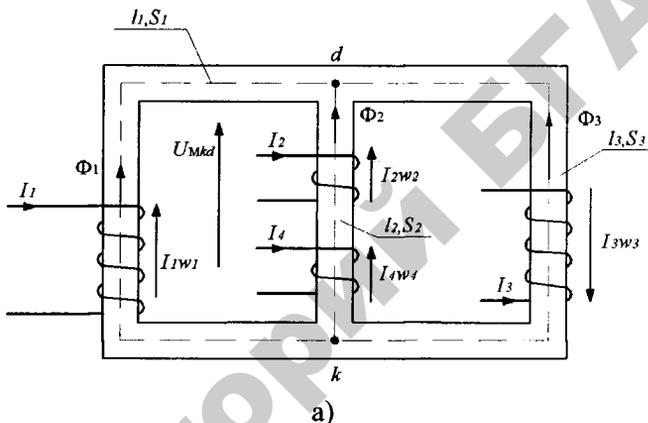
Магнитная цепь (рисунок 7.20, а) имеет параметры:

$$l_1=30 \text{ см}; \quad S_1=8 \text{ см}^2; \quad I_1=0,1 \text{ А}; \quad W_1=1450;$$

$$l_2=12 \text{ см}; \quad S_2=14 \text{ см}^2; \quad I_2=0,25 \text{ А}; \quad W_2=104; \quad W_4=50;$$

$$l_3=40 \text{ см}; \quad S_3=10 \text{ см}^2; \quad I_4=0,5 \text{ А}; \quad W_3=1000; \quad \Phi_3=15 \times 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Задана кривая намагничивания материала сердечника (рисунок 7.20, б). Определить магнитные потоки Φ_1 , Φ_2 и ток I_3 .



б)

Рисунок 7.20 — Схема магнитной цепи (а) и кривая намагничивания ферромагнитного материала (б)

Решение

Используя правило правого винта, определяют и указывают на схеме направления МДС I_1w_1 , I_2w_2 , I_3w_3 и I_4w_4 . К одному и тому же узлу направляют магнитные потоки в ветвях Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 , а также магнитное напряжение между двумя узлами U_{mkd} (рисунок 7.20, а). Ближайшей целью расчета является нахождение такого напряжения U_{mkd} , при котором будет выполняться первый закон Кирхгофа, то есть при выбранных направлениях потоков:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0. \quad (7.44)$$

Выражают напряжение U_{mkd} через параметры каждой из ветвей магнитной цепи, используя второй закон Кирхгофа:

$$U_{mkd} = H_1l_1 - I_1w_1; \quad (7.45)$$

$$U_{mkd} = H_2l_2 - I_2w_2 - I_4w_4; \quad (7.46)$$

$$U_{mkd} = H_3l_3 + I_3w_3. \quad (7.47)$$

Выполняют необходимые расчеты для построения ВБАХ ветвей. Для этого задаются значением магнитной индукции, например $B = 0,75$ Тл, по кривой намагничивания (рисунок 7.20, б) находят $H = 40$ А/м и рассчитывают напряжения U_{mkd} по уравнениям (7.45), (7.46):

$$U_{mkd} = H_1l_1 - I_1w_1 = 40 \times 0,3 - 0,1 \times 1450 = -133 \text{ А};$$

$$U_{mkd} = H_2l_2 - I_2w_2 - I_4w_4 = 40 \times 0,12 - 0,25 \times 104 - 0,5 \times 50 = -46,2 \text{ А}.$$

Так как в третьей ветви не известен ток I_3 , то построить ВБАХ $\Phi_3(U_{mkd})$ не представляется возможным. Однако дополнительное условие (известен поток Φ_3) позволит найти решение.

Для принятого значения индукции найдем значения магнитных потоков:

$$\Phi_1 = B S_1 = 0,75 \times 8 \times 10^{-4} = 6 \times 10^{-4} \text{ Вб};$$

$$\Phi_2 = B S_2 = 0,75 \times 14 \times 10^{-4} = 10,5 \times 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Таким образом, получены по одной точке характеристик $\Phi_1(U_{мкд})$ и $(U_{мкд})$. Остальные расчеты приведены в таблице 7.4.

Таблица 7.4 — Расчетные данные для построения ВБАХ ветвей

В, Тл	H, А/м	Первая ветвь				Вторая ветвь				
		$H_1 l_1,$ А	$I_1 w_1,$ А	$U_{мкд},$ А	$\Phi_1 \times 10^{-4}$ Вб	$H_2 l_2,$ А	$I_2 w_2,$ А	$I_4 w_4,$ А	$U_{мкд},$ А	$\Phi_2 \times 10^{-4}$ Вб
0	0	0	145	-145	0	0	26	25	-51	0
0,75	40	12		-133	6	4,8			-46,2	10,5
1,02	80	24		-121	8,16	9,6			-41,4	14,28
1,28	200	60		-85	10,24	24			-27	17,92
1,53	600	180		35	12,24	72			21	21,42
1,6	1200	360		215	12,8	144			93	22,4
-0,75	-40	-12		-157	-6	-4,8			-55,8	-10,5
-1,02	-80	-24		-169	-8,16	-9,6			-60,6	-14,3
-1,28	-200	-60		-205	-10,24	-24			-75	-17,9
-1,53	-600	-180		-325	-12,24	-72			-123	-21,4
-1,6	-1200	-360		-505	-12,8	-144			-195	-22,4

По результатам расчетов строят вебер-амперные характеристики ветвей $\Phi_1(U_{мкд})$ и $\Phi_2(U_{мкд})$ (рисунок 7.21).

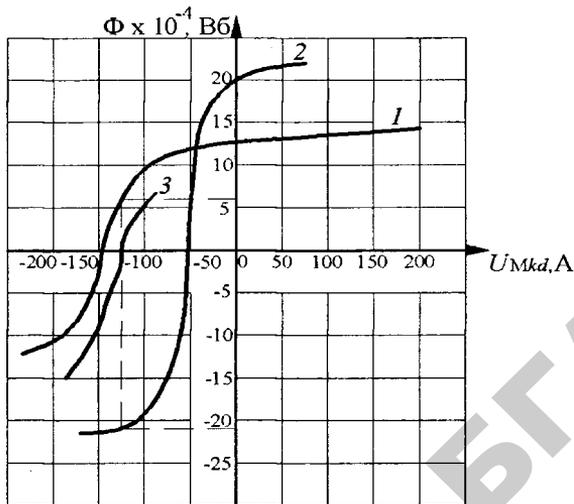


Рисунок 7.21 — Вебер-амперные характеристики:
 1— $\Phi_1(U_{mka})$, 2— $\Phi_2(U_{mka})$, 3— $\Sigma \Phi(U_{mka})$

Так как известно значение потока Φ_3 , то подставляют это значение в уравнение (7.44):

$$\Sigma \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 + 15 \times 10^{-4}.$$

Для построения зависимости $\Sigma \Phi(U_{mka})$ составляют таблицу 7.5, задавая значениями U_{mka} и суммируя соответствующие магнитные потоки.

Таблица 7.5 — Расчетные данные для построения зависимости $\Sigma \Phi(U_{mka})$

U_{mka}, A	$\Phi_1 \times 10^{-4}, Bб$	$\Phi_2 \times 10^{-4}, Bб$	$\Sigma \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + 15 \times 10^{-4}$
-75	11	-17,9	8,1
-100	10	-20	5
-125	7,9	-21,5	1,4
-150	-3	-21,5	-9,5
-175	-8,5	-22	-15,5

Зависимость $\Sigma\Phi(U_{mkd})$ (кривая 3 на рисунке 7.21) пересекает горизонтальную ось в точке $U_{mkd} = -130$ А. Соответствующие магнитные потоки $\Phi_1 = 6 \times 10^{-4}$ Вб и $\Phi_2 = -21 \times 10^{-4}$ Вб. Проверка по уравнению (7.48) подтверждает правильность решения. Направление магнитного потока Φ_2 будет противоположным принятому.

Для нахождения тока I_3 рассчитывают значение магнитной индукции:

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{15 \times 10^{-4}}{10 \times 10^{-4}} = 1,5 \text{ Тл.}$$

Из кривой намагничивания (рисунок 7.20, б) определяют соответствующее значение напряженности поля $H_3 = 500$ А/м и подставляют в выражение, полученное из уравнения (7.47):

$$I_3 = \frac{U_{mkd} - H_3 l_3}{w_3} = \frac{-130 - 500 \times 0,4}{1000} = -0,33 \text{ А.}$$

Направление тока I_3 и МДС $I_3 w_3$ противоположны указанным на схеме (рисунок 7.20, а).

7.15. Дополнительный теоретический материал для самостоятельной работы

7.15.1. Основные понятия и величины, характеризующие магнитное поле

Магнитное поле возникает в среде, окружающей проводники с током. Во многих устройствах (электрических машинах, приборах и аппаратах) необходимы определенная концентрация и конфигурация магнитного поля. Это достигается применением специальных материалов, способных значительно усиливать и концентрировать магнитное поле.

Вещества, ослабляющие внешнее магнитное поле, называют диамагнетиками. У них относительная магнитная проницаемость $\mu_r < 1$, например, у висмута $\mu_r = 0,99983$. Вещества, усиливающие

магнитное поле, называют парамагнетиками ($\mu_r > 1$, например, у платины $\mu_r = 1,00036$). Существуют вещества (железо, никель, кобальт и некоторые сплавы), способные вызывать большое усиление внешнего магнитного поля. Это ферромагнитные материалы, имеющие $\mu_r = 10^3 \dots 10^6$.

При решении большинства электротехнических задач достаточно подразделять все вещества на сильномагнитные (ферромагнитные) и слабомагнитные (практически немагнитные), у которых $\mu_r \approx 1$.

Магнитное поле в вещественных средах описывают тремя векторными величинами: вектором магнитной индукции \vec{B} , вектором намагниченности материала \vec{M} и вектором напряженности магнитного поля \vec{H} .

Магнитная индукция \vec{B} характеризует интенсивность магнитного поля в данной точке поля и численно равна силе, действующей на проводник единичной длины с током в 1 А, расположенный перпендикулярно вектору \vec{B} . В СИ единица индукции — тесла (Тл): $1 \text{ Тл} = 1 \text{ В} \times \text{с}/\text{м}^2 = 1 \text{ Вб}/\text{м}^2$.

Вектор намагниченности \vec{M} выражает магнитный момент единицы объема намагниченного вещества или сумму магнитных моментов элементарных магнитных диполей в единице его объема.

Три величины, характеризующие магнитное поле, связаны следующим соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (7.49)$$

где $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн}/\text{м}$ — магнитная постоянная, характеризующая магнитные свойства вакуума. Единица напряженности магнитного поля H и намагниченности M — ампер на метр (А/м).

Вектор намагниченности \vec{M} полагают совпадающим с вектором напряженности \vec{H} в данной точке поля:

$$\vec{M} = \chi \vec{H}, \quad (7.50)$$

где χ — коэффициент магнитной восприимчивости, который в свою очередь является функцией \vec{H} .

С учетом (7.50) выражение (7.49) преобразуем к виду:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi) = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \quad (7.51)$$

где $\mu_a = \mu_0 \mu_r$ — абсолютная магнитная проницаемость вещества, Гн/м.

Если проводник с током окружен неферромагнитным материалом, то в нем отсутствует намагниченность ($\mu_r = 1$) и тогда

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (7.52)$$

Магнитное поле можно характеризовать скалярной величиной — магнитным потоком

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (7.53)$$

где $d\vec{S}$ — вектор элементарной площадки поверхности S .

Для равномерных магнитных полей, у которых вектор индукции \vec{B} одинаковый для всех точек поверхности S и направлен перпендикулярно к этой поверхности, магнитный поток

$$\Phi = B S. \quad (7.54)$$

Магнитный поток измеряется в веберах: $1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$.

Для расчета магнитных цепей при постоянных потоках используют соотношения (7.52) и (7.54).

7.15.2. Характеристики и виды ферромагнитных материалов

Свойства ферромагнитных материалов принято характеризовать зависимостью магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H .

Различают два основных типа зависимостей $B(H)$: кривые намагничивания и гистерезисные петли.

Под кривыми намагничивания понимают однозначную зависимость между B и H , то есть каждому значению B соответствует определенное значение H .

Если ток в обмотке кольцевого магнитопровода, изготовленного из ферромагнитного материала, плавно изменять от положительного максимального значения $+I_{\max}$ до отрицательного максимального значения $-I_{\max}$ и затем в обратной последовательности, то зависимость $B(H)$ после ряда циклов перемагничивания получается в виде симметричной петли магнитного гистерезиса (рисунок 7.22).

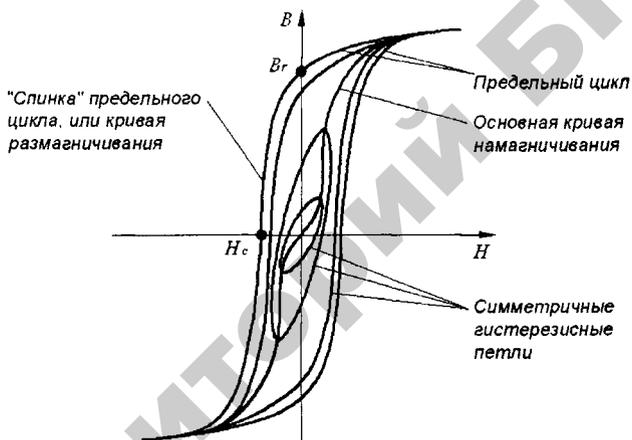


Рисунок 7.22 — Симметричные петли гистерезиса

Геометрическое место вершин симметричных гистерезисных петель называют **основной кривой намагничивания**.

Каждый из отрезков, отсекаемых петлей гистерезиса на оси ординат (при $H = 0$), определяет остаточную индукцию (B_r и $-B_r$), а каждый отрезок, отсекаемый той же петлей на оси абсцисс (при $B = 0$), — коэрцитивную (задерживающую) силу (H_c и $-H_c$). Таким образом, гистерезисная петля представляет собой неоднозначную зависимость $B(H)$ и характеризует отставание изменения магнитной индукции B от изменения напряженности магнитного поля H .

Предельной гистерезисной петлей или предельным циклом называют симметричную гистерезисную петлю, снятую при очень больших значениях напряженности H_{\max} . Участок предельного цикла $B_r H_c$ (рисунок 7.22) принято называть **кривой намагничивания** или «спинкой» гистерезисной петли. Этой кривой пользуются при расчете постоянных магнитов и магнитных элементов запоминающих устройств вычислительной техники.

Ферромагнитные материалы можно классифицировать по магнитным свойствам. Различают магнитомягкие, магнитотвердые материалы, магнитодиэлектрики и ферриты.

Магнитомягкие материалы обладают круто поднимающейся основной кривой намагничивания и относительно малыми площадями гистерезисных петель. Их применяют во всех устройствах, которые работают или могут работать при периодически изменяющихся магнитных потоках (трансформаторах, электрических двигателях, генераторах, индуктивных катушках и т.п.). Так как потери энергии на перемагничивание пропорциональны площади гистерезисной петли, то у магнитомягких материалов (электротехнические стали, железноникелевые сплавы типа пермаллоя, перминвара и др.) эти потери небольшие.

Некоторые магнитомягкие материалы, например, перминвар, сплавы 68НМП и другие, обладают петлей гистерезиса по форме, близкой к прямоугольной (рисунок 7.23, кривая 1). Такие материалы получили распространение в устройствах автоматики и вычислительной техники.

Магнитотвердые материалы имеют полого поднимающуюся основную кривую намагничивания и большую площадь гистерезисной петли (рисунок 7.23, кривая 2). Чаще всего их используют для изготовления постоянных магнитов. В группу магнитотвердых материалов входят углеродистые стали, сплавы магнито, вольфрамовые, платино-кобальтовые и сплавы на основе редкоземельных элементов.

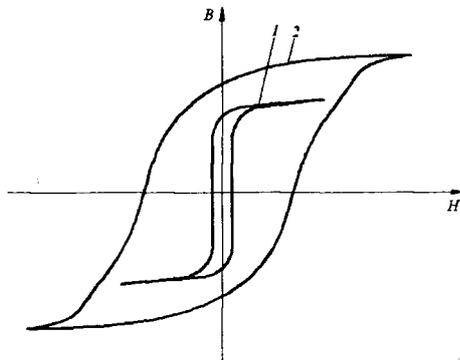


Рисунок 7.23 — Гистерезисные петли магнитомягкого (1) и магнитотвердого (2) материала

В радиотехнических, телевизионных и других устройствах, где используют высокочастотные сигналы, сердечники индуктивных катушек изготавливают из магнитоэлектриков или ферритов.

Магнитоэлектрики получают путем смешивания, формования и запекания мелкоизмельченного порошка магнетита, железа или пермаллоя с диэлектриком. Так как каждую ферромагнитную крупинку обволакивает пленка из диэлектрика, то сердечники из магнитоэлектриков не насыщаются.

Ферриты — это ферромагнитные материалы. Магнитомягкие ферриты изготавливают из оксидов железа, марганца и цинка или из оксидов железа, никеля и цинка путем формования и обжига. Магнитотвердые ферриты получают на основе феррита бария.

В отличие от магнитоэлектриков ферриты могут насыщаться.

7.15.3. Расчет магнитной цепи с постоянным магнитом

Постоянные магниты применяют в радиотехнике, в измерительных приборах с подвижной частью, например в гальванометрах, и т. п.

Для получения постоянного магнита на сердечнике из магнитотвердого ферромагнитного материала кольцевой формы (рисунок 7.24,а) наматывают обмотку и пропускают постоянный электрический ток такой величины, чтобы намагнитить сердечник до насыщения. После удаления обмотки сердечник оказывается намагниченным.

Магнитный поток в теле сердечника определяется суммой магнитных моментов всего сердечника. Если в нем сделать зазор, то объем намагниченного вещества уменьшится на объем выпиленной части сердечника. В результате этого и из-за сопротивления воздушного зазора магнитный поток в теле сердечника уменьшится. Вместе с тем это устройство представляет собой постоянный магнит, и в воздушном зазоре будет проходить магнитный поток.

Магнитная индукция в воздушном зазоре B_B зависит от соотношения между длиной зазора l_B и длиной сердечника l_C (рисунок 7.24, а). Располагая известными кривой размагничивания ферромагнитного материала (рисунок 7.24, б), размерами сердечника и зазора можно определить неизвестные величины: магнитную индукцию B_C и напряженность магнитного поля H_C в теле магнита.

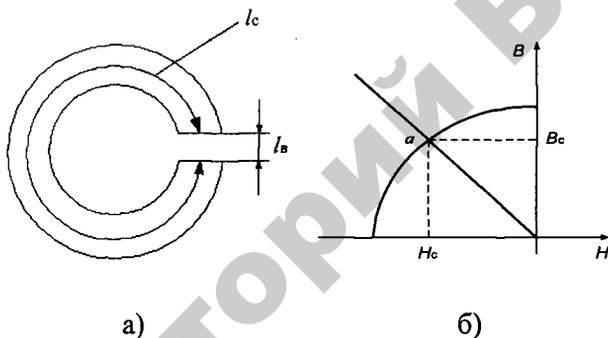


Рисунок 7.24 — Сердечник постоянного магнита (а) и кривая размагничивания ферромагнитного материала (б)

При незначительной длине воздушного зазора можно считать сечение воздушного зазора S_B равным сечению магнитопровода S_C и пренебречь рассеянием магнитного потока. Тогда индукция во всех точках магнитной цепи будет одинаковой:

$$B_C = \frac{\Phi}{S_C} = \frac{\Phi}{S_B} = B_B.$$

Выбирая путь интегрирования вдоль средней линии сердечника в соответствии с законом полного тока можно записать

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H_c l_c + H_B l_B = 0.$$

Тогда напряженность магнитного поля в сердечнике определяется выражением

$$H_c = -H_B \frac{l_B}{l_c} = -\frac{B_c}{\mu_0} \frac{l_B}{l_c} = -N_B \frac{B_c}{\mu_0},$$

где $N_B = \frac{l_B}{l_c}$ — коэффициент размагничивания или размагни-

чивающий фактор. Он определяет размагничивание, происходящее при введении воздушного зазора в магнитную цепь постоянного магнита.

Для определения H_c и B_c на рисунке 7.24, б следует построить прямую по последнему уравнению. В точке пересечения прямой с кривой размагничивания удовлетворяется связь между H_c и B_c .

Вопросы для самоконтроля

1. Какими величинами характеризуют магнитное поле? Связь между ними.
2. Как классифицируют магнитные материалы?
3. Понятие, назначение и виды магнитных цепей. Роль ферромагнитных материалов.
4. Закон полного тока.
5. Понятие МДС и падения магнитного напряжения.
6. Законы Кирхгофа для магнитных цепей. Правила знаков при составлении уравнений.
7. Составить систему уравнений по закону Кирхгофа для магнитной цепи, представленной на рисунке 7.20, а.
8. Сформулировать понятия ветвь, узел, контур в схемах магнитной цепи.
9. Понятие вебер-амперной характеристики и ее назначение.
10. Как построить вебер-амперную характеристику участка магнитной цепи.
11. Методы расчета неразветвленных магнитных цепей.
12. Сущность расчета разветвленной магнитной цепи методом двух узлов.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

7.16. Общие сведения о нелинейных электрических цепях переменного тока

В первой лекции отмечались особые свойства нелинейных цепей. Эти свойства становятся еще более многообразными при переменных токах и напряжениях, что позволяет широко использовать нелинейные элементы в отраслях техники. Внедрение нелинейных элементов можно объяснить тем, что их применение связано с получением и использованием таких явлений, которые принципиально нельзя получить в линейных цепях, например, выпрямление переменного тока в постоянный и наоборот, стабилизация напряжения, умножение и деление частоты, преобразование и получение сигналов различной формы, скачкообразное изменение фазы и амплитуды напряжения и многое другое.

Наряду с нелинейными резистивными элементами в цепях переменного напряжения используются и нелинейные реактивные элементы: индуктивные катушки и конденсаторы.

Катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником является нелинейной за счет нелинейной зависимости магнитного потока в сердечнике от протекающего по обмотке катушки тока. Катушку с ферромагнитным сердечником часто называют дросселем.

У нелинейных конденсаторов между обкладками находится сегнетоэлектрик (сегнетовая соль, титанат бария), который в отличие от обычных диэлектриков обладает способностью самопроизвольно (без внешнего электрического поля) поляризоваться. Он имеет сильную зависимость диэлектрической проницаемости от напряженности поля, давления, температуры, а также большое значение диэлектрической проницаемости. Нелинейные конденсаторы называют еще варикондами.

Изображают нелинейные элементы на схемах электрических цепей в соответствии с рисунком 7.25.

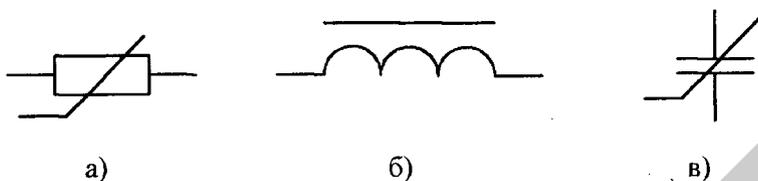


Рисунок 7.25 — Изображение нелинейных элементов на схемах электрических цепей:

- а) нелинейный резистор; б) нелинейная индуктивная катушка;
в) нелинейный конденсатор

Теоретическое исследование процессов в нелинейных электрических цепях оказывается много сложнее, чем в линейных. Это связано с тем, что характеристики элементов вольт-амперная $U(I)$, вебер-амперная $\Phi(U_m)$ (зависимость магнитного потока от магнитного падения напряжения), кулон-вольтная $q(U)$ (зависимость заряда от напряжения) нелинейны. Кроме того, наличие нелинейных элементов в цепи переменного тока приводит к тому, что при синусоидальном напряжении источника ток в ней может изменяться по периодическому, но несинусоидальному закону.

Процессы в нелинейных цепях переменного тока описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, составляемыми на основе законов Кирхгофа. Общего метода решения таких уравнений не существует.

Для анализа процессов в нелинейных цепях переменного тока может быть использован графический или графоаналитический метод расчета, который может быть произведен с некоторой степенью точности. В зависимости от того, какое нелинейное явление в цепи исследуется, какой характер цепи, характеристики нелинейных элементов, используется один из основных методов расчета, излагаемых в последующих параграфах.

7.17. Графический метод расчета нелинейных цепей переменного тока, использующий ВАХ нелинейных элементов для мгновенных значений

Данный метод применяется, как правило, в том случае, если известен закон изменения какой-либо величины во времени, например, напряжения, которая определяет работу нелинейного элемента.

Сущность этого метода аналогична графическому методу расчета нелинейных цепей постоянного тока.

Приступая к расчету нелинейной цепи переменного тока, следует иметь вольт-амперные характеристики элементов для мгновенных значений, как правило, снятые экспериментально. С помощью их и зависимости напряжения источника во времени находят закон изменения во времени второй величины, определяющей работу нелинейного элемента.

Применение данного метода рассмотрим на примере расчета цепи, изображенной на рисунке 7.26. При известной величине сопротивления резистора R , вольт-амперной характеристики диода для мгновенных значений (рисунок 7.27) и закона изменения напряжения на входе цепи $u = U_m \sin \omega t$ следует определить закон изменения тока цепи.

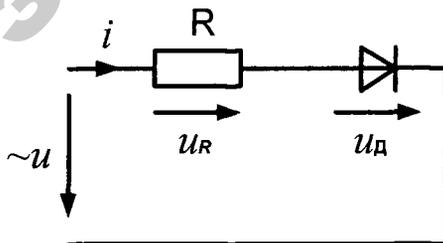


Рисунок 7.26 — Схема нелинейной цепи переменного тока

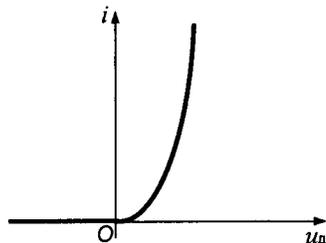


Рисунок 7.27 — Вольт-амперная характеристика диода

Так как в цепи два последовательно соединенных элемента, находят с помощью графических построений на основе второго закона Кирхгофа результирующую вольт-амперную характеристику цепи $i(u)$ (рисунок 7.28, а).

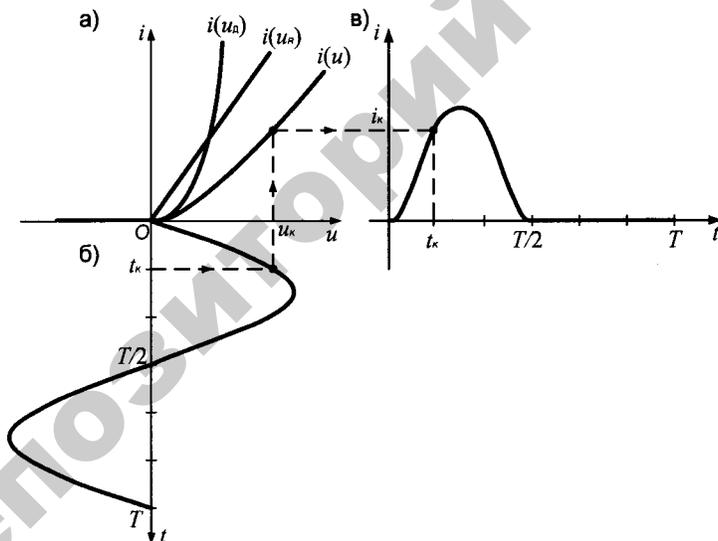


Рисунок 7.28 — Вольт-амперные характеристики элементов и цепи (а), характеристика изменения напряжения $u(t)$ (б) и характеристика изменения тока $i(t)$ (в)

Здесь же изображают характеристику зависимости напряжения $u(t)$. Для удобства дальнейших графических построений необходимо повернуть ось времени t на 90° (рисунок 7.28, б). Далее строят характеристику $i(t)$:

1. Задаются значением времени t_k . Как, правило, оно берется как составная часть периода T .
2. По значению t_k и характеристике $u(t)$ определяют значение напряжения u_k .
3. По результирующей вольтамперной характеристике $i(u)$ по напряжению u_k определяют значение тока i_k .
4. По координатам i_k, t_k находят точку характеристики $i(t)$ (рисунок 7.28, в).
5. Повторяя шаги 1–4, находят последующие точки, принадлежащие характеристике $i(t)$, по которым изображают саму характеристику.

7.18. Графоаналитический метод расчета нелинейной цепи переменного тока, использующий ВАХ нелинейных элементов по первым гармоникам

Как уже отмечалось ранее, нелинейные элементы в цепи переменного тока способны изменять форму кривой тока, а, следовательно, и падений напряжений, то есть делать их несинусоидальными.

Для расчета используют вольт-амперные характеристики, связывающие амплитуды или действующие значения первых гармоник тока и напряжения нелинейных элементов. Их получают расчетным путем или снимают экспериментально.

Основные этапы расчета состоят в следующем:

1. Произвольно задаются током первой гармоники через нелинейный элемент и по вольт-амперной характеристике находят напряжение на нем.

2. Используя комплексный метод расчета цепи синусоидального тока, находят напряжения и токи на других участках цепи и на входе цепи.

3. Задаются другими значениями тока, проводят аналогичные расчеты.

4. По полученным результатам строят зависимость напряжения от тока на входе цепи.

5. По заданному напряжению на входе цепи и построенной зависимости находят ток на входе цепи.

При необходимости найти токи в других ветвях или напряжения на отдельных элементах, в ходе расчета строят соответствующие характеристики.

Применение изложенного метода рассмотрим на примере.

Пример 7.3.

К цепи с последовательным соединением катушки с ферромагнитным сердечником и линейного резистора (рисунок 7.29) приложено напряжение $U = 110$ В. Сопротивление резистора $R = 10$ Ом. Задана вольт-амперная характеристика по действующим значениям первой гармоники тока и напряжения $U_L(I)$ (рисунок 7.30). Следует определить ток I и падения напряжения на элементах U_L и U_R .

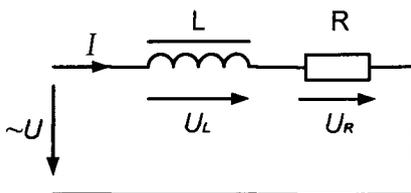


Рисунок 7.29 — Схема нелинейной электрической цепи к примеру 7.3.

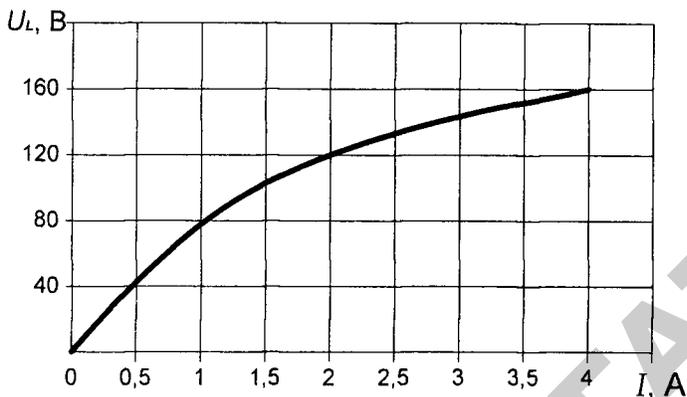


Рисунок 7.30 — Вольт-амперная характеристика нелинейной катушки по первой гармонике тока и напряжения

Решение

Для определения тока строим результирующую характеристику $U(I)$, для чего произвольно задаемся током $I = 1$ А. По вольт-амперной характеристике $U_L(I)$ определяем значение $U_L = 80$ В. На основании второго закона Кирхгофа $\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_R$. Примем начальную фазу тока ψ_i равной нулю, тогда комплексное значение тока $\dot{I} = Ie^{j0} = I = 1$ А. Так как угол сдвига фаз на индуктивном элементе $\varphi_L = \psi_{u_L} - \psi_i = 90^\circ$, то $\psi_{u_L} = 90^\circ$,

$$\text{тогда } \dot{U}_L = U_L e^{j90} = j80 \text{ В.}$$

Комплексное значение напряжения на резисторе, согласно закону Ома $\dot{U}_R = \dot{I}R = 1 \times 10 = 10$ В. Тогда $\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_R = j80 + 10$ В. Действующее значение напряжения $U = \sqrt{80^2 + 10^2} = 80,62$ В. Задаемся другими значениями тока, проводим аналогичные расчеты и результаты сводим в таблицу 7.6.

Таблица 7.6 — Расчетные данные для построения ВАХ цепи

I, A	0	0,5	1	1,5	2
U, B	0	42,3	80,62	101,12	121,65

По результатам расчетов строим вольт-амперную характеристику $U(I)$ (рисунок 7.31).

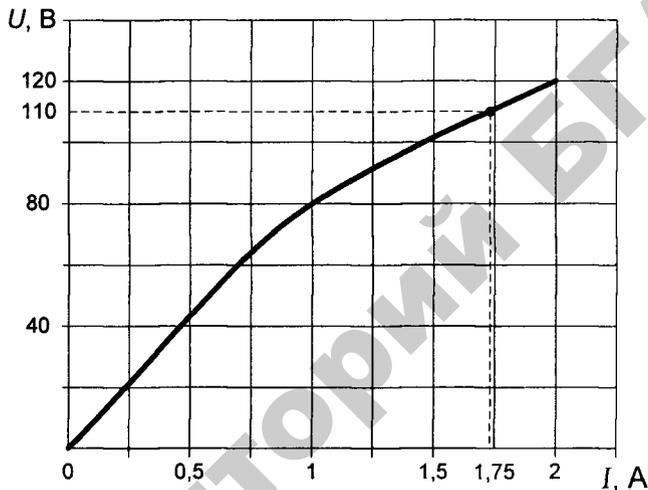


Рисунок 7.31 — Результирующая вольт-амперная характеристика цепи

По характеристике $U(I)$ при заданном напряжении $U = 110$ В находим ток $I = 1,75$ А. По характеристике $U_L(I)$ при токе $I = 1,75$ А; $U_L = 108$ В, а $U_R = IR = 17,5$ В. Проверка: $U = \sqrt{108^2 + 17,5^2} \approx 109,4$ В ≈ 110 В.

Ответ: $I = 1,75$ А; $U_L = 108$ В; $U_R = 17,5$ В.

7.19. Графоаналитический метод расчета нелинейных цепей переменного тока, использующий вольт-амперные характеристики по действующим значениям тока и напряжения

Поскольку несинусоидальные токи или напряжения могут быть заменены эквивалентными или синусоидальными величинами по их действующим значениям, то для расчета нелинейных цепей можно использовать вольт-амперные характеристики нелинейных элементов для действующих значений. Эти характеристики получают расчетным или опытным путем.

Все этапы данного метода такие же, как и у предыдущего метода расчета по первым гармоникам.

7.20. Расчет нелинейных цепей по характеристикам для мгновенных значений путем их кусочно-линейной аппроксимации

Преимуществом любого аналитического метода расчета цепей является то, что он позволяет проводить их анализ в общем виде, а не только для частных значений параметров.

Ранее отмечалось, что аналитический расчет нелинейных цепей переменного тока сложен и трудоемок, так как связан с решением нелинейных дифференциальных уравнений, составляемых по законам Кирхгофа.

С достаточной степенью точности аналитический метод можно применить, используя кусочно-линейную аппроксимацию характеристик нелинейных элементов.

Основные этапы расчета следующие:

1. Вольт-амперные, вебер-амперные, кулон-вольтные характеристики нелинейных элементов для мгновенных значений заменяются отрезками ломаной линии.

2. Составляются дифференциальные уравнения по законам Кирхгофа.

3. Уравнения каждого отрезка прямой характеристик нелинейных элементов подставляются в дифференциальные уравнения, после чего они сводятся к линейным.

Каждому нелинейному уравнению будет соответствовать столько линейных уравнений, сколько отрезков прямых заменяют характеристики нелинейных элементов.

4. Решают полученные линейные дифференциальные уравнения, причем каждому линейному участку характеристик будут соответствовать свои постоянные интегрирования. Постоянные интегрирования считаются для смежных отрезков прямых.

Трудоемкость данного метода снижается при использовании ЭВМ.

Лекция 6

7.21. Катушка с ферромагнитным сердечником в цепи переменного тока

Общие сведения

Одним из наиболее распространенных нелинейных элементов в цепях переменного тока является индуктивная катушка с ферромагнитным сердечником, применяемая при создании электрических машин переменного тока и разнообразной электротехнической аппаратуры. Ферромагнитные сердечники применяются для усиления магнитного поля и придания ему требуемой конфигурации.

Одной из особенностей катушек с ферромагнитными сердечниками является то, что токи в обмотках и магнитные потоки в сердечнике взаимосвязаны, то есть магнитный поток зависит от тока в обмотке, а токи зависят от характера изменения магнитного потока, что усложняет анализ таких цепей. Кроме того, наряду с активной

мощностью потребляемой активным сопротивлением обмотки катушки, имеет место потеря энергии, расходуемая на нагрев сердечника. Это обусловлено явлением гистерезиса и вихревыми токами. Активную мощность, идущую на нагрев сердечника, часто называют потерями мощности в стали P_C .

7.22. Потери энергии в ферромагнитном сердечнике

При протекании переменного тока по обмотке катушки возникает переменный магнитный поток, под действием которого в результате электромагнитной индукции будет наводиться ЭДС во всех контурах, пронизываемых магнитным потоком, а, следовательно, и в стальном сердечнике. В результате возникают токи, которые замыкаются по сердечнику (рисунок 7.32), их называют вихревыми токами или токами Фуко.

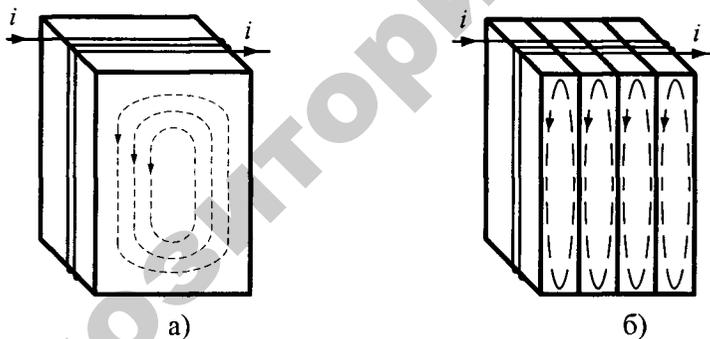


Рисунок 7.32 — Схематическое изображение прохождения вихревых токов:

а) в сплошном сердечнике; б) в изолированных листах сердечника

Вихревые токи вызывают, согласно закону Джоуля – Ленца, нагрев сердечника, то есть имеет место потеря электрической энергии. Помимо этого токи Фуко создают свой магнитный поток, ко-

торый согласно правилу Ленца будет направлен против основного магнитного потока, вызвавшего вихревые токи, то есть оказывает размагничивающее действие.

Для уменьшения потерь энергии от вихревых токов и снижения размагничивающего действия магнитопроводы изготавливают из тонких листов стали, изолированных друг от друга лаком (рисунок 7.32, б). Уменьшение токов Фуко в этом случае происходит за счет повышения электрического сопротивления, так как токи замыкаются в тонких листах по узким вытянутым путям.

Плоскость листов должна быть параллельна направлению магнитного потока, чтобы не увеличивалось магнитное сопротивление.

Для различных частот существуют свои оптимальные толщины листов. В частности, при промышленной частоте 50 Гц применяют листы толщиной 0,35–0,5 мм, при частотах порядка тысяч герц — листы толщиной 0,02–0,05 мм, а при более высоких частотах толщина листов доходит до 0,005 мм.

С целью повышения электрического сопротивления при производстве электротехнической стали добавляют до 4,8% кремния.

При высоких частотах (до 30–50 мГц) применяют сердечники, выполненные из магнитодиэлектриков или ферритов, которые обладают большим удельным электрическим сопротивлением.

Если пренебречь неравномерностью распределения магнитного потока в поперечном сечении листов магнитопровода, то мощность потерь от вихревых токов можно определить по формуле

$$P_{\text{в}} = \sigma_{\text{в}} f^2 B_m^2 G, \quad (7.55)$$

где $\sigma_{\text{в}}$ — коэффициент вихревых токов, зависящий от сорта стали и толщины стальных листов; f — частота тока; B_m — амплитуда магнитной индукции; G — масса сердечника.

Ферромагнитным материалам присуще явление гистерезиса, из-за которого в сердечнике теряется мощность, которая описывается эмпирической формулой

$$P_r = \sigma_r f B_m^n G, \quad (7.56)$$

где σ_r — гистерезисный коэффициент, зависящий от сорта стали и размеров стальных листов (определяется экспериментально); n — показатель степени ($n = 1,6$ при $B_m < 1$ Тл; $n = 2$ при $B_m = 1 \div 1,6$ Тл).

Для уменьшения потерь на гистерезис сердечники электротехнических устройств переменного тока изготавливают из магнитомягких ферромагнетиков с узкой петлей гистерезиса.

Суммарную потерю мощности в сердечнике можно определить по формуле

$$P_c = P_{уд.с} G, \quad (7.57)$$

где $P_{уд.с}$ — удельные потери мощности на килограмм массы сердечника (Вт/кг), которые приводятся в справочной литературе; G — масса сердечника, кг.

7.23. Переменный магнитный поток в катушке с ферромагнитным сердечником

Если катушка с ферромагнитным сердечником (рисунок 7.33) с числом витков w подключена к источнику синусоидального напряжения $u = U_m \sin \omega t$, то переменный ток, протекающий по ее обмотке, возбуждает переменный магнитный поток Φ , большая часть которого Φ_0 (основной магнитный поток) замыкается по сердечнику, так как магнитная проницаемость стали в тысячи раз

превышает магнитную проницаемость воздуха. Небольшая часть потока Φ_p замыкается полностью или частично по воздуху (рисунок 7.33). Эту часть потока называют потоком рассеяния. Каждый из этих потоков наводит в обмотке ЭДС.

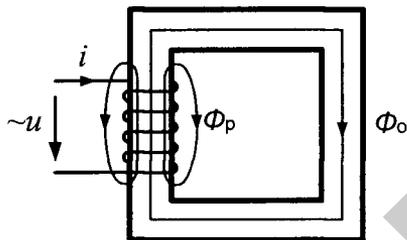


Рисунок 7.33 — Распределение магнитных потоков в катушке с ферромагнитным сердечником

Таким образом, ток в обмотке есть результат совместного действия приложенного напряжения и ЭДС e_0 и e_p , наведенных основным потоком и потоком рассеяния:

$$i = \frac{u + e_0 + e_p}{R}, \quad (7.58)$$

где R — активное сопротивление обмотки.

Из (7.58) следует, что

$$u = -e_0 - e_p + iR. \quad (7.59)$$

Активное падение напряжения iR обычно относительно мало, равно как и ЭДС рассеивания, для анализа общего характера процесса ими можно пренебречь и считать, что $u = -e_0$.

Так как ЭДС, наведенная основным магнитным потоком, равна

$$e_0 = -w \frac{d\Phi_0}{dt}, \text{ то}$$

$$U_m \sin \omega t = w \frac{d\Phi_0}{dt}. \quad (7.60)$$

На основании равенства (7.60) можно найти закон изменения основного магнитного потока во времени:

$$d\Phi_0 = \frac{U_m}{w} \sin \omega t dt;$$

$$\Phi_0 = \frac{U_m}{w} \int \sin \omega t dt = -\frac{U\sqrt{2}}{\omega w} \cos \omega t + A = \frac{U\sqrt{2}}{2\pi f w} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + A.$$

Постоянная интегрирования A изображает некоторый постоянный магнитный поток, который в сердечниках устройств переменного тока в установившихся режимах отсутствует, то есть $A = 0$. Таким образом, с достаточной степенью точности можно считать, что основной магнитный поток изменяется по синусоидальному закону и отстает от напряжения по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$\Phi_0 = \frac{U}{4,44wf} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}), \quad (7.61)$$

где амплитуда основного магнитного потока

$$\Phi_{0m} = \frac{U}{4,44wf}. \quad (7.62)$$

В расчетных формулах используется понятие амплитуды магнитного потока, так как понятие действующего значения физического смысла не имеет.

Между основным магнитным потоком и током, возбуждающим этот поток, существует нелинейная зависимость. Это является причиной того, что при синусоидальном напряжении источника ток в обмотке будет несинусоидален, что можно показать с помощью графических построений (рисунок 7.34).

При построении зависимости ординаты кривой тока для первой четверти периода определяются на основании восходящей ветви петли гистерезиса (участок ab , рисунок 7.34), для второй четверти периода — на основании нисходящей ветви (участок bc , рисунок 7.34) и так далее.

Из рисунка 7.34 видно, что ток и магнитный поток одновременно достигают своих максимальных значений, но ток опережает магнитный поток по фазе.

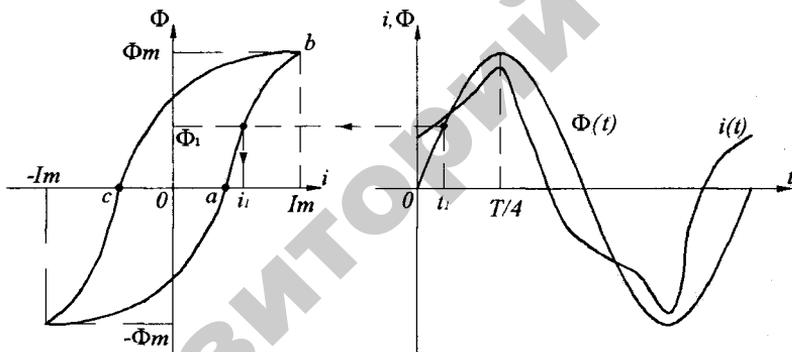


Рисунок 7.34 — Построение графика изменения намагничивающего тока во времени на основании петли гистерезиса ферромагнитного материала и зависимости $\Phi(t)$

Насыщение ферромагнетика вызывает возникновение пика в кривой тока, соответствующего четверти периода. Чем больше магнитная индукция в сердечнике, тем выше и острее этот пик. Зависимость тока от времени является несинусоидальной.

7.24. Уравнение, векторная диаграмма и схема замещения катушки с ферромагнитным сердечником

Для уточнения представления о тех явлениях, которые сопровождают протекание тока по обмотке катушки нужно отметить следующее. Основной магнитный поток, как было указано выше, нелинейно связан с током. Он пронизывает все витки обмотки и

наводит ЭДС $e_0 = -w \frac{d\Phi_0}{dt}$.

При синусоидальном основном магнитном потоке наведенная им ЭДС тоже синусоидальная и отстает от магнитного потока на 90° :

$$e_0 = -w \frac{d(\Phi_{m0} \sin \omega t)}{dt} = -w\omega\Phi_{m0} \cos \omega t = w\omega\Phi_{m0} \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Действующее значение ЭДС

$$E_0 = 2\pi f w \frac{\Phi_{m0}}{\sqrt{2}} = 4,44 f w \Phi_{m0}. \quad (7.63)$$

Поток рассеяния замыкается полностью или частично по воздуху. В связи с тем, что сопротивление воздуха магнитному потоку во много раз превышает сопротивление магнитному потоку в стали, и так как магнитная проницаемость в воздухе μ_0 постоянная, то можно считать, что потокосцепление рассеяния Ψ_p линейно зависит от намагничивающего тока:

$$\Psi_p = L_p i,$$

где L_p — индуктивность, обусловленная потоком рассеяния, который, пронизывая витки обмотки катушки, наводит ЭДС:

$$e_p = -\frac{d\psi_p}{dt} = -L_p \frac{di}{dt}. \quad (7.64)$$

Обмотка катушки обладает активным сопротивлением R . Таким образом, напряжение, приложенное к зажимам катушки, должно состоять из трех составляющих: одна из них уравнивает ЭДС, наводимую основным магнитным потоком $u_0 = -e_0$; вторая уравнивает ЭДС рассеяния $u_p = -e_p = L_p \frac{di}{dt}$; третья компенсирует падение напряжения в активном сопротивлении $u_R = iR$. Уравнение электрического состояния, учитывающее эти три составляющие, имеет вид:

$$u = u_0 + u_p + u_R. \quad (7.65)$$

При наличии ферромагнитного сердечника ток в обмотке индуктивной катушки изменяется по несинусоидальному закону. Однако в расчетах цепей, содержащих катушки с ферромагнитными сердечниками, в большинстве случаев допустимо существенное упрощение реальных условий, заключающееся в замене действительного несинусоидального тока эквивалентным синусоидальным. Условием эквивалентности токов является равенство действующих значений этих токов и равенство вызываемых ими потерь мощности. Такая замена существенно упрощает расчеты, так как позволяет применять методы расчета цепей синусоидального тока.

Уравнения электрического состояния катушки можно записать для действующих значений в комплексной форме:

$$\dot{U} = \dot{U}_0 + \dot{U}_p + RI. \quad (7.66)$$

Так как $u_p = -e_p = L_p \frac{di}{dt} = I_m \omega L_p \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$, то комплекс действующего значения напряжения, уравновешивающего ЭДС рассеяния,

$$\dot{U}_p = \dot{I} \omega L_p e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_p \dot{I},$$

где $X_p = \omega L_p$ — индуктивное сопротивление, обусловленное потокоцеплением рассеяния.

Уравнение катушки в комплексной форме запишет вид:

$$\dot{U} = \dot{U}_0 + jX_p \dot{I} + IR. \quad (7.67)$$

Соотношение напряжений и тока катушки наглядно иллюстрирует ее векторная диаграмма (рисунок 7.35).

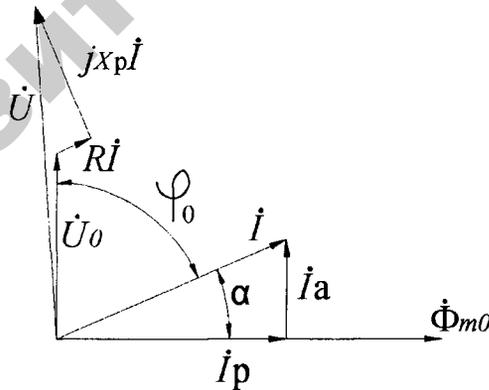


Рисунок 7.35 — Векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником

При построении векторной диаграммы за исходный вектор удобно взять вектор амплитуды основного магнитного потока $\dot{\Phi}_{m0}$. Вектор тока \dot{I} , как уже было показано выше, должен опережать вектор магнитного потока $\dot{\Phi}_{m0}$ на угол α (угол магнитного запаздывания) из-за потерь мощности в сердечнике. Исходя из этого, можно считать, что ток состоит из двух составляющих, одна из них представляет реактивный ток $I_p = I \cos \alpha$, возбуждающий основной магнитный поток и совпадающий с ним по фазе, вторая — активный ток $I_a = I \sin \alpha$, обусловленный потерями мощности в ферромагнитном сердечнике от гистерезиса и вихревых токов.

Таким образом

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}. \quad (7.68)$$

Вектор напряжения \dot{U} , приложенного к катушке, определяют на основании уравнения (7.67) путем суммирования трех составляющих \dot{U}_0 , $\dot{I}R$, и $jX_p \dot{I}$.

Вектор напряжения \dot{U}_0 , уравновешивающего ЭДС, наведенную основным магнитным потоком, опережает вектор магнитного потока $\dot{\Phi}_{m0}$ на 90° , вектор $\dot{I}R$ совпадает по фазе с вектором тока \dot{I} , а вектор $jX_p \dot{I}$ опережает вектор тока \dot{I} на 90° .

Уравнениям (7.67) и (7.68) и векторной диаграмме (рисунок 7.35) должна соответствовать схема замещения, при построении которой уравнения (7.67) и (7.68) можно рассматривать как первый и второй законы Кирхгофа для схемы со смешанным соединением сопротивлений, представленной на рисунке 7.36, а.

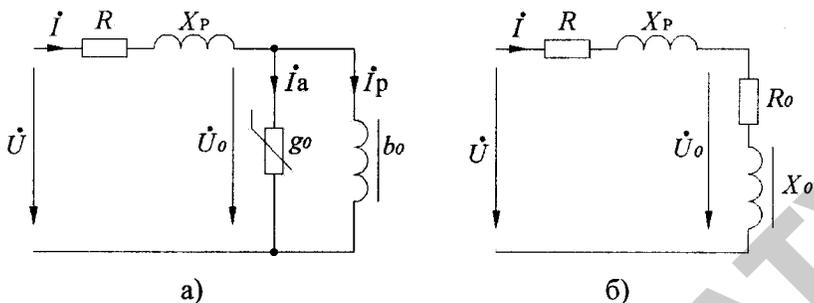


Рисунок 7.36 — Схема замещения катушки с ферромагнитным сердечником при смешанном (а) и последовательном (б) соединении сопротивлений

Так как ток состоит из двух составляющих, то одна из параллельных ветвей — ветвь намагничивающего тока, обладает только реактивной проводимостью, вторая обладает только активной проводимостью, обусловленной потерями мощности в сердечнике, и эти проводимости непостоянны.

Проводимости можно определить следующим образом. Активная проводимость:

$$g_0 = \frac{I_a}{U_0}.$$

Если учесть, что $U \approx U_0$, то

$$g_0 = \frac{I_a}{U} = \frac{I_a U}{U^2} = \frac{P_{ст}}{U^2},$$

где $P_{ст}$ — потеря мощности в стали.

Реактивная проводимость

$$b_0 = \frac{I_p}{U_p} = \frac{I_p U}{U^2} = \frac{Q_{ст}}{U^2},$$

где $Q_{ст}$ — реактивная мощность, необходимая для возбуждения основного магнитного потока.

Разветвленный участок схемы замещения (рисунок 7.36, а) можно заменить неразветвленным с последовательным соединением эквивалентных сопротивлений (рисунок 7.36, б) R_0 и X_0 , где

$$R_0 = \frac{P_{ст}}{I^2} = \frac{g_0}{g_0^2 + b_0^2},$$

$$X_0 = \sqrt{Z_0^2 - R_0^2} = \sqrt{\frac{U_0^2}{I^2} - R_0^2} \text{ или } X_0 = \frac{b_0}{g_0^2 + b_0^2}.$$

На ток катушки влияет размер воздушного зазора в ее сердечнике. Как известно, магнитная проницаемость воздуха значительно меньше магнитной проницаемости стали, поэтому воздушный зазор имеет значительно большее магнитное сопротивление, чем участок той же длины из ферромагнитного материала. Наличие воздушного зазора приводит к увеличению магнитного сопротивления сердечника. Это значит, что при одном и том же токе I магнитный поток Φ_0 будет меньшим. Соответственно уменьшится и наводимая этим потоком ЭДС E_0 и равное ей напряжение U_0 . Как видно из уравнения индуктивной катушки (7.67), при неизменном напряжении U уменьшение напряжения U_0 вызовет увеличение падений напряжения RI и $\omega L_p I$ вследствие увеличения тока. Ток I будет тем больше, чем больше воздушный зазор в сердечнике.

Влияние величины зазора на ток катушки имеет определенное практическое значение. Например, в сварочных трансформаторах изменением зазора в сердечнике регулируют величину требуемого сварочного тока. Повышенная вибрация и гул катушки магнитного пускателя указывают на неплотное примыкание частей магнитопровода вследствие образования ржавчины, попадания инородных частей и необходимость профилактического обслуживания.

Лекция 7

7.25. Феррорезонанс в электрических цепях

Резонансом в электрических цепях понимают явление, когда частота колебаний энергии совпадает с собственной частотой колебательного контура, при этом ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе. Это явление принимает весьма своеобразную форму, называемую феррорезонансом, при наличии индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником.

Индуктивность такой катушки непостоянная из-за нелинейной зависимости магнитного потока от силы тока. Вследствие этого при изменении силы тока изменяется и собственная частота колебательного контура. Это значит, что явление резонанса можно вызвать изменением напряжения на зажимах колебательного контура при неизменной частоте напряжения источника без регулирования емкости и индуктивности.

Сердечник катушки должен быть замкнут, так как воздушный промежуток в магнитной цепи значительно уменьшает изменение индуктивности из-за своего большого магнитного сопротивления.

В зависимости от способа соединения элементов колебательного контура возможны две основные формы феррорезонанса: феррорезонанс напряжений и феррорезонанс токов.

7.26. Феррорезонанс напряжений

Феррорезонанс напряжений может возникнуть в цепи с последовательным соединением конденсатора и катушки с ферромагнитным сердечником (рисунок 7.37).

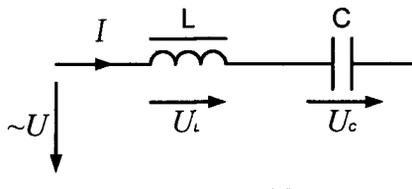


Рисунок 7.37 — Цепь феррорезонанса напряжений

Феррорезонансом напряжений называют режим работы цепи, при котором первая гармоника тока в цепи совпадает по фазе с напряжением источника ЭДС.

Для анализа явлений феррорезонансов несинусоидальные токи и напряжения заменяют их эквивалентными синусоидальными величинами и используют вольт-амперные характеристики для действующих значений.

Вольт-амперные характеристики катушки и конденсатора должны иметь точку пересечения.

Для изучения общего хода процесса пренебрегают потерями мощности в сердечнике и высшими гармониками. При таком упрощении напряжение на зажимах цепи согласно второму закону Кирхгофа определяется по выражению:

$$\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I} j\omega L + \dot{I} \left(-j \frac{1}{\omega C}\right).$$

Так как напряжения на индуктивности и емкости противоположны по фазе, то напряжение на входе цепи равно разности этих напряжений:

$$U = U_L - U_C.$$

Эту разность легко определить графически, используя вольт-амперные характеристики индуктивного и емкостного элементов (рисунок 7.38).

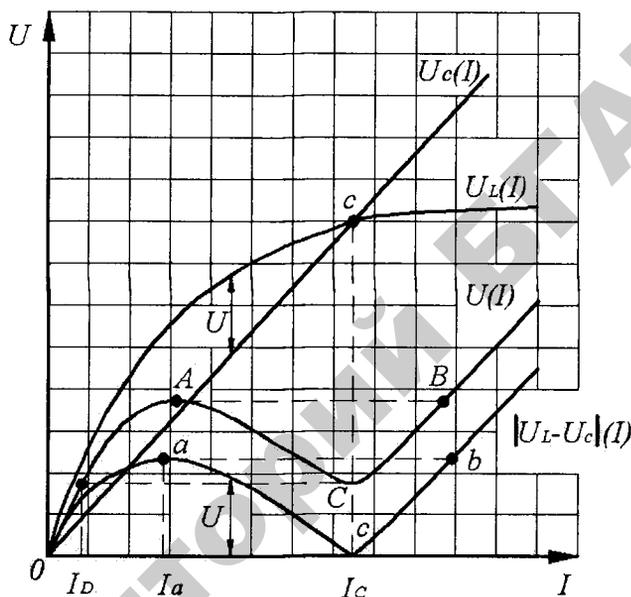


Рисунок 7.38 — Вольт-амперные характеристики элементов и цепи при феррорезонансе напряжений

Отрезки ординат между характеристиками $U_L(I)$ и $U_C(I)$ равны напряжению на зажимах цепи U . Точка пересечения характеристик $U_L(I)$ и $U_C(I)$, то есть точка c определяет режим, когда $U_L = U_C$, то есть режим феррорезонанса напряжений.

На основании графических построений можно проследить изменение условий в цепи при постепенном повышении напряжения U .

При малых значениях этого напряжения сила тока мала и отста-

ет по фазе от напряжения U на 90° , так как в цепи преобладает реакция индуктивности. Оба напряжения U_L и U_C малы, но $U_L > U_C$. По мере постепенного повышения напряжения U сила тока и падения напряжений U_L и U_C возрастают при сохранении преобладания реакции индуктивности.

Наконец, напряжение на входе цепи приближается к критическому значению, определяемому точкой a (рисунок 7.38). Дальнейшее плавное изменение режима цепи становится невозможным, так как увеличение напряжения на зажимах цепи увеличивает силу тока, но при этом уменьшает разность падений напряжений $U_L - U_C$, следовательно, в цепи нарушается равновесие напряжений.

При силе тока $I > I_a$ напряжение $U > |U_L - U_C|$. Происходит быстрое скачкообразное нарастание тока от точки a к точке b . Явление резкого изменения тока в цепи при незначительном изменении напряжения на входе называют триггерным или релейным эффектом в последовательной феррорезонансной цепи.

При скачкообразном нарастании тока скачкообразно растут напряжения на емкостном U_C и индуктивном U_L элементах.

При скачке тока сердечник катушки насыщается, вследствие чего напряжение U_L остается далее почти неизменным даже при значительном изменении напряжения на входе цепи U .

Скачкообразное нарастание тока происходит до тех пор, пока цепь не перейдет к условиям, когда в ней будет преобладать реакция емкости, то есть $U_C > U_L$ и восстановится равновесие $U = U_C - U_L$.

Этому условию соответствует точка b на результирующей вольт-амперной характеристике (рисунок 7.38).

Фаза тока по отношению к приложенному напряжению изменится на 180° . Ток опережает напряжение U на 90° . Это явление называют «опрокидыванием фазы».

При дальнейшем увеличении напряжения увеличение тока происходит плавно, сохраняется емкостной характер цепи.

При понижении напряжения ток плавно уменьшается. Когда напряжение цепи U станет равным U_b , то никакого скачкообразного изменения тока не происходит, так как режим с преобладанием реакции емкости устойчив и, постепенно понижая напряжение до нуля, можно было бы осуществить условие резонанса напряжений $U_L = U_C$, которому соответствует точка c . В действительности из-за наличия активной составляющей тока, обусловленной потерями мощности, и высших гармоник реальная вольт-амперная характеристика $U(I)$ расположена несколько выше кривой $Oacb$ (кривая $OACB$, рисунок 7.38). При уменьшении приложенного напряжения до значения чуть меньше напряжения в точке C , произойдет еще один скачок тока от значения I_C до значения I_D с опрокидыванием фазы.

Если последовательно в цепь включить достаточно большое линейное активное сопротивление, то можно получить устойчивую работу цепи и на падающем участке вольтамперной характеристики $U(I)$, то есть релейный эффект будет отсутствовать.

7.27. Феррорезонанс токов

Явление феррорезонанса токов имеет место при параллельном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора (рисунок 7.39).

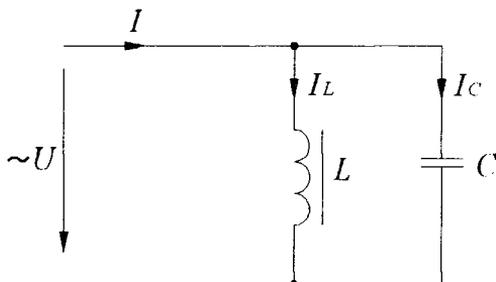


Рисунок 7.39 — Цепь феррорезонанса токов

Если пренебречь высшими гармониками тока, проходящего через индуктивный элемент, и потерями мощности, то на основании первого закона Кирхгофа имеем:

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C.$$

Так как токи I_L и I_C противоположны по фазе, то ток I может быть определен графически (рисунок 7.40) как разность абсцисс кривых $I_L(U)$ и $I_C(U)$.

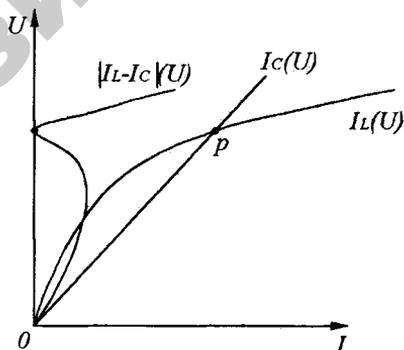


Рисунок 7.40 — Вольт-амперные характеристики в цепи феррорезонанса токов

Точка p пересечения вольт-амперных характеристик будет соответствовать режиму резонанса. При постепенном увеличении напряжения до феррорезонанса токов в цепи преобладает емкостный ток, после — индуктивный.

В виду наличия высших гармоник и потерь мощности, ток цепи I в режиме феррорезонанса не может быть равным нулю (рисунок 7.41).

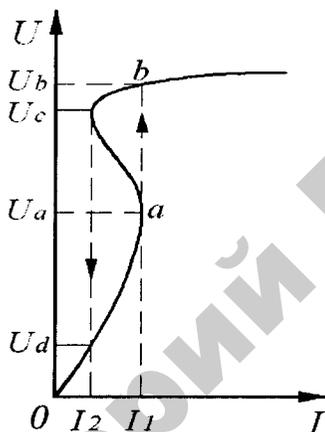


Рисунок 7.41 — Вольт-амперная характеристика феррорезонансной цепи с феррорезонансом токов

Плавное изменение напряжения на входе цепи не приводит к триггерному эффекту. Его можно наблюдать, если в качестве источника энергии взять источник тока. Тогда при плавном изменении тока от нуля до тока I_1 (рисунок 7.41) напряжение на входе цепи скачком возрастет с U_a до U_b , а при плавном уменьшении тока и достижении значения I_2 напряжение скачком уменьшится с U_c до U_d .

7.28. Переходные процессы в нелинейных цепях

Переходные процессы в нелинейных цепях существенно отличаются от переходных режимов в линейных цепях в количественном и качественном плане. В одном случае нелинейность характеристик элементов может привести к увеличению скорости процесса в одном из промежутков времени и уменьшению в другом, при этом может возрасти максимальное значение тока. В другом случае могут возникнуть явления, которые принципиально не могут иметь место в линейных цепях. Например, в линейных цепях переходный процесс носит затухающий характер и переходит в установившийся режим, частота которого равна частоте ЭДС (при подключении цепи к источнику). В нелинейных же цепях подобное включение может привести к возникновению колебаний, отличных от частоты ЭДС источника (автоколебания).

В виду того, что процессы в нелинейных цепях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, при расчете приходится использовать графические методы или различного рода приближенные аналитические. Рассмотрим некоторые из них на примере включения нелинейной катушки к источникам синусоидального и постоянного напряжения.

7.29. Включение катушки с ферромагнитным сердечником под синусоидальное напряжение

Рассмотрим важный для практики случай включения катушки с ферромагнитным сердечником под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ (рисунок 7.42).

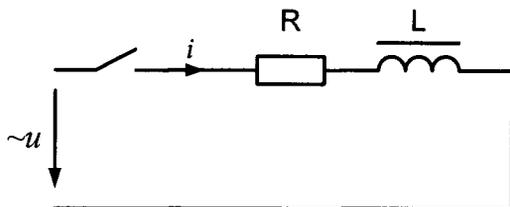


Рисунок 7.42 — Включение нелинейной цепи к источнику синусоидального напряжения

Согласно второму закону Кирхгофа

$$u = Ri + \frac{d\Psi}{dt}, \quad (7.69)$$

где $\frac{d\Psi}{dt}$ — напряжение, уравнивающее ЭДС самоиндукции.

Обычно $Ri \ll \frac{d\Psi}{dt}$, так как сопротивление R обмоток мощных

ненагруженных трансформаторов незначительно. Зависимость потокосцепления $\Psi = Li$ является нелинейной, так как индуктивность L есть функция i (рисунок 7.43).

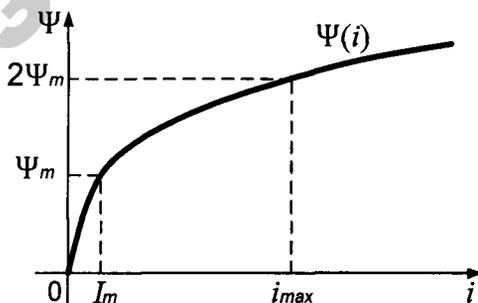


Рисунок 7.43 — График зависимости потокосцепления от тока катушки с ферромагнитным сердечником

Если в уравнение (7.69) подставить вместо Ψ его выражение через i , то уравнение относительно тока будет содержать нелинейность в главном слагаемом. Примем, что во второстепенном слагаемом уравнения (7.69) ток i линейно зависит от потокосцепления:

$$\Psi = L_3 i,$$

где $L_3 = \frac{\Psi_m}{I_m}$ — отношение амплитудных значений потокосцепления и тока в установившемся режиме (приближенно $\Psi_m = \frac{U_m}{\omega}$).

Если выразить i через Ψ , то получим уравнение цепи в виде

$$u = \frac{R}{L_3} \Psi + \frac{d\Psi}{dt}. \quad (7.70)$$

Уравнение (7.70) линейное и его решение представим в виде суммы двух составляющих:

$$\Psi = \Psi_y + \Psi_{св},$$

Установившееся значение потокосцепления определим по выражению:

$$\Psi_y = L_3 i_y = L_3 \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L_3)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) = \Psi_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi), \quad (7.71)$$

$$\text{где } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L_3}{R}.$$

Таким образом, потокосцепление в установившемся режиме изменяется по синусоидальному закону.

Свободная составляющая потокосцепления находится как об-

$$\text{щее решение уравнения } \frac{R}{L_3} \Psi_{св} + \frac{d\Psi_{св}}{dt} = 0:$$

$$\Psi_{\text{св}} = Ae^{pt}.$$

По характеристическому уравнению $\frac{R}{L_3} + p = 0$ определим его корень: $p = -\frac{R}{L_3}$.

Постоянная интегрирования A определяется из начальных условий. При $t = 0$

$$\Psi(0) = \Psi_y(0) + \Psi_{\text{св}}(0).$$

На основании первого закона коммутации без учета остаточного намагничивания $\Psi(0) = 0$.

Тогда $0 = \Psi_m \sin(\psi_u - \varphi) + A$, откуда $A = -\Psi_m \sin(\psi_u - \varphi)$.

Таким образом, в переходном процессе потокосцепление будет изменяться согласно выражению

$$\Psi = \Psi_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \Psi_m \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L_3} t}. \quad (7.72)$$

Переходный процесс проявляется наиболее интенсивно, когда начальная фаза напряжения $\psi_u = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$. Пусть $\psi_u = \varphi - \frac{\pi}{2}$, тогда уравнение (7.72) принимает вид

$$\Psi = \Psi_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \Psi_m e^{-\frac{R}{L_3} t}. \quad (7.73)$$

По уравнению (7.73) строим зависимость $\Psi(t)$ (рисунок 7.44).

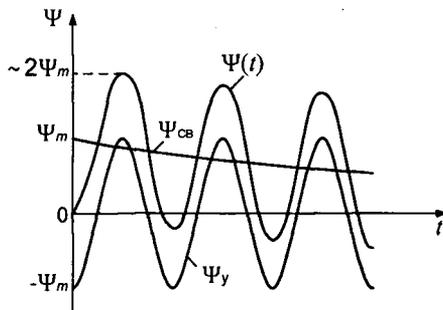


Рисунок 7.44 — Кривая потокосцепления $\Psi(t)$ и его составляющих при включении катушки с ферромагнитным сердечником под синусоидальное напряжение

Мы видим, что при большой постоянной времени L_3/R по сравнению с периодом $T = 2\pi/\omega$ потокосцепление может достичь через полпериода почти удвоенного значения своей амплитуды Ψ_m . На рисунке 7.43 приведена нелинейная характеристика $\Psi(i)$. При установившемся процессе амплитуда тока I_m , соответствующая амплитуде потокосцепления Ψ_m , имеет незначительную величину. Однако при увеличении потокосцепления до $2\Psi_m$ ток получает весьма большое значение вследствие нелинейности характеристики $\Psi(i)$.

С помощью зависимостей $\Psi(i)$ (рисунок 7.43) и $\Psi(t)$ (рисунок 7.44) можно построить график изменения тока i во времени в переходном процессе (рисунок 7.45).

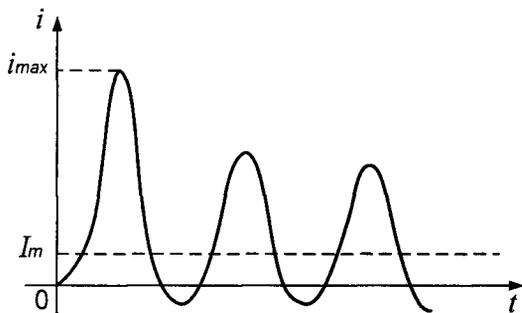


Рисунок 7.45 — График изменения переходного тока во времени

Таким образом, если при включении линейной индуктивности на переменное напряжение наибольшее значение тока не может превышать удвоенную амплитуду его установившегося значения, то в аналогичном случае с катушкой с ферромагнитным сердечником наибольшее значение переходного тока i_{\max} может во много раз превышать амплитуду его установившегося значения I_m .

Такой всплеск тока может вызвать механическое разрушение обмотки, так как электродинамические усилия пропорциональны квадрату тока. Поэтому мощные ненагруженные трансформаторы включают через дополнительные сопротивления, которые затем замыкают накоротко. При включении маломощных трансформаторов защитные токовые устройства должны срабатывать с задержкой по времени.

Рассмотренный метод расчета переходного процесса в нелинейной цепи основан на условной линеаризации уравнения цепи.

7.30. Метод последовательных интервалов

Рассмотрим метод последовательных интервалов на примере включения нелинейной катушки к источнику постоянного напряжения U (рисунок 7.42). Для расчета следует иметь зависимость потокосцепления Ψ от тока i (рисунок 7.43).

По второму закону Кирхгофа

$$Ri + \frac{d\Psi}{dt} = U. \quad (7.74)$$

Разобьем время переходного процесса на интервалы Δt . Для оценки выбора величины Δt необходимо рассчитать по установившимся значениям Ψ_y и I_y постоянную времени $\tau = L_s/R = \Psi_y/(I_y R)$, которая характеризовала бы процесс при $L = L_s = \text{const}$. Можно принять Δt равным примерно десятой доли τ . Установившееся значение тока в цепи $I_y = U/R$, так как при питании цепи от источника постоянного напряжения $\frac{d\Psi_y}{dt} = 0$.

Уравнение (7.74) можно записать в виде

$$\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} \approx U - Ri. \quad (7.75)$$

На основании уравнения (7.75) приращение потокосцепления для k -го интервала времени

$$\Delta\Psi_k = \Psi_k - \Psi_{k-1} = (U - Ri_{k-1})\Delta t. \quad (7.76)$$

Уравнение (7.76) представляет собой основную формулу расчета.

Рассчитаем первое приращение потокосцепления $\Delta\Psi_1 = \Psi_1 - \Psi_{1-1}$. Считая, что остаточное намагничивание отсутствует, $\Psi_{1-1} = \Psi_0 = 0$ и $i_{1-1} = i_0 = 0$, тогда

$$\Delta\Psi_1 = \Psi_1 = U\Delta t.$$

По значению потокосцепления Ψ_1 на кривой $\Psi(i)$ (рисунок 7.43) находим ток i_1 .

Аналогично рассчитываем потокосцепление для второго интервала

$$\Delta\Psi_2 = \Psi_2 - \Psi_{2-1}; \quad \Psi_2 = \Delta\Psi_2 + \Psi_1,$$

где $\Delta\Psi_2 = (U - Ri_1)\Delta t$.

После чего по значению потокосцепления Ψ_2 на кривой $\Psi(i)$ находим ток i_2 .

Таким образом, используя вышеизложенную логическую цепь $\Delta\Psi_k \rightarrow \Psi_k \rightarrow i_k \rightarrow \Delta\Psi_{k+1} \rightarrow \Psi_{k+1} \rightarrow i_{k+1}$, определяют зависимость $i(t)$ (рисунок 7.76).

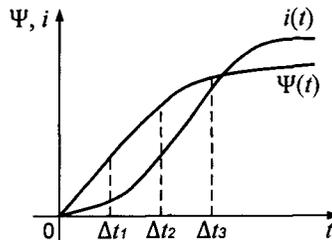


Рисунок 7.46 — Построение зависимости $i(t)$ по методу последовательных интервалов

7.31. Контрольные вопросы для самопроверки

1. Изложить основные этапы графического метода расчета нелинейных цепей синусоидального напряжения при использовании вольт-амперных характеристик для мгновенных значений.

2. Записать уравнение индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником, подключенной к источнику синусоидального напряжения, пояснить смысл составляющих уравнения.

3. Чем отличается резонанс в нелинейных цепях от резонанса в линейных?

4. Изложить порядок расчета переходных процессов в нелинейных цепях методом линеаризации, методом последовательных интервалов.

Материалы к практическим занятиям

Для подготовки к практическим занятиям необходимо изучить теорию нелинейных электрических и магнитных цепей, их методы расчета. Рекомендуется воспользоваться методическими указаниями к практическим занятиям по ТОЭ, ч. 3 [11]. Ответить на контрольные вопросы.

Практическое занятие 1

Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока при последовательном, параллельном и смешанном соединении нелинейных резисторов

Задача занятия: изучить и усвоить методику графического расчета нелинейных электрических цепей.

План занятия:

1. Провести входной контроль по основным теоретическим положениям по теме.

2. Решение задач под руководством преподавателя.
3. Самостоятельная работа студентов по индивидуальным заданиям.
4. Подведение итогов. Выдача заданий по УСРС.

Контрольные вопросы для подготовки к практическому занятию 1

1. Понятие линейных и нелинейных электрических цепей.
2. Вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов.
3. Способы представления вольт-амперной характеристики.
4. Законы Кирхгофа для нелинейных электрических цепей постоянного тока, правила знаков.
5. Последовательность графического метода расчета нелинейной электрической цепи:
 - а) при последовательном соединении резисторов;
 - б) при параллельном соединении резисторов;
 - в) при смешанном соединении резисторов.
6. Как по вольт-амперной характеристике получить зависимость сопротивления R от тока I ?

Примеры практического применения теоретического материала

1. Двухполюсник состоит из последовательно включенных резистора $R = 100$ Ом и германиевого диода VD (рисунок 7.47). ВАХ двухполюсника $I(U)$ задана (таблица 7.7).

Таблица 7.7

$U, \text{В}$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
$I, \text{мА}$	0	1,2	3,5	6,4	9,4	12,3

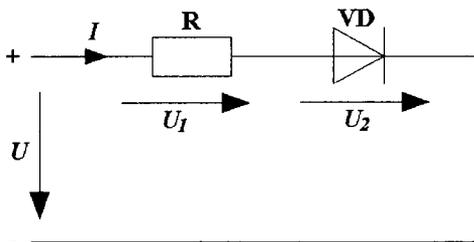


Рисунок 7.47

Построить ВАХ диода $I(U_2)$. Определить напряжения U , U_1 , U_2 при $I = 10$ мА.

Решение

Расчет проводим графическим методом.

Построим ВАХ двухполюсника $I(U)$ (рисунок 7.48) на основании данных таблицы 7.7. Чтобы построить ВАХ линейного резистора $I(U_1)$, необходимо иметь хотя бы две точки. Зададимся произвольно значением тока, протекающего по резистору. Пусть $I = 8$ мА $= 8 \times 10^{-3}$ А.

Тогда $U_1 = IR = 8 \times 10^{-3} \times 100 = 0,8$ В.

По двум точкам с координатами 0,0 и 8 мА, 0,8 В строим линейную характеристику $I(U_1)$ (рисунок 7.48).

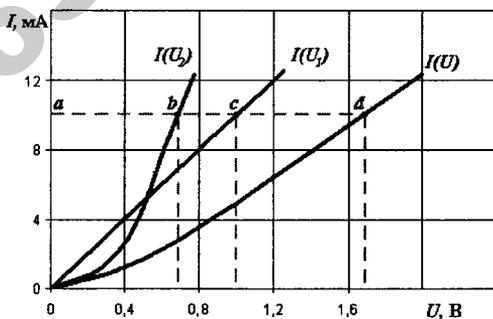


Рисунок 7.48

На основании второго закона Кирхгофа

$$U_2 = U - U_1.$$

Для построения ВАХ диода необходимо произвести вычитание абсцисс ВАХ $I(U)$ и $I(U_1)$, соответствующих каждому произвольно принятому значению тока. Например, для тока $I = 10$ мА $ab = ad - ac$. Приняв другие значения тока, получим другие точки ВАХ $I(U_2)$.

По заданному току двухполюсника $I = 10$ мА проводим горизонтальную линию и на пересечении с ВАХ в точках b и d находим соответствующие напряжения, то есть $U_2 = 0,68$ В и $U = 1,68$ В.

По закону Ома

$$U_1 = RI = 100 \times 10 \times 10^{-3} = 1 \text{ В.}$$

Проверка: $U_1 + U_2 = U$; $1 + 0,68 = 1,68$, то есть расчет выполнен правильно.

2. Для стабилизации напряжения на приемнике параллельно ему присоединили стабилитрон (рисунок 7.49), ВАХ которого $I_1(U_n)$ задана (рисунок 7.50). Определить пределы изменения напряжения приемника U_n , если напряжение источника питания $U = 12$ В изменяется в пределах $\pm 10\%$. Сопротивление $R = 1,2$ кОм, $R_n = 10$ кОм.

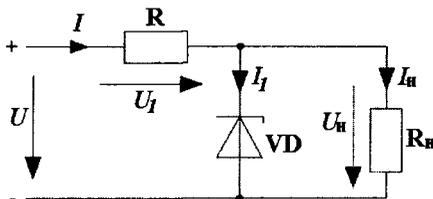


Рисунок 7.49

Решение

Строим результирующую ВАХ смешанного соединения резисторов в соответствии с методикой, изложенной в п. 1.2.3. Для этого сначала строим результирующую ВАХ $I(U_H)$ параллельного соединения стабилитрона VD и резистора приемника R_H , а затем результирующую ВАХ $I(U)$ последовательного соединения резистора R и эквивалентного резистора R_{HVD} .

Чтобы выполнить указанные преобразования, воспользуемся методами построения результирующих ВАХ для параллельного и последовательного соединений резисторов (п.п. 1.2.1 и 1.2.2).

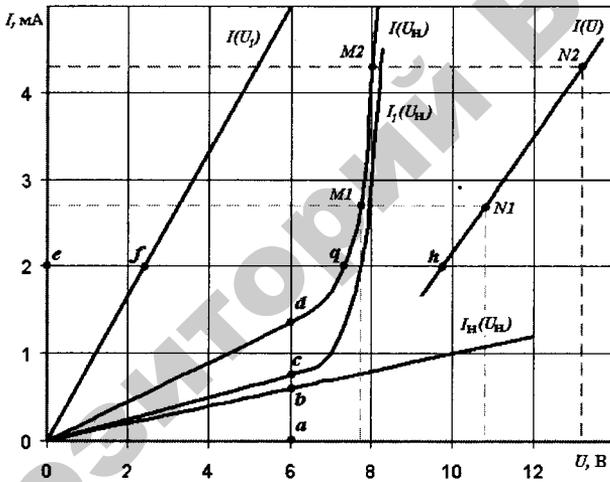


Рисунок 7.50

ВАХ линейных элементов R и R_H строим, задавшись произвольными значениями токов: $I = 5$ мА, тогда $U_1 = IR = 5 \times 10^{-3} \times 1200 = 6$ В; $I_H = 1$ мА, тогда $U_H = I_H R_H = 1 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^3 = 10$ В.

По двум точкам (0,0 и 5 мА, 6 В) проводим прямую линию и получаем характеристику $I(U_1)$. Аналогично по двум точкам (0,0 и 1 мА, 10 В) строим ВАХ $I_H(U_H)$ (рисунок 7.50).

Зависимость $I(U_n)$ (рисунок 7.50) для параллельного соединения получаем суммированием ординат ВАХ стабилизатора $I_1(U_n)$ и приемника $I_n(U_n)$, соответствующих выбранному напряжению. Например, при $U_n = 6$ В суммируем отрезки ab и ac и получаем точку d характеристики $I(U_n)$. Аналогично для других точек.

Для последовательного соединения зависимость $I(U)$ получаем суммированием абсцисс характеристик $I(U_1)$ и $I(U_n)$, соответствующих выбранному току. Например, при $I = 2$ мА суммируем отрезки ef и eq и получаем точку h характеристики $I(U)$. Аналогично для других точек. Кривая $I(U)$ является результирующей ВАХ всей цепи.

По условию задачи напряжение U изменяется в пределах $\pm 10\%$, т.е. от $0,9 \cdot U = 0,9 \times 12 = 10,8$ В до $1,1U = 1,1 \times 12 = 13,2$ В.

Чтобы определить в каких пределах при этом изменяется U_n , воспользуемся двумя характеристиками: $I(U)$ и $I(U_n)$.

По ВАХ $I(U)$	при $U = 10,8$ В	$I = 2,7$ мА (точка $N1$);
	при $U = 13,2$ В	$I = 4,3$ мА (точка $N2$);
По ВАХ $I(U_n)$	при $I = 2,7$ мА	$U_n = 7,8$ В (точка $M1$);
	при $I = 4,3$ мА	$U_n = 8$ В (точка $M2$).

Изменение напряжения на нагрузке

$$\Delta U_n = 8 - 7,8 = 0,2 \text{ В}$$

или в процентном выражении к среднему напряжению на нагрузке

$$\Delta U_{n. \text{ср.}} = \frac{0,2}{7,9} \cdot 100 \% \approx 2,5 \%$$

Таким образом, при колебаниях напряжения источника на $\pm 10\%$ напряжение на нагрузке изменяется только на $\pm 1,25\%$, т.е. в 8 раз меньше.

Задачи для самостоятельного решения

1-й уровень

1. Лампа накаливания, вольт-амперная характеристика которой задана (таблица 7.8), подключена последовательно с реостатом к источнику питания с напряжением $U = 120$ В. На какое значение сопротивления следует установить реостат, чтобы напряжение на лампе составляло 75 В?

Таблица 7.8

$U, \text{В}$	0	20	40	60	80	100	120
$I, \text{А}$	0	0,2	0,5	0,9	1,4	2,0	2,5

Ответ: 35 Ом.

2-й уровень

1. Бареттер с ВАХ, показанной на рисунке 7.51, и линейный резистор $R = 80$ Ом соединены параллельно и включены на постоянное напряжение. Ток на входе цепи $I = 0,4$ А. Определить напряжение U на входе цепи и токи в параллельных ветвях цепи.

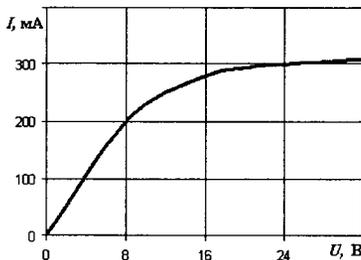


Рисунок 7.51

Ответ: 12 В; 0,25 А; 0,15 А.

2. Последовательно с нелинейным участком цепи в задаче 1 включили линейный резистор $R = 20$ Ом. Определить ток в цепи и напряжения на нелинейном участке и на резисторе R , если вся цепь питается от источника с напряжением 14 В.

Ответ: 0,3 А; 8 В; 6 В.

3. Рассчитать электрическую цепь, изображенную в таблице 7.9, в соответствии с заданным вариантом.

Таблица 7.9 — Варианты индивидуальных заданий

Номер варианта	Схема электрической цепи	ВАХ нелинейных резисторов	Напряжение источника U , В	Ток цепи I , А	Сопротивление R_1 , Ом	Напряжения															
						U_1 , В	U_2 , В														
1	2	3	4	5	6	7	8														
1			40	?	10	?	?														
2			?	2	30	?	?														
3			30	?	20	?	?														
4			?	3	15	?	?														
5			50	?	5	?	?														
6			250	?	-	?	?														
7			?	4	-	?	?														
8			200	?	-	?	?														
9			?	3	-	?	?														
10	150	?	-	?	?																
11		<table border="1"> <tr> <td>I, A</td> <td>0</td> <td>0,2</td> <td>0,5</td> <td>0,9</td> <td>1,4</td> <td>2,1</td> </tr> <tr> <td>U_2, B</td> <td>0</td> <td>20</td> <td>40</td> <td>60</td> <td>80</td> <td>100</td> </tr> </table>	I, A	0	0,2	0,5	0,9	1,4	2,1	U_2, B	0	20	40	60	80	100	?	?	20	24	?
I, A			0	0,2	0,5	0,9	1,4	2,1													
U_2, B			0	20	40	60	80	100													
12			?	?	25	?	40														
13	?	?	30	30	?																
14	?	?	35	?	60																

4. Рассчитать электрическую цепь, изображенную в таблице 7.10, в соответствии с заданным вариантом.

Таблица 7.10 — Варианты индивидуальных заданий

Номер варианта	Схема электрической цепи	ВАХ нелинейных резисторов	Напряжение источника U , В	Сопротивление R_1 , Ом	Токи в ветвях																
					I , А	I_1 , А	I_2 , А														
1	2	3	4	5	6	7	8														
1			200	100	?	?	?														
2			?	50	4	?	?														
3			250	100	?	?	?														
4			?	75	3	?	?														
5			150	80	?	?	?														
6			25	-	?	?	?														
7			?	-	2	?	?														
8			40	-	?	?	?														
9			?	-	3	?	?														
10			50	-	?	?	?														
11		<table border="1"> <tr> <td>I_2, А</td> <td>0</td> <td>0,2</td> <td>0,5</td> <td>0,9</td> <td>1,4</td> <td>2,0</td> </tr> <tr> <td>U, В</td> <td>0</td> <td>20</td> <td>40</td> <td>60</td> <td>80</td> <td>100</td> </tr> </table>	I_2 , А	0	0,2	0,5	0,9	1,4	2,0	U , В	0	20	40	60	80	100	?	10	?	1,0	?
I_2 , А			0	0,2	0,5	0,9	1,4	2,0													
U , В			0	20	40	60	80	100													
12			?	15	?	?	1,0														
13			?	20	?	2,0	?														
14	?	25	?	?	1,5																
15	?	30	?	1,5	?																

Практическое занятие 2

Расчет нелинейных электрических цепей постоянного тока методом двух узлов и методом итераций

Задача занятия: освоить методику расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока методом двух узлов и методом итераций.

План занятия:

1. Повторение основных теоретических положений по теме занятия.
2. Решение задач под руководством преподавателя.
3. Самостоятельная работа под руководством преподавателя.
4. Подведение итогов, предварительный контроль.

Контрольные вопросы для подготовки к практическому занятию 2

1. Как построить ВАХ участка цепи с нелинейным резистором и ЭДС?
2. Каков порядок расчета нелинейных цепей постоянного тока методом двух узлов?
3. В чем суть итерационного метода расчета нелинейных цепей постоянного тока?

Примеры практического применения теоретического материала

1. Определить токи в ветвях электрической цепи (рисунок 7.52) методом двух узлов, если $E_1 = 4$ В, $E_2 = 8$ В. Вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов приведены на рисунке 7.53.

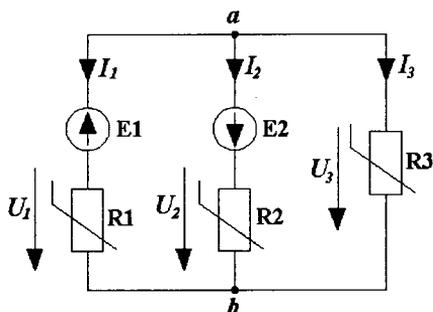


Рисунок 7.52

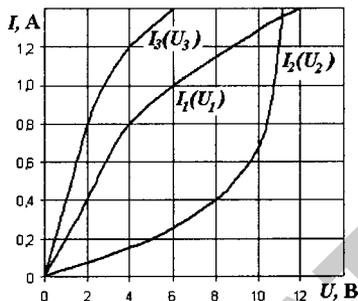


Рисунок 7.53

Решение

1. Направляем токи в ветвях к узлу «b».
2. Выражаем напряжения U_{ab} через ЭДС и падения напряжений для каждой ветви отдельно, используя второй закон Кирхгофа:

$$U_{ab} = U_1 + E_1, \quad (7.77)$$

$$U_{ab} = U_2 - E_2, \quad (7.78)$$

$$U_{ab} = U_3. \quad (7.79)$$

3. Строим вольт-амперные характеристики ветвей $I_1(U_{ab})$, $I_2(U_{ab})$, $I_3(U_{ab})$ (рисунок 7.54). Из выражений (7.77), (7.78), (7.79) следует, что характеристика $I_1(U_{ab})$ есть характеристика $I_1(U_1)$, но смещенная вправо на величину $E_1 = 4$ В, характеристика $I_2(U_{ab})$ — это характеристика $I_2(U_2)$, но смещенная влево на $E_2 = 8$ В, характеристика $I_3(U_{ab})$ есть характеристика $I_3(U_3)$.

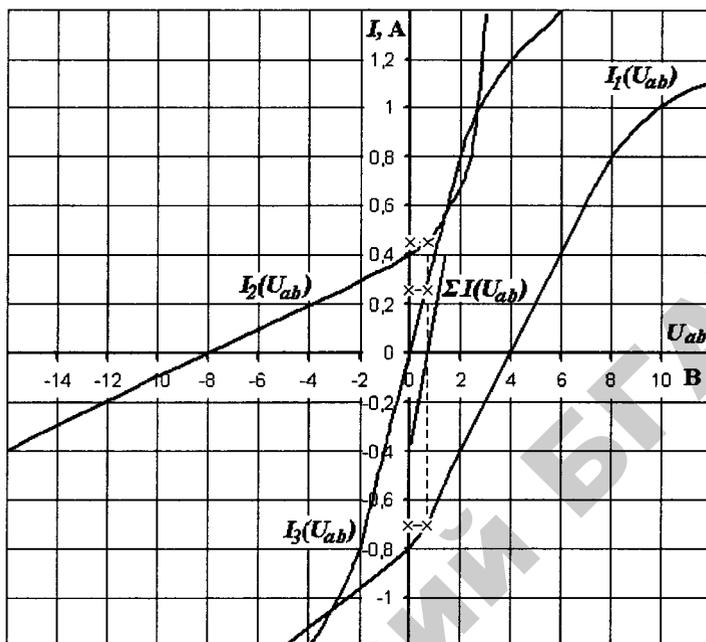


Рисунок 7.54

Для более точного построения вышеуказанных характеристик составляем таблицу 7.11. Произвольно задавая значением токов I_1 и I_2 , по характеристикам $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$ определяем соответствующие значения U_1 и U_2 . Используя выражения (7.77), (7.78) находим значения U_{ab} для принятых значений токов I_1 и I_2 .

Таблица 7.11

I_1, A	0	0,4	0,6	0,8	1,2	-0,4	-0,6	-0,8	-1,2
U_{ab}, B	4	6	7	8	13	2	1	0	-5
I_2, A	0	0,4	0,6	0,8	1,2	-0,4	-0,6	-0,8	-1,2
U_{ab}, B	-8	0	1,6	2,4	3	-16	-17,4	-18,4	-19

4. Суммируем токи (ординаты) характеристик $I_1(U_{ab})$, $I_2(U_{ab})$, $I_3(U_{ab})$, для чего произвольно задаемся значением U_{ab} , по характеристикам $I_1(U_{ab})$, $I_2(U_{ab})$, $I_3(U_{ab})$ находим соответствующие значения токов I_1 , I_2 , I_3 и получаем характеристику $(I_1 + I_2 + I_3) = f(U_{ab})$ (рисунок 7.54).

5. Сумма токов ветвей в рассматриваемой цепи равна нулю, поэтому точка пересечения характеристики $(I_1 + I_2 + I_3) = f(U_{ab})$ с осью абсцисс определяет искомое значение напряжения U_{ab} .

$$U_{ab} = 0,7 \text{ В.}$$

6. По характеристикам $I_1(U_{ab})$, $I_2(U_{ab})$, $I_3(U_{ab})$ определяем искомые токи при найденном значении $U_{ab} = 0,7 \text{ В}$ (рисунок 7.54):

$$I_1 = -0,70 \text{ А, } I_2 = 0,45 \text{ А, } I_3 = 0,25 \text{ А.}$$

2. Определить токи в нелинейной цепи постоянного тока (рисунок 7.55) методом итераций, если $U = 8 \text{ В}$.

ВАХ нелинейных сопротивлений представлены на рисунке 7.56.

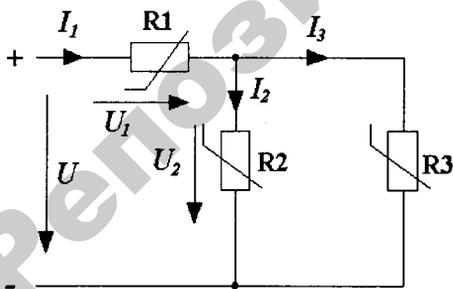


Рисунок 7.55

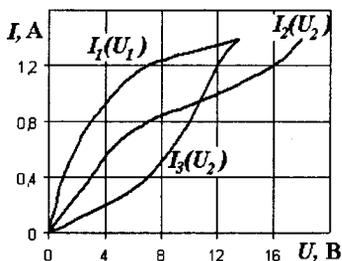


Рисунок 7.56

Решение

1. На основании закона Ома записываем расчетную формулу

$$I_{1(S+1)} = \frac{U}{R_{1S}(I_{1S}) + \frac{R_{2S}(I_{2S})R_{3S}(I_{3S})}{R_{2S}(I_{2S}) + R_{3S}(I_{3S})}},$$

где S — порядковый номер приближения.

Расчет по формуле проводим при помощи вольт-амперных характеристик (рисунок 7.56). Напряжение, необходимое для нахождения токов I_{2S} и I_{3S} по ВАХ, определяем на основании второго закона Кирхгофа, как $U_{2S} = U - U_{1S}$. Результаты расчета сведем в таблице 7.12.

Таблица 7.12

S	I_{1S} А	U_{1S} , В из ВАХ	$U_{2S} = U - U_1$ В	I_{2S} , А из ВАХ	I_{3S} , А из ВАХ	$R_{1S} = \frac{U_{1S}}{I_{1S}}$ Ом	$R_{2S} = \frac{U_{2S}}{I_{2S}}$ Ом	$R_{3S} = \frac{U_{2S}}{I_{3S}}$ Ом	$I_{1(S+1)}$
0	0,2	0,6	7,4	0,8	0,44	3	9,25	16,82	0,89
1	0,89	3,3	4,7	0,62	0,24	3,7	7,58	19,58	0,873
2	0,873	3,2	4,8	0,63	0,25	3,666	7,619	19,2	0,877

Из таблицы 7.12 видно, что итерационный процесс практически заканчивается после второго приближения и токи можно принять равными $I_1 = 0,873$ А, $I_2 = 0,63$ А, $I_3 = 0,25$ А.

Задачи для самостоятельного решения

1-й уровень

1. Построить вольт-амперную характеристику $I = f(U_{ab})$ участка цепи (рисунки 7.57...7.63).

Значения сопротивлений линейных резисторов и ЭДС заданы в таблице 7.13. Вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов R_1 и R_2 представлены на рисунке 7.64.

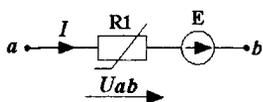


Рисунок 7.57

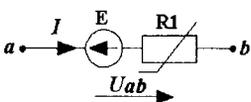


Рисунок 7.58

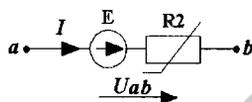


Рисунок 7.59

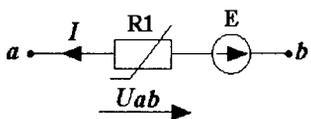


Рисунок 7.60

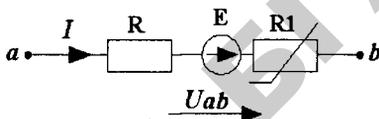


Рисунок 7.61

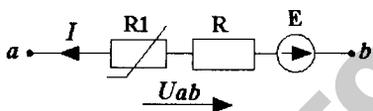


Рисунок 7.62

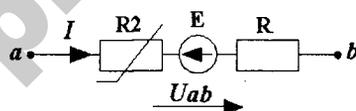


Рисунок 7.63

Таблица 7.13

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Рис.	7.57	7.58	7.59	7.60	7.61	7.62	7.63	7.57	7.58	7.59	7.60	7.61	7.62	7.63	7.59
$E, В$	5	10	15	20	25	10	15	20	25	5	10	15	20	10	10
$R, Ом$					30	40	60					50	60	100	70

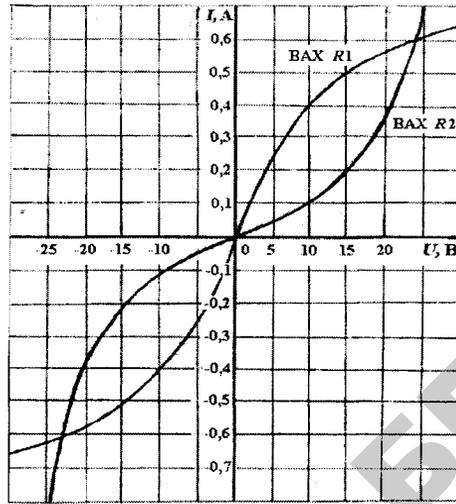


Рисунок 7.64

2-й уровень

1. Определить токи I_1 , I_2 , I в электрической цепи (рисунок 7.65) итерационным методом. ВАХ нелинейных резисторов представлены на рисунке 7.66, активное сопротивление $R = 100$ Ом, напряжение $U = 60$ В.

Ответ: $I = 1,55$ А, $I_1 = 0,3$ А, $I_2 = 1,25$ А.

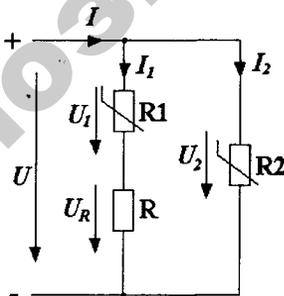


Рисунок 7.65

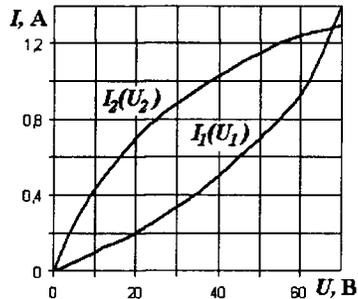


Рисунок 7.66

3-й уровень

Нелинейный элемент, имеющий нелинейную характеристику, заданную таблицей 7.14, требуется заменить эквивалентным сопротивлением с добавочной ЭДС на участке характеристики, соответствующей изменению напряжения от 400 В до 500 В.

Таблица 7.14

$U, \text{В}$	0	100	200	300	400	500
$I, \text{мА}$	0	0,04	0,08	0,14	0,35	1,2

Ответ: $80 \times 10^3 \text{ Ом}$, 375 В.

Практическое занятие 3

Расчет магнитных цепей постоянного тока

Задача занятия: изучить основные понятия и законы магнитных цепей. Приобрести навыки расчета магнитных цепей постоянного тока.

План занятия:

1. Провести входной контроль по основным понятиям и законам магнитных цепей и порядку их расчета.
2. Решение задач под руководством преподавателя.
3. Самостоятельная работа студентов по индивидуальным заданиям.
4. Подведение итогов.

Контрольные вопросы для подготовки к практическому занятию 2

1. Как связаны между собой магнитная индукция B и напряженность магнитного поля H ?
2. Как связаны между собой магнитный поток Φ и магнитная индукция B ?
3. Что понимают под кривой намагничивания?
4. Что называют МДС и как определяют ее направление?
5. Что такое магнитное напряжение?
6. Законы Кирхгофа для магнитной цепи.
7. Как изменится магнитный поток при появлении воздушного зазора в сердечнике, если МДС осталась прежней?
8. Что собой представляет вебер-амперная характеристика и как её строят?
9. Какой порядок расчета неразветвленной магнитной цепи?
10. Изложите порядок расчета разветвленных магнитных цепей постоянного тока по методу двух узлов.
11. Как определяют напряженность магнитного поля в воздушном зазоре?

Примеры практического применения теоретического материала

1. Сколько витков надо намотать на сердечник (рисунок 7.67) для получения магнитного потока $\Phi = 47 \times 10^{-4}$ Вб при токе обмотки 25 А?

$$l_1 = 56 \text{ см}, S_1 = 36 \text{ см}^2, l_2 = 17 \text{ см}, S_2 = 36 \text{ см}^2, l_b = 0,5 \text{ см}, S_b = 36 \text{ см}^2.$$

Верхняя часть сердечника выполнена из электротехнической стали 3411, нижняя — из литой стали. Кривые намагничивания сталей приведены в приложении 1, помещенные в конце материалов к практическим занятиям.

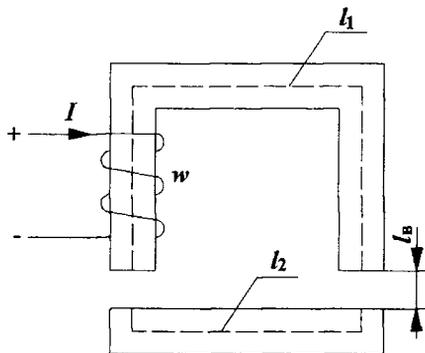


Рисунок 7.67

Решение

1. Определяем магнитную индукцию на участках цепи. Так как сечения участков равны между собой, то

$$B_1 = B_2 = B_b = \frac{\Phi}{S} = \frac{47 \times 10^{-4}}{36 \times 10^{-4}} = 1,3 \text{ Тл.}$$

2. Определяем напряженности на участках цепи по кривым намагничивания (приложение 1).

$$H_1 = 200 \text{ А/м}; \quad H_2 = 2000 \text{ А/м.}$$

Напряженность поля в воздушном зазоре

$$H_b = 0,8 \times 10^6 \times B_b = 0,8 \times 10^6 \times 1,3 = 1,04 \times 10^6 \text{ А/м.}$$

3. Определяем магнитодвижущую силу Iw по второму закону Кирхгофа:

$$Iw = H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2H_b l_b = 200 \times 0,56 + 2000 \times 0,17 + 2 \times 1,04 \times 10^6 \times 0,005 = 10852 \text{ A.}$$

4. Число витков

$$w = \frac{Iw}{I} = \frac{10852}{25} = 434.$$

2. Определить магнитный поток Φ в сердечнике из стали 1512 (рисунок 7.68), если $l_b = 2 \text{ мм}$, $l = 0,598 \text{ м}$, $S = 25 \text{ см}^2$, $Iw = 2000 \text{ А}$.

Кривая намагничивания стали дана в приложении 1.

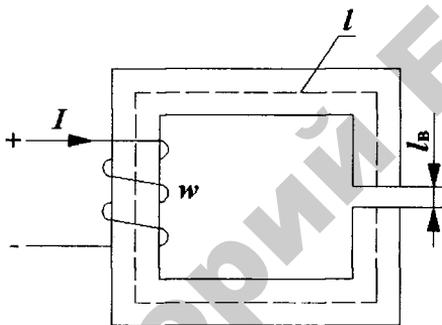


Рисунок 7.68

Решение

1. Задаемся произвольно значением магнитной индукции $B = 0,2 \text{ Тл}$ и определяем:

$$\Phi = B S = 0,2 \times 25 \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-4} \text{ Вб.}$$

2. По кривой намагничивания определяем соответствующее значение напряженности $H = 30 \text{ А/м}$. Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре

$$H_b = 0,8 \times 10^6 \times B_b = 0,8 \times 10^6 \times 0,2 = 1,6 \times 10^5 \text{ А/м.}$$

Определяем МДС:

$$Iw = Hl + H_B l_B,$$

$$Iw = 30 \times 0,593 + 1,6 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3} = 337,94 \text{ А.}$$

Так как рассчитанная МДС значительно меньше заданной, то задаемся новыми значениями магнитной индукции, проводим расчеты аналогичные вышеприведенному. Результаты расчетов сводим в таблицу 7.15.

Таблица 7.15

$B, \text{Тл}$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1	1,1	1,2
$\Phi \cdot 10^{-4}, \text{Вб}$	5	10	15	20	22,5	25	27,5	30
$Iw, \text{А}$	338	700	1061,7	1441,5	1649	1869	2089	2398
$H, \text{А/м}$	30	100	170	270	350	450	550	800
$H_B \cdot 10^5, \text{А/м}$	1,6	3,2	4,8	6,4	7,2	8	8,8	9,6

По результатам расчета строим вебер-амперную характеристику:

$$\Phi = f(Iw) \text{ (рисунок 7.69).}$$

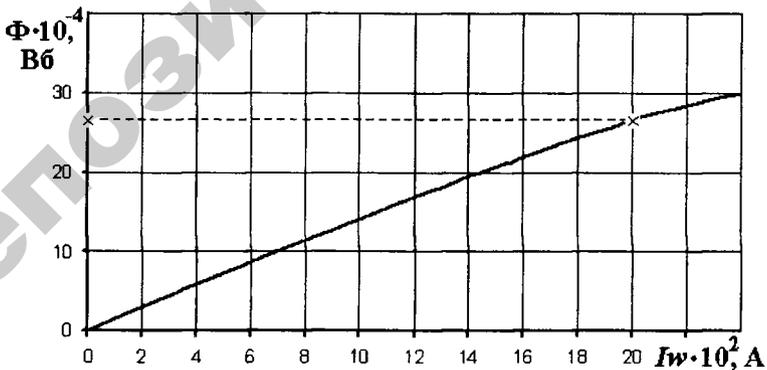


Рисунок 7.69

По характеристике и заданному значению намагничивающей силы $Iw = 2000$ А определяют значение магнитного потока $\Phi = 26,5 \times 10^{-4}$ Вб.

3. Определить магнитные потоки в ветвях магнитной цепи (рисунок 7.70), материал магнитопровода – сталь 1512.

$$l_1 = 20 \text{ см}, S_1 = 4 \text{ см}^2, w_1 = 80 \text{ витков}, I_1 = 1 \text{ А}, l_2 = 12 \text{ см}, S_2 = 6 \text{ см}^2,$$

$$w_2 = 150 \text{ витков}, I_2 = 2 \text{ А}, l_3 = 40 \text{ см}, S_3 = 36 \text{ см}^2, l_b = 0,5 \text{ см}.$$

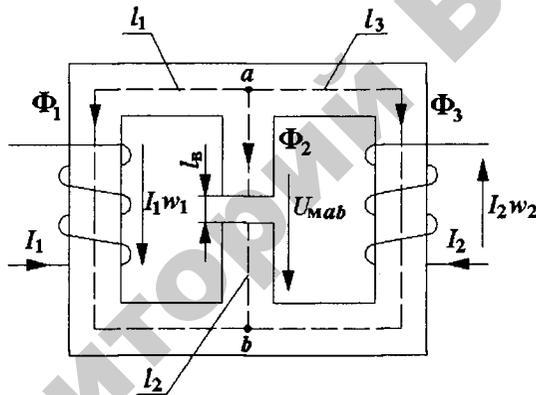


Рисунок 7.70

Решение

1. Указываем направления магнитодвижущих сил $I_1 w_1$ и $I_2 w_2$, используя правило правого винта или обхвата катушки правой рукой.

2. Задаемся положительным направлением магнитного напряжения между двумя узлами и положительным направлением магнитных потоков (рисунок 7.70).

3. Выражаем U_{mab} через падения магнитных напряжений и МДС каждой ветви, используя второй закон Кирхгофа для магнитных цепей:

$$H_1 l_1 - U_{mab} = I_1 w_1; H_2 l_2 + H_B l_B - U_{mab} = 0;$$

$$H_3 l_3 - U_{mab} = -I_2 w_2,$$

откуда следует, что для левой ветви

$$U_{mab} = H_1 l_1 - I_1 w_1, \quad (7.80)$$

для средней ветви

$$U_{mab} = H_2 l_2 + H_B l_B, \quad (7.81)$$

для правой ветви

$$U_{mab} = H_3 l_3 + I_2 w_2. \quad (7.82)$$

4. На основании выражений (7.80), (7.81), (7.82) строим вебер-амперные характеристики ветвей $\Phi_1 = f(U_{mab})$, $\Phi_2 = f(U_{mab})$, $\Phi_3 = f(U_{mab})$, для чего выполняем следующие расчеты.

Произвольно задаёмся значениями магнитной индукции B . Определяем магнитные потоки в ветвях:

$$\Phi_1 = BS_1, \quad \Phi_2 = BS_2, \quad \Phi_3 = BS_3. \quad (7.83)$$

По кривой намагничивания (приложение 1) определяем напряженность магнитного поля в магнитопроводе H , а в воздушном зазоре согласно формуле

$$H_B = 0,8 \times 10^6 \times B. \quad (7.84)$$

Падения магнитных напряжений в ветвях цепи определяем по формулам:

$$U_{M1} = H_1 l_1, U_{M2} = H_2 l_2 + H_B l_B, U_{M3} = H_3 l_3. \quad (7.85)$$

Согласно выражениям (7.80), (7.81), (7.82) определяем U_{Mab} для принятых значений магнитной индукции. Расчеты выполняем как для положительных, так и для отрицательных значений магнитной индукции B . Результаты расчетов сводим в таблицу 7.74.

По результатам расчетов строим в одной системе координат характеристики $\Phi_1(U_{Mab}), \Phi_2(U_{Mab}), \Phi_3(U_{Mab})$ (рисунок 7.74).

5. По первому закону Кирхгофа для нашей цепи $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$. Строим кривую $(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) = f(U_{Mab})$, для чего суммируем ординаты характеристик $\Phi_1(U_{Mab}), \Phi_2(U_{Mab}), \Phi_3(U_{Mab})$ (рисунок 7.71).

Для более точного построения составляем таблицу 7.17.

Таблица 7.17

U_{Mab}, A	100	50	0	-50
$\Phi_1 \times 10^{-4} \text{ Вб}$	4,8	4,3	4	2,2
$\Phi_2 \times 10^{-4} \text{ Вб}$	1,3	0,6	0	-0,7
$\Phi_3 \times 10^{-4} \text{ Вб}$	-4,1	-4,4	-4,6	-4,7
$(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$	2	0,5	-0,6	-3,2

6. Характеристика $(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) = f(U_{Mab})$ пересекает ось абсцисс в точке «а», которая определяет то значение напряжения U_{Mab} ,

при котором выполняется первый закон Кирхгофа: $U_{mab} = 25 \text{ A}$.

7. По найденному значению U_{mab} определяют магнитные потоки в ветвях по характеристикам $\Phi_1(U_{mab})$, $\Phi_2(U_{mab})$, $\Phi_3(U_{mab})$:

$$\Phi_1 = 4,2 \times 10^{-4} \text{ Вб},$$

$$\Phi_2 = 0,3 \times 10^{-4} \text{ Вб},$$

$$\Phi_3 = -4,5 \times 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Знак «минус» при Φ_3 говорит о том, что истинное направление магнитного потока Φ_3 противоположно принятому.

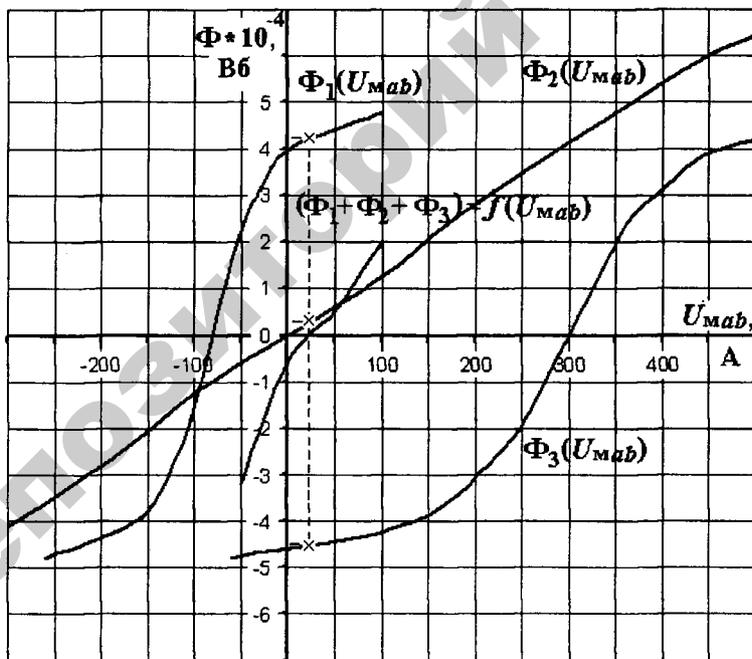


Рисунок 7.71

Задачи для самостоятельного решения

1-й уровень

1. В сердечнике из литой стали (рисунок 7.72) необходимо создать магнитную индукцию $B = 1$ Тл, число витков равномерно намотанной на сердечник обмотки $w = 200$, длина средней линии сердечника $l_{\text{ср}} = 69$ см, сечение $S = 6$ см². Как следует изменить ток I , протекающий по обмотке, если в сердечнике сделать воздушный зазор $l_{\text{в}} = 0,5$ мм?

Ответ: ток нужно увеличить на 2 А.

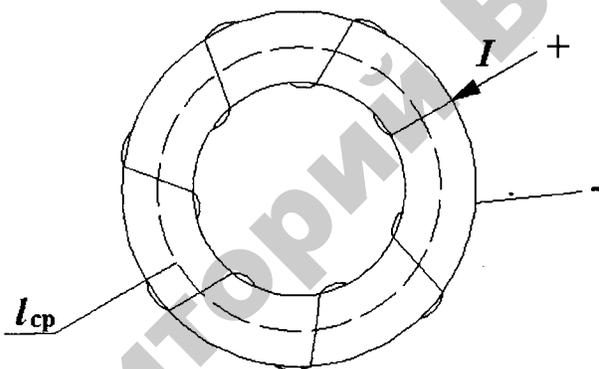


Рисунок 7.72

2-й уровень

1. Построить зависимость магнитного потока от магнитного напряжения $U_{\text{маб}}$ (вебер-амперную характеристику) участка магнитной цепи (рисунок 7.73), если заданы длина магнитного участка l , длина воздушного зазора $l_{\text{в}}$, сечение участка магнитопровода S , МДС, направление магнитного потока Φ , направление тока в обмотке (таблица 7.18). Кривая намагничивания задана таблицей 7.18.

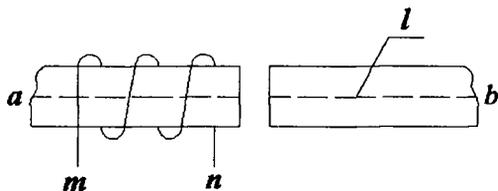


Рисунок 7.73

Таблица 7.18

В, Тл	0	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
H , А/м	0	100	170	260	410	900

Таблица 7.19

Вариант	l , см	l_b , см	S , см ²	МДС, А	Направление потока, Φ	Ток втекает в зажим
1	20	0,2	5	200	от «а» к «b»	n
2	10	0,1	4	80	от «а» к «b»	m
3	15	0,2	6	150	от «b» к «а»	n
4	25	0,3	7	200	от «а» к «b»	m
5	30	0	5	20	от «а» к «b»	n
6	40	0,4	10	250	от «а» к «b»	m
7	35	0	8	50	от «b» к «а»	n
8	80	0,5	10	150	от «b» к «а»	m
9	60	0,2	15	180	от «а» к «b»	n
10	70	0,4	12	160	от «b» к «а»	m
11	50	0,2	8	120	от «в» к «а»	m
12	100	0	20	100	от «а» к «b»	n
13	70	0,1	10	80	от «а» к «b»	m
14	80	0,4	15	100	от «а» к «b»	n
15	100	0,5	20	220	от «b» к «а»	m

3-й уровень

Катушка с кольцевым сердечником, содержащим воздушный зазор $l_b = 0,01$ см, подключена к сети постоянного тока с напряжением $U = 12$ В. Обмотка катушки имеет сопротивление $R = 12$ Ом и число витков $w = 1000$. Сердечник выполнен из стали 1512 и имеет внешний диаметр $D = 22$ см, внутренний диаметр $d = 18$ см, толщину пакета $b = 1$ см.

Определить магнитный поток и индуктивность катушки.

Ответ: $\Phi = 2,62 \times 10^{-4}$ Вб; $L = 262$ мГн.

Практическое занятие 4

Расчет нелинейных электрических цепей переменного тока

Задача занятия: изучить методы расчета нелинейных электрических цепей переменного тока, особенности расчета индуктивных катушек с ферромагнитным сердечником.

План занятия:

1. Повторить основные теоретические положения по теме занятия.
2. Решение задач под руководством преподавателя.
3. Предварительный контроль знаний.

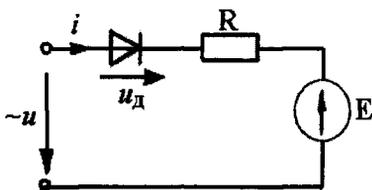
Контрольные вопросы для подготовки к практическому занятию 4

1. Какие нелинейные элементы создают сопротивление в цепи переменного тока?
2. Какие методы расчета используют для нелинейных электрических цепей переменного тока?
3. Что означают вольт-амперная, вебер-амперная, кулон-вольтная характеристики?

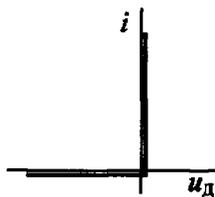
4. Нарисуйте вольт-амперную характеристику идеального диода.
5. Нарисуйте вебер-амперную характеристику нелинейной индуктивности.
6. Почему сердечники катушек выполняют из ферромагнитного материала?
7. Почему зависимость $I = f(U)$ для катушки с ферромагнитным сердечником нелинейна?
8. Чем вызваны потери энергии в сердечниках катушек?
9. Как достигают уменьшения потерь в стали?
10. Запишите связь между ЭДС наводимой в обмотке катушки и переменным магнитным потоком в сердечнике.
11. Что значит основной магнитный поток и поток рассеяния?
12. Запишите уравнение катушки в комплексной форме, поясните значение каждого из слагаемых этого уравнения.
13. Нарисуйте последовательно-параллельную схему замещения катушки с ферромагнитным сердечником, поясните назначение каждого из элементов этой схемы.
14. Какие упрощения допускаются при расчете катушек с ферромагнитным сердечником и почему?

Примеры практического применения теоретического материала

1. Аккумуляторная батарея, ЭДС которой $E = 12$ В и внутреннее сопротивление $R = 6$ Ом, подключена через идеальный диод к источнику синусоидального напряжения с амплитудой 24 В (рисунок 7.74, а) и частотой $f = 50$ Гц. Характеристика диода дана на рисунке 7.74, б.



а)



б)

Рисунок 7.74

Определить максимальное i_{\max} и среднее I_{cp} значения тока и максимальное обратное напряжение на диоде $u_{\text{дmax}}$. Построить графики $i = f(t)$ и $u_{\text{д}} = f(t)$.

Решение

Напряжение, приложенное к цепи, $u = 24 \sin \omega t$ В.

Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$u_{\text{д}} + iR - u = -E. \quad (7.86)$$

Судя по вольт-амперной характеристике идеального диода (рисунок 7.74, б), когда диод открыт и проводит ток, напряжение на диоде $u_{\text{д}} = 0$ и из уравнения (7.86) ток

$$i = \frac{u - E}{R} = \frac{24 \sin \omega t - 12}{6} = 4 \sin \omega t - 2 \text{ А}. \quad (7.87)$$

Из уравнения (7.87) следует, что $i_{\max} = 2$ А при $\sin \omega t = 1$.

Когда диод закрыт, то $i = 0$ и из уравнения (7.86)

$$u_{\text{д}} = u - E = 24 \sin \omega t - 12 \text{ В}. \quad (7.88)$$

Из уравнения (7.88) следует, что максимальное обратное напряжение на диоде $u_{дmax} = -36$ В при $\sin\omega t = -1$.

Для определения среднего значения тока через диод $I_{ср}$ и построения графиков $i = f(t)$ и $u_{д} = f(t)$ необходимо определить моменты времени открытия и закрытия диода.

Открытию диода соответствует момент времени $t = t_1$, когда напряжение на диоде $u_{д}$ станет равным нулю. Тогда по уравнению (7.88)

$$24 \sin \omega t_1 - 12 = 0.$$

Следовательно, $\omega t_1 = \arcsin 0,5 = 30^\circ = 0,523$ рад.

Момент открытия диода

$$t_1 = \frac{0,523}{\omega} = \frac{0,523}{2\pi f} = \frac{0,523}{2 \times 3,14 \times 50} = 1,66 \times 10^{-3} \text{ с.}$$

Момент времени закрытия диода $t = t_2$ также соответствует значению $u_{д} = 0$, но уже во второй четверти изменения синусоидального напряжения, т.е. $\omega t_2 = 150^\circ = 2,61$ рад, а $t_2 = \frac{2,61}{\omega} = 8,33 \times 10^{-3}$ с.

Графики $u = f(t)$, $i = f(t)$, $u_{д} = f(t)$ показаны на рисунке 7.75. На этих графиках период $T = 1/f = 1/50 = 0,02$ с. Пунктиром показаны составляющие тока i по уравнению (7.87) и напряжения на диоде $u_{д}$ по уравнению (7.88).

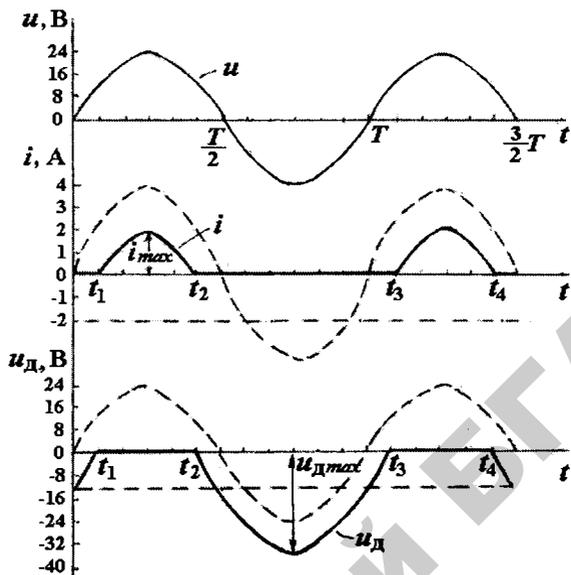


Рисунок 7.75

Среднее значение тока за период T , которое измеряется приборами магнитоэлектрической системы, определим по формуле

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} i dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} (4 \sin \omega t - 2) dt = \frac{4}{T\omega} (-\cos \omega t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{2}{T} t \Big|_{t_1}^{t_2} = 0,434 \text{ A.}$$

2. Электрическая цепь (рисунок 7.76, а) питается от источника синусоидального напряжения. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) нелинейных конденсаторов по первой гармонике представлена на рисунке 7.76, б. Значения сопротивлений по первой гармонике $X_L = 60 \text{ Ом}$, $R_1 = 40 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$.

Определить значение напряжения U_{ab} при токе $I_3 = 1,2 \text{ A}$. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

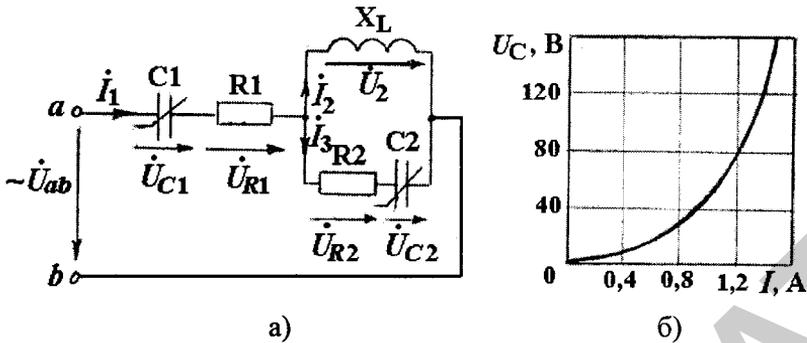


Рисунок 7.76

Решение

Для определения напряжения U_{ab} составим уравнение по второму закону Кирхгофа в комплексной форме:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{R1} + \dot{I}_3 R_2 + \dot{U}_{C2}.$$

Как видим, в этом уравнении неизвестны комплексные значения \dot{U}_{C1} , \dot{U}_{R1} , \dot{U}_{C2} . Для их определения по заданному значению тока $I_3 = 1,2$ А находим по ВАХ напряжение на нелинейной емкости $\dot{U}_{C2} = 80$ В. Примем в комплексной форме $\dot{I}_3 = 1,2$ А, тогда $\dot{U}_{C2} = -j 80$ В, так как напряжение на конденсаторе отстает от тока на 90° .

Напряжение на участке с параллельным соединением ветвей

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_3 R_2 + \dot{U}_{C2} = 36 - j 80 \text{ В};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{jX_L} = \frac{36 - j 80}{j 50} = -1,6 - j 0,72 \text{ А}.$$

По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 1,2 - 1,6 - j0,72 = -0,4 - j0,72 \text{ А.}$$

Определяем действующее значение тока

$$I_1 = \sqrt{0,4^2 + 0,72^2} = 0,82 \text{ А.}$$

Начальная фаза этого тока $\psi_{i1} = \operatorname{arctg} \frac{-0,72}{-0,4} = 61^\circ - 180^\circ = -119^\circ$.

Судя по комплексной записи тока \dot{I}_1 , вектор этого тока лежит в третьей четверти, поэтому при нахождении ψ_{i1} вычитается 180° .

При токе $I_1 = 0,82 \text{ А}$ определяем по ВАХ напряжение на нелинейном конденсаторе $U_{C1} = 30 \text{ В}$.

Для комплексной записи этого напряжения учтем, что напряжение на конденсаторе отстает от тока по фазе на 90° , т.е. начальная фаза напряжения

$$\psi_{UC1} = \psi_{i1} - 90^\circ = -119^\circ - 90^\circ = -209^\circ = 151^\circ.$$

Комплексная запись напряжения

$$\dot{U}_{C1} = 30e^{j151^\circ} = 30(\cos 151^\circ + j \sin 151^\circ) = -26,28 + j14,54 \text{ В.}$$

Находим напряжение на входе цепи

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_{C1} + \dot{I}_1 R_1 + \dot{U}_2 = -26,28 + j14,54 + (-0,4 - j0,72) \times 40 + 36 - j80 = \\ &= -6,28 - j94,26 \text{ В.} \end{aligned}$$

Действующее значение напряжения U_{ab} по первой гармонике

$$U_{ab} = \sqrt{6,28^2 + 94,26^2} = 94,5 \text{ В.}$$

Строим векторную диаграмму (рисунок 7.77). Выбираем масштабы для тока $m_i = 0,4 \text{ А/см}$ и для напряжения $m_u = 20 \text{ В/см}$.

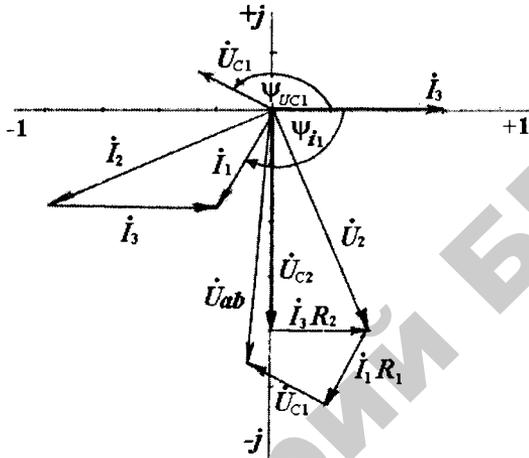


Рисунок 7.77

Векторная диаграмма может быть основой для графического решения задачи, а также для проверки выполнения комплексных расчетов. На векторной диаграмме проверяется исполнение законов Кирхгофа и взаимное расположение векторов токов и напряжений на участках цепи. На резистивном элементе ток и напряжение должны совпадать по фазе, на индуктивном элементе ток отстает от приложенного напряжения на 90° , на емкостном элементе опережает напряжение на 90° .

3. Для определения параметров элементов схемы замещения катушки с ферромагнитным сердечником собрана цепь по схеме, изображенной на рисунке 7.78.

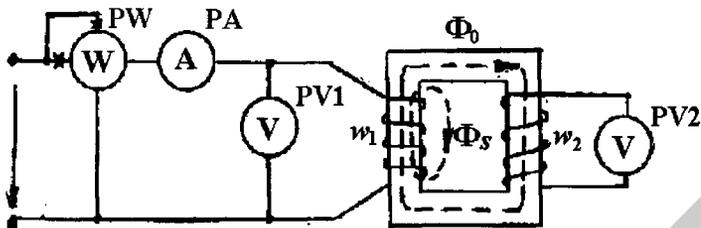


Рисунок 7.78

Число витков катушки $w_1 = 500$, напряжение $U_1 = 220$ В, частота $f = 50$ Гц, ток катушки $I = 10$ А; активная мощность $P = 1500$ Вт. Сопротивление обмотки из медного провода постоянному току $R = 10$ Ом. Для определения величины основного магнитного потока Φ_0 в сердечнике на него намотана вспомогательная обмотка с числом витков $w_2 = 50$. Вольтметр PV2 показал $U_2 = 11$ В.

Составить схему замещения катушки и построить векторную диаграмму.

Решение

Схема замещения катушки представлена на рисунке 7.79, а.

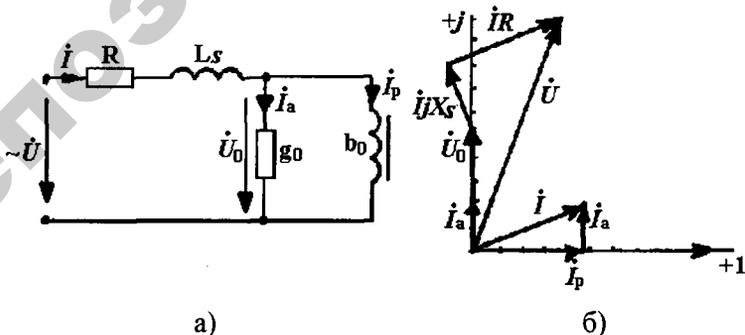


Рисунок 7.79

g_0 — активная проводимость, обусловленная потерями в стали;
 b_0 — нелинейная индуктивная проводимость, обусловленная основным магнитным потоком Φ_0 .

L_S — индуктивность рассеяния.

Для определения параметров схемы замещения вычислим амплитуду основного магнитного потока, замыкающегося по сердечнику.

Напряжение на вспомогательной обмотке равно наведенной в ней ЭДС:

$$U_2 = 4,44 f w_2 \Phi_{m_0}.$$

$$\Phi_{m_0} = \frac{U_2}{4,44 f w_2} = \frac{11}{4,44 \times 50 \times 50} = 9,9 \times 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Тогда напряжение U_0 , равное ЭДС самоиндукции, наведенной в первой катушке основным магнитным потоком Φ_0 ,

$$U_0 = 4,44 f w_1 \Phi_{m_0} = 4,44 \times 50 \times 500 \times 9,9 \times 10^{-4} = 110 \text{ В.}$$

Потери в стали

$$P_{\text{ст}} = P - I^2 R = 1500 - 1000 = 500 \text{ Вт.}$$

$P_{\text{ст}} = U_0 I_a$, откуда активная составляющая тока катушки

$$I_a = \frac{P_{\text{ст}}}{U_0} = \frac{500}{110} = 4,54 \text{ А.}$$

Активная проводимость $g_0 = \frac{I_a}{U_0} = \frac{4,54}{110} = 4,13 \times 10^{-2} = 4,13 \times 10^{-2} \text{ См.}$

Реактивная составляющая тока $I_p = \sqrt{I^2 - I_a^2} = \sqrt{10^2 - 4,54^2} = 8,91$ А.

Реактивная проводимость $b_0 = \frac{I_p}{U_0} = \frac{8,91}{110} = 8,1 \times 10^{-2}$ См.

Для определения индуктивного сопротивления рассеяния X_S проводим расчет комплексного сопротивления цепи по схеме замещения (рисунок 7.79, а).

Комплексная проводимость участка с параллельным соединением ветвей χ

$$Y_0 = g_0 - jb_0 = 4,13 \times 10^{-2} - j8,1 \times 10^{-2} \text{ См.}$$

Комплексное сопротивление этого участка

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{\underline{Y}_0} = \frac{1}{4,13 \times 10^{-2} - j8,1 \times 10^{-2}} = 5 + j9,9 \text{ Ом.}$$

Комплексное сопротивление всей цепи

$$\underline{Z} = R + j \omega L_S + \underline{Z}_0 = 15 + j(9,9 + X_S).$$

Полное сопротивление цепи по закону Ома

$$Z = \frac{U}{I} = 22 \text{ Ом.}$$

Таким образом, $22 = \sqrt{15^2 + (9,9 + X_S)^2}$, откуда $X_S = 6,2$ Ом.

Векторная диаграмма для схемы замещения приведена на рисунке 6.2, б.

Задачи для самостоятельного решения

1-й уровень

1. Нелинейный конденсатор, его вольт-амперная характеристика по первой гармонике представлена на рисунке 7.76, б, соединен последовательно с линейным резистором с сопротивлением $R = 20 \text{ Ом}$ и подключен к источнику синусоидального напряжения $U = 50 \text{ В}$.

Определить ток цепи, падения напряжений на резисторе и конденсаторе.

2-й уровень

1. В схеме цепи (рисунок 7.80) последовательно включены источник синусоидальной ЭДС $e(t) = 150 \sin \omega t \text{ В}$, источник постоянной ЭДС $E_0 = 50 \text{ В}$, идеальный полупроводниковый диод (характеристика диода дана на рисунок 7.80) и резистор с сопротивлением $R = 1 \text{ кОм}$.

Определить максимальное значение тока через диод и какое время в течение периода диод остается открытым, если $\omega = 314 \text{ рад/с}$.

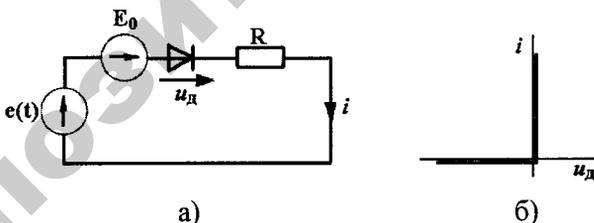


Рисунок 7.80

Ответ: $i_{max} = 0,2 \text{ А}$, время открытия диода $t_1 = -0,104 \times 10^{-2} \text{ с}$, время закрытия $t_2 = 1,1 \times 10^{-2} \text{ с}$, диод остается открытым в течение $t = 1,204 \times 10^{-2} \text{ с}$.

3-й уровень

На сердечнике из стали 1512, площадью поперечного сечения $S = 16 \text{ см}^2$ и длиной средней магнитной линии $l = 44 \text{ см}$, расположена обмотка с числом витков $w = 480$. Масса сердечника 5,5 кг.

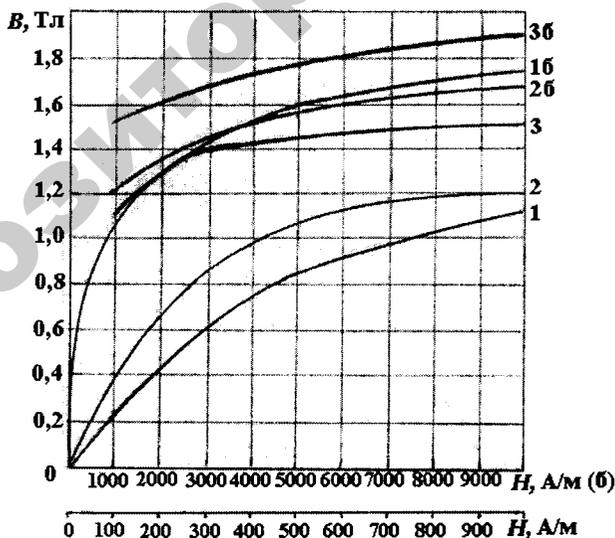
Определить ток I в обмотке, его активную I_a и намагничивающую I_p составляющие, если напряжение на зажимах обмотки $U = 120 \text{ В}$ при частоте $f = 50 \text{ Гц}$. Магнитным потоком рассеяния и активным сопротивлением обмотки можно пренебречь.

Указание: воспользуйтесь характеристиками, представленными в приложении 1.

Ответ: $I \approx 0,143 \text{ А}$, $I_p \approx 0,141 \text{ А}$, $I_a \approx 0,028 \text{ А}$.

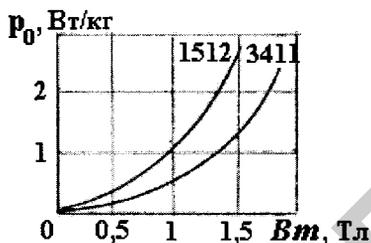
Приложение 1

Основные кривые намагничивания $B(H)$ различных марок сталей



1. Литая сталь
2. Листовая электротехническая сталь 1512 (горячекатаная)
3. Листовая электротехническая сталь 3411 (холоднокатаная)

Мощность удельных потерь в электротехнической стали



Материалы к лабораторным занятиям

Для подготовки к лабораторным занятиям необходимо изучить теоретический материал по теме занятия, используя данный учебно-методический комплекс, учебную литературу [1, 3] и методические указания к лабораторным занятиям по ТОЭ, ч. 3 [14].

Лабораторное занятие 1

Исследование вольт-амперных характеристик нелинейных элементов

Задача занятия: знакомство с вольт-амперными характеристиками диода, стабилитрона, динистора и возможностями их практического использования в электротехнических устройствах.

Задания для подготовки к занятию

1. Изучить описание лабораторной установки.
2. Подготовить протокол отчета к лабораторному занятию на основании программы его выполнения.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для подготовки к лабораторному занятию 1

1. Что такое нелинейная цепь?
2. Что такое вольт-амперная характеристика?
3. Как определяются статическое сопротивление и дифференциальное сопротивление?
4. Что такое нелинейный элемент?
5. Почему вольтамперная характеристика нелинейного элемента выглядит в виде кривой?
6. Какую вольт-амперную характеристику имеют линейные элементы и почему?
7. Охарактеризуйте нелинейные полупроводниковые элементы: диод, стабилитрон, динистор. Опишите использование этих элементов в электротехнических устройствах.

План занятия:

1. Проверка готовности студентов к выполнению занятия.
2. Сборка электрической цепи и выполнение программы работы.
3. Оформление отчета по лабораторной работе, выводы.
4. Защита лабораторной работы.

Описание лабораторной установки

Снятие вольт-амперных характеристик нелинейных элементов проводится с помощью цепи, схема которой изображена на рисунке 7.89.

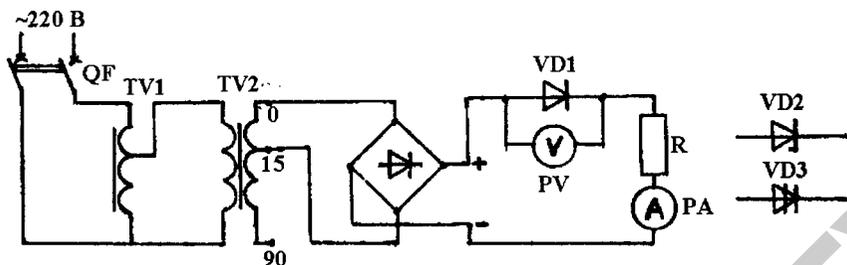


Рисунок 7.89 — Схема электрической цепи для снятия
вольт-амперных характеристик

$VD1$ — диод; $VD2$ — стабилитрон; $VD3$ — динистор;
 PV — вольтметр 1,5; 15; 90 В; PA — амперметр 100 мА

Для исследования кривых напряжений в цепи с полупроводниковыми элементами с источником синусоидального напряжения используют цепь, схема которой приведена на рисунке 7.90.

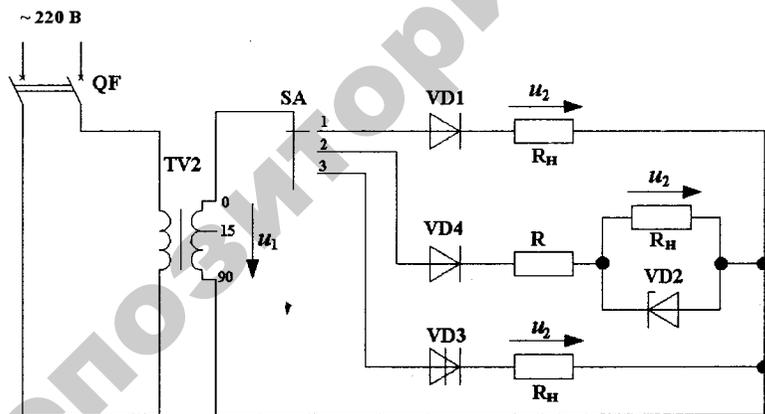


Рисунок 7.90 — Схема электрической цепи для исследования
кривых напряжения в цепи с полупроводниковыми элементами

Программа и методика выполнения работы

Исследование вольт-амперных характеристик нелинейных элементов

1. Собрать цепь по схеме рисунка 7.89. Снять вольт-амперную характеристику диода, изменяя ток от 0 до 100 мА в прямом направлении. Поменять полярность напряжения цепи и снять вольт-амперную характеристику диода в обратном направлении, изменяя напряжение от 0 до 15 В. Данные измерений занести в таблицу 7.21.

Таблица 7.21 — Вольт-амперные характеристики

Наименование полупроводни- кового прибора	В прямом направлении			В обратном направлении		
	Измерено		Вычислено	Измерено		Вычислено
	U	I	$R_{ст}$	U	I	$R_{ст}$
	В	мА	Ом	В	мА	Ом

2. В цепь рисунка 7.89 вместо диода подключить стабилитрон VD2. Снять вольт-амперную характеристику стабилитрона, изменяя ток от 0 до 100 мА в прямом и обратном направлениях (10 измерений).

3. В цепь рисунка 7.89 вместо диода подключить динистор VD3 и в трансформаторе TV2 вместо клемм 0,15 использовать клеммы 0,90. Снять вольт-амперную характеристику динистора, изменяя напряжение от 0 до 75 В в прямом и обратном направлениях. При снятии характеристики в прямом направлении при постепенном увеличении напряжения будет наблюдаться скачок тока (пробой динистора) – переход на новую характеристику, поэтому данные приборов необходимо записывать как при увеличении напряжения от 0 до 75 В, так и при дальнейшем снижении его от 75 до 0 В.

Характеристика при обратном направлении напряжения снимается обычным путем.

4. По данным пунктов 1, 2, 3 построить вольт-амперные характеристики диода, стабилитрона и динистора и рассчитать $R_{ст}$.

Исследование нелинейной цепи с источником синусоидального напряжения

1. Собрать цепь по схеме рисунка 7.90.
2. Включить осциллограф под напряжение и на вход осциллографа (клеммы "вход", "земля" по оси Y) подключить сначала напряжение на входе цепи u_1 , затем напряжение на приемнике u_2 для цепи с диодом, при этом трехпозиционный переключатель SA должен быть в положении 1.

Зарисовать с экрана осциллографа кривые напряжения.

3. Аналогично пункту 2 зарисовать с экрана осциллографа кривые напряжения на входе цепи u_1 и на приемнике u_2 для цепей со стабилитроном и с динистором (трехпозиционный переключатель в положении 2 и в положении 3).

Лабораторное занятие 2

Исследование нелинейных цепей постоянного тока

Задача занятия: экспериментально и графически определить вольт-амперные характеристики нелинейной цепи с последовательным, параллельным и смешанным соединениями нелинейных элементов.

Задание для подготовки к занятию 2

1. Изучить графический метод построения вольт-амперных характеристик нелинейной цепи с последовательным, параллельным и смешанным соединениями нелинейных элементов.
2. Изучить описание лабораторной установки.

3. Подготовить протокол отчета к лабораторному занятию на основании программы его выполнения.
4. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для подготовки к лабораторному занятию 2

1. Какая цепь называется нелинейной?
2. Как строится вольт-амперная характеристика линейного резистора?
3. Как графическим способом строят результирующие вольт-амперные характеристики последовательно и параллельно соединенных нелинейных элементов?
4. Как графически определить все токи при смешанном соединении нелинейных элементов, если напряжение на входе цепи известно?
5. Как графически определить напряжение на одном из двух последовательно соединенных нелинейных элементов, если напряжение на входе цепи известно?
6. На основании каких законов выполняется графический расчет нелинейных электрических цепей?

План занятия:

1. Проверка готовности студентов к выполнению занятия.
2. Сборка электрической цепи и выполнение программы работы.
3. Оформление отчета по лабораторной работе.
4. Защита лабораторной работы.

Описание лабораторной установки

В данной работе используются три элемента цепи: 1, 2 – нелинейные резистивные элементы и 3 – резистор R с линейной ВАХ.

Схема электрической цепи для снятия вольт-амперных характеристик элементов, а также для снятия вольт-амперных характеристик цепей, составленных из этих элементов, представлена на рисунке 7.91.

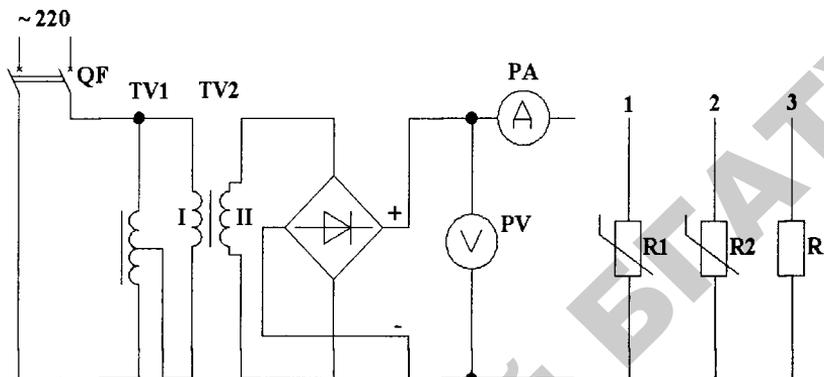


Рисунок 7.91 — Электрическая схема для исследования нелинейных цепей:

PA — амперметр 100 мА, PV — вольтметр 30 В

Программа и методика выполнения работы

1. Собрать цепь по схеме рисунка 7.91.
2. Снять вольт-амперные характеристики первого и второго нелинейного элементов и линейного сопротивления R . Показания снимать через 10 мА от 0 до 100 мА. Данные измерений занести в таблицу 7.22.

Таблица 7.22 — Вольт-амперные характеристики элементов цепи

Нелинейный Элемент № 1		Нелинейный элемент № 2		R	
U , В	I , мА	U , В	I , мА	U , В	I , мА

2. Снять результирующую вольт-амперную характеристику цепи, содержащей нелинейные элементы 1 и 2, соединенные последовательно. Измерения производить с интервалом по току 10 мА.

Данные измерений занести в таблицу 7.23.

4. Снять результирующую вольт-амперную характеристику цепи, содержащей нелинейные элементы 1 и 2, соединенные параллельно. Измерения производить с интервалом по току 10 мА.

Данные измерений занести в таблицу 7.23.

5. Снять результирующую вольт-амперную характеристику цепи при смешанном соединении элементов 1, 2, 3, при этом нелинейные элементы 1 и 2 должны быть соединены параллельно. Измерения производить с интервалом по току 10 мА.

Данные измерений занести в таблицу 7.23.

Таблица 7.23 — Вольт-амперные характеристики нелинейных цепей

Последовательное соединение		Параллельное соединение		Смешанное соединение	
$U, В$	$I, мА$	$U, В$	$I, мА$	$U, В$	$I, мА$

6. Для цепи с последовательным соединением нелинейных элементов 1 и 2 построить на одном рисунке вольт-амперные характеристики этих элементов и результирующие вольт-амперные характеристики этой цепи, полученные опытным путем и графическим способом. Рядом нарисовать схему цепи с последовательным соединением нелинейных элементов.

7. Для цепи с параллельным соединением нелинейных элементов 1 и 2 построить на одном рисунке вольт-амперные характеристики этих элементов и результирующие вольт-амперные характеристики этой цепи, полученные опытным путем и графическим способом. Рядом нарисовать схему цепи с параллельным соединением

нием нелинейных элементов.

8. Для цепи со смешанным соединением элементов 1, 2, 3 построить на одном рисунке вольт-амперные характеристики элементов 1, 2, 3 и результирующие вольт-амперные характеристики этой цепи, полученные опытным путем и графическим способом. Рекомендуется графики выполнять разным цветом. Рядом нарисовать схему цепи, указав на ней токи и напряжения. Вольт-амперным характеристикам цепи дать соответствующие обозначения.

Лабораторное занятие 3

Исследование индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником

Задача занятия: исследование параметров и характеристик индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником.

Задание для подготовки к занятию 3

1. Изучить основные сведения о катушке с ферромагнитным сердечником, ее свойствах, схемах замещения.
2. Изучить описание лабораторной установки.
3. Подготовить протокол отчета к лабораторному занятию на основании программы его выполнения.
4. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для подготовки к лабораторному занятию 3

1. Какую роль выполняет сердечник?
2. Почему эквивалентное сопротивление катушки зависит от величины напряжения или тока?

3. Почему увеличение воздушного зазора приводит к уменьшению эквивалентного сопротивления катушки?
4. Какой материал используется для изготовления сердечника?
5. Перечислите виды потерь энергии в сердечнике и от каких величин они зависят?
6. Где находит применение катушка с ферромагнитным сердечником?

План занятия:

1. Проверка готовности студентов к выполнению задач занятия.
2. Сборка электрической цепи и выполнение программы работы.
3. Оформление отчета по лабораторной работе.
4. Защита лабораторной работы.

Описание лабораторной установки

Исследуемая индуктивная катушка представлена в двух экземплярах: катушка с замкнутым ферромагнитным сердечником и катушка с разъемным ферромагнитным сердечником. Регулирование воздушного зазора разъемного сердечника производится с помощью прокладок из гетинакса, устанавливаемых под обоими концами съемной части магнитопровода. Схема цепи для исследования катушки с замкнутым и разомкнутым сердечником представлена на рисунке 7.92.

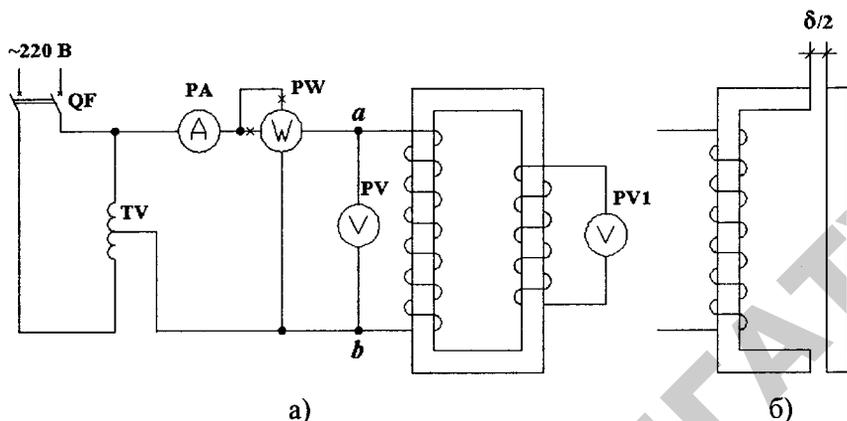


Рисунок 7.92 — Схема электрической цепи для исследования катушки с ферромагнитным сердечником:

PA – амперметр 2 А, PW – ваттметр,
PV – вольтметр 250 В, PV1 – вольтметр 50 В

Программа и методика выполнения работы

1. Исследование индуктивной катушки с замкнутым сердечником.

а) Собрать цепь согласно схеме, изображенной на рисунке 7.92, а.

Снять вольт-амперную характеристику индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником. Изменяя напряжение от 0 до 175 В через интервалы 25 В, произвести измерения и данные занести в таблицу 7.24.

Таблица 7.24 — Вольтамперная характеристика и параметры катушки с замкнутым ферромагнитным сердечником

Измерено			Вычислено			
U	I	P	Z_{Σ}	R_{Σ}	X_{Σ}	L_{Σ}
В	А	Вт	Ом	Ом	Ом	Гн

б) Определить параметры схемы замещения индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником, для чего установить напряжение $U = 100$ В и произвести измерения согласно таблице 7.25.

Таблица 7.25 — Параметры схемы замещения катушки с замкнутым ферромагнитным сердечником

Измерено				Вычислено										
U	I	P	U_1	U_0	Z_3	R_3	X_3	R	X_S	R_0	X_0	g_0	b_0	Φ_0
В	А	Вт	В	В	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	град

2. Исследование индуктивной катушки с разомкнутым сердечником.

Отсоединить катушку с замкнутым сердечником и подключить к зажимам a и b схемы электрической цепи, изображенной на рисунке 7.92, а, катушку с разомкнутым сердечником (рисунок 7.92, б).

Поддерживая напряжение на входе равным 70 В и последовательно увеличивая с помощью прокладок величины зазоров от 0 до 30 мм, произвести измерения и данные занести в таблицу 7.26.

Таблица 7.26 — Влияние величины воздушного зазора в сердечнике на параметры катушки

Измерено				Вычислено			
δ	U	I	P	Z_3	R_3	X_3	L_3
мм	В	А	Вт	Ом	Ом	Ом	Гн

3. По результатам измерений вычислить величины, указанные в таблицах 7.24, 7.25, 7.26.

4. По данным таблицы 7.24 построить на одном рисунке кривые $U(I)$, $Z_3(I)$, $R_3(I)$, $X_3(I)$.

5. По данным таблицы 7.25 построить в масштабе векторную диаграмму индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником, разложив ток на активную и реактивную составляющие. Рекомендуемый масштаб $m_u = 10$ В/см.

6. По данным таблицы 7.26 построить на одном рисунке зависимости $I(\delta)$, $Z_3(\delta)$, $R_3(\delta)$, $X_3(\delta)$.

Методические указания к обработке результатов эксперимента

Эквивалентные параметры катушки Z_3 , R_3 и X_3 определяются исходя из предположения, что кривые тока и напряжения заменены эквивалентными синусоидами, действующие значения которых измеряются приборами, указанными в схеме.

$$Z_3 = \frac{U}{I}; \quad R_3 = \frac{P}{I^2}; \quad X_3 = \sqrt{Z_3^2 - R_3^2};$$

$$R_3 = R + R_0; \quad X_3 = X_S + X_0.$$

Активное сопротивление обмотки измерено омметром и указано на панели — $R = 6,0$ Ом. ЭДС, наводимая основным потоком, и численно равное ей напряжение U_0 находятся по напряжению U_1 :

$$U_0 = U_1 \frac{w}{w_1}.$$

Число витков $w = 150$; $w_1 = 28$.

$$Z_0 = \frac{U_0}{I}; \quad R_0 = R_3 - R; \quad X_0 = \sqrt{Z_0^2 - R_0^2};$$

$$X_S = X_3 - X_0.$$

Угол φ_0 определяется из выражения:

$$P_c = U_0 I \cos \varphi_0; \quad P_c = P - P_m = P - RI^2,$$

где P_m — потери энергии в активном сопротивлении обмотки.

$$g_0 = \frac{R_0}{R_0^2 + X_0^2}; \quad b_0 = \frac{X_0}{R_0^2 + X_0^2}.$$

Лабораторное занятие 4 **Исследование феррорезонансных явлений** **в электрических цепях**

Задача занятия: исследование свойств электрической цепи, содержащей индуктивную катушку с ферромагнитным сердечником и конденсатор при их последовательном и параллельном соединениях.

Задание для подготовки к занятию 4

1. Ознакомиться с явлением феррорезонанса в электрических цепях, условиями его возникновения, особенностями, отличием от подобных явлений в линейных электрических цепях.
2. Изучить описание лабораторной установки.
3. Подготовить протокол отчета к лабораторному занятию на основании программы его выполнения.
4. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для подготовки к лабораторному занятию 4

1. В какой цепи возможен феррорезонанс напряжений?
2. В чем состоит явление феррорезонанса напряжений?
3. Что называется триггерным или релейным эффектом?
4. При каком условии в феррорезонансной цепи можно получить характерные скачки тока?
5. Какое различие между феррорезонансом напряжений и резонансом напряжений в линейных цепях?
6. В какой цепи возможен феррорезонанс токов?
7. В чем состоит явление феррорезонанса токов?
8. Какое различие между феррорезонансом токов и резонансом токов в линейных цепях?
9. Почему участок кривой $U(I)$, соответствующий феррорезонансу, не касается оси ординат?

План занятия:

1. Проверка готовности студентов к выполнению задач занятия.
2. Сборка электрической цепи и выполнение программы работы.
3. Оформление отчета по лабораторной работе.
4. Защита лабораторной работы.

Описание лабораторной установки

Для исследования феррорезонанса напряжений используется электрическая цепь, схема которой представлена на рисунке 7.93, а для исследования феррорезонанса токов — электрическая цепь, представленная схемой на рисунке 7.94.

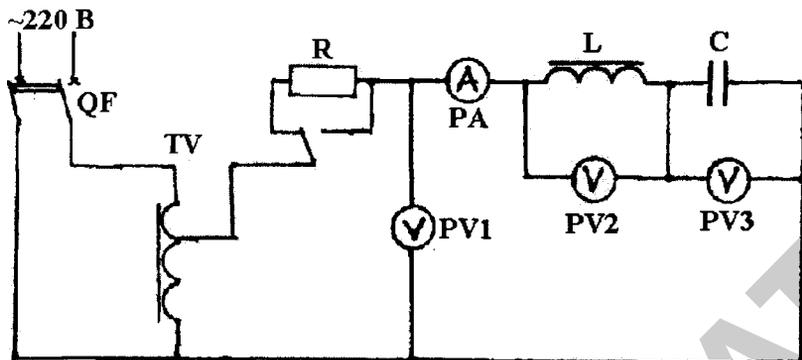


Рисунок 7.93 — Схема электрической цепи для исследования феррорезонанса напряжений:

PA – амперметр 2 А; $PV1, PV2, PV3$ – вольтметры 100, 250, 500 В.

Программа и методика выполнения работы

1. Собрать цепь по схеме, представленной на рисунке 7.93.
2. Отключить резистор R . Постепенно увеличивая напряжение от нуля до величины, допускаемой приборами (прямой ход), измерить ток I и напряжения U , U_L , U_C . Всего 8 измерений, среди них должны быть измерения величин непосредственно перед скачком тока и после него.

Постепенно уменьшая напряжение (обратный ход), произвести аналогичные измерения. При этом среди них должны быть измерения величин непосредственно перед скачкообразным уменьшением тока и после него.

Данные измерений занести в таблицу 7.26.

Таблица 7.26 — Вольт-амперные характеристики при питании цепи от источника напряжения

Прямой ход				Обратный ход			
I, A	U, B	U_L, B	U_C, B	I, A	U, B	U_L, B	U_C, B

3. Включить в цепь резистор R .

Включение сопротивления R в цепь равносильно увеличению внутреннего сопротивления источника напряжения и последний может условно считаться источником тока, так как сопротивление феррорезонансной цепи мало по сравнению с внутренним сопротивлением источника.

Увеличивая ток, произвести измерения тока и напряжений. Данные измерений занести в таблицу 7.27. Всего 8 измерений, среди них должны быть измерения, соответствующие уменьшению напряжения U при увеличении тока и последующему увеличению напряжения U при увеличении тока.

Таблица 7.27 — Вольт-амперные характеристики при питании цепи от источника тока

I, A	U, B	U_L, B	U_C, B
--------	--------	----------	----------

4. По данным таблицы 7.26 построить на одном графике кривые $U(I)$; $U_L(I)$; $U_C(I)$.

5. По данным таблицы 7.27 построить на одном графике $U(I)$; $U_L(I)$; $U_C(I)$.

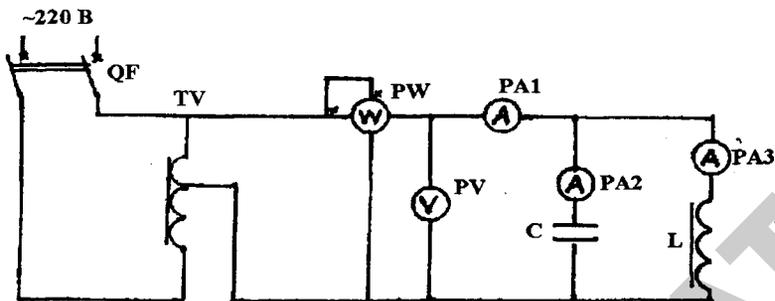


Рисунок 7.94 — Схема электрической цепи для исследования феррорезонанса токов:
 PA1, PA2, PA3 — амперметры 2 А; PV — вольтметр 150 В;
 PW — ваттметр 1 А, 150 В

Программа и методика выполнения работы

1. Собрать цепь по схеме, представленной на рисунке 7.94.
2. Постепенно увеличивая напряжение, произвести измерения токов, напряжения и мощности. Общее число измерений 10, при этом необходимо зафиксировать значения величин, при которых общий ток начнет уменьшаться, достигнет минимума и затем вновь начнет увеличиваться. Измерения закончить при достижении током катушки значения $I_L = 2$ А.

Данные измерений занести в таблицу 7.28.

Таблица 7.28 — Вольт-амперные характеристики цепи

$U, \text{В}$	$I, \text{А}$	$I_C, \text{А}$	$I_L, \text{А}$	$P, \text{Вт}$
---------------	---------------	-----------------	-----------------	----------------

3. По данным таблицы 7.28 построить на одном рисунке кривые $U(I)$, $U(I_C)$, $U(I_L)$, $U = f|I_L - I_C|$.

Материалы к управляемой самостоятельной работе

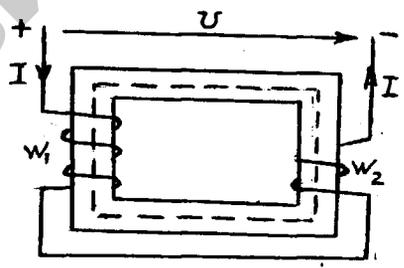
1. Дать описание нескольких нелинейных элементов, их вольт-амперных характеристик, область практического применения.
2. Роль ферромагнитных материалов в магнитной цепи, магнитомягкие, магнитно-твердые материалы, магнитодиэлектрики, ферриты — их свойства, основные характеристики, область применения.
3. Потери энергии в ферроманитном сердечнике.
4. Методика расчета магнитных цепей с постоянным магнитом.
5. Выполнить индивидуальное расчетно-графическое задание по теме «Расчет магнитных цепей постоянного тока» по вариантам, выдаваемым преподавателем.
6. Выполнить индивидуальное задание по теме «Расчет нелинейной электрической цепи переменного тока» по вариантам, выдаваемым преподавателем.

Задание по вопросам 1-4 оформить в виде реферата.

Задание по вопросам 5 и 6 оформить в виде пояснительной записки.

При выполнении УСРС воспользоваться настоящим УМК, а также литературой [1, 3, 17].

ОБРАЗЕЦ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО МОДУЛЮ 7

Но- мер п/п	Вопрос	Уро- вень слож- ности																		
1	Что называется статическим и дифференциальным сопротивлениями нелинейного элемента? Как их определяют? Для каких нелинейных элементов дифференциальное сопротивление имеет отрицательный знак?	0,8																		
2	Что собой представляет вебер-амперная характеристика? Какая последовательность ее построения?	0,8																		
3	<p>Число витков катушек $w_1 = 200$; $w_2 = 150$. Сопротивление проводов обмоток $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 4$ Ом. Приложено постоянное напряжение $U = 4$ В.</p> <p>Размеры магнитопровода $l_{cp} = 0,5$ м; $S = 25 \times 10^{-4}$ м².</p> <p>Характеристика стали</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>В, Тл</td> <td>0</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> <td>0,8</td> <td>1</td> <td>1,1</td> <td>1,2</td> <td>1,3</td> </tr> <tr> <td>H, А/м</td> <td>0</td> <td>75</td> <td>90</td> <td>170</td> <td>280</td> <td>420</td> <td>700</td> <td>1200</td> </tr> </table> <p>Определить магнитный поток Φ.</p> <div style="text-align: center;">  </div>	В, Тл	0	0,4	0,5	0,8	1	1,1	1,2	1,3	H, А/м	0	75	90	170	280	420	700	1200	0,8
В, Тл	0	0,4	0,5	0,8	1	1,1	1,2	1,3												
H, А/м	0	75	90	170	280	420	700	1200												
4	Привести схему замещения индуктивной катушки с ферромагнитным сердечником. Дать определение каждого элемента, входящего в эту схему.	0,8																		

- 5 В сердечнике из литой стали (рисунок 1), кривая намагничивания которой приведена на рисунке 2, магнитная индукция $B = 1$ Тл, число витков равномерно намотанной на сердечник обмотки $W = 200$, длина средней линии сердечника $l_{cp} = 69$ см, сечение $S = 6$ см². Как изменится ток I , протекающий по обмотке, если в сердечнике сделать воздушный зазор $l_{в} = 0,5$ мм?

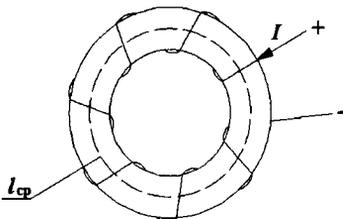


Рисунок 1

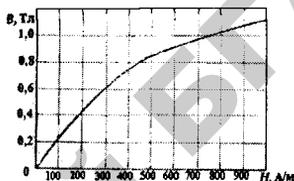
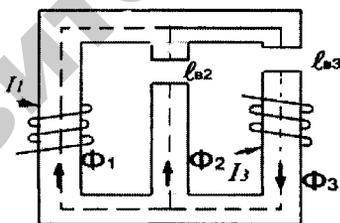


Рисунок 2

- 6 Составить систему уравнений по I и II законам Кирхгофа для магнитной цепи. Размеры участков магнитопровода, число витков, направления токов в обмотках и магнитных потоков в ветвях известны.



- 7 Нелинейный элемент, имеющий нелинейную характеристику, заданную таблицей, требуется заменить эквивалентным сопротивлением с добавочной ЭДС на участке характеристики, соответствующей изменению напряжения от 30 В до 40 В.

$U, В$	0	10	20	30	40
$I, мА$	0	0,01	0,04	0,1	0,25

8	<p>По ВАХ для нелинейной индуктивной катушки при токе $I_2 = 1$ А напряжение $U_2 = 100$ В. Определить напряжение U на входе цепи, если $X_C = 100$ Ом, $R = 100$ Ом.</p>	1,2
9	<p>Определить токи I_1, I_2, I_3 и напряжения U_1, U_2 при смешанном соединении нелинейных резисторов (рисунок 1) при напряжении источника питания $U = 50$ В. Вольтамперные характеристики нелинейных резисторов $I_2(U_2), I_3(U_2)$ заданы (рисунок 2). Резистор $R_1 = 10$ Ом.</p>	1,3
10	<p>В схеме последовательно соединены резистор R, катушка с ферромагнитным сердечником L и линейный конденсатор C. По заданным вольтамперным характеристикам построить результирующую ВАХ феррорезонансной цепи и определить напряжение и ток в цепи при феррорезонансе.</p>	1,5

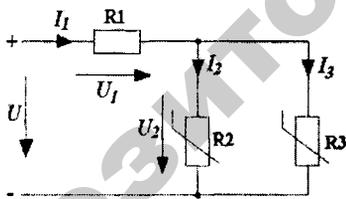
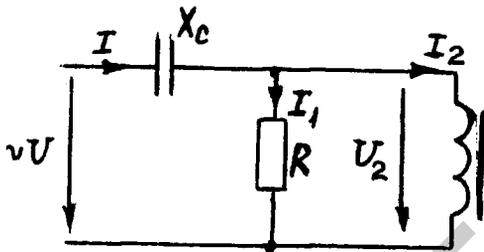


Рисунок 1

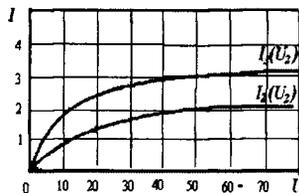
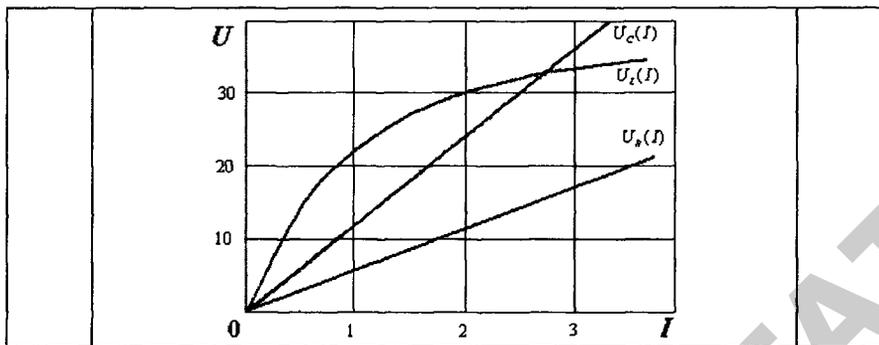


Рисунок 2



Репозиторий БГАТУ

МОДУЛЬ 8

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ВВОДНЫЙ КОММЕНТАРИЙ К МОДУЛЮ

Студент должен:

- **знать:** сущность электростатического поля, поля постоянного тока в проводящей среде, магнитного поля постоянного тока, переменного электромагнитного поля; закон Кулона, понятия напряженности и потенциал электрического поля, поляризация диэлектрика, вектор электрической индукции, теорему Гаусса, понятия плотность электрического тока, проводимость, законы Ома, Кирхгофа, Джоуля – Ленца, полного тока в дифференциальной форме; законы Ампера; теорему Умова Пойнтинга, уравнения Максвелла, полную систему уравнений электромагнитного поля, явления поверхностного эффекта.

- **уметь:** рассчитывать напряженность и потенциал электрического поля, емкость конденсаторов, проводимость среды, выделяемую мощность электродных систем, максимально допустимые напряжения между электродами; магнитные поля и индуктивность тороида, соленоида, взаимную индуктивность, энергию электрического и магнитного полей;

- **быть способным** использовать полученные знания в практических целях, стремиться к более глубокому познанию сущности электрофизических явлений.

Электромагнитное поле является одним из видов материи. Как и вещество, электромагнитное поле обладает массой, энергией, количеством движения и моментом количества движения, то есть свойствами материи, которые подчиняются основным законам физики.

Электромагнитное поле есть особый вид материи, отличающийся непрерывным распределением в пространстве и обнаруживающий дискретность структуры (фотоны), характеризующийся

способностью распространяться в вакууме со скоростью близкой к скорости света, оказывающий на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости и величины их заряда. Электромагнитное поле имеет две взаимосвязанные стороны — электрическое поле и магнитное поле.

Электрическое поле обусловлено электрическими зарядами и изменением магнитного поля, оказывает силовое воздействие на заряженные частицы и тела и выявляется по силовому воздействию на неподвижные заряженные тела и частицы.

Магнитное поле обусловлено движущимися электрическими зарядами и изменением электрического поля, оказывает силовое воздействие на движущиеся заряженные частицы и выявляется по силовому воздействию на движущиеся заряженные тела и частицы.

Если электромагнитное поле неизменно во времени, то обе его стороны — электрическое поле и магнитное поле могут рассматриваться отдельно друг от друга.

СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ

Электромагнитное поле — вид материи, определяющийся во всех точках двумя векторными величинами, которые характеризуют две его стороны, называемые соответственно «электрическое поле» и «магнитное поле», оказывающий силовое воздействие на заряженные частицы, зависящее от их скорости и величины их заряда.

Электрическое поле — одна из двух сторон электромагнитного поля, характеризующаяся воздействием на электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости.

Магнитное поле — одна из двух сторон электромагнитного поля, характеризующаяся воздействием на движущуюся электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и ее скорости.

Электрический заряд тела (системы тел) — скалярная величина, равная алгебраической сумме элементарных электрических зарядов в теле (системе тел).

Электромагнитная энергия — энергия электромагнитного поля, состоящая из энергий электрического и магнитного полей.

Напряженность электрического поля — векторная величина, характеризующая электрическое поле и определяющая силу, действующую на заряженную частицу со стороны электрического поля.

Магнитная индукция — векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля.

Вектор Пойнтинга — вектор, поток которого сквозь некоторую поверхность представляет мгновенную электромагнитную мощность, передаваемую сквозь эту поверхность, равный векторному произведению напряженности электрического поля и напряженности магнитного поля.

ОСНОВЫ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ПО МОДУЛЮ

Данный модуль посвящен изучению электростатического поля, электрического и магнитного полей постоянных токов, переменного электромагнитного поля. Рассматриваются следующие вопросы:

1. Закон Кулона.
2. Напряженность, потенциал, градиент потенциала.
3. Электрическое смещение, теорема Гаусса. Уравнения Пуассона и Лапласа.
4. Поле и емкость плоского и цилиндрического конденсаторов, двухпроводной линии.
5. Энергия и плотность энергии электрического поля.
6. Плотность электрического тока проводимости.
7. Законы Ома, Кирхгофа, Джоуля – Ленца в дифференциаль-

ной форме.

8. Аналогия между электрическим полем постоянного тока и электростатическим полем.

9. Основные величины, характеризующие магнитное поле и связь между ними.

10. Закон полного тока в дифференциальной форме.

11. Принцип непрерывности магнитного потока.

12. Магнитное поле и индуктивность тороида и двухпроводной линии.

13. Энергия и плотность энергии магнитного поля.

14. Механические силы в магнитном поле.

15. Полный электрический ток.

16. Уравнения электромагнитного поля.

17. Теорема Умова – Пойнтинга. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии.

18. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде. Электромагнитное экранирование.

19. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике.

МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Материалы к лекциям

Теоретический материал по модулю 8 «Теория электромагнитного поля» изложен в данном учебно-методическом комплексе и в литературе [2, 4].

План лекции 1:

1. Введение в теорию электромагнитного поля.
2. Электростатическое поле. Закон Кулона.
3. Напряженность и потенциал электрического поля.
4. Графическое изображение электростатического поля.

5. Поляризация диэлектрика, вектор электрической индукции.

План лекции 2:

1. Теорема Гаусса.
2. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа.
3. Проводник в электростатическом поле.
4. Поле и емкость плоского конденсатора.

План лекции 3:

1. Поле заряженной оси.
2. Поле и емкость цилиндрического конденсатора.
3. Энергия и объемная плотность энергии электрического поля.

План лекции 4:

1. Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде. Сущность и основные понятия. Плотность тока и ток.
2. Закон Ома, законы Кирхгофа, закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

План лекции 5:

1. Магнитное поле постоянного тока. Сущность, основные понятия, величины.
2. Закон полного тока в дифференциальной форме.
3. Принцип непрерывности магнитного поля.
4. Магнитное поле и индуктивность тороида и двухпроводной линии.

План лекции 6:

1. Определение переменного электромагнитного поля. Полный электрический ток.
2. Уравнения Максвелла. Полная система уравнений электромагнитного поля.
3. Теорема Умова – Пойнтинга.

План лекции 7:

1. Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии электропередачи.
2. Переменное электромагнитное поле в проводящей среде.
3. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде. Глубина проникновения и длина волны. Явление поверхностного эффекта.
4. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике.

Лекция 1

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

8.1. Электростатическое поле. Закон Кулона

Электрическое поле неподвижных заряженных тел при отсутствии в них электрических токов называют электростатическим.

Заряды неподвижных тел образуются совокупностью зарядов элементарных частиц, движущихся хаотически. Каждая такая частица окружена электромагнитным полем. Но вследствие хаотического движения их результирующее магнитное поле даже в непосредственной близости от поверхности тела практически отсутствует. Электрические же поля частиц при избытке на теле частиц с зарядами того или иного знака суммируются и обнаруживаются в окружающем тело пространстве.

В основу определения электрического поля положено механическое его проявление. Оно описывается законом Кулона.

Два точечных заряда q_1 и q_2 в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой \vec{F} , прямо пропорциональной произведению зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{R}_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (8.1)$$

где \vec{R}_0 — единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды (рисунок 8.1); ϵ_0 — электрическая постоянная, $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м.

Заряды, имеющие одинаковые знаки, отталкиваются, а заряды противоположных знаков притягиваются.



Рисунок 8.1 — Сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 при одинаковых знаках зарядов

Под точечными зарядами понимают следующее: линейные размеры тел, на которых расположены взаимодействующие заряды, много меньше расстояния между телами.

Если заряженные тела находятся не в вакууме, а в однородной, изотропной, то есть обладающей одинаковыми свойствами во всех направлениях, непроводящей среде, то сила взаимодействия \vec{F} меньше в ϵ_r раз.

Безразмерная величина ϵ_r называется относительной диэлектрической проницаемостью среды, в которой находятся заряженные тела.

В системе СИ заряд измеряется в кулонах (Кл), расстояние в метрах (м), тогда силу получают в ньютонах (Н).

8.2. Напряженность и потенциал электростатического поля

Основными величинами, характеризующими электростатическое поле, являются напряженность поля \vec{E} и потенциал Φ .

Напряженность электростатического поля — величина векторная, определяемая в каждой точке величиной и направлением. Потенциал является величиной скалярной.

Электростатическое поле определено, если известен закон изменения \vec{E} и Φ во всех точках этого поля.

Если в электростатическое поле поместить настолько малый положительный заряд, что он своим присутствием не вызовет сколько-нибудь заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к величине заряда q определяет напряженность поля в данной точке:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}. \quad (8.2)$$

Отсюда следует, что сила \vec{F} , действующая на конечной величины точечный положительный заряд q , внесенный в поле, будет равна $\vec{F} = q\vec{E}$, а напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на неподвижный заряд, по величине равный единице (единичный заряд). Подчеркнем, что вектор напряженности \vec{E} имеет направление силы, действующей на положительный заряд.

Если поле создается несколькими зарядами $(q_1, q_2, q_3 \dots)$, то его напряженность равна геометрической сумме напряженностей от каждого из зарядов в отдельности: $(\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots)$, то есть при расчете электрического поля применим метод наложения.

Понятия потенциала и разности потенциалов связаны с работой, совершаемой силами поля при перемещении заряда.

На единичный положительный заряд в любой точке поля действует сила, равная напряженности \vec{E} . Под разностью потенциалов принято понимать работу сил поля при переносе единичного положительного заряда из одной точки поля в другую:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \overline{dl},$$

где $d\vec{l}$ — вектор элемента пути, равный по величине элементу пути dl и направленный по касательной к пути в сторону перемещения заряженной частицы.

Потенциал измеряется в вольтах (В), элемент пути — в метрах (м), напряженность электрического поля — в вольтах на метр (В/м).

Если бы потенциал конечной точки пути 2 был равен 0, то потенциал точки 1 определился бы так:

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} \overline{dl}, \quad (8.3)$$

то есть потенциал произвольной точки поля может быть определен как работа сил поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки поля в точку поля, потенциал которой равен 0.

За точку, имеющую нулевой потенциал, можно принять любую точку поля. Если такая точка выбрана, то потенциалы всех точек поля определяют относительно этой точки.

Нередко принимают, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности. Поэтому, особенно в курсах физики, распространено определение потенциала как работы, совершаемой силами поля при переносе единичного заряда из данной точки поля в бесконечность:

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} \overline{dl}.$$

Часто считают, что точка с нулевым потенциалом находится на поверхности земли (земля в условиях электростатики есть проводящее тело, поэтому безразлично, где именно — на поверхности земли или в её толще — находится эта точка).

Таким образом, потенциал любой точки поля зависит от того, какой точке поля придан нулевой потенциал, то есть потенциал определяется с точностью до постоянной величины. Однако это не имеет существенного значения, так как практически важен не потенциал какой-либо точки поля, а разность потенциалов и производная от потенциала по координатам.

8.3. Электростатическое поле — поле потенциальное

В электростатическом поле интеграл $\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$, не зависит от вы-

бора пути интегрирования и является только функцией координат точек 1 и 2. Для доказательства этого положения рассмотрим работу сил поля при перемещении электрического заряда по двум разным путям: через точку 3 и через точку 4 (рисунок 8.2).

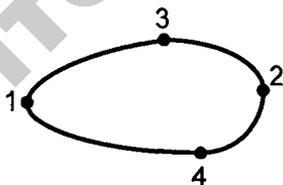


Рисунок 8.2 — Перемещение из одной точки поля в другую по двум разным путям

Предположим, что по замкнутому пути 1, 3, 2, 4, 1 перемещается точечный единичный положительный заряд. На части замкнутого пути движение будет совершаться в направлении сил поля и работа, затраченная силами поля, будет положительной. На другой части замкнутого пути движение будет происходить против сил

поля и, соответственно, работа сил поля будет отрицательной.

После обхода по замкнутому пути система, включая и точечный заряд, возвращается в исходное состояние и в соответствии с принципом сохранения энергии в электростатическом поле линейный интеграл напряженности поля по любому замкнутому контуру должен быть равен нулю:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (8.4)$$

Отсюда непосредственно вытекает независимость линейного интеграла напряженности поля от выбора пути интегрирования при заданных начальной и конечной точках 1 и 2 пути. Действительно:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 = \int_{132} \vec{E} d\vec{l} + \int_{241} \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Откуда

$$\int_{132} \vec{E} d\vec{l} = - \int_{241} \vec{E} d\vec{l} = \int_{142} \vec{E} d\vec{l}.$$

Так как пути через точки 3 и 4 взяты произвольно, то следовательно интеграл $\int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$, определяющий разность потенциалов двух точек поля, в электростатическом поле не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определяется в заданном поле положением точек 1 и 2. Такое поле носит название потенциального электрического поля. Потенциальным является также электрическое поле постоянных токов, протекающих по неподвижным проводникам, при условии, что поле рассматривается вне области действия электродвижущих сил.

8.4. Градиент электрического потенциала

Установим связь между напряженностью электрического поля и изменением потенциала в пространстве. Допустим, что положение точки A , в которой мы рассматриваем потенциал φ , определяется её расстоянием l от начальной точки O вдоль некоторого пути (рисунок 8.3), идущего в точку P , где потенциал принят равным нулю.

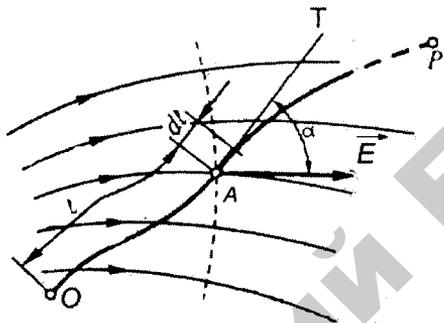


Рисунок 8.3 — Определение изменения потенциала φ точки A при перемещении точки A

На рисунке 8.3 электростатическое поле изображено линиями напряженности электрического поля. В каждой точке этих линий касательные к ним совпадают по направлению с вектором напряженности поля. Стрелки на линиях напряженности указывают направление вектора напряженности \vec{E} .

Выражение для потенциала φ в точке A можно написать в виде:

$$\varphi = \int_l^{l_p} \vec{E} d\vec{l} = \int_l^{l_p} E \cos \alpha dl,$$

где l_p — длина всего пути от точки O до точки P ,

α — угол между направлением вектора \vec{E} и касательной к пути.

Взяв частную производную от обеих частей равенства по нижнему пределу, найдем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -E \cos \alpha,$$

откуда следует, что приращение потенциала, рассчитанное на единицу перемещения в каком-либо направлении, численно равно взятой с обратным знаком составляющей напряженности поля в этом направлении.

Рассмотрим два варианта направления перемещения точки A .

Если направление перемещения dl составляет прямой угол ($\alpha = \pi/2$) с вектором \vec{E} , то $\cos \alpha = 0$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0$. Следовательно, переме-

щаясь в направлении, нормальном к направлению линий напряженности поля, будем иметь $\varphi = \text{const}$, то есть будем оставаться на поверхности равного потенциала. Такая поверхность называется эквипотенциальной.

Следы эквипотенциальных поверхностей в плоскости чертежа называются линиями равного потенциала или эквипотенциальными линиями. Линии равного потенциала пересекаются с линиями напряженности поля всюду под прямым углом. Одна из линий равного потенциала, проходящая через точку A , показана на рисунке 8.3 пунктиром.

Если направление перемещения dl совпадает с направлением вектора \vec{E} , то будем иметь

$$\alpha = 0, \quad \cos \alpha = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l} = -E.$$

Это характерное направление совпадает с нормалью к поверхности равного потенциала. Поэтому условимся обозначать перемещение dl в этом направлении через dn и запишем:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -E.$$

Очевидно, dn есть элемент длины линии напряженности поля, причем координату n считаем растущей в направлении вектора \vec{E} .

Производная от потенциала по координате имеет наибольшее значение в направлении, нормальном к поверхности равного потенциала, в сторону, противоположную направлению вектора \vec{E} . Это наибольшее значение производной может быть изображено вектором, направленным против вектора \vec{E} и носящим название градиента электрического потенциала. Его обозначают символом $\text{grad } \phi$.

Градиент потенциала равен приращению потенциала, отнесенному к единице длины и взятому в направлении, в котором это приращение имеет наибольшее значение:

$$|\text{grad } \phi| = \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|.$$

Векторы \vec{E} и $\text{grad } \phi$, равны между собой по величине и направлены в противоположные стороны:

$$\text{grad } \phi = -\vec{E}. \quad (8.5)$$

Знак «минус» в этом равенстве показывает, что потенциал возрастает в направлении противоположном направлению линий напряженности поля.

Как видим, между напряженностью электрического поля и потенциалом существуют связи интегрального (8.3) и дифференциального (8.5) видов.

Запись градиента потенциала в осях декартовой системы координат имеет вид:

$$\text{grad } \phi = \vec{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (8.6)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы.

Выражение $\text{grad}\varphi$ в декартовой системе координат может быть записано проще с помощью символического оператора ∇ (знак набла). Оператор ∇ в декартовой системе координат записывают так:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Сравнивая последнее выражение с (8.6), можем записать

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi.$$

Следовательно,

$$\Delta \varphi = -\vec{E}. \quad (8.7)$$

Вектор напряженности в декартовой системе координат записывают уравнением:

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z.$$

8.5. Графическое изображение электростатического поля

Электростатическое поле можно наглядно изобразить совокупностью линий напряженности электрического поля (силовых линий) и эквипотенциальных линий.

Линия напряженности поля — это мысленно проведенная в поле линия, начинающаяся на положительно заряженном теле и оканчивающаяся на отрицательно заряженном теле. Касательная в каждой точке линии совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля \vec{E} в этой точке. Вдоль линии напряженности электрического поля двигался бы весьма малый положительный заряд, если бы он имел возможность свободно перемещаться в поле

и если бы он не обладал инерцией.

Так как положительный и отрицательный заряды, создающие поле, не могут быть в одной и той же точке, то линии напряженности электрического поля не могут быть линиями, замкнутыми сами на себя.

В соответствии с предыдущим параграфом в электростатическом поле существуют эквипотенциальные поверхности, то есть совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал. Следы эквипотенциальных поверхностей на мысленно проведенной плоскости, пересекающей электростатическое поле, образуют эквипотенциальные линии. Эквипотенциальные линии электростатического поля являются замкнутыми на себя линиями. Они пересекаются с линиями напряженности в любой точке поля под прямым углом.

На рисунке 8.4 изображены две заряженные оси с линейной плотностью зарядов $+t$ и $-t$ и построена картина поля в плоскости, перпендикулярной этим осям.

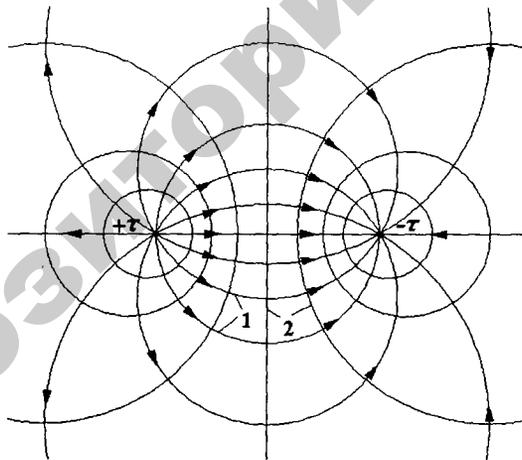


Рисунок 8.4 — Поле двух заряженных осей:

1 — линии напряженности; 2 — эквипотенциальные линии

8.6. Поляризация диэлектрика. Вектор электрического смещения

Диэлектриками называют вещества, не проводящие электрического тока, в них практически отсутствуют свободные электрические заряды. Диэлектрики обладают связанными электрическими зарядами.

Свободные элементарные частицы (электроны или положительные и отрицательные ионы) под воздействием сил электрического поля могут свободно перемещаться в веществе, их перемещение не ограничивается внутримолекулярными силами.

Под связанными понимают электрические заряды, входящие в состав вещества и удерживаемые в определенных положениях внутримолекулярными силами. Сумма положительных связанных зарядов равна сумме отрицательных связанных зарядов. При отсутствии внешнего электрического поля диэлектрик в целом можно считать электрически нейтральным.

Если какое-либо диэлектрическое тело поместить в электрическое поле, то оно поляризуется.

Под поляризацией понимают упорядоченное изменение расположения связанных зарядов внутри молекул, вызванное электрическим полем. Это изменение расположения проявляется в том, что положительные связанные заряды сместятся в сторону поля, а отрицательные связанные заряды переместятся в противоположном направлении. Если напряженность электрического поля не чрезмерно велика, то частицы с положительными и отрицательными зарядами совершенно разойтись не могут, так как они удерживаются внутримолекулярными силами. В результате поляризации на поверхности вещества как бы обнажаются связанные заряды (рисунок 8.5), где они не будут электрически нейтральны.

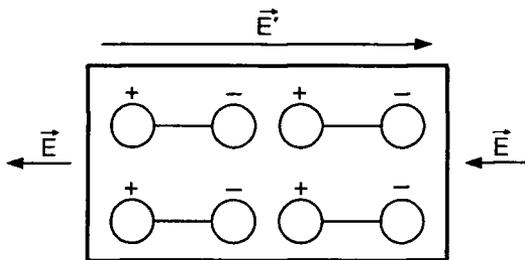


Рисунок 8.5 — Диэлектрик во внешнем электрическом поле

Связанные заряды при поляризации создают свое поле, напряженность которого E' будет направлена противоположно напряженности E внешнего поля. Поэтому напряженность E результирующего поля в диэлектрике будет меньше, чем напряженность внешнего поля.

Степень поляризации диэлектрика характеризуется вектором поляризованности \vec{P} , который для однородных и изотропных диэлектриков пропорционален напряженности электрического поля в диэлектрике:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_r \vec{E}.$$

Безразмерная величина χ_r называется относительной диэлектрической восприимчивостью.

В некоторых случаях желательно иметь оценку действия зарядов, создающих электрическое поле, вне зависимости от свойств среды. Это достигается введением в расчеты вектора электрического смещения (электрической индукции) \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Подставив выражение \vec{P} , получим

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_r \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} (1 + \chi_r).$$

Обозначим: $1 + \chi_r = \varepsilon_r$ — относительная диэлектрическая проницаемость; $\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_a$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость. Окончательно имеем:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}. \quad (8.8)$$

В системе СИ $[D] = [P] = \text{Кл/м}^2$.

Лекция 2

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

8.7. Теорема Гаусса в интегральной форме

Теорема Гаусса является одной из важнейших теорем электростатики. Она соответствует закону Кулона и принципу наложения. Теорему можно сформулировать и записать следующими способами:

1. Поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность, равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся в объеме, ограниченном этой поверхностью:

$$\int_S \vec{D} d\vec{s} = \sum q_{\text{своб}}. \quad (8.9)$$

где $d\vec{s}$ — вектор элемента поверхности, длина которого численно равна поверхности элемента ds , а направление совпадает с направлением внешней нормали к этому же элементу (рисунок 8.6).

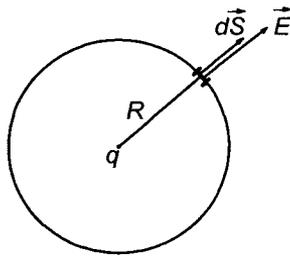


Рисунок 8.6 — Поток вектора напряженности
сквозь замкнутую поверхность

Из уравнения (8.9) следует, что вектор \vec{D} является такой характеристикой поля, которая при прочих равных условиях не зависит от диэлектрических свойств среды (от величины ϵ_a).

2. Так как $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$, то теорему Гаусса для однородной и изотропной среды можно записать в такой форме:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{своб.}}}{\epsilon_a}, \quad (8.10)$$

то есть поток вектора напряженности электрического поля сквозь любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся в объеме, ограниченном этой поверхностью, разделенной на абсолютную диэлектрическую проницаемость среды ϵ_a .

Из уравнения (8.10) следует, что вектор \vec{E} представляет собой характеристику поля, которая в отличие от вектора \vec{D} при прочих равных условиях зависит от диэлектрических свойств среды (от величины ϵ_a).

Теорему Гаусса в интегральной форме можно использовать для нахождения напряженности электрического поля в какой-либо точ-

ке, если через эту точку можно провести замкнутую поверхность таким образом, что все точки этой поверхности будут в одинаковых (симметричных) условиях по отношению к заряду, находящемуся внутри замкнутой поверхности. При этом в силу симметричного расположения всех точек поверхности относительно заряда числовое значение напряженности поля в различных точках этой поверхности будет одинаковым.

8.8. Применение теоремы Гаусса для определения напряженности и потенциала в поле точечного заряда

В качестве примера использования теоремы Гаусса найдем напряженность поля, создаваемую точечным зарядом q в точке, удаленной на расстоянии R от заряда. С этой целью проведем через заданную точку сферическую поверхность радиусом R , полагая, что заряд находится в центре сферы (см. рисунок 8.6), и применим к этой сфере теорему Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_a}$$

В данном примере в каждой точке сферы векторы \vec{E} и $d\vec{s}$ совпадают по направлению. Угол между ними равен нулю. В силу симметрии числовое значение E во всех точках сферы одно и то же, поэтому E можно вынести из-под интеграла:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \oint_S E ds \cos 0^0 = E \oint_S ds = E 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_a}$$

где $4\pi R^2$ — площадь сферической поверхности S .

Следовательно, напряженность, создаваемая точечным зарядом q на расстоянии R от него,

$$E = \frac{q}{4\pi R^2 \epsilon_a} \quad (8.11)$$

Напряженность E изменяется только в радиальном направлении, поэтому градиент потенциала

$$\frac{d\phi}{dR} = -E$$

Отсюда

$$\phi = - \int E dR = \frac{q}{4\pi \epsilon_a R} + A, \quad (8.12)$$

где A — постоянная интегрирования, с точностью до которой определяется потенциал.

Примем, что точка с нулевым потенциалом находится в бесконечности, то есть при $R = \infty$ потенциал $\phi = 0$, тогда $A = 0$.

Из выражений (8.11) и (8.12) видно, что наибольшая напряженность и наибольший потенциал поля находятся на поверхности точечного заряда.

Пример 8.1. До какой величины можно уменьшить радиус R проводящего шара, находящегося в воздухе, если его потенциал ϕ поддерживать постоянным и равным 1000 В (по отношению к бесконечно далеким точкам). Пробивная напряженность воздуха $E_{пр} = 3 \times 10^6$ В/м.

Решение. Напряженность электрического поля на поверхности шара по уравнению (8.11): $3 \times 10^6 = \frac{q}{4\pi R^2 \epsilon_0}$.

Потенциал по уравнению (8.12): $1000 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}$.

$$\text{Откуда следует: } 1000 = \frac{3 \times 10^6 R^2}{R}.$$

$$\text{Следовательно, } R = \frac{1000}{3 \times 10^6} = 0,33 \times 10^{-3} \text{ м} = 0,33 \text{ мм}.$$

8.9. Теорема Гаусса в дифференциальной форме

С помощью теоремы Гаусса в интегральной форме нельзя определить, как связан исток линий индукции \vec{D} в данной точке поля с плотностью свободных зарядов в той же точке поля. Ответ на этот вопрос дает дифференциальная форма теоремы Гаусса. Чтобы прийти к ней, разделим обе части уравнения (8.9) на объем V , находящийся внутри замкнутой поверхности S :

$$\frac{\oint \vec{D} d\vec{s}}{V} = \frac{\sum q_{\text{своб.}}}{V}. \quad (8.13)$$

Выражение (8.13) остается справедливым для объема V любой величины. Устремим объем к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{D} d\vec{s}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q_{\text{своб.}}}{V}.$$

Предел отношения потока вектора \vec{D} сквозь замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем, к объему V называют дивергенцией вектора \vec{D} ($\text{div} \vec{D}$). Часто вместо термина «дивергенция» употребляют термин «расхождение» или «исток» вектора \vec{D} .

В правой части выражения находится объемная плотность свободного заряда, ее обозначают ρ .

Таким образом, теорему Гаусса в дифференциальной форме записывают следующим образом,

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (8.14)$$

Если объемная плотность зарядов в данной точке поля положительна ($\rho > 0$), то из бесконечно малого объема, окружающего данную точку поля, линии вектора \vec{D} исходят (рисунок 8.7, а).

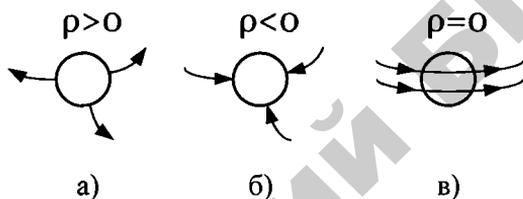


Рисунок 8.7 — Дивергенция вектора \vec{D} положительная (а), отрицательная (б), и равна нулю (в)

Если в данной точке поля $\rho < 0$, то в бесконечно малый объем, внутри которого находится данная точка, линии вектора \vec{D} входят (рисунок 8.7, б). И, наконец, если в какой-либо точке поля $\rho = 0$, то в данной точке поля нет ни истока, ни стока линий вектора \vec{D} , то есть в данной точке линии вектора \vec{D} не начинаются и не заканчиваются (рисунок 8.7, в).

Если среда однородна и изотропна, ее $\epsilon_a = \text{const}$. Вместо (8.14) запишем выражение

$$\operatorname{div} \epsilon_a \vec{E} = \rho.$$

Вынесем ϵ_a за знак дивергенции:

$$\epsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho.$$

следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_a. \quad (8.15)$$

Формула (8.15) представляет собой вторую форму записи теоремы Гаусса в дифференциальной форме. Она справедлива только для однородной и изотропной среды.

В декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (8.16)$$

Используем для записи $\operatorname{div} \vec{E}$ в декартовой системе координат оператор набла ∇ :

$$\nabla \vec{E} = (\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z})(\vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (8.17)$$

$$\text{Так как } \vec{i}\vec{i} - \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1 \times 1 \times \cos 0^\circ = 1,$$

$$\text{а } \vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 1 \times 1 \times \cos 90^\circ = 0.$$

Сравнивая выражение (8.16) и (8.17), получаем

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \vec{E}.$$

Таким образом, теорему Гаусса в дифференциальной форме можно записать в виде

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (8.18)$$

8.10. Уравнение Пуассона и уравнение Лапласа

Уравнения Пуассона и Лапласа являются основными дифференциальными уравнениями электростатики. Они вытекают из теоремы Гаусса в дифференциальной форме.

Известно, что $-\vec{E} = \text{grad}\phi$. В то же время согласно теореме Гаусса по уравнению (8.15)

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Подставим в формулу теоремы Гаусса \vec{E} , выраженное через $\text{grad}\phi$, получим

$$\text{div}\text{grad}\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Вместо $\text{grad}\phi$ запишем его эквивалент $\nabla\phi$; вместо div напишем ∇ .

$$\text{Тогда } \nabla(\nabla\phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Или

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (8.19)$$

Уравнение (8.19) называют уравнением Пуассона.

В тех точках поля, в которых нет свободных зарядов, то есть $\rho = 0$,

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (8.20)$$

Уравнение (8.20) называют уравнением Лапласа.

Раскроем $\nabla^2\varphi$ в декартовой системе координат:

$$\nabla(\nabla\varphi) = (\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z})(\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}).$$

Произведем почленное умножение и получим

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Таким образом, уравнение Пуассона в декартовой системе координат записывают следующим образом:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_u}. \quad (8.21)$$

Уравнение Лапласа в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (8.22)$$

Уравнения Пуассона и Лапласа являются уравнениями в частных производных, они допускают существование множества линейно независимых друг от друга решений, из которых следует в каждом случае расчета выбрать одно, единственно удовлетворяющее так называемым граничным условиям. Граничные условия описывают поведение поля на границах между различными диэлектриками и проводниками.

Отыскание решения обычно является трудной задачей, лишь в

отдельных случаях, при простой форме границ поля удается получить аналитическое решение. В очень многих практических случаях необходимо прибегать к приближенным расчетам.

Основной задачей расчета электрического поля является определение напряженности E поля во всех его точках по заданным зарядам или потенциалам тел.

По значениям напряженности E выбирают необходимую изоляцию. В точках поля, имеющих большую напряженность, существует опасность пробоя изоляции.

Второй важной задачей электростатики является определение емкости C двух проводящих тел, окруженных диэлектриком и имеющих равные и противоположные по знаку электрические заряды. Емкость C является важным параметром электрических цепей при расчете переменных токов. Устройства, созданные специально для использования их электрической емкости, называются конденсаторами.

Для расчета электрических полей электродов простой геометрической формы используют, как правило, теорему Гаусса в интегральной форме.

8.11. Проводник в электростатическом поле.

Электростатическое экранирование

Проводящие вещества имеют в своем составе большое количество свободных элементарных частиц, обладающих зарядом (электроны или положительные и отрицательные ионы). Под действием электрического поля эти частицы приходят в упорядоченное движение.

Если внести металлический проводник во внешнее электрическое поле, то под действием сил поля свободные электроны начнут перемещаться по проводнику против поля. На одной части поверхности проводника сосредоточатся отрицательные заряды, на противоположной — положительные (рисунок 8.8).

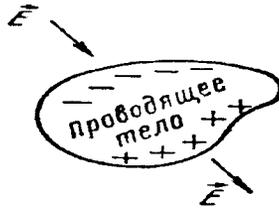


Рисунок 8.8 — Проводник в электростатическом поле

Поле этих зарядов направлено противоположно внешнему полю. Перераспределение носителей зарядов происходит до тех пор, пока напряженность \vec{E} поля внутри проводника не станет равной нулю, а потенциал φ всех точек тела не станет одинаковым. Если допустить, что потенциалы точек тела различны, то под действием разности потенциалов начнется перемещение зарядов и пойдет ток, т.е. будет выделяться энергия в виде теплоты, что на практике не наблюдается.

Поверхность проводника будет эквипотенциальной поверхностью и линии напряженности вне проводника перпендикулярны к его поверхности.

Если проводнику сообщить электрический заряд, то под действием сил отталкивания элементы этого заряда будут перемещаться по проводнику и сосредотачиваться на его поверхности в слое, который можно считать бесконечно тонким. Внутри заряженного проводника поле отсутствует.

Описанное свойство проводников используют в технике при электрическом экранировании электрической аппаратуры. Экранируемый аппарат помещают в металлическую сетку-экран. В области, ограниченной этим экраном, электрического поля практически не будет.

8.12. Поле и емкость плоского конденсатора

Плоский конденсатор имеет две металлические пластины, разделенные диэлектриком (рисунок 8.9).

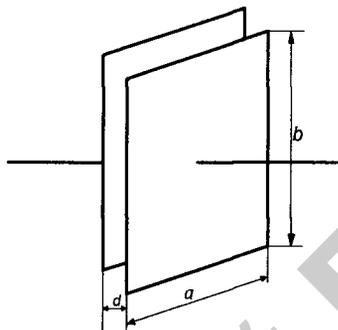


Рисунок 8.9 — Плоский конденсатор

Расстояние между пластинами обычно мало по сравнению с их длиной и шириной, т.е. $d \ll a$ и $d \ll b$. Если на пластины подать напряжение, то почти все свободные заряды пластин практически равномерно распределятся по внутренним, обращенным друг к другу поверхностям пластин. Искажением поля по краям пластин можно пренебречь. В пространстве между пластинами поле можно считать равномерным, т.е. вектор электрического смещения \vec{D} постоянен по величине и направлен по нормали к поверхности пластин (рисунок 8.10).

Поле с внешней стороны пластин в связи с малой плотностью электрических зарядов пренебрегаем.

Охватим заряд q одной из пластин замкнутой поверхностью. След этой поверхности показан на рисунке 8.10 пунктиром. Одна сторона этой поверхности идет внутри конденсатора параллельно пластинам.

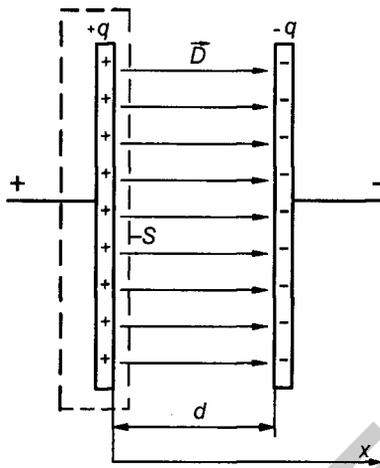


Рисунок 8.10 — Поле плоского конденсатора

В соответствии с теоремой Гаусса

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$$

Поле практически имеется только в пространстве между пластинами, причем векторы \vec{D} и $d\vec{S}$ совпадают по направлению и величина электрического смещения \vec{D} во всех точках поля одинакова, поэтому

$$\oint_S D dS \cos \alpha = DS = q,$$

где $S = ab$ — площадь поверхности пластины.

Следовательно, $D = \frac{q}{S}$, а напряженность электрического поля

при однородном и изотропном диэлектрике $E = \frac{q}{\epsilon_0 S}$.

Наибольшее приращение потенциала будет в направлении оси x , перпендикулярной к поверхностям пластин, следовательно, величина градиента потенциала $\frac{d\varphi}{dx} = -E$, поэтому

$$\varphi = - \int E dx = - \int \frac{q}{\epsilon_a S} dx = - \frac{qx}{\epsilon_a S} + A,$$

где A — постоянная интегрирования.

На рисунке 8.11 представлены графики изменения D , E , φ в функции от x .

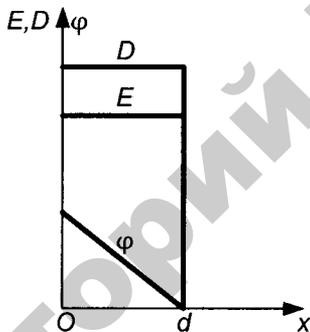


Рисунок 8.11 — Графики величин, характеризующих электрическое поле плоского конденсатора

Для нахождения емкости C конденсатора выразим напряжение U между пластинами через заряд q :

$$U = \int_0^d E dx = Ed = \frac{q}{\epsilon_a S} d.$$

Емкость конденсатора $C = \frac{q}{U} = \frac{q\epsilon_a S}{qd}$.

В окончательном виде

$$C = \epsilon_a \frac{S}{d}. \quad (8.23)$$

Как видно из уравнения (8.23), емкость C зависит от геометрических размеров пластин, их взаимного расположения, электрических свойств диэлектрика.

Увеличения емкости можно достигнуть увеличением поверхности пластин S , выбором диэлектрика с высокой относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r и уменьшением расстояния между пластинами d . Но уменьшение расстояния d ограничено электрической прочностью диэлектрика, с уменьшением d увеличивается напряженность:

$$E = \frac{U}{d}.$$

Любой диэлектрик при определенной напряженности пробивается.

Пример 8.2. Между одной из пластин плоского конденсатора и наполнителем (парафином) образовался слой воздуха (рисунок 8.12).

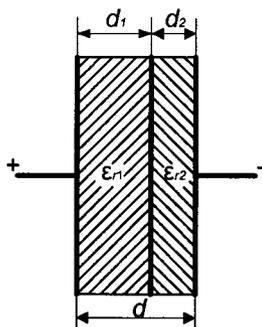


Рисунок 8.12 — Плоский конденсатор с двумя слоями диэлектрика

Площадь поверхности пластины конденсатора $S = 200 \text{ см}^2$, толщина слоя парафина $d_1 = 0,5 \text{ см}$, толщина воздушного слоя $d_2 = 0,1 \text{ см}$, относительная диэлектрическая проницаемость парафина $\epsilon_{r1} = 4$, для воздуха $\epsilon_{r2} = 1$.

Пробивные напряженности для парафина и для воздуха соответственно

$$E_{\text{пр1}} = 150 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}; \quad E_{\text{пр2}} = 30 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}.$$

Определить, при каком напряжении этот конденсатор будет пробит, какое напряжение выдержит конденсатор без дефекта (расстояние между пластинами $d = 0,6 \text{ см}$).

Вычислить емкость конденсатора с воздушным слоем и без него.

Решение. Для двухслойного плоского конденсатора напряжение между пластинами

$$U = d_1 E_1 + d_2 E_2.$$

Электрическое смещение $D = \frac{q}{S}$ не зависит от свойств диэлек-

трика. Напряженности $E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}$; $E_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}$, то есть напря-

женность будет больше в слое воздуха.

$$\text{Выразим } D = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2; \quad E_1 = \frac{E_2 \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}.$$

Для определения напряжения, при котором конденсатор будет пробит, запишем

$$U = d_1 \frac{E_2 \epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} + d_2 E_2;$$

$$U = 0,5 \frac{30 \times 1}{4} + 0,1 \times 30 = 3,75 + 3 = 6,75 \text{ кВ.}$$

Конденсатор без дефекта выдержит напряжение

$$U = dE_1 = 0,6 \times 150 = 90 \text{ кВ.}$$

Емкость конденсатора без дефекта

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{S}{d} = 8,85 \times 10^{-12} \times 4 \frac{200 \times 10^{-4}}{0,6 \times 10^{-2}} = 118 \times 10^{-12} \text{ Ф.}$$

Емкость конденсатора со слоем воздуха

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{d_1 E_1 + d_2 E_2} = \frac{q}{d_1 \frac{D}{\varepsilon_{a1}} + d_2 \frac{D}{\varepsilon_{a2}}}.$$

В соответствии с теоремой Гаусса

$$D = \frac{q}{S}.$$

$$\text{Следовательно, } C = \frac{q}{d_1 \frac{q}{\varepsilon_{a1} S} + d_2 \frac{q}{\varepsilon_{a2} S}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} S}{d_1 \varepsilon_{r2} + d_2 \varepsilon_{r1}}.$$

Подставив числовые значения величин, получим

$$C = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 4 \times 1 \times 200 \times 10^{-4}}{0,5 \times 10^{-2} \times 1 + 0,1 \times 10^{-2} \times 4} = 78,6 \times 10^{-12} \text{ Ф.}$$

8.13. Поле заряженной оси

Под заряженной осью понимают тонкий, теоретический бесконечно длинный металлический проводник (тонкая проволочка). Заряд на единицу длины принято обозначать τ . Диэлектрическая проницаемость среды, окружающей ось, равна ϵ_a . Для нахождения напряженности поля в некоторой точке, удаленной на расстояние R от оси (рисунок 8.13), проведем через эту точку цилиндрическую поверхность, ось цилиндрической поверхности совпадает с заряженной осью. Длина цилиндра равна l .

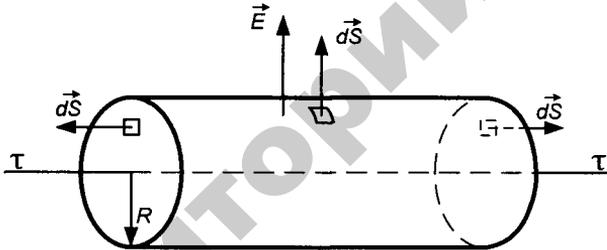


Рисунок 8.13 --- Поле заряженной оси

Используем теорему Гаусса, которая применима для замкнутой поверхности. В рассматриваемом случае замкнутая поверхность образована боковой поверхностью цилиндра и двумя его основаниями. Поток вектора \vec{E} имеется только через боковую поверхность цилиндра. Через основания поток вектора \vec{E} отсутствует, так как вектор элемента поверхности $d\vec{S}$ каждого основания перпендикулярен вектору \vec{E} .

Вектор $d\vec{S}$ боковой поверхности и вектор напряженности электрического поля по направлению совпадают. В силу симметрии напряженность \vec{E} будет одной и той же во всех точках боковой поверхности цилиндра.

По теореме Гаусса (8.10)

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint_S dS = E 2\pi R l = \frac{\tau l}{\epsilon_a},$$

где $S = 2\pi R l$ — площадь боковой поверхности цилиндра.

Из последнего выражения следует

$$E = \frac{\tau}{2\pi R \epsilon_a}. \quad (8.24)$$

Напряженность в поле заряженной оси изменяется обратно пропорционально расстоянию R точки от оси. Наибольшая напряженность на поверхности заряженной оси.

Потенциал φ найдем, используя связь между E и φ по уравнению (8.5): $\text{grad } \varphi = -\vec{E}$.

Приращение потенциала максимально в радиальном направлении, поэтому

$$\frac{d\varphi}{dR} = -E.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi &= - \int E dR = - \int \frac{\tau}{2\pi R \epsilon_a} dR = - \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a} \int \frac{dR}{R} = - \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a} \ln R + A = \\ &= \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a} \ln \frac{1}{R} + A. \end{aligned} \quad (8.25)$$

8.14. Поле и емкость цилиндрического конденсатора

Цилиндрический конденсатор представляет собой два, разделённых изоляцией, проводящих цилиндра с совпадающими осями, т.е. соосных или коаксиальных (рисунок 8.14, а). Примером цилиндрического конденсатора может служить коаксиальный кабель, у которого внутренний провод прокладывается строго по оси кабеля, а другой в виде металлической оплётки охватывает изоляцию центрального проводника. Коаксиальные кабели предназначены для передачи электроэнергии высокой частоты.

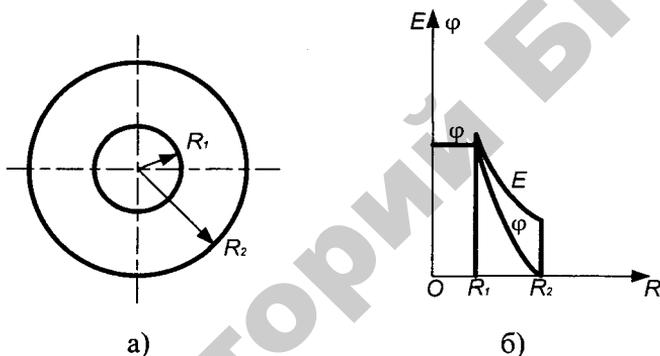


Рисунок 8.14 — Цилиндрический конденсатор (а), напряженность E и потенциал φ поля конденсатора в зависимости от R (б)

Пусть внутренний цилиндр радиусом R_1 имеет на единицу длины заряд $+\tau$, а внешний цилиндр радиусом R_2 имеет заряд $-\tau$.

Поле зарядов, имеющих на цилиндрической поверхности внутреннего проводника, можно заменить полем зарядов, расположенных на оси кабеля. Так как длина кабеля велика по сравнению с его диаметром, то применимы уравнения параграфа 8.13.

Напряженность электрического поля между проводящими цилиндрами на расстоянии R от оси кабеля по уравнению (8.24) равна:

$$E = \frac{\tau}{2\pi R\epsilon_a},$$

а потенциал по уравнению (8.25) равен:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{R} + A.$$

Напряжение между цилиндрами определяется интегралом

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (8.26)$$

Емкость цилиндрического конденсатора и коаксиального кабеля на единицу длины равна:

$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (8.27)$$

На рисунке 8.14, б показаны графики изменения φ и E в зависимости от расстояния R от оси кабеля. Потенциал на поверхности наружного проводника принят равным нулю. При $R < R_1$, в проводящем внутреннем цилиндре $\varphi = \text{const} = U$, $E = 0$. При $R > R_2$ напряженность $E = 0$ согласно теореме Гаусса.

Наибольшее значение напряженность поля имеет у поверхности внутреннего цилиндра ($R = R_1$):

$$E_{\max} = \tau / 2\pi\epsilon_a R_1,$$

или, выражая τ из формулы (8.26) через U , получим

$$E_{\max} = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (8.28)$$

Пример 8.3. Коаксиальный кабель имеет радиус внутренней жилы $R_1 = 2$ мм и внешней оболочки $R_2 = 5$ мм.

Определить под какое напряжение можно включить кабель, если максимальная напряженность поля не должна превышать $1/3$ пробивной напряженности $E_{\text{пр}}$ диэлектрика, равной 2×10^4 кВ/м.

Решение. Напряженность поля максимальна на поверхности внутреннего цилиндра. По уравнению (8.28)

$$E_{\max} = \frac{U}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

По условию $E_{\max} = E_{\text{пр}}/3$.

Выражаем $U = \frac{E_{\text{пр}}}{3} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$. Подставляем значения величин

и получаем $U = 12,2$ кВ.

8.15. Энергия электрического поля.

Плотность энергии электрического поля

Система заряженных тел является носителем определенного запаса энергии. Эта энергия сообщается системе внешними источниками в процессе образования зарядов и может быть вновь возвращена источникам или преобразована в другие виды энергии при уменьшении зарядов.

Для получения выражения энергии, запасенной в системе заряженных проводящих тел, рассмотрим работу, совершаемую внешними источниками при образовании зарядов системы.

Пусть конденсатор с емкостью C через резистор с сопротивлением R подключен к источнику энергии с ЭДС e . Тогда по второму закону Кирхгофа имеем $e = Ri + u_c$.

Элементарная работа, производимая источником энергии при увеличении заряда конденсатора на величину dq , равна $edq = Ridq + u_c dq$. Второе слагаемое правой части равенства есть энергия, запасенная в электрическом поле конденсатора, обозначим ее dW_3 .

$$dW_3 = u_c dq.$$

Для конденсаторов с диэлектриком, у которого диэлектрическая проницаемость $\epsilon_r = \text{const}$, имеем соотношение $q = Cu_c$, следовательно $dq = Cdu_c$, поэтому энергию, запасенную в электрическом поле конденсатора, при изменении напряжения на конденсаторе от 0 до U_c найдем из выражения:

$$W_3 = \int_0^{U_c} Cu_c du_c = \frac{CU_c^2}{2}. \quad (8.29)$$

Каждая единица объема диэлектрика, помещенного между электродами конденсатора, является носителем определенного запаса энергии и можно говорить об объемной плотности энергии электрического поля.

Объемную плотность энергии электрического поля рассмотрим на примере плоского конденсатора.

Емкость плоского конденсатора $C = \epsilon_a \frac{S}{d}$, где S — поверх-

ность пластины, d — расстояние между пластинами. Поле между пластинами равномерное, поэтому $U_c = Ed$. Используем эти соотношения в уравнении (8.29) и получим

$$W_3 = \varepsilon_a \frac{SE^2 d}{2} = \varepsilon_a \frac{E^2 V}{2},$$

где $V = Sd$ — объем диэлектрика, в котором сосредоточено электрическое поле. Энергия, отнесенная к единице объема поля,

$$\frac{W}{V} = \varepsilon_a \frac{E^2}{2} = \frac{DE}{2}, \quad (8.30)$$

где $D = \varepsilon_a E$.

Полученное выражение для объемной плотности энергии электрического поля справедливо лишь для изотропной среды, в которой векторы \vec{E} и \vec{D} совпадают по направлению. Для анизотропной среды объемная плотность энергии равна:

$$\frac{W_3}{V} = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}. \quad (8.31)$$

8.16. Дополнительный теоретический материал для самостоятельной работы

8.16.1. Поле двух параллельных заряженных осей

Возьмем в поле двух разноименно заряженных осей некоторую произвольную точку M (рисунок 8.15).

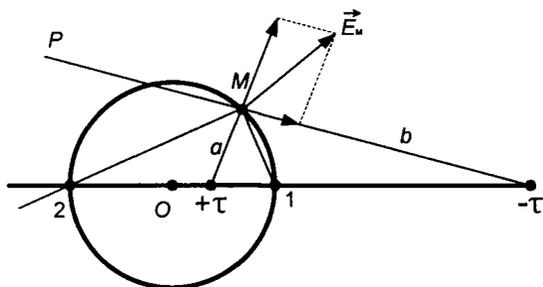


Рисунок 8.15 — Поле двух параллельных заряженных осей

Результирующая напряженность поля в этой точке \vec{E}_M равна геометрической сумме напряженностей от обоих зарядов. Расстояние точки M до положительно заряженной оси обозначим через a , до отрицательно заряженной оси — через b . Потенциал есть функция скалярная. Потенциал точки M равен сумме потенциалов от каждой оси. В соответствии с уравнением (8.25) получим:

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{a} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{b} + A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b}{a} + A. \quad (8.32)$$

Уравнением линии с равными потенциалами в поле двух заряженных осей является выражение $b/a = \text{const}$.

В геометрии известна теорема Аполлония. Согласно этой теореме, геометрическим местом точек, отношение расстояний которых до двух заданных точек есть величина постоянная, является окружность. Поэтому эквипотенциальной линией в поле двух заряженных осей есть окружность. Рассмотрим, как ее можно построить. Проведем биссектрисы внутреннего (aMb) и внешнего (pMa) углов (рисунок 8.15). Точки 1 и 2 пересечения биссектрис с линией, проведенной через заряженные оси, и точка M будут тремя точками искомой окружности. Для нахождения положения центра окружности (точки 0) разделим пополам расстояние между точками 1 и 2.

8.16.2. Поле и емкость двухпроводной линии

Считаем, что провода висят достаточно высоко над поверхностью земли, и влиянием земли на электрическое поле линии пренебрегаем.

Расстояние между осями проводов линии (рисунок 8.16) обозначим через d , радиус каждого провода — через r .

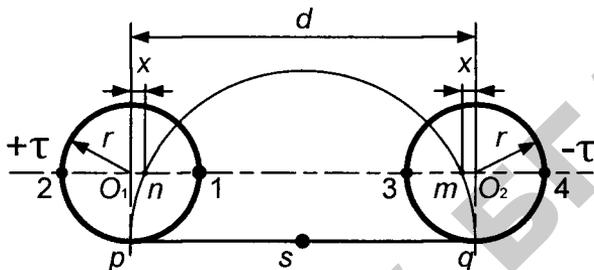


Рисунок 8.16 — Положение электрических осей двухпроводной линии

Если левому проводу будет сообщен, например, заряд $+τ$ на единицу длины, а правому заряд $-τ$, то в пространстве между проводами возникнет электрическое поле. Заряды проводов распределятся по их поверхности с неодинаковой плотностью. Из-за притяжения разноименных зарядов плотность зарядов будет больше на частях поверхностей проводов, обращенных друг к другу. Поэтому расстояние между электрическими осями проводов будет меньше, чем расстояние между их геометрическими осями. Электрические оси — это оси, на которых надо мысленно сосредоточить заряды проводов, картина поля при этом не изменится. Поэтому их еще называют заряженные оси проводов.

Задача о поле двухпроводной линии сводится к рассмотренной задаче о поле двух заряженных осей. Положение заряженных осей двухпроводной линии найдем из условия, что поверхность каждого провода в отдельности является эквипотенциалью.

Точки 0_1 и 0_2 означают геометрические оси проводов. Пусть заряженные оси будут расположены в точках m и n (рисунок 8.16). Из условия симметрии они на одинаковое расстояние x удалены от геометрических осей.

Запишем условие равенства потенциалов точек 1 и 2 левого провода. Отношение b/a для точки 1 есть $d - r - x / r - x$; отношение b/a для точки 2 равно $d + r - x / r + x$.

Из равенства $d - r - x / r - x = d + r - x / r + x$ получим

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2}. \quad (8.33)$$

В последнем выражении знак «минус» перед радикалом соответствует положению точки n , знак «плюс» — точке m .

Положение заряженных осей вместо расчетов по формуле (8.33) находят путем следующих графических построений.

Проводят общую касательную к проводам (прямая pq на рисунке 8.16), делят расстояние между точками касания пополам (точка s) и проводят окружность радиусом ps . Точки пересечения окружности (m и n) с линией 0_1 и 0_2 дают положение электрических осей.

Нетрудно убедиться в том, что если $d \gg r$, то x становится на много меньше r . При этом электрические и геометрические оси практически совпадают.

Рассмотрим определение емкости двухпроводной линии. Выразим напряжение между двумя проводами через заряд τ на единицу длины.

Точка 1 (см. рисунок 8.16) принадлежит поверхности левого провода, точка 3 — поверхности правого провода. Разность потенциалов между ними

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-r-x}{r-x} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r-x}{d-r-x}.$$

Если $d \gg r$, $x \ll r$, то

$$U_{13} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} 2 \ln \frac{d}{r} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{d}{r}.$$

Следовательно, емкость единицы длины линии при условии $d \gg r$

$$C = \frac{\tau}{U_{13}} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{d}{r}}. \quad (8.34)$$

Как видим, емкость зависит от геометрических размеров линии и свойств среды. Если расстояние между двумя проводами увеличивать, то емкость будет уменьшаться. Емкость двухпроводной линии длиной l равна

$$C = \frac{l\pi\epsilon_a}{\ln \frac{d}{r}}. \quad (8.35)$$

8.17. Задачи и вопросы для самопроверки

1. Какое поле называют электрическим?
2. Какое поле называют электростатическим?
3. Какой физический смысл придается вектору напряженности

\vec{E} и потенциалу φ ? Какая интегральная и дифференциальная связь существует между ними?

4. Какие линии картины поля называют линиями напряженности и какие – эквипотенциальными линиями?
5. В чем отличие свободных зарядов от связанных?
6. Связь, каких величин определяет теорема Гаусса?
7. Через какие величины определяют значение электрической емкости C ?
8. Сферический конденсатор имеет радиус внутренней сферы $R_1 = 10$ мм и радиус внешней сферы $R_2 = 20$ мм. Относительная диэлектрическая проницаемость слоя изоляции $\epsilon_r = 5$. Определить емкость конденсатора.
Ответ: $C = 11,1 \times 10^{-12}$ Ф.
10. Чему равна плотность электрической энергии?

Лекция 4

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

8.18. Плотность тока и ток

Если под воздействием внешних источников в проводящей среде (металлических проводниках, земле, жидкостях) создано электрическое поле, то в ней будет протекать электрический ток.

Упорядоченное движение свободных электронов в металле и ионов в жидкости под действием электрического поля принято называть током проводимости.

При своем упорядоченном движении носители зарядов испытывают многочисленные столкновения с другими частицами вещества, которые находятся в тепловом движении. Эти столкновения затрудняют упорядоченное движение носителей зарядов и являются причиной сопротивления, оказываемого проводящей средой прохождению тока.

Свойство среды, характеризующее её способность проводить

ток, называют удельной проводимостью γ . Удельная проводимость γ зависит от физических свойств проводящего материала и его температуры, имеет размерность $\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1} = \text{См}/\text{м}$.

Основной величиной в электрическом поле проводящей среды является плотность тока \vec{J} . Это векторная величина, направленная по напряженности электрического поля. Она численно равна отношению тока Δi , протекающего через элемент поверхности ΔS (перпендикулярный к направлению движения зарядов), к величине ΔS этой поверхности. Размерность плотности тока $\text{А}/\text{м}^2$.

Ток, проходящий через поверхность S конечных размеров, равен:

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{s}. \quad (8.36)$$

Таким образом, ток есть поток вектора плотности тока. Ток в отличие от плотности тока является скалярной величиной.

В том случае, когда вектор плотности тока \vec{J} во всех точках поверхности S одинаков по величине и направлен перпендикулярно к поверхности, можно записать

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{s} = \int_S J ds \cos 0^\circ = J \int_S ds = JS.$$

При протекании постоянных токов, как внутри проводящих тел, так и вне их, существуют постоянные магнитные поля. Так как эти поля неизменны во времени, то в поле не возникает явление электромагнитной индукции, то есть магнитное поле, созданное постоянным током, не оказывает влияния на электрическое поле постоянного тока. Поэтому электрические и магнитные поля постоянного тока можно рассматривать отдельно.

8.19. Закон Ома в дифференциальной форме

Выделим в проводящей среде небольшой параллелепипед с ребром Δl , расположенном по направлению движения зарядов, и площадью поперечного сечения ΔS (рисунок 8.17.)

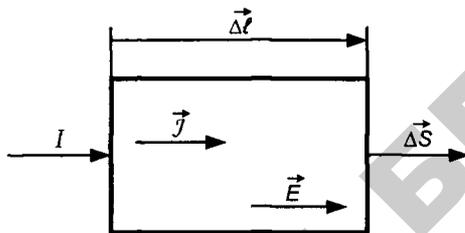


Рисунок 8.17 — Величины поля электрического тока

Выберем размеры параллелепипеда настолько малыми, чтобы значения \vec{E} и \vec{J} в его пределах можно было считать постоянными и совпадающими с направлениями векторов $\Delta \vec{l}$ и $\Delta \vec{S}$.

Тогда величина тока через поперечное сечение параллелепипеда

$$I = J \Delta S.$$

Напряжение, действующее вдоль ребра Δl ,

$$U = E \Delta l.$$

Сопротивление параллелепипеда

$$R = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S}.$$

По закону Ома в интегральной форме для параллелепипеда

$$I = \frac{U}{R}.$$

Подставляя предыдущие выражения, получим

$$J \Delta S = \frac{E \Delta l \gamma \Delta S}{\Delta l} \text{ или } J = \gamma E.$$

В изотропной среде вектор плотности тока \vec{J} совпадает по направлению с вектором напряженности электрического поля \vec{E} и линии тока совпадают с линиями напряженности электрического поля. Поэтому для вектора плотности тока проводимости можно записать:

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}. \quad (8.37)$$

Соотношение (8.37) называют законом Ома в дифференциальной форме. Оно устанавливает связь между плотностью тока в данной точке проводящей среды и напряженностью поля в этой же точке.

Уравнение (8.37) справедливо для областей вне источников ЭДС. В областях, занятых источниками ЭДС, кроме стационарного электрического поля, подобного электростатическому, существуют еще так называемое стороннее электрическое поле, обеспечивающее непрерывное движение зарядов в электрической цепи.

Под сторонним электрическим полем понимают электрическое поле, обусловленное химическими, электрохимическими, тепловыми, термоэлектрическими процессами.

Под действием стороннего поля в источнике непрерывно про-

исходит разделение электрических зарядов. Положительные заряды перемещаются к плюсу источника, а отрицательные — к минусу.

Эти заряды в области внутри и вне источника создают электрическое поле, напряженность которого, как и напряженность электростатического поля, направлена от положительных зарядов к отрицательным.

При протекании постоянного тока по цепи одни электрические заряды непрерывно сменяются другими, такими же, как и в предыдущие моменты времени. Таким образом, картина поля в макроскопическом смысле повторяется в смежные моменты времени. Поле носит как бы статический характер. Это и послужило основанием для того, чтобы поле, созданное в проводящей среде разделившимися зарядами, называть стационарным полем и его напряженность E — напряженностью стационарного поля.

Внутри источника стационарное поле направлено навстречу стороннему полю. Вне источника стационарное поле направлено от положительного электрода к отрицательному. Под действием этого поля и происходит упорядоченное движение зарядов в области вне источника.

Напряженность стороннего поля обозначают $E_{\text{стор}}$. В областях, занятых источниками ЭДС, полное значение напряженности поля равно геометрической сумме напряженности стационарного и стороннего полей: $\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$.

Закон Ома в дифференциальной форме для областей, занятых источниками ЭДС, записывают следующим образом:

$$\vec{J} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (8.38)$$

Уравнение (8.38) называют обобщенным законом Ома в дифференциальной форме.

8.20. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме

Если в проводящей среде выделить некоторый объем, по которому протекает постоянный, не изменяющийся во времени ток, то можно сказать, что ток, который войдет в объем, должен равняться току, вышедшему из него, иначе в этом объеме происходило бы накопление электрических зарядов, что опыт не подтверждает. Сумму входящего в объем и выходящего из объема токов записывают так:

$$\oint \vec{J} d\vec{S} = 0. \quad (8.39)$$

Разделим левую и правую части уравнения (8.39) на объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S :

$$\frac{\oint \vec{J} d\vec{S}}{V} = 0.$$

Объем, находившийся внутри замкнутой поверхности, устремим к нулю:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{J} d\vec{S}}{V} = \operatorname{div} \vec{J} = 0.$$

Таким образом, для постоянного, неизменного во времени поля в проводящей среде:

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0. \quad (8.40)$$

Это соотношение называют первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме. Оно означает, что в установившемся

режиме в любой точке поля нет ни истока, ни стока линий тока проводимости, то есть эти линии всегда замкнуты сами на себя.

Уравнение (8.40) называют также уравнением непрерывности тока.

8.21. Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме

Если по какому-либо проводнику с сопротивлением R протекает постоянный ток I , то в единицу времени в нем выделяется в виде теплоты энергия, равная $I^2 R$. Определим энергию, выделяющуюся в единицу времени в единице объема проводящей среды. Используем рисунок 8.17.

$$\frac{P}{V} = \frac{I^2 R}{V} = \frac{(J\Delta S)^2}{\Delta l \Delta S} \left(\frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} \right) = \frac{J^2}{\gamma} = \gamma E^2. \quad (8.41)$$

Следовательно, в единице объема проводящей среды в единицу времени выделяется энергия, численно равная γE^2 .

8.22. Уравнение Лапласа для электрического поля в проводящей среде

Так же как в электростатическом поле, напряженность электрического поля в проводящей среде $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$.

В неизменном во времени поле $\text{div}\vec{J} = \text{div}\gamma\vec{E} = 0$.

Если удельная проводимость среды γ не изменяется от точки к точке, то есть если среда однородна и изотропна, то γ как постоянную величину, можно вынести за знак дивергенции и, следовательно, можно написать $\gamma \text{div}\vec{E} = 0$ или

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (8.42)$$

то есть $\operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi) = 0$

$$\text{или} \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad (8.43)$$

Таким образом, поле в однородной проводящей среде подчиняется уравнению Лапласа. Поле постоянного тока в проводящей среде является потенциальным. В нем, в областях, не занятых источниками, $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$.

8.23. Дополнительный теоретический материал для самостоятельной работы

8.23.1. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем

Электрическое поле в диэлектрике при отсутствии объемных зарядов и электрическое поле постоянного тока в проводящей среде вне источников ЭДС описываются аналогичными уравнениями, имеющими соответственно вид:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi; \quad \vec{D} = \varepsilon_a \vec{E};$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \nabla^2 \varphi = 0;$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi; \quad \vec{J} = \gamma \vec{E};$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0; \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Из сравнения этих выражений видно, что аналогом вектора электрического смещения \vec{D} в поле постоянного тока является вектор плотности тока \vec{J} , а аналогом абсолютной диэлектрической проницаемости ϵ_a в проводящей среде является удельная проводимость γ .

Если условия для вектора $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ на границе проводящей среды с удельной проводимостью γ совпадают с условиями для вектора $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$, на такой же формы границе диэлектрика с абсолютной диэлектрической проницаемостью ϵ_a , то совокупность силовых и эквипотенциальных линий в этих двух полях (т.е. картина поля) будет одинаковой.

В электростатической задаче границей диэлектрика является поверхность проводящего тела. Эта поверхность есть поверхность равного потенциала, и вектор \vec{D} к ней нормален.

Во многих практических задачах поля постоянного тока в проводящей среде мы встречаемся с переходом тока из металлических тел в окружающую среду, удельная проводимость которой во много раз меньше удельной проводимости материала этих тел. Такие условия имеют место, например, в случае токов утечки через изоляцию между проводниками. Ток утечки возникает из-за несовершенства изоляции. Удельная проводимость изоляции во много раз меньше удельной проводимости материала проводов. Например, для кабельной бумаги имеем приблизительно $\gamma = 10^{-13}$ См/м, тогда как для меди $\gamma = 58 \times 10^6$ См/м. В качестве другого примера можно указать на переход тока в землю через зарытые в землю металлические электроды. Обычно применяют стальные электроды. Удельная проводимость стали значительно больше удельной проводимости почвы.

Во всех этих случаях можно пренебречь падением напряжения внутри металлических тел и считать поверхности этих тел поверхностями равного потенциала и вектор плотности тока \vec{J} в плохо проводящей среде считать направленным по нормали к этим поверхностям. На основании изложенного можно утверждать, что картина электрического поля токов (в почве или изоляции) должна совпадать с картиной поля в соответствующих электростатических задачах.

На этом основан метод электростатической аналогии, позволяющий в ряде случаев при расчете токов в проводящей среде воспользоваться готовыми решениями соответствующих задач электростатики. В частности, формулы для электрической проводимости G среды, по которой протекает ток, могут быть получены из соответствующих формул для емкости C тел, разделенных диэлектриком. Чтобы получить формулу для G , достаточно заменить в соответствующей формуле для C абсолютную диэлектрическую проницаемость ϵ_a диэлектрика удельной проводимостью γ проводящей среды.

Например, чтобы определить проводимость изоляции коаксиального кабеля, можно воспользоваться формулой емкости кабеля (8.27) на единицу длины:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Произведя замену, получаем проводимость изоляции кабеля на единицу длины:

$$G = \frac{2\pi\gamma}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Метод электростатической аналогии дает также возможность заменить исследование электростатического поля экспериментальным исследованием поля тока в проводящей среде.

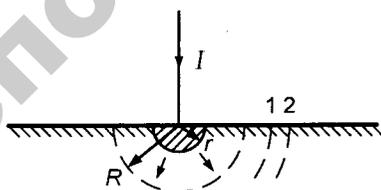
8.23.2. Электрическое поле полусферического заземлителя.

Шаговое напряжение

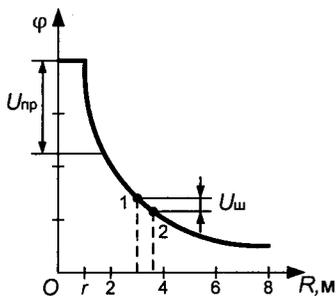
Рассмотрим задачу расчета поля заземления. Подвод тока к земле производится с помощью погруженных в землю заземлителей. Ток стекает через заземлитель в землю и растекается по ее толще с тем, чтобы собраться у другого электрода заземлителя. Земля выполняет роль обратного провода.

Если погрузить в землю металлическую полусферу радиусом r , через которую в землю стекает ток I (рисунок 8.18, а), и принять, что второй электрод, к которому будет подтекать ток, находится очень далеко, то плотность тока в земле на поверхности полусферы радиусом R будет

$$J = \frac{I}{2\pi R^2}.$$



а)



б)

Рисунок 8.18 — Полусферический заземлитель (а), напряжение шага и напряжение прикосновения (б)

Напряженность поля

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma R^2}.$$

С учетом соотношения $\text{grad } \varphi = -\vec{E}$ имеем $\frac{d\varphi}{dR} = -E$, откуда

$$\varphi = -\int E dR = -\frac{I}{2\pi\gamma} \int \frac{dR}{R^2} = \frac{I}{2\pi\gamma R} + A, \text{ где } A \text{ — постоянная интегрирования.}$$

Принимаем, что при $R = \infty$ потенциал $\varphi = 0$, тогда $A = 0$ и потенциал поля

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\gamma R}. \quad (8.44)$$

На рисунке 8.18, б изображена кривая изменения потенциала φ на поверхности земли в зависимости от расстояния R от центра заземлителя.

Металлический заземлитель имеет проводимость значительно большую, чем земля, напряженность поля в заземлителе невелика, поэтому при $R < r$ потенциал φ можно считать примерно постоянным.

Проводимость заземлителя $G = I/U$, где напряжение U равно потенциалу электрода заземлителя.

Используя выражение (8.44) для φ при $R = r$, получаем

$$U = \frac{I}{2\pi\gamma r}$$

и проводимость заземлителя

$$G = 2\pi\gamma r. \quad (8.45)$$

Вычислим так называемое напряжение шага $U_{\text{ш}}$, под которым может оказаться человек, приближающийся к заземлителю. $U_{\text{ш}}$ представляет собой разность потенциалов между двумя точками на поверхности почвы, отстоящими друг от друга примерно на расстоянии шага человека. Расположены эти точки на одном и том же радиальном направлении, проведенном из центра заземлителя. Максимальным значением $U_{\text{ш}}$ является напряжение прикосновения $U_{\text{пр}}$, под которым может оказаться человек, стоящий на расстоянии шага (примерно 0,8 м) от края заземлителя и касающийся рукой, например, заземленной металлической опоры:

$$U_{\text{ш}} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (8.46)$$

$$U_{\text{пр}} = \varphi_0 - \varphi_1 = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + 0,8} \right). \quad (8.47)$$

Пример 8.4. Через заземлитель (рисунок 8.18, а) стекает ток короткого замыкания $I = 500$ А, проводимость земли $\gamma = 10^{-2}$ См/м, радиус стального заземления $r = 1$ м.

Найти напряжение прикосновения $U_{\text{пр}}$ и шаговое напряжение $U_{\text{ш}}$ при $R_1 = 5$ м. Шаг человека принять равным 0,8 м. Найти потенциал φ заземлителя. Определить сопротивление заземлителя $R_{\text{ззз}}$.

Решение. По формуле (8.46) шаговое напряжение

$$U_{\text{ш}} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 + 0,8} \right) = \frac{500}{2\pi \times 10^{-2}} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5,8} \right) = 223 \text{ В.}$$

По формуле (8.47) напряжение прикосновения

$$U_{\text{пр}} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+0,8} \right) = \frac{500}{2\pi \times 10^{-2}} \left(1 - \frac{1}{1,8} \right) = 3538 \text{ В.}$$

По формуле (8.44) потенциал ϕ заземлителя относительно бесконечно удаленной точки с потенциалом равным нулю

$$\phi = \frac{I}{2\pi r\gamma} = \frac{500}{2\pi \times 1 \times 10^{-2}} = 7961 \text{ В.}$$

$$\text{Сопrotивление заземлителя } R_{\text{зaz}} = \frac{U}{I} = \frac{\phi}{I} = \frac{7961}{500} = 15,9 \text{ Ом.}$$

8.24. Задачи и вопросы для самопроверки

1. Какой ток называют током проводимости?
2. Какая величина характеризует проводящую среду?
3. Как связан ток проводимости с напряженностью электрического поля?
4. В чем смысл непрерывности тока проводимости?
5. Чему равна энергия, выделяющаяся в единицу времени в единице объема проводящей среды, при прохождении постоянного тока?
6. Постоянный ток, плотность которого равна $J = 0,1 \text{ А/мм}^2$, протекает в противоположных направлениях по двум параллельным медным пластинам, расположенным на расстоянии $d = 2 \text{ см}$ одна от другой. Удельная проводимость меди $\gamma = 57 \times 10^6 \text{ См/м}$. Напряжение между пластинами $U = 50 \text{ В}$. Определить тангенциальную и нормальную составляющие вектора \vec{E} на поверхности пластин, считая поле между пластинами однородным.

Ответ: $E_r = 175 \times 10^{-5} \text{ В/м}$; $E_n = 2500 \text{ В/м}$.

7. Определить мощность тепловых потерь в плоском конденсаторе с несовершенным диэлектриком, проводимость которого равна $\gamma = 10^{-12} \text{ См/м}$. Площадь обкладки $S = 100 \text{ см}^2$, расстояние между обкладками $d = 1 \text{ см}$. Приложенное постоянное напряжение равно 500 В .

Ответ: $P = 25 \times 10^{-8} \text{ Вт}$.

Лекция 5

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

8.25. Основные величины, характеризующие магнитное поле

Механические силы в магнитном поле

Основным свойством неизменного во времени магнитного поля является силовое воздействие его на проводник с током. Интенсивность магнитного поля в каждой точке пространства характеризуется вектором магнитной индукции \vec{B} , $[B] = \text{Тл}$ (тесла). Индукцию \vec{B} можно определить по силе, с которой действует магнитное поле на проводник длиной $d\vec{l}$ с током согласно закону Ампера:

$$\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (8.48)$$

Направление вектора $d\vec{l}$ берётся по направлению тока в проводнике (рисунок 8.20).

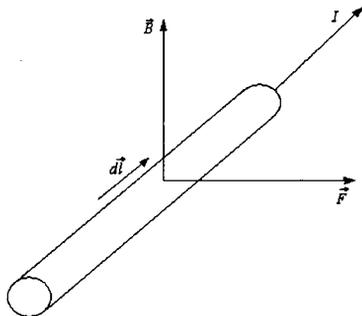


Рисунок 8.19 — Сила, вызываемая магнитным полем

Механическое воздействие магнитного поля на проводник с током максимально, когда \vec{B} и \vec{dl} взаимно перпендикулярны. Направление вектора силы \vec{F} определяют по правилу левой руки.

Электромагнитное поле представляет собой совокупность взаимно связанных электрического и магнитного полей. Таким образом, магнитное поле есть одна из сторон электромагнитного поля. Магнитное поле постоянного тока создаётся неизменными во времени токами, протекающими по проводящим телам, неподвижным в пространстве по отношению к наблюдателю.

Линии вектора магнитной индукции проводника с током имеют вид концентрических окружностей с центром на оси провода (рисунок 8.20).

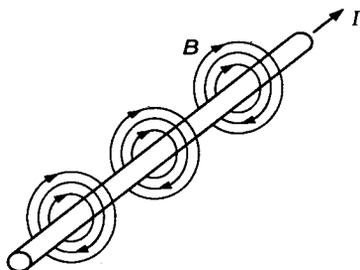


Рисунок 8.20 — Магнитное поле проводника с током

Касательная, проведённая к каждой точке линии, совпадает по направлению с вектором \vec{B} . Направление линии магнитной индукции определяется правилом правого винта: если вращать винт так, чтобы остриё его перемещалось по току, то направление вращения головки винта совпадёт с направлением линий.

Величина индукции магнитного поля зависит как от значения тока так и от среды, окружающей проводник. Опыт показывает, что всякое вещество, внесённое в магнитное поле намагничивается. Внутримолекулярные токи под действием внешнего поля определённым образом ориентируются, и их магнитное поле в сочетании с внешним образуют результирующее магнитное поле.

Если хотят охарактеризовать магнитный эффект тока вне зависимости от среды, то рассматривают другую векторную величину — напряжённость магнитного поля \vec{H} , связанную с вектором магнитной индукции \vec{B} соотношением

$$\vec{H} = \vec{B} / \mu_a, \quad (8.49)$$

где μ_a — абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м.

Напряжённость магнитного поля H измеряется в амперах на метр (А/м).

8.26. Закон полного тока в дифференциальной форме

Закон полного тока устанавливает связь между электрическим током и его магнитным полем. Читается он следующим образом: линейный интеграл от напряжённости магнитного поля вдоль замкнутого контура равен сумме токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \quad (8.50)$$

Данная интегральная форма записи закона полного тока используется для расчёта магнитных полей, имеющих симметрию, например, поля уединённого проводника с током.

Пусть требуется определить напряжённость магнитного поля в точке, удаленной от центра проводника на расстояние R (рисунок 8.21).

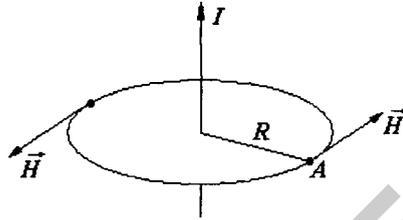


Рисунок 8.21 — К расчету напряжённости магнитного поля

Проведём окружность вокруг проводника радиусом R и возьмём линейный интеграл от напряжённости магнитного поля вдоль этой окружности. В силу симметрии значение H на расстоянии R от оси проводника будет одинаковым. Векторы \vec{H} и $d\vec{l}$ будут совпадать по направлению, поскольку они направлены по касательной к окружности. Поэтому

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl \cos 0^\circ = H \oint dl = H 2\pi R = I;$$

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

По мере удаления от провода напряжённость магнитного поля убывает.

Для исследования связи между током и магнитным полем в каждой точке пространства пользуются законом полного тока в дифференциальной форме.

Выделим в проводящей среде небольшой контур, ограничивающий поверхность ΔS (рисунок 8.22).

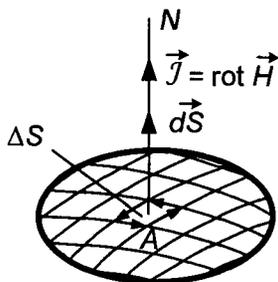


Рисунок 8.22 — Графическое представление $\text{rot } \vec{H}$

Площадку ΔS расположим так, чтобы направление нормали к ней совпадало с направлением вектора плотности тока \vec{J} в данной точке. Положительное направление нормали к площадке связывают правилом правого винта с направлением обхода контура.

Линейный интеграл от напряжённости магнитного поля вдоль контура равен току Δi , проходящему через поверхность ΔS :

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \Delta i.$$

Разделим правую и левую части равенства на ΔS и найдём предел, к которому стремится отношение, когда ΔS стремится к нулю, стягиваясь в точке A :

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S}.$$

Величина, стоящая в левой части равенства, как известно из курса математики, представляет собой вектор, называемый вихрем или ротором вектора \vec{H} .

Величина, стоящая в правой части равенства представляет собой вектор плотности тока \vec{J} .

Закон полного тока в дифференциальной форме принимает вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}. \quad (8.51)$$

В декартовой системе координат $\operatorname{rot} \vec{H}$ может быть представлен в виде определителя:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}.$$

Соответственно закон полного тока в декартовой системе координат записывают следующим образом:

$$\vec{i} \left(\frac{dH_z}{dy} - \frac{dH_y}{dz} \right) + \vec{j} \left(\frac{dH_x}{dz} - \frac{dH_z}{dx} \right) + \vec{k} \left(\frac{dH_y}{dx} - \frac{dH_x}{dy} \right) = \vec{i}J_x + \vec{j}J_y + \vec{k}J_z.$$

8.27. Магнитный поток и его непрерывность

Поток вектора магнитной индукции сквозь некоторую поверхность S называют магнитным потоком сквозь эту поверхность и обозначают Φ :

$$\Phi = \int_s \vec{B} d\vec{S}. \quad (8.52)$$

Магнитный поток измеряется в веберах (Вб). Магнитную индукцию B можно определить как плотность магнитного потока.

Принцип непрерывности магнитного потока заключается в том, что линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца, они непрерывны. Математически принцип непрерывности записывается следующим образом:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

то есть магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.

Разделим обе части равенства на объём V , ограниченный поверхностью S , и найдём предел отношения, когда объём стремится к нулю,

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} d\vec{S}}{V} = 0.$$

Выражение в левой части равенства называется дивергенцией. Итак, принцип непрерывности магнитного тока в дифференциальной форме имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (8.53)$$

8.28. Энергия магнитного поля.

Плотность энергии магнитного поля

Рассмотрим энергию уединённой индуктивной катушки. Пусть катушка с сопротивлением R и индуктивностью L подключена к источнику энергии с ЭДС e . Тогда по второму закону Кирхгофа имеем $e = Ri + \frac{d\psi}{dt}$, где ψ — потокосцепление индуктивной катуш-

ки, а $\frac{d\psi}{dt}$ есть падение напряжения, уравнивающее ЭДС самоиндукции.

Работу источника энергии за время dt определим из выражения

$$eidt = ri^2 dt + id\psi.$$

Первое слагаемое правой части равенства есть энергия, теряемая в виде теплоты в активном сопротивлении R , второе слагаемое есть энергия, создающая магнитное поле катушки, обозначим ее dW_M :

$$dW_M = id\psi.$$

Полная энергия, запасённая в магнитном поле катушки, при изменении ψ от 0 до ψ

$$W_M = \int_0^{\psi} id\psi.$$

Для катушек с неферромагнитным сердечником $\psi = Li$ и $d\psi = Ldi$, поэтому

$$W_M = L \int_0^i idi = \frac{Li^2}{2}. \quad (8.54)$$

Плотность энергии магнитного поля найдём на примере катушки с сердечником в виде тонкой кольцеобразной ленты, равномерно обмотанной проводом с числом витков W . Длина средней линии сердечника l , сечение сердечника S . Отношение внешнего радиуса к внутреннему такого сердечника близко к единице, благодаря чему напряжённость магнитного поля может быть принята одинаковой

по всему сечению сердечника. На основании закона полного тока

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl \cos 0^\circ = H \oint dl = Hl = iw.$$

Откуда следует: $i = \frac{Hl}{w}$.

Потокоцепление $d\psi = wd\Phi = wSdB$, таким образом, энергия магнитного поля $W_m = \int_0^\psi id\psi = \frac{lwS}{w} \int_0^B HdB = V \int_0^B HdB$, где V — объём сердечника.

Разделив обе части равенства на объём, получим плотность энергии магнитного поля:

$$\frac{W_m}{V} = \int_0^B HdB.$$

Если μ_a сердечника постоянная, то

$$B = \mu_a H \text{ и } dB = \mu_a dH.$$

Следовательно, в каждой единице объёма, занятого магнитным полем, запасена энергия

$$\frac{W_m}{V} = \mu_a \int_0^H HdH = \frac{\mu_a H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (8.55)$$

Для анизотропной среды плотность магнитной энергии

$$\frac{W_m}{V} = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2}$$

8.29. Магнитное поле и индуктивность тороида и соленоида

Если на кольцевой сердечник — тороид, выполненный из материала с магнитной проницаемостью $\mu_a > \mu_0$, нанести обмотку так, что витки будут плотно охватывать тороид по всей длине, то весь магнитный поток практически будет сосредоточен в сердечнике (рисунок 8.23). Линии вектора напряжённости \vec{H} представляют собой окружности, сцепляющиеся со всеми витками.

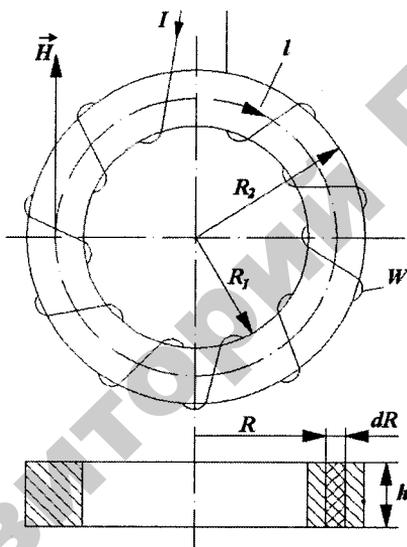


Рисунок 8.23 — К расчету индуктивности тороида

По закону полного тока

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl \cos 0 = H \oint dl = H 2\pi R = Iw;$$

$$H = \frac{Iw}{2\pi R}; \quad B = \mu_a H = \frac{\mu_a Iw}{2\pi R}.$$

Магнитный поток в сердечнике

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \vec{B} d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} B dS \cos 0^\circ = \int_{R_1}^{R_2} B h dR = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_a I w h}{2\pi R} dR = \frac{\mu_a I w h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Потокоосцепление $\Psi = \Phi w = \frac{\mu_a I w^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ и индуктивность тороида

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_a w^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (8.56)$$

Если R_1 и R_2 незначительно отличаются друг от друга, то можно считать, что магнитное поле в тороиде распределено равномерно, и расчёт индуктивности вести по средней линии l и площади сечения тороида S :

$$\begin{aligned} H &= \frac{Iw}{l}, \\ \Phi &= BS = \mu_a HS = \frac{\mu_a I w S}{l}, \\ L &= \frac{w\Phi}{I} = \frac{\mu_a w^2 S}{l}. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Полученная формула может быть использована также для определения индуктивности длинного соленоида (рисунок 8.24), рассматривая его как тороид бесконечно большого радиуса.

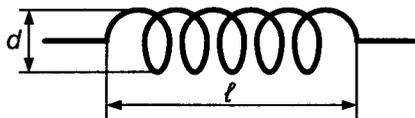


Рисунок 8.24 — Соленоид

Для соленоида конечной длины l с $\mu_a = \mu_o$ можно записать

$$L = K \frac{\mu_o w^2 S}{l},$$

где коэффициент $K < 1$, учитывающий, что не весь магнитный поток в таком соленоиде пронизывает все витки. Он зависит от отношения диаметра d витков катушки к её длине l , при $\frac{d}{l} = 0,1$, коэффициент $K = 0,96$, при $\frac{d}{l} < 0,1$ принимают $K \approx 1$.

8.30. Магнитное поле и индуктивность двухпроводной линии

Пусть по проводам линии проходит ток I (рисунок 8.25). (В правом проводе ток направлен в плоскость чертежа, в левом – из плоскости чертежа.)

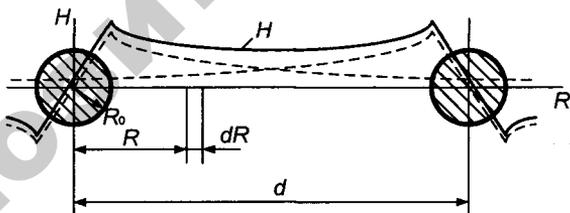


Рисунок 8.25 — Магнитное поле двухпроводной линии

Определим величину магнитного потока между проводами, исключая магнитный поток внутри проводов. Найдём сначала поток от

одного провода, а затем его удвоим, поскольку поток от второго провода будет совпадать по направлению с потоком первого провода.

Согласно закону полного тока, напряжённость на расстоянии R от левого провода имеет значение

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Зависимость $H = f(R)$, построенная по полученному уравнению, показана пунктиром на рисунке 8.25.

$$\text{Магнитная индукция } B = \mu_a H = \frac{\mu_a I}{2\pi R}.$$

В пространстве между проводами вырежем полоску длиной l и шириной dR , где l — длина линии. Магнитный поток, пронизывающий эту элементарную полоску, $d\Phi = BdS = BldR$.

Весь поток между проводами, создаваемый током левого провода,

$$\Phi_1 = \int_{R_0}^{d-R_0} \frac{\mu_0 I l}{2\pi R} dR = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d-R_0}{R_0},$$

где d — расстояние между осями проводов, R_0 — радиус провода.

Магнитный поток, создаваемый токами обоих проводов,

$$\Phi = 2\Phi_1 = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-R_0}{R_0}.$$

Так как $d \gg R_0$, то $\Phi \approx \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d}{R_0}$.

Прямой и обратный провода линии образуют один виток, поэтому потокосцепление $\Psi = w\Phi = \Phi$.

Внешняя индуктивность линии

$$L' = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{R_0}. \quad (8.58)$$

Для определения внутренней индуктивности L'' , определяемой магнитным полем внутри проводов, найдём энергию этого магнитного поля.

Вырежем в теле провода тонкостенный цилиндр длиной l с радиусом основания R и толщиной стенки dR . Найдём энергию в стенке цилиндра $dW_1 = \frac{W_m}{V} dV = \frac{\mu_a H^2}{2} l 2\pi R dR$.

Напряжённость магнитного поля внутри провода на расстоянии R от оси провода

$$H = \frac{IR}{2\pi R_0^2}.$$

Энергия магнитного поля внутри провода

$$W_1 = \int_0^{R_0} \frac{\mu_a I^2 l R^3}{4\pi R_0^4} dR = \frac{\mu_a I^2 l}{16\pi}.$$

Таким образом, энергия магнитного поля внутри провода

$$W_1 = \frac{L_1'' I^2}{2} = \frac{\mu_a I^2 l}{16\pi}.$$

Откуда внутренняя индуктивность провода

$$L_1'' = \frac{\mu_a l}{8\pi}.$$

Внутренняя индуктивность двух проводов линии

$$L'' = 2L_1'' = \frac{\mu_a l}{4\pi}. \quad (8.59)$$

Индуктивность двухпроводной линии

$$L = L' + L'' = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{R_0} + \frac{\mu_a l}{4\pi}. \quad (8.60)$$

Для медных или алюминиевых проводов, у которых $\mu_a = \mu_0$, в большинстве случаев вторым членом можно пренебречь по сравнению с первым и $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{R_0}$.

Для стальных проводов $\mu_a \gg \mu_0$, основной частью магнитного потока является поток внутри проводов, и индуктивность таких проводов не будет зависеть от расстояния между проводами.

8.31. Магнитное экранирование

Для защиты электроизмерительных приборов от влияния внешних посторонних магнитных полей их измерительные системы помещают в массивные замкнутые или почти замкнутые оболочки из ферромагнитного материала. Такие оболочки называют магнитным экраном (рисунок 8.26).

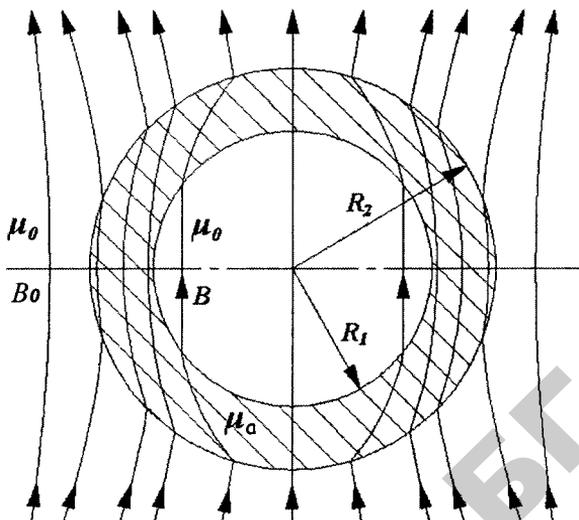


Рисунок 8.26 — Магнитный экран

Поле внутри экрана оказывается ослабленным по сравнению с внешним полем. Магнитная индукция \vec{B} в полости экрана значительно меньше магнитной индукции \vec{B}_0 во внешнем поле, так как магнитная проницаемость ферромагнитного экрана μ_a значительно больше магнитной проницаемости воздуха μ_0 . Экранирующее действие определяется тем, что линии магнитной индукции внешнего поля, стремясь пройти по пути с наименьшим магнитным сопротивлением, сгущаются внутри стенок экрана, почти не проникая в его полость.

Нередко применяют многоступенчатые экраны в виде нескольких полых ферромагнитных оболочек.

8.32. Дополнительный теоретический материал для самостоятельной работы

8.32.1. Взаимная индуктивность двух двухпроводных линий

Пусть провода 1 и 1' первой линии параллельны проводам 2 и 2' второй линии. Расстояния между осями проводов d_{12} , $d_{12'}$, $d_{1'2}$ и $d_{1'2'}$ заданы, длина линий l (рисунок 8.27).

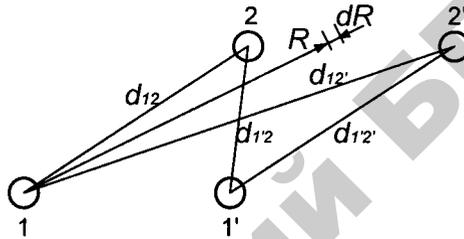


Рисунок 8.27 — К расчету взаимной индуктивности
двух двухпроводных линий

Пусть по первой линии идёт ток I_1 . Найдём потокоцепление Ψ_{12} со второй линией. Примем радиусы проводов второй линии пренебрежимо малыми по сравнению с расстояниями между проводами, тогда потокоцепление Ψ_{12} определяется потоком Φ_{12} . Этот поток будет равен алгебраической сумме потоков Φ_1 от тока провода 1 и Φ_1' от тока провода 1'. Поток Φ_1 ограничен окружностями радиусами d_{12} и $d_{12'}$. Для элементарной площадки $dS = ldR$, расположенной перпендикулярно к направлению линий магнитной индукции на расстоянии R от провода 1, магнитный поток $d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi R} dR$,

а весь поток

$$\Phi_1 = \int_{d_{12}}^{d_{12'}} \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi R} dR = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{d_{12'}}{d_{12}}.$$

Аналогично для провода 1' с током $-I_1$,

$$\Phi_{1'} = -\frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{d_{1'2'}}{d_{1'2}}.$$

Результирующий поток

$$\Phi_{12} = \Phi_1 + \Phi_{1'} = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{d_{1'2} d_{12'}}{d_{12} d_{1'2'}}.$$

Взаимная индуктивность $M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d_{1'2} d_{12'}}{d_{12} d_{1'2'}}.$

8.32.2. Сила взаимодействия двух проводов с током в линии электропередачи

Определим силу взаимодействия двух параллельных проводов с током (рисунок 8.28)

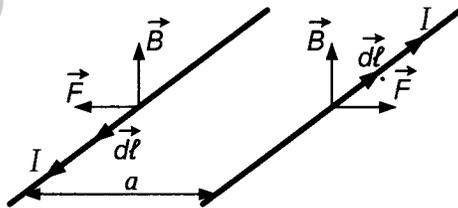


Рисунок 8.28 — Двухпроводная линия электропередачи

В двухпроводной линии электропередачи токи в проводах направлены навстречу друг другу. Каждый провод находится в магнитном поле, созданном током соседнего провода. Направление вектора магнитной индукции \vec{B} определяется по правилу правого винта.

Согласно закону Ампера сила, действующая на правый провод,

$$\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \text{ или } F = IlB \sin \alpha,$$

где α — угол между вектором \vec{B} и вектором $d\vec{l}$.

Вектор $d\vec{l}$ направлен по направлению тока в элементе длины проводника. В рассматриваемом случае $\alpha = 90^\circ$, следовательно

$$F = BI, \quad (8.61)$$

где l — длина провода.

Согласно закону полного тока напряженность магнитного поля от тока левого провода на расстоянии a находится из выражения:

$$H = \frac{I}{2\pi a}.$$

Соответственно магнитная индукция

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a},$$

а сила, действующая на правый провод

$$F = \mu_0 \frac{I^2 l}{2\pi a}. \quad (8.62)$$

Такая же сила будет действовать на левый провод. Направление силы определяется по правилу левой руки. Как видно на рисунке 8.28, провода отталкиваются друг от друга.

8.32.3. Сила тяги электромагнита

На практике широко применяются приборы, основанные на притяжении подвижной части электроустройства к неподвижной. К их числу относятся электромагнитные реле, электроизмерительные приборы электромагнитной системы и другие (рисунок 8.29).

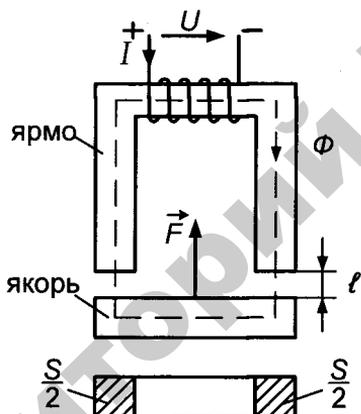


Рисунок 8.29 — Электромагнитное реле

Энергия магнитного поля в воздушном зазоре

$$W_m = \frac{BH}{2} Sl,$$

где $S = \frac{S}{2} + \frac{S}{2}$ — рабочая поверхность якоря, $\frac{BH}{2}$ — плотность энергии в воздушном зазоре.

Сила тяги электромагнита направлена так, чтобы якорь приблизился к ярму. При этом энергия, запасенная в магнитном поле воздушного зазора, переходит в механическую работу, затрачиваемую на перемещение якоря.

Пусть под действием магнитных сил якорь начал притягиваться, но прошел настолько малое расстояние dl , что величина B и H практически не изменились. Наступившее малое изменение энергии составит

$$dW_m = \frac{BH}{2} S dl.$$

С другой стороны $dW_m = F dl$, где F — сила действующая на якорь. Следовательно,

$$F = \frac{dW_m}{dl} = \frac{BH}{2} S. \quad (8.63)$$

Из последнего выражения видно, $\frac{BH}{2}$ выражает собой как объемную плотность энергии, так и давление на единицу рабочей поверхности якоря.

Если учесть, что в воздушном зазоре $H = \frac{B}{\mu_0}$, то

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} S. \quad (8.64)$$

Из уравнения (8.64) видно, что сила тяги электромагнита создается как при постоянном, так и при переменном токе в катушке.

8.33. Задачи и вопросы для самопроверки

1. Какими величинами характеризуется магнитное поле и как они связаны между собой?
2. Связь каких величин определяет закон полного тока?
3. По прямому цилиндрическому проводу радиуса $R_0 = 0,02$ м протекает ток $I = 100$ А. Найти напряжённость магнитного поля на расстоянии $R_1 = 0,01$ м и $R_2 = 0,4$ м от оси провода.

Ответ: 398 А/м ; $39,8$ А/м .

4. Найти значение индукции магнитного поля двухпроводной линии с постоянным током $I = 100$ А между проводами на расстоянии $R_1 = 0,2$ м от левого провода на оси, соединяющей центры проводов. Расстояние между проводами $d = 1$ м; $\mu_0 = 1,25 \times 10^{-6}$ Гн/м .

Ответ: $124,4 \times 10^{-6}$ Тл.

5. Испытывает ли уединённый провод механические усилия при прохождении по нему тока?
6. Каково выражение плотности энергии магнитного поля?
7. Через посредство каких величин определяют значение индуктивности?
8. Как выполняют магнитное экранирование?

Лекция 6

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

8.34. Полный электрический ток

Электрический ток в проводящей среде есть упорядоченное движение электрических зарядов под действием сил электрического поля. Такой ток называется током проводимости. Плотность тока проводимости

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}.$$

Если заряженные тела или частицы движутся в непроводящей среде или вакууме со скоростью \vec{v} , то они образуют ток, называемый током переноса:

$$\vec{J}_{\text{пер}} = \rho \vec{v},$$

где ρ — объёмная плотность заряда частиц, \vec{v} — скорость движения частиц.

Под влиянием электрического поля связанные электрические заряды диэлектрика смещаются: положительные — по направлению поля, отрицательные — в противоположном. При исчезновении электрического поля заряды снова возвращаются в прежнее состояние. Явление смещения упруго связанных электрических зарядов и ориентации дипольных молекул диэлектрика называется поляризацией диэлектрика. При всяком изменении электрического поля во времени изменяется поляризованность \vec{P} диэлектрика. При этом в веществе диэлектрика движутся элементарные частицы с электрическими зарядами, входящими в состав атома и молекулы вещества. Этот вид тока в диэлектрике называют током поляризации:

$$\vec{J}_{\text{поляризация}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Для сред, в которых поляризованность пропорциональна напряжённости поля $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_r \vec{E}$, плотность тока поляризации

$$\vec{J}_{\text{поляризация}} = \epsilon_0 \chi_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

где χ_r — относительная диэлектрическая восприимчивость.

Все три перечисленных тока представляют собой движение электрических зарядов. Каждый из этих токов сопровождается магнитным полем.

Максвелл предложил называть также электрическим током изменение во времени электрического поля в вакууме, так как при этом образуется магнитное поле. Этот вид тока называют током смещения в вакууме:

$$\vec{J}_{\text{осм}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Отличие тока смещения в вакууме от других видов тока состоит в том, что он не вызывает тепловых потерь.

Таким образом, электрическим током называют два разнородных явления — движение электрических зарядов и изменение электрического поля во времени.

Полным электрическим током называют совокупность всех явлений, при которых образуется магнитное поле:

$$\vec{J}_{\text{полн}} = \vec{J} + \vec{J}_{\text{пер}} + \vec{J}_{\text{поляр}} + \vec{J}_{\text{осм}}.$$

Ток проводимости и ток переноса имеют место и в постоянных и в переменных во времени электрических полях, ток поляризации и ток смещения в вакууме имеют место только в переменных во времени полях.

Сумму токов поляризации и тока смещения в вакууме называют током смещения в диэлектрике:

$$\vec{J}_{\text{см}} = \vec{J}_{\text{поляр}} + \vec{J}_{\text{осм}} = \varepsilon_0 (1 + \chi_r) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Ток переноса встречается крайне редко, поэтому под полным током, как правило, понимают сумму токов проводимости и смещения:

$$\vec{J}_{\text{полн}} = \vec{J} + \vec{J}_{\text{см}} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (8.65)$$

8.35. Первое уравнение Максвелла

Одним из основных уравнений электромагнитного поля является первое уравнение Максвелла, которое представляет собой дифференциальную форму записи закона полного тока:

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (8.66)$$

Физический смысл этого уравнения заключается в следующем: магнитное поле возбуждается как током проводимости, так и изменяющимся электрическим полем.

Для сред с постоянной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_a = \epsilon_r \epsilon_0 = \text{const}$ имеем

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (8.67)$$

Для идеальных диэлектриков с проводимостью $\gamma = 0$ получаем

$$\text{rot} \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Магнитное поле в данном случае возбуждается изменяющимся во времени электрическим полем без участия тока.

8.36. Второе уравнение Максвелла

Второе уравнение Максвелла представляет собой выражение закона электромагнитной индукции в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (8.68)$$

Физический смысл этого уравнения заключается в следующем: изменяющееся во времени магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле.

Для сред с постоянной магнитной проницаемостью

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (8.69)$$

Докажем, что второе уравнение Максвелла выражает закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Согласно этому закону при изменении магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную замкнутым контуром, в контуре наводится ЭДС:

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Если напряженность индуцированного электрического поля обозначить \vec{E} , то

$$e = \oint \vec{E} d\vec{l}.$$

Магнитный поток есть поток вектора магнитной индукции \vec{B} сквозь поверхность S :

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Следовательно, $\oint \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$. Левую часть уравнения

можно преобразовать по теореме Стокса, $\oint_S \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$.

Таким образом, $\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$.

Полученное равенство выполняется при любых площадях.

Следовательно, $\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

8.37. Полная система уравнений электромагнитного поля

Электромагнитное поле определяется четырьмя векторными величинами \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} .

Для сред с постоянной проницаемостью эти векторы связаны соотношениями:

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}.$$

Для любого изотропного вещества электромагнитное поле определяется следующей системой уравнений:

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho, \quad \text{div} \vec{B} = 0.$$

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}.$$

Физический смысл основных уравнений электромагнитного поля заключен в том, что магнитное поле всегда вихревое и возбуждается оно как движущимися зарядами, так и изменяющимся во времени электрическим полем. Электрическое поле может быть вихревым (в этом случае оно возбуждается изменяющимся во времени магнитным полем) и безвихревым (если оно возбуждается постоянными во времени электрическими зарядами).

Электрические и магнитные поля связаны непрерывными взаимными превращениями и представляют собой различные проявления единого электромагнитного поля, которое находится в движении и несет с собой запас энергии:

$$W_{\text{эм}} = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV + \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV. \quad (8.70)$$

8.38. Теорема Умова – Пойнтинга

Теорема Умова – Пойнтинга выражает закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Она связывает изменение энергии, в каком-либо объеме с потоком ее через поверхность, ограничивающую этот объем.

Энергия электромагнитного поля в объеме V равна:

$$W_{\text{эм}} = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV + \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV.$$

Найдем изменение энергии в данном объеме:

$$\frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t} = \int_V \epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV + \int_V \mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} dV.$$

Из уравнений Максвелла для сред с $\epsilon_a = \text{const}$, $\mu_a = \text{const}$,

$$\gamma = \text{const}, \text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \text{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

$$\text{Найдем } \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot} \vec{H} - \gamma \vec{E} \quad \text{и} \quad \mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E},$$

$$\text{тогда } \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t} = \int_V \vec{E} \text{rot} \vec{H} dV - \int_V \gamma E^2 dV - \int_V \vec{H} \text{rot} \vec{E} dV.$$

Из математики известно, что

$$\text{div}[\vec{E} \vec{H}] = \vec{H} \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \text{rot} \vec{H}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t} = - \int_V \text{div}[\vec{E} \vec{H}] dV - \int_V \gamma E^2 dV.$$

Обозначим векторное произведение $[\vec{E} \vec{H}] = \vec{\Pi}$.

Вектор $\vec{\Pi}$ называют вектором Пойнтинга, его размерность равна Вт/м².

По теореме Остроградского

$$\int_V \text{div} \vec{\Pi} dV = \int_S \vec{\Pi} d\vec{S}.$$

В результате получим

$$- \int_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t}. \quad (8.71)$$

Данное выражение носит название теоремы Умова – Пойнтинга, согласно которой поток вектора Пойнтинга сквозь замкнутую поверхность S равен сумме двух мощностей: мощности тепловых потерь внутри объема, ограниченного поверхностью S , и приращения энергии электромагнитного поля в том же объеме.

Положительная нормаль к замкнутой поверхности и вектор \overline{dS} направлены в наружную сторону. Поэтому, чтобы поток вектора $\overline{\Pi}$, входящий через поверхность S , был положительным, вектор $\overline{\Pi}$ должен быть преимущественно направлен внутрь объема V (угол между вектором $\overline{\Pi}$ и вектором \overline{dS} должен быть преимущественно тупым).

Вектор Пойнтинга есть физическая величина, которая равна энергии, проходящей в единицу времени сквозь поверхность, равную 1 м^2 , перпендикулярную к направлению вектора $\overline{\Pi}$. Вектор $\overline{\Pi}$ определяется выражением $\overline{\Pi} = [\overline{E}\overline{H}]$, согласно которому на-

правление вектора $\overline{\Pi}$ будет совпадать с направлением движения острия правого винта, головка которого вращается в плоскости, содержащей векторы \overline{E} и \overline{H} , в направлении от \overline{E} к \overline{H} по кратчайшему расстоянию.

Если в объеме V имеются источники энергии мощностью $P_{\text{ист}}$, то теорему Умова – Пойнтинга записывают в следующем виде:

$$P_{\text{ист}} = \oint_S \overline{\Pi} d\overline{S} + \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial W_{\text{эм}}}{dt}.$$

Мощность источников в объеме V равна сумме мощности тепловых потерь в объеме V , мощности изменения энергии электромагнитного поля в объеме V и мощности энергии, выходящей наружу через поверхность S , ограничивающую рассматриваемый объем V .

8.39. Передача электрической энергии вдоль проводов линии электропередачи

Теорема Умова – Пойнтинга позволяет сделать вывод, что передача энергии вдоль проводов линии осуществляется электромагнитным полем, распространяющимся в диэлектрике вдоль проводов линии. Провода линии служат направляющими движения энергии электромагнитного поля.

Окружим часть линии вместе с приемником замкнутой поверхностью S (рисунок 8.30).

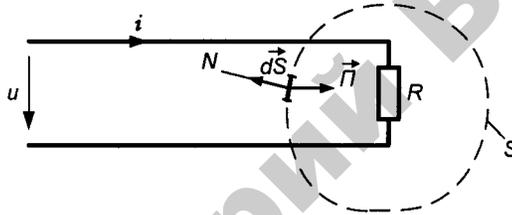


Рисунок 8.30 — Линия электропередачи

Согласно теореме Умова – Пойнтинга
$$-\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial W_{эм}}{\partial t}$$

приращение энергии электрического и магнитного полей в объеме V , ограниченного замкнутой поверхностью S , и поглощение энергии в приемнике и в проводах линии, расположенных в этом объеме, происходит за счет электромагнитной энергии, поступившей из диэлектрика в объем V сквозь ограничивающую его поверхность S .

В частном случае, когда ток в линии постоянный, энергия электрического и магнитного полей в объеме V не изменяются во времени, последний член уравнения Умова – Пойнтинга равен нулю:

$$-\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV.$$

Энергия, поглощаемая в цепи в виде теплоты, равна энергии, передаваемой в область V через поверхность S . Таким образом, энергия, выделяемая в проводнике в виде теплоты, передается в проводник сквозь поверхность проводника из диэлектрика, окружающего проводник. Покажем это на примере круглого провода радиуса r_0 , длиной l , с сопротивлением R и током \dot{i} (рисунок 8.31).

Поскольку отрезок проводника обладает сопротивлением R , то при наличии тока на концах проводника возникнет разность потенциалов, определяемая тангенциальной составляющей напряженности электрического поля: $E_\tau l = Ri$, откуда $E_\tau = \frac{Ri}{l}$.

Напряженность магнитного поля на поверхности проводника

$$H = \frac{i}{2\pi r_0}.$$

Следовательно, нормальная составляющая вектора Пойнтинга равна

$$\Pi_n = E_\tau H = \frac{i^2 R}{2\pi r_0 l}.$$

Величина $2\pi r_0 l$ есть площадь цилиндрической поверхности отрезка провода. Мощность, передаваемая в провод сквозь его поверхность из окружающей среды, равна:

$$\Pi_n S = i^2 R.$$

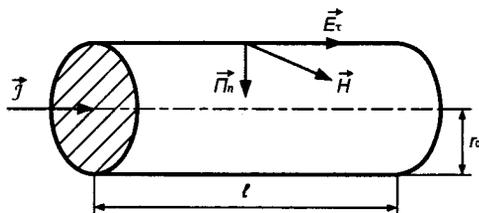


Рисунок 8.31 — Отрезок провода линии

На рисунке 8.32 показаны направления линий напряженности магнитного и электрического полей около проводов линий электропередачи. Линии напряженности электрического поля несколько изогнуты, так как вследствие наличия активного сопротивления самих проводов вектор \vec{E} у поверхности провода имеет составляющую по направлению тока в проводнике. Определяя направление вектора Пойнтинга \vec{P} , в разных точках поля получаем картину, изображенную на рисунке 8.32, из которой видно, что поток электромагнитной энергии передается от генератора к приемнику через диэлектрик, расположенный между проводами и возле них. Через провода энергия к приемнику не передается, провода сами потребляют из диэлектрика энергию, преобразуя ее в тепловую, аналогично активному приемнику, расположенному в конце линии.

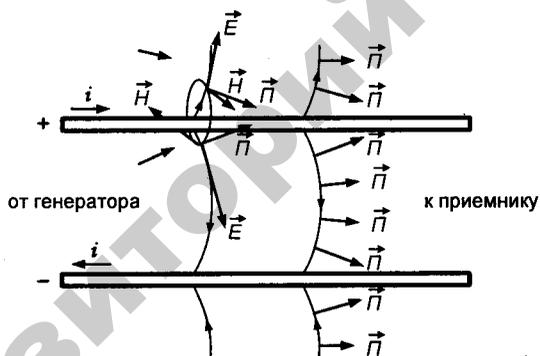


Рисунок 8.32 — Поток вектора Пойнтинга в диэлектрике между проводами и возле них

Величина напряженностей электрического и магнитного полей имеют наибольшее значение в пространстве между и возле проводов, поэтому подавляющая доля энергии от генератора идет по диэлектрику в пространстве между и возле проводов. Провода образуют канал в диэлектрике, по которому поступает энергия к приемнику.

8.40. Уравнения Максвелла в комплексной форме записи

$$\text{Уравнения Максвелла } \operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ и } \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

записаны для мгновенных значений H и E .

Если H и E изменяются во времени по синусоидальному закону, то уравнения Максвелла можно записать в комплексной форме.

$$\text{Пусть } H = H_m \sin(\omega t + \psi_H) \text{ и } E = E_m \sin(\omega t + \psi_E).$$

Перейдём к комплексной форме записи синусоидальных величин:

$$H = \operatorname{Im} H_m e^{j\psi_H} e^{j\omega t} = \operatorname{Im} \dot{H}_m e^{j\omega t},$$

$$\text{где — } \dot{H}_m = H_m e^{j\psi_H},$$

$$E = \operatorname{Im} E_m e^{j\psi_E} e^{j\omega t} = \operatorname{Im} \dot{E}_m e^{j\omega t},$$

$$\text{где — } \dot{E}_m = E_m e^{j\psi_E}.$$

Так как напряжённости H и E , кроме того, что они изменяются во времени по синусоидальному закону, являются функциями векторными, то есть определённым образом ориентированными в пространстве векторами, то над ними ставят стрелку и точку: $\dot{\vec{H}}_m$ и

$\dot{\vec{E}}_m$. Подставим в уравнение Максвелла вместо H величину $\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t}$ и вместо E величину $\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}$, в результате получим:

$$e^{j\omega t} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \gamma \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} + j\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}.$$

После сокращения на $e^{j\omega t}$ получим первое уравнение Максвелла в комплексной форме:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \gamma \dot{\vec{E}}_m + j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m. \quad (8.72)$$

Аналогично запишем второе уравнение Максвелла:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m. \quad (8.73)$$

Дополнительный теоретический материал для самостоятельной работы

8.41. Теорема Умова – Пойнтинга в комплексной форме записи

В теории синусоидальных токов пользуются приемом, позволяющим вычислить активную и реактивную мощности по комплексной мощности \underline{S} , равной произведению комплекса напряжения \dot{U} на сопряженный комплекс тока \dot{I}^* :

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* = \frac{1}{2} \dot{U}_m \dot{I}_m^* = P + jQ.$$

Аналогично в электромагнитном поле вводится в употребление комплексный вектор Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = \left[\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^* \right] = \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right].$$

Определим поток этого вектора через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V , повторив преобразования при выводе теоремы Умова – Пойнтинга в обратном порядке

$$-\oint_S \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right] d\vec{S} = -\frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right] dV = \frac{1}{2} \int_V \left(\dot{\vec{E}}_m \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^* - \dot{\vec{H}}_m^* \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m \right) dV.$$

Согласно уравнениям Максвелла в комплексной форме

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \gamma \dot{\vec{E}}_m + j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m,$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m.$$

Следовательно, $\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^* = \gamma \dot{\vec{E}}_m^* - j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m^*$ и

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^* - \dot{\vec{H}}_m^* \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m &= \gamma \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* - j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* + j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m \dot{\vec{H}}_m^* = \\ &= \gamma E_m^2 + j2\omega \left(\frac{\mu_a H_m^2}{2} - \frac{\epsilon_a E_m^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$-\oint_S \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right] d\vec{S} = \int_V \frac{1}{2} \gamma E_m^2 dV + j\omega \int_V \left(\frac{\mu_a H_m^2}{2} - \frac{\epsilon_a E_m^2}{2} \right) dV.$$

Первый интеграл в правой части выражает собой активную мощность P , поглощаемую внутри объема V , второй интеграл есть разность максимальных значений энергий, запасенных в магнитном

и электрическом полях этого объема. Произведение этой разности на угловую частоту ω представляет собой реактивную мощность.

Для подтверждения последнего рассмотрим реактивную мощность цепи синусоидального тока с последовательным соединением резистивного R , индуктивного L и емкостного C элементов:

$$Q = I^2 X = I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 2\omega \left(\frac{LI^2}{2} - \frac{1}{2\omega^2 C^2} I^2 C \right) = \omega \left(\frac{LI_m^2}{2} - \frac{CU_m^2}{2} \right) = \omega (W_{\text{мг}} - W_{\text{эм}}).$$

Таким образом, теорема Умова – Пойнтинга в комплексной форме имеет вид:

$$-\oint_S \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_m \vec{H}_m^* \right] d\vec{S} = P + j\omega (W_{\text{мг}} - W_{\text{эм}}) = P + jQ.$$

Эта форма теоремы Умова – Пойнтинга имеет важное практическое значение. Ее используют, например, при определении активного и внутреннего индуктивного сопротивлений проводников на переменном токе.

8.42. Задачи и вопросы для самопроверки

1. Что такое полный электрический ток?
2. Что является причиной появления электрического поля.
3. Что является причиной появления магнитного поля?
4. Что выражает собой вектор Пойнтинга?
5. Какова связь между направлением вектора Пойнтинга и направлением векторов напряженностей электрического и магнитного полей?

6. По уединенному алюминиевому проводу радиусом $r = 0,01$ м, длиной $l = 1$ м проходит ток $I = 1000$ А. Удельная проводимость

алюминия $\gamma = 32 \times 10^6$ Ом/м. Пользуясь теоремой Умова – Пойнтинга, найти мощность потока энергии, входящей внутрь провода через его боковую поверхность. Сравните эту мощность с мощностью, определяемой по закону Джоуля – Ленца: $P = I^2 R$.

Ответ: 1000 Вт.

7. Какую роль выполняют провода линии при передаче по ней энергии от генератора к приемнику?

Лекция 7

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ И ДИЭЛЕКТРИКЕ

8.43. Уравнения Максвелла для проводящей среды

Если E и H изменяются во времени по синусоидному закону, то для анализа электромагнитного поля в проводящей среде используются уравнения Максвелла в комплексной форме:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \gamma \dot{\vec{E}}_m + j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m.$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m.$$

В проводящей среде даже при весьма высоких частотах произведение $\omega \epsilon_a$ значительно меньше проводимости γ . Поэтому слагаемым $j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m$ в первом уравнении Максвелла можно пренебречь:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \gamma \dot{\vec{E}}_m. \quad (8.74)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_m. \quad (8.75)$$

Возьмем ротор от первого уравнения:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \operatorname{rot} \gamma \dot{\vec{E}}_m.$$

Используя выражение ротора от ротора, получим

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{H}}_m - \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m = \gamma \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m.$$

Так как $\operatorname{div} \dot{\vec{H}}_m = 0$, поэтому и $\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{H}}_m = 0$.

Учитывая уравнение (8.75), будем иметь:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m = j\omega\mu_a \gamma \dot{\vec{H}}_m. \quad (8.76)$$

8.44. Плоская электромагнитная волна в проводящей среде

Электромагнитная волна будет плоской, если все величины, характеризующие интенсивность электромагнитного процесса зависят только от одной координаты. Приблизительно такой характер имеет электромагнитная волна, излученная антенной, если эту волну рассматривать в небольшой области пространства на большом расстоянии от излучающей антенны.

Пусть векторы $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ зависят только от координаты z , тогда

$$\frac{\partial \dot{\vec{H}}_m}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\vec{H}}_m}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\vec{E}}_m}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\vec{E}}_m}{\partial y} = 0.$$

Повернем координатные оси так, чтобы ось y совпала с вектором напряженности магнитного поля \vec{H}_m . Тогда $\dot{H}_m = \vec{j}\dot{H}_m$, где \vec{j} — единичный орт оси y . Подставим $\dot{H}_m = \vec{j}\dot{H}_m$ в уравнение (8.76)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{j}\dot{H}_m = j\omega\mu_a\gamma\vec{j}H_m.$$

Учитывая, что $\frac{\partial^2 \dot{H}_m}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \dot{H}_m}{\partial y^2} = 0$, получим

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = j\omega\mu_0\gamma\dot{H}_m. \quad (8.77)$$

Переход от частной производной к простой, произведен по той причине, что H_m зависит только от координаты z .

Решение полученного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\dot{H}_m = \underline{C}_1 e^{-pz} + \underline{C}_2 e^{pz},$$

где — \underline{C}_1 и \underline{C}_2 комплексные коэффициенты, определяемые из граничных условий, $\underline{p} = \sqrt{j\omega\mu_a\gamma}$.

Так как $\sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$, то, вводя обозначение $\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}} = k$, получим:

$$\underline{p} = \sqrt{j\omega\mu_a\gamma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}} = (1+j)k.$$

Напряженность электрического поля \dot{E}_m найдется из уравнения (8.74):

$$\dot{E}_m = \frac{1}{\gamma} \text{rot } \dot{H}_m.$$

Запишем выражение $\text{rot } \dot{H}_m$ в декартовой системе координат для плоской волны:

$$\text{rot } \dot{H}_m = \vec{i} \left(\frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_{ym}}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial \dot{H}_{xm}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial \dot{H}_{ym}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{xm}}{\partial y} \right) = -\vec{i} \frac{\partial \dot{H}_{ym}}{\partial z} = -\vec{i} \frac{\partial \dot{H}_m}{\partial z}.$$

Следовательно,

$$\dot{E}_m = \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \dot{H}_m}{\partial z} \right). \quad (8.78)$$

Полученное выражение показывает, что вектор \dot{E}_m направлен по оси x . Таким образом, в плоской электромагнитной волне векторы \dot{E}_m и \dot{H}_m взаимно перпендикулярны $\dot{E}_m \perp \dot{H}_m$. Подставив в уравнение (8.78) значение \dot{H}_m , получим

$$\dot{E}_m = \vec{i} \frac{p}{\gamma} (\underline{C}_1 e^{-pz} - \underline{C}_2 e^{pz}).$$

Частное от деления p на γ называют волновым сопротивлением:

$$\underline{Z}_B = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{j45^\circ}.$$

Обозначим $\dot{H}_{m \text{ пад}} = \underline{C}_1 e^{-pz}$ и $\dot{E}_{m \text{ пад}} = \underline{Z}_B \underline{C}_1 e^{-pz}$ — напряженность магнитного и напряженность электрического полей па-

дающей электромагнитной волны, а $\dot{H}_{m \text{отр}} = \underline{C}_2 e^{+pz}$ и $E_{m \text{отр}} = -\underline{Z}_в C_2 e^{pz}$ — напряженность магнитного и напряженность электрического полей отраженной электромагнитной волны, тогда

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{m \text{пад}} + \dot{H}_{m \text{отр}},$$

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m \text{пад}} + \dot{E}_{m \text{отр}}.$$

Составляющие падающей волны $\dot{E}_{m \text{пад}}$ и $\dot{H}_{m \text{пад}}$ дают вектор Пойнтинга падающей волны $\dot{\Pi}_{m \text{пад}} = \dot{E}_{m \text{пад}} \times \dot{H}_{m \text{пад}}$, а составляющие отраженной волны $\dot{E}_{m \text{отр}}$ и $\dot{H}_{m \text{отр}}$ дают вектор Пойнтинга отраженной волны $\dot{\Pi}_{m \text{отр}} = \dot{E}_{m \text{отр}} \times \dot{H}_{m \text{отр}}$ (рисунок 8.33).

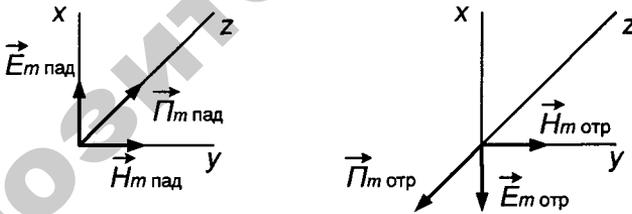


Рисунок 8.33 — Вектор Пойнтинга для падающей (а) и отраженной (б) волн

Составляющие падающей волны $\dot{E}_{m \text{пад}}$ и $\dot{H}_{m \text{пад}}$ дают вектор Пойнтинга $\dot{\Pi}_{m \text{пад}}$, направленный вдоль положительного направле-

ния оси z , следовательно, падающая электромагнитная волна несет в себе энергию и распространяется вдоль положительного направления оси z .

Составляющие отраженной волны $\vec{E}_{m\text{отр}}$ и $\vec{H}_{m\text{отр}}$ дают вектор Пойнтинга $\vec{\dot{P}}_{m\text{отр}}$ направленный вдоль отрицательного направления оси z . Это значит, что отраженная электромагнитная волна несет в себе энергию и распространяется вдоль отрицательного направления оси z .

8.44. Распространение плоской электромагнитной волны в однородном проводящем полупространстве

Пусть плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в диэлектрике, подходит нормально к плоской поверхности проводящей среды, ограничивающей ее с одной стороны (рисунок 8.34). Во всех остальных направлениях проводящая среда простирается до бесконечности. Направим ось z в глубь проводящей среды нормально к ее поверхности. Плоскость xOy совместим с этой поверхностью.



Рисунок 8.34 — Граница между диэлектриком и проводящей средой

Так как проводящая среда простирается до бесконечности, то падающая волна в толще проводящей среды не встречает границы, от которой бы она отразилась, и отраженной волны в данном случае не возникает.

При наличии только одной падающей волны

$$\dot{H}_m = \underline{C}_1 e^{-pz} \quad \text{и} \quad \dot{E}_m = \underline{Z}_B \underline{C}_1 e^{-pz}.$$

Постоянную интегрирования \underline{C}_1 найдем из граничных условий. Пусть на поверхности среды при $z = 0$ напряженность магнитного поля имеет значение $\dot{H}_m = \dot{H}_{ma} = H_{ma} e^{j\psi_a}$, тогда $\underline{C}_1 = \dot{H}_{ma}$ и выражения напряженностей имеют вид:

$$\dot{H}_m = H_{ma} e^{-kz} e^{-jkz} e^{j\psi_a},$$

$$\dot{E}_m = H_{ma} e^{-kz} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-jkz} e^{j\psi_a} e^{j45^\circ}$$

Напишем мгновенные значения E и H . Для этого правые части умножим на $e^{j\omega t}$ и возьмем мнимые значения от получившихся произведений:

$$H = H_{ma} e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a);$$

$$E = H_{ma} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \psi_a + 45^\circ).$$

Из полученных выражений следует, что амплитуды напряженностей магнитного и электрического полей по мере проникновения в проводящую среду убывают по показательному закону (рисунок 8.35). Это происходит потому, что энергия электромагнитной волны в проводящей среде с $\gamma \neq 0$ преобразуется в тепловую энергию.

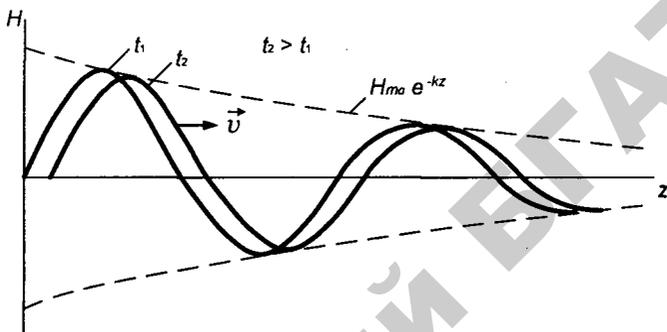


Рисунок 8.35 — График мгновенного значения напряженности магнитного поля

Во всех точках проводящей среды, в том числе и на ее поверхности, напряженность электрического поля опережает по фазе напряженность магнитного поля на угол 45° .

Под длиной волны λ понимают расстояние вдоль направления распространения волны (вдоль оси z), на котором фаза колебания изменяется на 2π .

Она определяется из условия

$$(\omega t_1 - kz_1 + \psi_a) - [\omega t_1 - k(z_1 + \lambda) + \psi_a] = 2\pi;$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}}}$$

Под глубиной проникновения Δ понимают расстояние вдоль направления распространения волны, на котором амплитуда падающей волны E (или H) уменьшается в e раз. Глубину проникновения определяют с помощью выражения $e^{-k\Delta} = e^{-1}$.

Отсюда следует, что

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_a\gamma}}$$

Глубина проникновения в 2π раз меньше длины волны. Глубина проникновения уменьшается с увеличением частоты, магнитной проницаемости и удельной проводимости проводящей среды. Например, при частоте $f = 50$ Гц глубина проникновения в меди ($\gamma = 58 \times 10^6$ См/м) – 9,4 мм, в стали ($\gamma = 10^7$ См/м; $\mu_r = 1000$) – 0,74 мм. При частоте $f = 500000$ Гц глубина проникновения уменьшается в 100 раз.

Отношение амплитуд напряженностей полей на расстоянии $z = \lambda$ от поверхности среды к их значениям на поверхности равно

$$\frac{H_{ma} e^{-k\lambda}}{H_{ma}} = e^{-k\lambda} = e^{-2\pi} = 0,00185.$$

На этом расстоянии волна практически затухает. В идеальный проводник ($\gamma = \infty$) электромагнитная волна совсем не проникает, она полностью отражается от него. Свойство переменного электромагнитного поля высокой частоты проникать на небольшую глубину проводящих тел, обладающих высокой удельной проводимостью или магнитной проницаемостью, используется для устройства электромагнитных экранов. На этом же свойстве основана высокочастотная закалка стальных изделий. Закаливаемую деталь помещают на короткое время в поле высокочастотных токов. Энергия

электромагнитных волн, проникающих в деталь, поглощается в тонком поверхностном слое и нагревает его. После этого деталь удаляют из электромагнитного поля и охлаждают. Закаляется лишь тонкий поверхностный слой детали, что приводит к улучшению качества изделий.

8.45. Магнитный поверхностный эффект в плоском листе

Рассмотрим распространение плоских электромагнитных волн в стальном листе. Пусть вдоль листа распространяется переменный магнитный поток $\dot{\Phi}_m$. Толщина листа $2a$, высота листа h , длина листа l . Длина листа l и его высота h (рисунок 8.36) значительно превосходят его толщину: $l \gg 2a, h \gg 2a$.

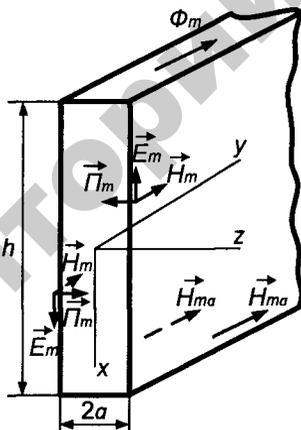


Рисунок 8.36 — Магнитный поток в плоском листе

Определим закон изменения напряженностей полей E и H по сечению листа. Электромагнитные волны в данном случае проникают в лист с двух его сторон. В силу симметрии напряженность магнитного поля на левой поверхности листа та же, что и на правой

поверхности листа. Обозначим ее \dot{H}_{ma} . Соответственно оси координат направим так, чтобы вектор $\dot{\vec{H}}_m$ был направлен по оси y , то есть $\dot{\vec{H}}_m = \vec{j}\dot{H}_m$, тогда

$$\dot{H}_m = \underline{C}_1 e^{-pz} + \underline{C}_2 e^{pz}.$$

Постоянные \underline{C}_1 и \underline{C}_2 найдем из граничных условий. При $z = a$, то есть для точек, находящихся на правой стороне листа,

$$\dot{H}_{ma} = \underline{C}_1 e^{-pa} + \underline{C}_2 e^{pa};$$

при $z = -a$,

$$\dot{H}_{ma} = \underline{C}_1 e^{pa} + \underline{C}_2 e^{-pa}.$$

Из совместного решения этих двух уравнений получим:

$$\underline{C}_1 = \underline{C}_2 = \frac{\dot{H}_{ma}}{e^{pa} + e^{-pa}} = \frac{\dot{H}_{ma}}{2\text{ch } pa}.$$

Напряженность магнитного поля в любой точке листа

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{H}_{ma}}{2\text{ch } pa} (e^{-pz} + e^{pz}) = \dot{H}_{ma} \frac{\text{ch } pz}{\text{ch } pa}. \quad (8.79)$$

Напряженность электрического поля в любой точке листа

$$\begin{aligned}\dot{\underline{E}}_m &= \vec{i} \left(-\frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}_m}{dz} \right) = -\vec{i} \left(\frac{p}{\gamma} \dot{H}_{ma} \frac{\text{sh } \underline{pz}}{\text{ch } \underline{pa}} \right) = -\vec{i} \dot{E}_m; \\ \dot{E}_m &= \frac{p}{\gamma} \dot{H}_{ma} \frac{\text{sh } \underline{pz}}{\text{ch } \underline{pa}}.\end{aligned}\quad (8.80)$$

При $z = a$ напряженность \dot{E}_m направлена вверх (вдоль оси $-x$), при $z = -a$ — вниз. Вектор Пойнтинга направлен внутрь листа, как с левой стороны листа, так и с правой.

Переменный магнитный поток индуцирует электродвижущие силы в контурах, расположенных в плоскостях, нормальных к линиям магнитной индукции. В этих контурах под действием индуцированных ЭДС возникают вихревые токи. Вектор плотности вихревого тока

$$\dot{\underline{J}}_m = \gamma \dot{\underline{E}}_m; \quad \dot{J}_m = \underline{p} \dot{H}_{ma} \frac{\text{sh } \underline{pz}}{\text{ch } \underline{pa}}.$$

Магнитная индукция в любой точке листа

$$\dot{B}_m = \mu_a \dot{H}_m = \mu_a \dot{H}_{ma} \frac{\text{ch } \underline{pz}}{\text{ch } \underline{pa}}.$$

Среднее значение магнитной индукции в листе

$$\dot{B}_{m \text{ ср}} = \frac{1}{a} \int_0^a \dot{B}_m dz = \frac{\mu_a \dot{H}_{ma}}{a \underline{p}} \frac{\text{sh } \underline{pa}}{\text{ch } \underline{pa}} = \frac{\mu_a \dot{H}_{ma}}{a \underline{p}} \text{th } \underline{pa}.$$

Если считать $\dot{B}_{m\text{cp}}$ известной и равной $\frac{\Phi_m}{2ah}$, то можно найти

напряженность магнитного поля на поверхности листа:

$$\dot{H}_{ma} = \frac{a p \dot{B}_{m\text{cp}}}{\mu_a t h p a}$$

На рисунке 8.37 представлены кривые распределения модулей напряженностей электрического и магнитного полей по сечению листа. По ним видно, что наибольшее значения магнитная и электрическая индукции имеют на поверхности листа. В середине листа при $z = 0$ напряженность магнитного поля имеет минимальное значение, а напряженность электрического поля равна нулю. Кривая плотности вихревых токов $J = f(z)$ повторяет в своем масштабе кривую напряженности электрического поля $E = f(z)$. Явление неравномерного распределения поля по сечению листа, вызванное затуханием электромагнитной волны, называют поверхностным эффектом.

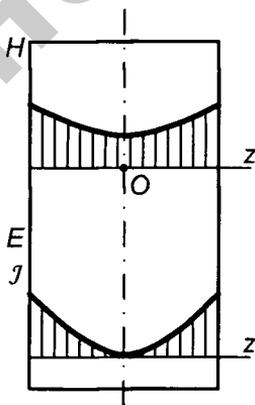


Рисунок 8.37 — Распределение напряженностей E и H по сечению листа

8.46. Электромагнитное экранирование

Для защиты электроизмерительных приборов, элементов электрических цепей, устройств автоматики и связи и т. д. от влияния внешних электромагнитных полей применяются металлические экраны. Если защищаемый элемент цепи окружить металлической оболочкой, то при достаточной ее толщине внешнее электромагнитное поле практически не проникнет внутрь оболочки, поскольку вся его энергия будет поглощена этой оболочкой. Физически экранирующее действие может быть объяснено возникновением токов в стенках экрана, создающих поле, компенсирующее внешнее поле. Эти токи могут рассматриваться как вихревые токи.

Для получения эффективного экранирующего действия толщина стенок экрана должна быть приблизительно равной длине волны λ в веществе экрана. При радиочастотах порядка $f = 500$ кГц длина волны в меди 0,6 мм, экраны изготавливаются из меди или алюминия.

8.47. Плоская электромагнитная волна в диэлектрике

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в однородном и изотропном диэлектрике. Проводимость γ идеального диэлектрика равна нулю. Поэтому в первом уравнении Максвелла в правой его части слагаемое $\gamma \dot{\vec{E}}$ отсутствует, и уравнения Максвелла в комплексной форме для действующих значений напряженностей получают следующий вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}; \quad (8.81)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}; \quad (8.82)$$

$$\operatorname{div} \dot{\vec{B}} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \dot{\vec{E}} = \rho_{\text{своб}} / \epsilon_a.$$

Для однородных и изотропных диэлектриков $\mu_a = \text{const}$ и условие $\operatorname{div} \mu_a \dot{\vec{H}} = 0$ равнозначно условию $\operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0$. Для совместного решения уравнений (8.81) и (8.82) возьмем ротор от уравнения (8.81). Получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{H}} - \nabla^2 \dot{\vec{H}} = j\omega \epsilon_a \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}.$$

Так как $\operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0$, то и $\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{H}} = 0$. В свою очередь $\operatorname{rot} \dot{\vec{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\vec{H}}$. Поэтому $-\nabla^2 \dot{\vec{H}} = j\omega \epsilon_a (-j\omega \mu_a \dot{\vec{H}})$ или

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = -\omega^2 \epsilon_a \mu_a \dot{\vec{H}}. \quad (8.83)$$

Произведение $\epsilon_a \mu_a$ имеет размерность, обратную размерности квадрата скорости υ , и поэтому можно принять $\epsilon_a \mu_a = 1/\upsilon^2$. С учетом этого обозначения уравнение (8.83) получает следующий

$$\text{вид: } \nabla^2 \dot{\vec{H}} = -\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right)^2 \dot{\vec{H}}.$$

Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении оси z , можно принять, что напряженность магнитного поля направлена вдоль оси y , то есть $\dot{\vec{H}} = \vec{j}\dot{H}$.

Так как для плоской волны \dot{H} зависит только от координаты z и не зависит от других координат (x, y), то уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{j}\dot{H} = - \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \vec{j}\dot{H}$$

приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial z^2} = - \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \dot{H}. \quad (8.84)$$

Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение $p^2 = - \left(\frac{\omega}{v} \right)^2$, корни которого $p_1 = j \frac{\omega}{v}$ и $p_2 = -j \frac{\omega}{v}$.

Общее решение уравнения (8.84):

$$\dot{H} = \underline{C}_1 e^{j \frac{\omega}{v} z} + \underline{C}_2 e^{-j \frac{\omega}{v} z}. \quad (8.85)$$

где $\underline{C}_1, \underline{C}_2$ — комплексные коэффициенты, зависящие от граничных условий. Их запишем в показательной форме: $\underline{C}_1 = C_1 e^{j\psi_0}$ и $\underline{C}_2 = C_2 e^{-j\psi_0}$.

Слагаемое в правой части уравнения (8.85) $\underline{C}_2 e^{-j \frac{\omega}{v} z}$ представляет собой падающую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z , а слагаемое $\underline{C}_1 e^{j \frac{\omega}{v} z}$ — отраженную волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси z .

Напряженность электрического поля \vec{E} найдем из уравнения (8.81).

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \text{rot } \dot{\vec{H}}.$$

Для плоской волны в диэлектрике, аналогично, как и для плоской волны в проводящей среде,

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \vec{i} \left(-\frac{\partial \dot{H}}{\partial z} \right).$$

Поэтому
$$\dot{\vec{E}} = \vec{i} \left\{ \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \left[\left(-j\frac{\omega}{v} \right) \left(\underline{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z} - \underline{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z} \right) \right] \right\}.$$

Величину

$$\frac{1}{\epsilon_a v} = \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\epsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = Z_B$$

называют *волновым сопротивлением диэлектрика*. Волновое сопротивление диэлектрика является действительным числом, измеряется в омах:

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = 377 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}.$$

Оно не зависит от угловой частоты ω . Для вакуума $\mu_r = 1$ и $\epsilon_r = 1$, поэтому $Z_B = 377$ Ом. Следовательно,

$$\dot{\vec{E}} = \vec{i} \dot{E},$$

где
$$\dot{E} = Z_B \underline{C}_2 e^{-j\frac{\omega}{v}z} - Z_B \underline{C}_1 e^{j\frac{\omega}{v}z}.$$

Единичный орт \vec{i} свидетельствует о том, что вектор напряжен-

ности электрического поля направлен по оси x .

Таким образом, в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в диэлектрике, как и в проводящей среде, векторы \dot{E} и \dot{H} взаимно перпендикулярны: \dot{H} направлен по оси y , \dot{E} — по оси x .

Запишем выражения для мгновенных значений H и E падающей волны. Чтобы получить мгновенное значение падающей волны

H , умножим комплекс $\dot{H} = \underline{C}_2 e^{j\psi_n} e^{-j\frac{\omega}{v}z}$ на $e^{j\omega t}$ и от произведения возьмем мнимую часть. В результате получим:

$$H = C_2 \sin\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v}z\right);$$

аналогично,

$$E = C_2 Z_v \sin\left(\omega t + \psi_n - \frac{\omega}{v}z\right).$$

По мере продвижения падающей волны вдоль оси z амплитуды E и H остаются неизменными, то есть затухания волны не происходит, так как в диэлектрике нет токов проводимости и выделения энергии в виде теплоты.

Фазовая скорость электромагнитной волны в диэлектрике:

$$v_{\text{фаз}} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}.$$

Если волна распространяется в вакууме, то $\epsilon_a = \epsilon_0$ и $\mu_a = \mu_0$. Тогда фазовая скорость равна скорости света:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1,256 \times 10^{-6} \times 8,86 \times 10^{-12}}} \approx 300000 \text{ км/с.}$$

Длина волны λ есть расстояние вдоль оси z , на котором фаза колебания изменяется на 2π . Ее находят из соотношения

$$\frac{\omega}{v} \lambda = 2\pi. \text{ Отсюда}$$

$$\lambda = \frac{v}{f}. \quad (8.86)$$

Из уравнения (8.86) видно, что длина волны в диэлектрике обратно пропорциональна частоте f . Так при частоте $f = 10^6$ Гц

$$\lambda = \frac{300000}{10^6} = 300 \text{ м.}$$

8.48. Задачи и вопросы для самопроверки

1. Что такое плоская электромагнитная волна?
2. Почему электромагнитная волна затухает по мере проникновения в глубь проводящей среды?
3. Что такое глубина проникновения?
4. Определить глубину проникновения электромагнитной волны, имеющей частоту $f = 5000$ Гц, в проводящую среду, у которой $\gamma = 10^7$ См/м, $\mu_r = 10^3$.

Ответ: 0,07 мм.

5. Почему электромагнитная волна не может проникнуть в среду с бесконечно большой проводимостью?
6. Что понимают под поверхностным эффектом?

7. Почему сопротивление проводника возрастает при увеличении частоты тока?
8. Как выполняют электромагнитные экраны?

Материалы к практическим занятиям

Для подготовки к практическим занятиям необходимо изучить теоретический материал модуля, относящийся к теме занятия, рекомендуется использовать также методические указания к практическим занятиям по ТОЭ, ч. 3 [11] и литературу [2, 3]. Ответить на контрольные вопросы.

Практическое занятие 1

Электростатическое поле и емкость конденсаторов

Задача занятия: изучить величины, характеризующие электростатическое поле, и связи между ними. Изучить методику расчета электростатического поля и методику расчета емкости электротехнических установок.

План занятия:

1. Повторение основного теоретического материала.
2. Решение задач под руководством преподавателя и самостоятельно.

Контрольные вопросы для подготовки к практическому занятию 1

1. Как определяется значение напряженности электрического поля?
2. Сформулируйте закон Кулона.

3. Как определяется потенциал электростатического поля?
4. Что означает и чему равен градиент потенциала?
5. Что такое эквипотенциальные линии и линии вектора напряженности электрического поля?
6. Сформулируйте теорему Гаусса.
7. Как определяется емкость между двумя проводящими телами?
8. Как находится энергия электрического поля, конденсатора?
9. Чему равна плотность энергии электрического поля?

Примеры практического применения теоретического материала

1. Определить напряженность поля в точках a , b , c и силу, которая действует в вакууме на каждый из трех точечных зарядов q_a , q_b , q_c , находящихся на расстоянии друг от друга $R = 3$ мм, $q_a = q_b = q_c = 15 \times 10^{-12}$ Кл (рисунок 8.38).

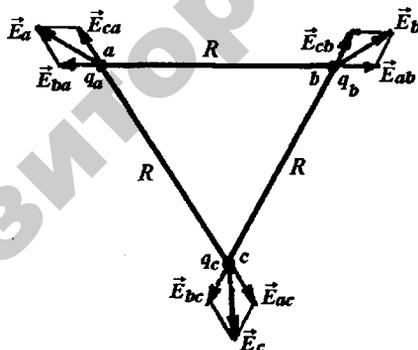


Рисунок 8.38

Решение

Точка a находится в поле точечного заряда q_b и в поле точечного заряда q_c . Поэтому $\vec{E}_a = \vec{E}_{ba} + \vec{E}_{ca}$.

Аналогично: $\vec{E}_b = \vec{E}_{ab} + \vec{E}_{cb}$, $\vec{E}_c = \vec{E}_{ac} + \vec{E}_{bc}$.

$$E_a = 2E_{ba} \cos 30^\circ = \sqrt{3}E_{ba}.$$

$$E_{ba} = \frac{F_{ba}}{q_a} = \frac{q_b q_a}{4\pi\epsilon_0 R^2 q_a} = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{15 \times 10^{-12}}{4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 3^2 \times 10^{-6}} = 15 \times 10^3 \text{ В/м.}$$

$$E_{ca} = E_{bc} = E_{ba} = 15 \times 10^3 \text{ В/м.}$$

$$E_a = E_{ba} \sqrt{3} = 25,95 \times 10^3 \text{ В/м; } E_b = E_c = E_a.$$

$$\vec{F}_a = \vec{E}_a q_a = 25,95 \times 10^3 \times 15 \times 10^{-12} = 0,39 \times 10^{-6} \text{ Н;}$$

$$F_b = F_c = F_a.$$

2. Заряд $Q = 8,89 \times 10^{-12}$ Кл равномерно распределен на поверхности металлического шара с радиусом $R_0 = 1 \times 10^{-3}$ м. Шар находится в воздухе, $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м. Найти радиусы эквипотенциальных поверхностей, потенциалы которых отличаются на 10 В (рисунок 8.39).

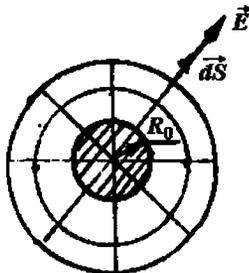


Рисунок 8.39

Решение

Согласно теореме Гаусса $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$.

Так как векторы \vec{E} и $d\vec{S}$ радиально направлены, то скалярное произведение $\vec{E} d\vec{S} = EdS \cos 0 = EdS$. Кроме того, напряженность по величине на поверхности сферы радиуса R , по причине пространственной симметрии, будет одинаковой и поэтому она может быть вынесена за знак интеграла:

$$E \int_S dS = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad E 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Найдем потенциал точки на расстоянии R от центра шара:

$$\varphi = - \int \vec{E} dR + A = - \int \frac{Q dR}{4\pi\epsilon_0 R^2} + A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + A.$$

Если $R = \infty$, $\varphi = 0$. Следовательно $A = 0$. Эквипотенциальной поверхностью будет сфера радиуса R .

Найдем радиус эквипотенциальной поверхности, потенциал которой меньше потенциала поверхности металлического шара на 10 В:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \int_{R_1}^{R_0} E dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right).$$

$$R_1 = \frac{R_0 Q}{Q + (\varphi_1 - \varphi_0) 4\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{1 \times 10^{-3} \times 8,89 \times 10^{-12}}{8,89 \times 10^{-12} - 10 \times 4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^{-3}} = 1,14 \times 10^{-3} \text{ м.}$$

R_2 найдем из условия, что $\varphi_0 - \varphi_2 = 20 \text{ В}$, $R_2 = 1,33 \times 10^{-3}$ и т. д.

3. Найти напряженность поля, электрическое смещение, емкость сферического конденсатора. Определить максимально допустимое напряжение, которое может быть приложено к конденсатору при запасе электрической прочности не менее 5. $R_2 = 2,72 \text{ см}$, $R_1 = 1 \text{ см}$, диэлектрик — конденсаторная бумага $\epsilon_r = 3,7$, пробивная напряженность $E_{пр} = 2,5 \times 10^8 \text{ В/м}$ (рисунок 8.40).

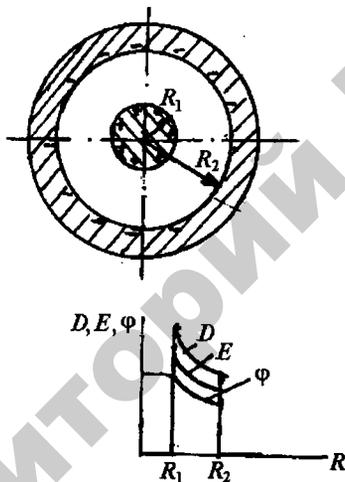


Рисунок 8.40

Решение

Поле сферического конденсатора аналогично полю точечного заряда, расположенного в центре сферы. Основываясь на теореме

Гаусса $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q$, получим

$$D = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 R^2}.$$

$$\varphi = - \int \vec{E} d\vec{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R} + A,$$

где A – постоянная.

Напряжение между электродами

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

емкость

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi \times 3,7 \times 8,85 \times 10^{-12}}{\frac{1}{1 \times 10^{-2}} - \frac{1}{2,72 \times 10^{-2}}} = 6,5 \times 10^{-12} \text{ Ф.}$$

Напряженность E максимальна при $R = R_1$: $E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_1^2}$.

Максимальное напряжение $U_{\max} = E_{\max} R_1^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$.

Учитывая пятикратный запас электрической прочности, максимальная напряженность должна быть в 5 раз меньше пробивной напряженности:

$$E_{\max} = \frac{E_{\text{пр}}}{5}.$$

$$U_{\max} = \frac{E_{\text{пр}}}{5} R_1^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2,5 \times 10^8}{5} \times 10^{-4} \left(\frac{1}{1 \times 10^{-2}} - \frac{1}{2,72 \times 10^{-2}} \right) = 316 \text{ кВ.}$$

4. Найти емкость и энергию электрического поля плоского конденсатора, подключенного на постоянное напряжение $U = 1000 \text{ В}$. Площадь обкладок $S = 40 \text{ см}^2$, расстояние между ними $d = 2 \text{ мм}$,

диэлектрик между обкладками — воздух. Как изменится емкость и энергия, если пространство между обкладками заполнить трансформаторным маслом $\epsilon_r = 4$, при этом конденсатор во время заполнения: а) остается присоединенным к источнику напряжения; б) отсоединен от него.

Решение

Пространство между обкладками заполнено воздухом:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 40 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3}} = 17,7 \times 10^{-12} \text{ Ф},$$

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{17,7 \times 10^{-12} \times 10^6}{2} = 8,85 \times 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Пространство между обкладками заполнено трансформаторным маслом, $\epsilon_r = 4$.

В первом случае, когда напряжение остается неизменным.

$$C_1 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} = \frac{4 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 40 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3}} = 70,8 \times 10^{-12} \text{ Ф},$$

$$C_1 = \epsilon_r C; \quad W_1 = \frac{70,8 \times 10^{-6}}{2} = 35,4 \times 10^{-6} \text{ Дж}; \quad W_1 = \epsilon_r W.$$

Емкость и энергия электрического поля возросла в ϵ_r раз.

Во втором случае заряд Q на обкладках конденсатора остается неизменным.

$$Q_2 = Q, \quad C_2 = \epsilon_r C, \quad C_2 U_2 = CU, \\ U_2 = \frac{CU}{C_2} = \frac{U}{\epsilon_r}; \quad W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2} = \frac{\epsilon_r CU^2}{2\epsilon_r^2} = \frac{W}{\epsilon_r} = 2,2 \times 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Емкость возрасла в ϵ_r раз.

Энергия уменьшилась в ϵ_r раз. Энергия израсходовалась на нагрев масла.

5. Найти силу взаимодействия двух пластин плоского конденсатора площадью $S = 20 \text{ см}^2$ при условии, что пластины были подсоединены к источнику постоянного напряжения $U = 5 \text{ кВ}$ при расстоянии между пластинами $d = 3 \text{ мм}$, а затем источник был отключен. Диэлектрик – масло $\epsilon_r = 2,2$.

Решение

Так как источник постоянного напряжения отключен, то работа по перемещению пластин производится силами поля, то есть за счет уменьшения энергии поля: $F_x = -\frac{dW}{dx}$, x — расстояние между пластинами.

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{CU^2}{2} \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_r SU^2}{2x} \right) = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r SU^2}{2x^2} = \\ &= \frac{2,2 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 20 \times 10^{-4} \times 5^2 \times 10^6}{2 \times 3^2 \times 10^{-6}} = 5,4 \times 10^{-2} \text{ Н.} \end{aligned}$$

6. Определить энергию электрического поля уединенного металлического шара радиусом $a = 2 \text{ мм}$, который находится в воздухе и потенциал которого $\varphi_{\text{ш}} = 500 \text{ В}$ (полагая $\varphi = 0$ на бесконечно большом расстоянии R).

Решение

Шар не присоединен к источнику. Поэтому его заряд

$Q = \text{const}$, потенциал $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + A$. При $R = \infty$, $\varphi = 0$, сле-

довательно $A = 0$. Заряд шара $Q = 4\pi\epsilon_0\varphi_{\text{ш}} a$. Напряженность поля

$$E = E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \text{ смещение } D = D_R = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Плотность энергии электрического поля на расстоянии R .

$$\frac{W}{V} = \frac{ED}{2} = \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4 \epsilon_0}.$$

Энергия, заключенная в стенке сферической оболочки радиуса R и толщиной стенки dR .

$$dW = \frac{W}{V} 4\pi R^2 dR = \frac{Q^2 4\pi R^2 dR}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4} = \frac{Q^2 dR}{8\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Вся энергия

$$W = \int_a^{\infty} \frac{Q^2 dR}{8\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} = 2\pi\epsilon_0 a \varphi_{\text{ш}}^2 = 2\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^{-3} \times 500^2 = 27,8 \times 10^{-9} \text{ Дж.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1-й уровень

1. Две одинаковые заряженные частицы находятся в вакууме на расстоянии 5 см друг от друга. Заряд каждой частицы равен 2×10^{-10} Кл. Найти силу взаимодействия этих зарядов.

Ответ: $1,44 \times 10^{-7}$ Н.

2-й уровень

1. В электрическом поле заряженной оси напряженность в точке p равна 500 В/м. Найти напряжение между точками m и n .

Ответ: $U_{mn} = 110$ В.

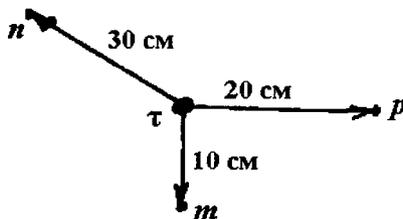


Рисунок 8.41

2. Найти емкость плоского конденсатора с двухслойным диэлектриком, если толщина слоев $d_1 = 1$ мм, $d_2 = 2$ мм, площадь обкладок $S = 10 \text{ см}^2$, диэлектрики: конденсаторная бумага $\epsilon_{r1} = 3,7$ и кабельное масло $\epsilon_{r2} = 2,2$.

Ответ: 7,5 пФ.

3. Определить емкость и заряд, приходящийся на 1 км двухпроводной линии. Радиус проводов $R_0 = 3$ мм. Расстояние между осями проводов $d = 0,3$ м. Линия находится под напряжением $U = 1000$ В.

Ответ: $6,02 \times 10^{-9}$ Ф/км. $6,02 \times 10^{-6}$ Кл/км.

Практическое занятие 2

Электрическое поле постоянных токов

Задача занятия: изучить величины, характеризующие электрическое поле в проводящей среде, и методику расчета токов утечки через изоляцию в электрических устройствах.

План занятия:

1. Повторение основных теоретических положений по теме занятия.

2. Решение задач под руководством преподавателя и самостоятельно.

Контрольные вопросы для подготовки к практическому занятию 2

1. Как выражается ток через вектор плотности тока?
2. Как связаны между собой вектор плотности тока и вектор напряженности электрического поля?
3. Как определяется энергия, выделяющаяся в единицу времени в единице объема проводящей среды?
4. Как определяется проводимость между двумя электродами, помещенными в проводящую среду?

Примеры практического применения теоретического материала

1. Стальная пластина представляет собой $3/4$ диска с концентрически вырезанным круглым отверстием (рисунок 8.42). Внутренний радиус диска $R_1 = 1$ см, внешний $R_2 = 2$ см. Толщина пластины $h = 2$ мм. К электродам 1 и 2 приложено напряжение $U = 2$ В. Удельная проводимость стали $\gamma = 10^7$ См/м. Определить наибольшую и наименьшую плотности тока и ток источника питания.

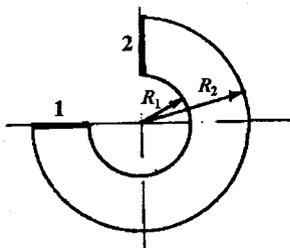


Рисунок 8.42

Решение

Из условия симметрии линии вектора плотности тока \vec{J} и линии вектора напряженности электрического поля \vec{E} совпадают с концентрическими окружностями, проходящими по пластине.

$$U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}, \quad U = E \frac{3}{4} 2\pi R, \quad E = \frac{2U}{3\pi R}, \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}.$$

$$\text{Следовательно, } J = \frac{\gamma 2U}{3\pi R},$$

$$J_{\max} = \frac{\gamma 2U}{3\pi R_1} = \frac{10^7 \times 2 \times 2}{3\pi \times 1 \times 10^{-2}} = 4,24 \times 10^8 \text{ A/m}^2;$$

$$J_{\min} = \frac{\gamma 2U}{3\pi R_2} = \frac{10^7 \times 2 \times 2}{3\pi \times 2 \times 10^{-2}} = 2,12 \times 10^8 \text{ A/m}^2;$$

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{S};$$

$$I = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\gamma 2U h dR}{3\pi R} = \frac{\gamma 2U h}{3\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{10^7 \times 2 \times 2 \times 2 \times 10^{-3}}{3\pi} \ln \frac{2}{1} = 5,9 \times 10^3 \text{ A}.$$

2. Водоподогреватель представляет собой металлический заземленный цилиндрический бак радиусом $R_1 = 0,5$ м и высотой $l = 1$ м. Дно и крышка бака выполнены из изолирующего материала. Бак имеет коаксиально расположенный электрод радиусом $R_2 = 0,1$ м. Водоподогреватель присоединен к однофазному трансформатору $U = 220$ В. Один полюс трансформатора заземлен. Удельную проводимость воды $\gamma = 1$ См/м считать не зависящей от

температуры. Определить ток и мощность нагревателя. Построить график зависимости удельной активной мощности в функции расстояния от оси цилиндров (рисунок 8.43).

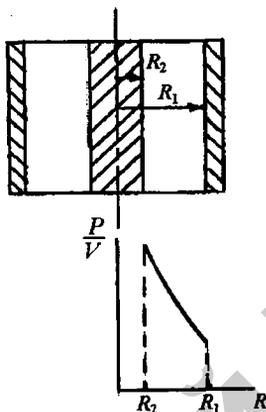


Рисунок 8.43

Решение

Конструкция водонагревателя аналогична цилиндрическому конденсатору.

Емкость цилиндрического конденсатора $C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln R_1/R_2}$, соответ-

ственно проводимость водонагревателя определим из выражения

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{2\pi \times 1 \times 1}{\ln \frac{0,5}{0,1}} = 3,9 \text{ см.}$$

Ток $I = GU = 3,9 \times 220 = 858 \text{ А.}$

Мощность $P = UI = 220 \times 858 = 188760 \text{ Вт.}$

Из условия симметрии плотность тока имеет только радиаль-

ную составляющую $J = \frac{I}{2\pi Rl}$, напряженность электрического по-

ля $E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma lR}$.

Удельная активная мощность

$$\frac{P}{V} = \gamma E^2 = \frac{I^2}{4\pi^2 \gamma l^2} \frac{1}{R^2} = \frac{858^2}{4\pi^2 \times 1 \times 1} \frac{1}{R^2} = 18666 \frac{1}{R^2} \text{ Вт/м}^3,$$

$$R = R_2 = 0,1 \text{ м}, \quad \frac{P}{V} = 1866600 \text{ Вт/м}^3.$$

$$R = R_1 = 0,5 \text{ м}, \quad \frac{P}{V} = 74664 \text{ Вт/м}^3.$$

3. Два параллельных цилиндрических провода проходят через мраморный щит, толщина которого равна $a = 3$ см, расстояние между осями отверстий для проводов $d = 20$ см, радиус провода $R_0 = 0,2$ см. Считая площадь щита неограниченно большой, найти ток утечки через мрамор между проводами, если напряжение $U = 220$ В, удельная проводимость мрамора $\gamma = 10^{-10}$ См/м (рисунок 8.44).

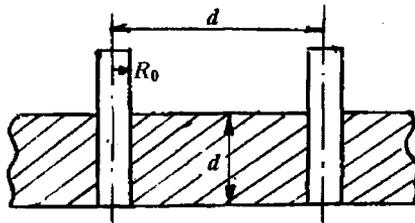


Рисунок 8.44

Решение

Рассматриваемая конструкция щита с двумя проводами аналогична конструкции двухпроводной линии, между проводами которой находится идеальный диэлектрик. Используя формулу емкости двухпроводной линии $C = \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{d}{R_0}}$, найдем проводимость щита

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln d/R_0} = \frac{\pi \times 10^{-10} \times 3 \times 10^{-2}}{\ln 20/0,2} = 2,04 \times 10^{-12} \text{ См.}$$

$$I = UG = 220 \times 2,04 \times 10^{-12} = 4,49 \times 10^{-10} \text{ А.}$$

4. Ток короткого замыкания 1000 А проходит через фундамент опоры, который можно рассматривать как полусферический заземлитель. Удельная проводимость земли $2 \cdot 10^{-2}$ См/м. Найти шаговое напряжение на расстоянии 5 м от центра опоры (длина шага 0,8 м) (рисунок 8.45).

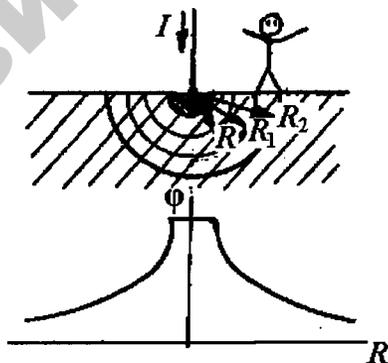


Рисунок 8.45

Решение

Плотность тока имеет только радиальную составляющую

$$J = \frac{I}{2\pi R^2}, \text{ напряженность электрического поля } E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma R^2}.$$

$$\text{Потенциал } \varphi = - \int \vec{E} d\vec{R} = \frac{I}{2\pi\gamma R} + \text{const}.$$

Шаговое напряжение

$$U_m = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1000}{2 \times \pi \times 2 \times 10^{-2}} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5,8} \right) = 220 \text{ В}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1-й уровень

1. К плоскому конденсатору, расстояние между обкладками которого $d = 5$ мм, а площадь каждой из них $S = 50$ см², подключено постоянное напряжение $U = 500$ В. Удельная проводимость диэлектрика $\gamma = 10^{-10}$ См/м. Определить сопротивление изоляции, ток утечки и мощность тепловых потерь.

Ответ: 10^{10} Ом, 5×10^{-8} А, 25×10^{-6} Вт.

2. Изоляция коаксиального кабеля имеет удельную проводимость $\gamma = 10^{-9}$ См/м. Радиус жилы 4 мм, внутренний радиус оболочки 8 мм. Напряжение между жилой и оболочкой 600 В. Определить проводимость, ток утечки и мощность тепловых потерь в изоляции кабеля на единицу длины.

Ответ: $9,1 \times 10^{-9}$ См/м; 5,46 мкА/м; 3250 мкВт/м.

2-й уровень

1. Определить радиус R_0 полусферического заземлителя, погруженного в глинистую почву, если через него протекает ток 314 А, а максимальное шаговое напряжение не превышает 150 В. Шаг человека принять равным 0,8 м. Удельная проводимость глинистой почвы $\gamma = 5 \times 10^{-2}$ См/м.

Ответ: $R_0 = 1,93$ м.

Практическое занятие 3

Магнитное поле постоянных токов

Задача занятия: изучить величины, характеризующие магнитное поле, и методику расчета магнитного поля и индуктивностей.

План занятия:

1. Повторение основных теоретических положений по теме занятия.
2. Решение задач под руководством преподавателя и самостоятельно.

Контрольные вопросы для подготовки к практическому занятию 3

1. Какие величины характеризуют магнитное поле?
2. Сформулируйте закон полного тока.
3. Как связаны между собой магнитная индукция и напряженность магнитного поля?
4. Как находится магнитный поток?
5. Как определяется индуктивность?
6. Чему равна объемная плотность энергии магнитного поля?
7. Чему равна энергия магнитного поля индуктивной катушки?
8. Чему равна сила действия магнитного поля на проводник с током?

Примеры практического применения теоретического материала

1. Рассчитать магнитное поле в медной жиле, оболочке коаксиального кабеля и между ними, если в жиле и оболочке кабеля ток постоянный и равен 10 А, радиусы $R_1 = 3$ мм, $R_2 = 9$ мм, $R_3 = 10$ мм. Построить график зависимости напряженности магнитного поля от радиуса (рисунок 8.46).

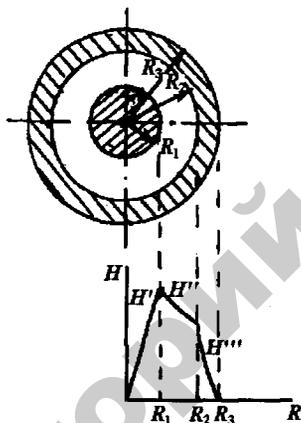


Рисунок 8.46

Решение

Магнитное поле кабеля обладает цилиндрической симметрией и зависит только от радиуса R . Основываясь на законе полного тока

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I,$$

при $R < R_1$ получим $H'2\pi R = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi R^2$, откуда

$$H' = \frac{IR}{2\pi R_1^2} = \frac{10R}{2 \times 3,14 \times 9 \times 10^{-6}} = 177000R \text{ А/м.}$$

При $R = R_1$, $H' = 530$ А/м.

При $R_1 < R < R_2$ напряженность

$$H'' = \frac{I}{2\pi R} = 1,59 \frac{1}{R} \text{ А/м.}$$

При $R = R_2$, $H'' = 177$ А/м.

При $R > R_2$ контур интегрирования будет охватывать как ток жилы, так и частично ток оболочки, поэтому

$$H''' 2\pi R = I - I \frac{\pi(R^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)},$$

$$\text{откуда } H''' = \frac{I}{2\pi R} \frac{R_3^2 - R^2}{R_3^2 - R_2^2} = 84000 \frac{R_3^2 - R^2}{R} \text{ А/м.}$$

При $R = R_3$, $H''' = 0$, при $R > R_3$ (вне кабеля) $H 2\pi R = 0$, $H = 0$ поле отсутствует.

2. Определить индуктивность коаксиального медного кабеля с радиусом жилы $R_1 = 3$ мм и радиусом оболочки $R_2 = 9$ мм и $R_3 = 10$ мм (рисунок 8.46).

Решение

Индуктивность L кабеля можно и целесообразно определить из выражения энергии магнитного поля кабеля $W = \frac{LI^2}{2}$.

Энергия единицы длины кабеля

$$W = \int_V \frac{\mu_0 H^2}{2} dV = \frac{\mu_0}{2} \int_{R=0}^{R_3} H^2 2\pi R dR,$$

где V — объем на единицу длины кабеля.

Определим напряженность поля H , применив закон полного тока.

При $0 < R < R_1$, получим $H' = \frac{IR}{2\pi R_1^2}$;

при $R_1 < R < R_2$, $H'' = \frac{I}{2\pi R}$;

при $R_2 < R < R_3$, $H''' = I \frac{(R_3^2 - R^2)}{2\pi R(R_3^2 - R_2^2)}$.

Вне кабеля магнитное поле отсутствует.

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{R_1} \frac{I^2 R^3}{R_1^4} dR + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{I^2 dR}{R} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{R_2}^{R_3} \frac{I^2 (R_3^2 - R^2)^2}{(R_3^2 - R_2^2)^2 R} dR.$$

Индуктивность кабеля на единицу длины

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3^4}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^4 - 4R_2^2 R_3^2 + R_2^4}{4(R_3^2 - R_2^2)^2} \right] = \\ &= \frac{1,25 \times 10^{-6}}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{9}{3} + \frac{10^4}{(10^2 - 9^2)^2} \ln \frac{10}{9} - \frac{3 \times 10^4 - 4 \times 9^2 \times 10^2 + 9^4}{4(10^2 - 9^2)^2} \right] = \\ &= 0,268 \text{ мкГн/м.} \end{aligned}$$

Первое слагаемое обусловлено магнитным полем внутри жилы, второе — полем между жилой и оболочкой, два последних — полем внутри оболочки.

3. На тороид из ферромагнитного материала с $\mu_r = 1000$, представленный на рисунке 8.47, нанесены равномерно две однослойные обмотки с числами витков $w_1 = 20$ и $w_2 = 200$. Определить собственную индуктивность каждой обмотки и взаимную индуктивность.

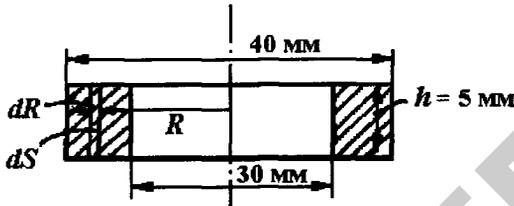


Рисунок 8.47

Решение

Напряженность поля в сердечнике

$$H = \frac{Iw}{2\pi R}$$

Элементарный поток через площадку $dS = hdR$ находим по формуле:

$$d\Phi = BdS = \mu_0\mu_r \frac{Iwh}{2\pi} \frac{dR}{R}$$

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \mu_0\mu_r \frac{Iwh}{2\pi} \frac{dR}{R} = \mu_0\mu_r \frac{Iwh}{2\pi} h \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Потокосцепление первой катушки

$$\Psi_1 = w_1\Phi,$$

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{I_1} = \mu_0 \mu_r \frac{w_1^2}{2\pi} h \ln \frac{R_2}{R_1} = 1,25 \times 10^{-6} \times 1000 \times \frac{20^2}{2\pi} \times 5 \times 10^{-3} \ln \frac{20}{15} = 0,116 \text{ мГн.}$$

$$L_2 = \frac{\Psi_2}{I_2} = \mu_0 \mu_r \frac{w_2^2}{2\pi} h \ln \frac{R_2}{R_1} = 11,6 \text{ мГн.}$$

Взаимная индуктивность

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{w_2 \Phi_1}{I_1} = \mu_0 \mu_r \frac{I_1 w_1 h w_2}{2\pi I_1} \ln \frac{R_2}{R_1} = 1,25 \times 10^{-6} \times 1000 \frac{20 \times 5 \times 10^{-3} \times 200}{2\pi} \ln \frac{20}{15} = 1,16 \text{ мГн.}$$

4. При поражении молнией трубчатого молниеотвода труба оказалась сплюсненной. Определить давление, действовавшее на стенки трубы при токе молнии $I = 200$ кА в предположении, что ток протекает лишь в тонком поверхностном слое трубы (поверхностный эффект). Наружный радиус трубы $R_0 = 1,25$ см.

Решение

Так как ток сосредоточен на поверхности трубы, то магнитное поле существует только вне трубы. Если элемент поверхности трубы переместится на расстояние dR , то приращение энергии магнитного поля

$$dW = -W_0 dV = -W_0 dS dR = -\frac{1}{2} BH dS dR,$$

где $W_0 = \frac{BH}{2}$ – энергия магнитного поля в единице объема.

Сила, действующая на элемент поверхности

$$dF_R = \frac{\partial W}{\partial R} = -\frac{1}{2} BH dS.$$

Давление

$$P = -\frac{dF_R}{dS} = -\frac{1}{2}BH = -\frac{1}{2}\mu_0 H^2 = -\frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{I}{2\pi R_0}\right)^2 =$$
$$= -\frac{1}{2}1,256 \times 10^{-6} \left(\frac{200000}{2\pi \times 1,25 \times 10^{-2}}\right)^2 = -4070000 \text{ Н/м}^2.$$

Знак «минус» указывает на то, что сила стремится уменьшить радиус.

5. Определить силу взаимодействия двух проводов линии электропередачи постоянного тока $I_1 = 1000 \text{ А}$ и $I_2 = -1000 \text{ А}$, если расстояние между проводами $a = 0,5 \text{ м}$, длина линии 100 м (рисунок 8.48).

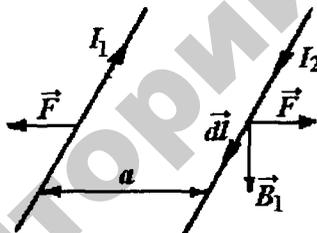


Рисунок 8.48

Решение

Со стороны магнитного поля, создаваемого током первого провода, действует механическая сила на второй провод с током I_2 . Эту силу определим из закона Ампера:

$$\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B},$$

$$F = I_2 B_1 \sin 90^\circ = I_2 B_1 = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} = 1000^2 \times 100 \times \frac{1,256 \times 10^{-6}}{2\pi \times 0,5} = 40 \text{ Н}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1-й уровень

Найти значение индукции магнитного поля между проводами двухпроводной линии с постоянным током $I = 100$ А на расстоянии $R_1 = 0,2$ м от левого провода на оси, соединяющей центры проводов. Расстояние между проводами $d = 1$ м, $\mu_0 = 1,256 \times 10^{-6}$ Гн/м.

Ответ: 125×10^{-6} Тл.

2-й уровень

1. Провод с постоянным током $I = 360$ А находится на оси стальной трубы. Радиус провода $R_0 = 0,4$ см. Внутренний радиус трубы $R_1 = 4$ см, внешний радиус $R_2 = 5$ см. Относительная магнитная проницаемость стали трубы при заданном токе $\mu_r = 200$.

Определить значения напряженности магнитного поля и значения магнитной индукции в точках $R = 0,2$ см, $0,4$ см, 2 см, $4,5$ см, 6 см. Построить кривую $H = f(R)$. Изменяются ли найденные значения напряженности и магнитной индукции, если стальную трубу убрать.

Ответ. При наличии трубы $H = 7160$ А/м; 14320 А/м; 2860 А/м; 1270 А/м; 955 А/м. $B = 89 \times 10^{-4}$ Тл; 179×10^{-4} Тл; 36×10^{-4} Тл; $0,32$ Тл; 12×10^{-4} Тл.

При отсутствии трубы изменится только значение индукции в стенке трубы при $R = 4,5$ см, $B = 16 \times 10^{-4}$ Тл.

2. Определить энергию магнитного поля, заключенную внутри стального провода с током $I = 100$ А. Радиус провода $R_0 = 1$ см, длина $l = 100$ м, $\mu_r = 1000$.

Ответ: 25 Дж.

Материалы к лабораторным занятиям

Для подготовки к лабораторным занятиям необходимо изучить теоретический материал по теме занятия, используя данный учебно-методический комплекс, учебную литературу [2, 3] и методические указания к лабораторным занятиям по ТОЭ, ч. 3 [14].

Лабораторное занятие 1

Исследование электростатического поля двухпроводной линии на модели

Задача занятия: экспериментальное исследование картины электростатического поля двухпроводной линии с помощью поля постоянного тока в проводящем листе.

Задание для подготовки к занятию

1. Изучить теоретический материал по теме занятия.
2. Изучить описание лабораторной установки.
3. Подготовить протокол отчета к лабораторному занятию на основании программы его выполнения.
4. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для подготовки к лабораторному занятию 1

1. Что такое напряженность электрического поля?
2. Что такое потенциал электрического поля?
3. Что такое силовая линия?
4. Что такое эквипотенциальная линия?
5. Запишите соотношение между потенциалом и напряженностью электростатического поля.
6. Что такое градиент потенциала?

7. В чем проявляется аналогия электростатического поля и электрического поля постоянного тока в проводящей среде?

План занятия:

1. Проверка подготовки к занятию.
2. Сборка электрической цепи и выполнение программы работы.
3. Оформление отчета по лабораторной работе, выводы.
4. Защита лабораторной работы.

Описание лабораторной установки

Для исследования плоскопараллельного электростатического поля двухпроводной линии использован стальной лист.

Как известно, линии напряженности электростатического поля двухпроводной линии представляют собой дуги окружностей, поэтому в соответствии с аналогией линии тока в проводящей среде также являются дугами окружностей, проходящих через электрические оси электродов. Для исследования такого поля нет необходимости располагать бесконечной проводящей средой. Достаточно из всей среды вырезать её часть, ограниченную линиями тока. Именно такой частью является плоский круглый стальной лист, на окружности которого расположены зажимы для подвода тока. На листе нанесена неглубокими царапинами прямоугольная сетка, служащая для определения координат точек на поверхности листа. Зажимы расположены парами, причем каждая пара симметрична относительно средней диаметральной линии. К какой-либо из этих пар зажимов подводится постоянное напряжение, и через лист проходит ток. Установка содержит щуп и микровольтметр для определения опытным путем линий равного потенциала.

Схема электрической цепи установки представлена на рисунке 8.49.

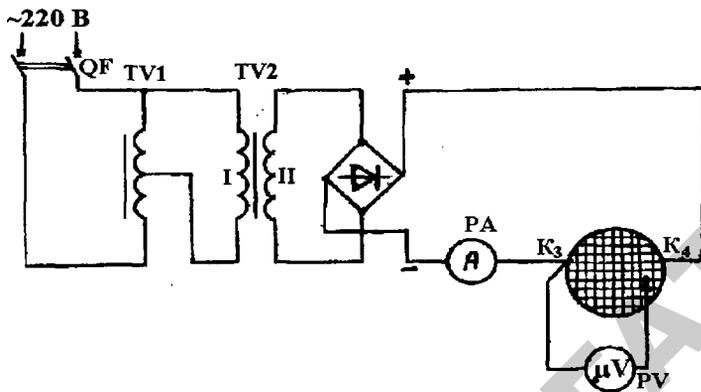


Рисунок 8.49 — Схема электрической цепи для исследования электростатического поля двухпроводной линии:
 PA — амперметр 10 А; PV — микровольтметр

Программа и методика выполнения работы

1. Собрать цепь по схеме, изображенной на рисунке 8.49.
2. Нарисовать на листе бумаги в клетку окружность диаметром 16 см. С расстоянием 1 см провести вертикальные и горизонтальные координатные линии, пронумеровать их. Указать расположение электродов K_3 и K_4 .
3. С помощью автотрансформатора установить ток в цепи 8 А и в дальнейшем строго поддерживать его величину постоянной. Замерьте и запишите потенциалы электродов K_3 и K_4 . Щуп микровольтметра установить на оси симметрии — вертикальной черте в точке с координатами (0,10) и записать показание микровольтметра. Затем, перемещаясь со щупом вверх и вниз до краев листа, определить координаты других точек, имеющих то же значение напряжения (всего 6–7 точек, равномерно отстоящих друг от друга). Определенную таким образом эквипотенциальную линию следует зарисовать на чертеже и подписать величину потенциала.

Аналогично определяются другие эквипотенциальные линии, находящиеся справа и слева от оси симметрии. Напряжение между соседними эквипотенциальными линиями следует брать одинаковое.

4. С помощью построенных на чертеже эквипотенциальных линий построить линии вектора плотности тока, указав их направление.

Линия вектора плотности тока, как и совпадающая с ней линия напряженности электрического поля, пересекается с любой эквипотенциальной линией под прямым углом.

Первой линией вектора плотности тока является прямая, соединяющая центры клемм K_3 и K_4 . Как первая, так и последующие линии вектора плотности тока являются дугами окружностей, проходящих через точки K_3 и K_4 (рисунок 8.50). Первая линия есть дуга окружности с радиусом, равным бесконечности.

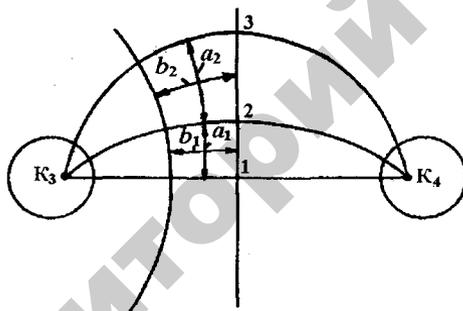


Рисунок 8.50 — Построение линий вектора плотности тока

Вторую линию проводят, как указывалось выше, как дугу окружности, например, через точку 2.

Третья силовая линия проводится так, чтобы

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \text{const.},$$

где $b_1; b_2$ — средняя длина ячейки,

$a_1; a_2$ — средняя ширина ячейки.

Из последнего выражения следует, что $a_2 = a_1 \frac{b_2}{b_1}$, то есть рас-

стояние между точками 2, 3 должно быть больше расстояния 1, 2 примерно во столько раз, во сколько b_2 больше b_1 .

Последнее требование вытекает из того, что ширина полосы, очерченной новой линией вектора плотности тока, должна определяться током, проходящим через сечение этой полосы. Токи каждой полосы должны быть одинаковыми.

Линии плотности тока в нижней части проводят симметрично верхней.

Лабораторное занятие 2

Исследование магнитного поля проводника и магнитного поля цилиндрической катушки

Задача занятия: экспериментальное исследование распределения напряженности магнитного поля в пространстве вокруг проводника с током, а также исследование распределения напряженности магнитного поля вдоль оси цилиндрической катушки с током. Целью работы является также выяснение и экспериментальная проверка закона полного тока.

Задание для подготовки к занятию

1. Изучить теоретический материал по теме занятия.
2. Изучить описание лабораторной установки.
3. Подготовить протокол отчета к лабораторному занятию на основании программы его выполнения.
4. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для подготовки к лабораторному занятию 2

1. Назовите основные величины, характеризующие магнитное поле.
2. В чем состоит принцип непрерывности магнитного потока?
3. Как выражается магнитный поток через магнитную индукцию?
4. Как выражается магнитная индукция через напряженность магнитного поля?
5. Сформулируйте и запишите закон полного тока.
6. По какому правилу определяется направление линий магнитной индукции вокруг проводника с током?

План занятия:

1. Проверка подготовки к занятию
2. Сборка электрических цепей и выполнение программы работы.
3. Оформление отчета по лабораторной работе, выводы.
4. Защита лабораторной работы.

Описание лабораторной установки

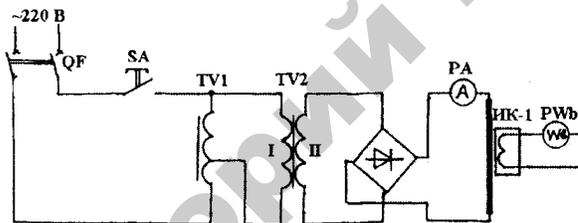
Для измерения магнитной индукции в данной работе используется милливеберметр, подключенный к измерительной катушке. Измерительная катушка (ИК-1, ИК-2) помещается в исследуемую точку пространства. При включении цепи потокосцепление измерительной катушки изменяется от нуля до Ψ , благодаря чему в катушке наводится ЭДС, которая и измеряется прибором. Отклонение стрелки милливеберметра от своего первоначального положения пропорционально индукции магнитного поля, пронизывающего измерительную

катушку. Каждое измерение сопряжено с включением цепи в сеть. Эта операция производится специальной кнопкой «пуск».

Программа и методика выполнения работы

а) Исследование магнитного поля проводника с током.

1. Собрать цепь по схеме, изображенной на рисунке 8.51. Включить цепь в сеть, нажать кнопку *SA* и установить с помощью автотрансформатора *TV1* ток $I = 8$ А. Отпустить кнопку. Значение тока $I = 8$ А должно оставаться неизменным в течение всего эксперимента. При этом (вследствие наличия у амперметра шунта) в данной схеме по исследуемому проводнику будет проходить ток 144 А. Проводник расположен вертикально над столом.



Проводник

Рисунок 8.51 — Схема электрической цепи для исследования магнитного поля проводника с током:

РА — амперметр 10 А; PWb — милливольтметр;

ИК-1 — измерительная катушка

2. С помощью магнитной стрелки исследовать направление вектора магнитной индукции в пространстве, окружающем проводник. Для этого установить магнитную стрелку на расстоянии $R = 10$ см от провода на одном из радиальных направлений. Замкнуть цепь кнопкой и нарисовать положение магнитной стрелки относительно провода на рисунке. Отпустить кнопку. Аналогичные эксперименты сделать на других трех (или более) радиальных направлениях.

По положению северного (красного) полюса стрелки в различных точках вокруг сечения проводника нарисовать линию вектора магнитной индукции (магнитную силовую линию). Указать направление тока в проводнике и направление линии магнитной индукции.

Поменять направление тока в проводнике на противоположное, и с помощью магнитной стрелки убедиться, что направление вектора магнитной индукции также изменилось на противоположное.

3. Измерить значение магнитной индукции вдоль 4-х взаимно перпендикулярных радиальных направлений, указанных на стенде. Измерительную катушку ИК-1 располагать так, чтобы стрелка на ее корпусе совпадала с выбранным радиальным направлением, а вертикальная стенка корпуса под концом стрелки совпадала с отметкой, указывающей расстояние от центра проводника.

Для измерения необходимо записать сначала начальное положение стрелки милливексметра α_0 . Затем кнопкой «пуск» замкнуть цепь и заметить максимальный отброс стрелки милливексметра α , после чего отпустить кнопку «пуск». Измерения сделать на расстоянии 2,5; 5; 10; 15; 20 см от центра проводника. Данные измерений занести в таблицу 8.1.

Таблица 8.1 — Магнитное поле проводника с током

Направление	I					II					III					IV				
	2,5	5	10	15	20	2,5	5	10	15	20	2,5	5	10	15	20	2,5	5	10	15	20
α_0																				
α																				
B , Тл																				
H , А/м																				
$H_{расч.}$, А/м																				
$B_{расч.}$, Тл																				

Здесь R — расстояние измерительной катушки от центра проводника;

α_0 — начальное отклонение стрелки милливексметра;

α — максимальное отклонение стрелки милливексметра;

B — магнитная индукция; $B = C_1(\alpha - \alpha_0)$;

$$C_1 = 450 \times 10^{-6} \text{ Тл};$$

H — напряженность магнитного поля; $H = \frac{B}{\mu_0}$;

$$\mu_0 = 1,25 \times 10^{-6} \text{ Гн/м.}$$

$H_{\text{расч}}$ — расчетная напряженность магнитного поля, определенная в соответствии с законом полного тока: $H_{\text{расч}} = \frac{I}{2\pi R}$

$$B_{\text{расч}} = \mu_0 H_{\text{расч}}.$$

б) Исследование магнитного поля цилиндрической катушки.

4. Собрать цепь по схеме рисунка 8.52, а. Включить цепь в сеть, нажать кнопку и с помощью автотрансформатора TV1 установить ток $I = 3$ А. Отпустить кнопку. Значение тока $I = 3$ А должно оставаться неизменным в течение всего эксперимента.

5. Измерить величину магнитной индукции вдоль оси цилиндрической катушки. Для этого разместить измерительную катушку ИК-2 внутри исследуемой цилиндрической катушки. Измерения произвести в последовательности, изложенной в пункте 3, для следующих делений на стержне измерительной катушки: 0; 2; 4; 6; 9; 12; 14; 16; 18; 20; 24 см.

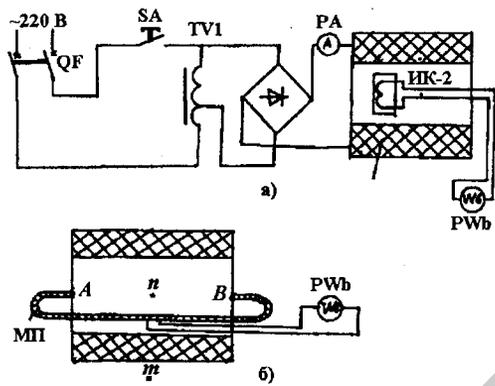


Рисунок 8.52 — Схема электрической цепи для исследования магнитного поля катушки:

РА — амперметр 10 А; PWб — милливольтметр;
 ИК-2 — измерительная катушка; МП — магнитный пояс

Данные измерений занести в таблицу 8.2.

Таблица 8.2 — Магнитное поле на оси катушки

Измерено					Вычислено	
X	α_0	α	B	H	$B_{\text{расч}}$	$H_{\text{расч}}$
см			Тл	А/м	Тл	А/м

Здесь X — деления на стержне (см), определяющие положение измерительной катушки ИК-2;

α_0 — начальное отклонение стрелки милливексметра;

α — максимальное отклонение стрелки милливексметра;

B — магнитная индукция; $B = C_2(\alpha - \alpha_0)$, $C_2 = 1,4 \times 10^{-2}$ Тл;

H — напряженность магнитного поля.

$B_{\text{расч}}$ — расчетное значение магнитной индукции. (Смотри методические указания к обработке результатов эксперимента).

6. Вынуть из цилиндрической катушки измерительную катушку ИК-2 и отключить ее от милливексметра. Продеть в катушку магнитный пояс, подключив его к милливексметру, согласно схеме рисунка 8.52, б. Произвести измерение магнитного напряжения вдоль участка пути $A n B$ — внутри катушки и затем, вынув магнитный пояс из катушки, вдоль участка $A m B$ — вне катушки, а также вдоль замкнутого пути $A n B m A$, охватывающего все витки катушки. Измерения произвести в последовательности, изложенной в пункте 3.

Данные измерений занести в таблицу 8.3.

Таблица 8.3 — Магнитное напряжение на участках вокруг катушки

Участок пути	$A n B$	$A m B$	$A n B m A$
α_0			
α			
U_M, A			

Здесь U_M — магнитное напряжение,

$$U_M = C_3(\alpha - \alpha_0); \quad C_3 = 6430 A.$$

7. По результатам измерений пункта 3 убедиться, что магнитное поле уединенного проводника симметрично относительно центра проводника. По данным измерений построить кривую распределения напряженности магнитного поля в одном из радиальных направлений $H = f(R)$. На этом же рисунке построить кривую $H_{\text{расч}} = f(R)$.

8. По результатам измерений пункта 5 построить кривую распределения напряженности магнитного поля вдоль оси катушки $H = f(X)$, указав на ней пунктиром расположение катушки (длина катушки $l = 0,155$ м).

9. Пользуясь кривой распределения напряженности магнитного поля вдоль оси катушки $H = f(X)$, методом графического интегрирования найти значение магнитного напряжения вдоль участка $A n B$ внутри катушки.

Определение магнитного напряжения графическим интегрированием производится согласно выражению:

$$U_{MA n B} = \int_A^B \vec{H} \vec{dl} = H_{1\text{ср}} l_1 + H_{2\text{ср}} l_2 + \dots = \sum H_{\text{ср}k} l_k,$$

где $H_{\text{ср}k}$ — среднее значение напряженности на отрезке l_k ;
 l_k — длина короткого отрезка.

Отрезки следует брать длиной 0,02 м.

10. Рассчитать магнитное напряжение вдоль замкнутого контура $A n B m A$ по закону полного тока:

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = Iw = U_{MA n B m A},$$

где $I = 3$ А, w — число витков катушки, $w = 3000$.

11. Расчетные значения $U_{MA n B}$ и $U_{MA n B m A}$ (п. 9 и 10) сравнить с данными таблицы 8.3.

Методические указания к обработке результатов эксперимента

Расчетное значение магнитной индукции на оси цилиндрической катушки $B_{\text{расч}}$ находится в соответствии с законом Био-Савара-Лапласа по формуле:

$$B_{\text{расч}} = \mu_0 \frac{iw}{2l} (\cos\beta_1 - \cos\beta_2),$$

где w — число витков катушки, $w = 3000$;

l — длина катушки, $l = 0,155$ м; $I = 3$ А.

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \cong 1,25 \times 10^{-6}$ Гн/м — магнитная постоянная;

β_1 ; β_2 — значения углов (рисунок 8.53), которые определяются расчетным путем, исходя из положения измерительной катушки и размеров катушки. Значения $\cos \beta_1$ и $\cos \beta_2$ приведены в таблице 8.4. На рисунке 8.53 X — положение измерительной катушки, $d = 0,135$ м — средний диаметр витков.

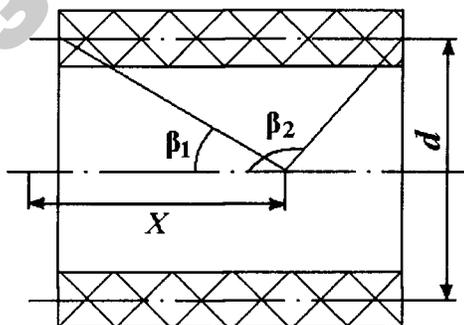


Рисунок 8.53 — Определение углов β_1 , β_2

Таблица 8.4 — Значения $\cos \beta_1$ и $\cos \beta_2$ для различных положений измерительной катушки

$X, \text{ см}$	0	2	4	6	9	12	14	16	18	20	24
$\cos \beta_1$	-0,28	0	0,26	0,5	0,74	0,83	0,88	0,91	0,93	0,94	0,96
$\cos \beta_2$	-0,92	-0,91	-0,9	-0,87	-0,76	-0,63	-0,45	-0,21	0,17	0,46	0,72

Лабораторное занятие 3

Исследование влияния частоты на активное сопротивление проводника

Задача занятия: исследование поверхностного эффекта в стальном проводе круглого сечения.

Задание для подготовки к занятию

1. Изучить теоретический материал по теме занятия.
2. Изучить описание лабораторной установки.
3. Подготовить протокол отчета к лабораторному занятию на основании программы его выполнения.
4. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы для подготовки к лабораторному занятию 3

1. Как рассчитывается сопротивление R линейного проводника?
2. От каких величин зависит глубина проникновения электромагнитной волны в проводящую среду?
3. Чем объясняется отличие активного сопротивления от омического?
4. Почему активное сопротивление возрастает с ростом частоты тока?

5. Почему влияние частоты на активное сопротивление в стальном проводе сказывается больше, чем в медном?

6. Как распределяется плотность тока по сечению проводника?

7. В каком технологическом процессе используется поверхностный эффект?

План занятия:

1. Проверка подготовки к занятию.
2. Сборка электрических цепей и выполнение программы работы.
3. Оформление отчета по лабораторной работе, выводы.
4. Защита лабораторной работы.

Описание лабораторной установки

В данной работе взят стальной провод, в котором поверхностный эффект заметен уже при сравнительно низких частотах. Для измерения активного R и индуктивного X сопротивлений стального провода используется метод трех вольтметров. Напряжение от генератора ГЗ-33 подается на последовательно соединенные эталонное сопротивление $R_n = 2,5$ Ом и исследуемый стальной провод R_x (рисунок 8.54).

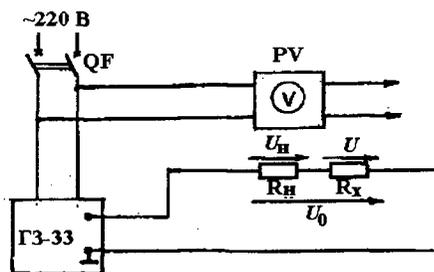


Рисунок 8.54 — Схема электрической цепи для исследования влияния частоты на сопротивление провода:

ГЗ-33 — звуковой генератор; PV — электронный вольтметр

Программа и методика выполнения лабораторной работы

1. Собрать цепь по схеме, изображенной на рисунке 8.54. Установить на эталонном сопротивлении напряжение $U_n = 0,5$ В и в дальнейшем поддерживать его неизменным.

2. Измерить напряжения U_n , U и U_0 при разных частотах. Данные измерений занести в таблицу 8.5.

Таблица 8.5 — Зависимость сопротивления провода от частоты

Частота	f , Гц	500	2000	3000	5000	20000
Измерено	U_n , В					
	U , В					
	U_0 , В					
Вычислено	R , Ом					
	X , Ом					

3. Построить кривые $R = F_1(f)$; $X = F_2(f)$.

Методические указания к обработке результатов эксперимента

Определение активного и индуктивного сопротивлений провода производится с помощью векторных диаграмм на основании показаний вольтметра на трех участках электрической цепи.

Так как $\dot{U}_0 = \dot{U}_n + \dot{U}$, то векторы \dot{U}_0 , \dot{U}_n и \dot{U} должны образовывать замкнутый треугольник. Сначала в масштабе (рекомендуется $m_U = 0,1$ В/см) откладывается вектор напряжения на эталонном сопротивлении \dot{U}_n . Вектор тока \dot{I} совпадает с векто-

ром \dot{U}_H , так как R_H — активное сопротивление. Затем от начала вектора \dot{U}_H проводят дугу окружности радиусом, равным напряжению U_0 в масштабе напряжения. Аналогично с конца вектора \dot{U}_H проводят дугу радиусом, равным напряжению U . Пересечение дуг определит положение векторов \dot{U}_0 и \dot{U} (рисунок 8.55).

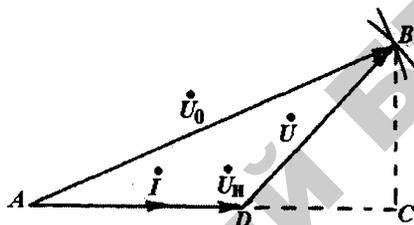


Рисунок 8.55 — Графическое определение активного и реактивного сопротивлений

Треугольники ABC и DBC в масштабе сопротивлений m_Z являются треугольниками сопротивлений. Масштаб сопротивлений определяется длиной вектора \dot{U}_H , соответствующего сопротивлению $R_H = 2,5$ Ом, а именно: $m_Z = \frac{2,5}{AD} \frac{\text{Ом}}{\text{мм}}$. Активное сопротивление стального провода определится длиной отрезка DC :

$$R = DC \times m_Z.$$

Индуктивное сопротивление стального провода определится длиной отрезка BC :

$$X = BC \times m_Z.$$

Материалы к управляемой самостоятельной работе студентов

Используя учебно-методический комплекс и литературу [2, 3],
изучить и законспектировать ответы на следующие вопросы:

1. Поле двух параллельных заряженных осей.
2. Поле и емкость двухпроводной линии.
3. Аналогия между полем в проводящей среде и электростатическим полем.
4. Электрическое поле полусферического заземлителя.
5. Расчет мощности электродного водонагревателя.
6. Взаимная индуктивность двух двухпроводных линий.
7. Сила взаимодействия двух проводов с током.
8. Сила тяги электромагнита.
9. Теорема Умова – Пойнтинга в комплексной форме.

ОБРАЗЕЦ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО МОДУЛЮ 8

Но- мер п/п	Вопрос	Количество баллов по вопросу
1	Электростатическое поле. Основные понятия и величины, характеризующие поле. Закон Кулона	0,8
2	Магнитное поле и индуктивность тороида и соленоида	0,8
3	Закон Ома в дифференциальной форме	0,8
4	Уравнения электромагнитного поля. Физический смысл уравнений Максвелла	0,8
5	Электрическое поле полусферического заземлителя. Шаговое напряжение	0,8
6	Передача электромагнитной энергии вдоль проводов линии электропередачи	0,8

7	<p>Определить мощность тепловых потерь в плоском конденсаторе с несовершенным диэлектриком, удельная проводимость которого $\gamma = 10^{-12}$ См/м. Площадь пластины $S = 100 \text{ см}^2$, расстояние между пластинами $d = 1$ см. Приложенное постоянное напряжение $U = 500$ В</p>	1,3
8	<p>По металлическому проводу $R_0 = 2$ см протекает ток $I = 100$ А. Найти напряженность магнитного поля H внутри провода на расстоянии $R_1 = 1$ см и вне его на расстоянии $R_2 = 4$ см от оси провода</p>	1,3
9	<p>Определить напряженность E электрического поля на расстоянии $R = 10$ см от оси провода радиусом $R_0 = 1$ см с электрическим зарядом на единицу длины провода $\tau = 0,5 \times 10^{-10}$ Кл/м. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м</p>	1,3
10	<p>Определить силу взаимодействия между проводами линии электропередачи, если по обоим проводам идет одинаковый ток $I = 200$ А, расстояние между проводами $d = 1$ м, длина линии $l = 1$ км. Магнитная проницаемость воздуха $\mu_0 = 1,25 \times 10^{-6}$ Гн/м</p>	1,3

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. — Москва : Гардарики, 2007. — 704 с.

2. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле / Л. А. Бессонов. — Москва : Гардарики, 2003. — 320 с.

3. *Теоретические основы электротехники* : в 3 т. / К. С. Демирчян [и др.]. — Санкт-Петербург : Питер, 2003.

Т. 1. — 463 с. — Содерж. : Основные понятия и законы теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей. Теория линейных электрических цепей.

Т. 2 — 576 с. — Содерж. : Теория линейных электрических цепей. Теория нелинейных электрических и магнитных цепей.

Т. 3. — 377 с. — Содерж. : Теория электромагнитного поля.

4. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / под ред. Л. А. Бессонова. — Москва : Высшая школа, 2003. — 528 с.

Дополнительная

5. Теоретические основы электротехники : учебно-методический комплекс для студентов вузов: в 3 ч. Ч. 1 / сост. : А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, Т. Ф. Гузанова. — Минск : БГАТУ, 2008. — 353 с.

6. Теоретические основы электротехники : учебно-методический комплекс для студентов вузов: в 3 ч. Ч. 2 / сост. : А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, Т. Ф. Гузанова. — Минск : БГАТУ, 2010. — 353 с.

7. Теоретические основы электротехники : курс лекций : в 2 ч. Ч. 1 : Линейные электрические цепи / сост. : В. С. Корко [и др.]. — Минск : БГАТУ, 2002. — 170 с.

8. Теоретические основы электротехники : курс лекций : в 2 ч.

Ч. 2 : Линейные электрические цепи / сост. : В. С. Корко и др.]. — 2-е изд. — Минск : БГАТУ, 2004. — 120 с.

9. Теоретические основы электротехники: методические указания к практическим занятиям : в 3 ч. Ч. 1 / сост.: В. С. Корко [и др.]. — Минск : БГАТУ, 2003. — 137 с.

10. Теоретические основы электротехники : методические указания к практическим занятиям : в 3 ч. Ч. 2 / сост.: В. С. Корко [и др.]. — Минск : БГАТУ, 2005. — 99 с.

11. Теоретические основы электротехники : методические указания к практическим занятиям : в 3 ч. Ч. 3 / сост. : А. В. Крутов [и др.]. — Минск : БГАТУ, 2006. — 84 с.

12. Теоретические основы электротехники : методические указания к лабораторным занятиям : в 3 ч. Ч. 1 / сост. : А. В. Крутов [и др.]. — 2-е изд., перераб. — Минск : БГАТУ, 2007. — 97 с.

13. Теоретические основы электротехники: методические указания к лабораторным занятиям : в 3 ч. Ч. 2/БГАТУ, Кафедра электротехники; сост. В.С. Корко [и др.] — Минск: БГАТУ, 2001. — 66 с.

14. Теоретические основы электротехники : методические указания к лабораторным занятиям : в 3 ч. Ч. 3 / сост. : А. В. Крутов [и др.]. — 2-е изд. — Минск : БГАТУ, 2006. — 74 с.

15. Теоретические основы электротехники : методические указания к выполнению расчетно-графических заданий с применением ЭВМ : в 3 ч. Ч. 1 / А. В. Крутов [и др.]. — Минск : БГАТУ, 2008. — 44 с.

16. Теоретические основы электротехники: методические указания к выполнению расчетно-графических заданий : в 3 ч. Ч. 2 / сост. : В. С. Корко [и др.]. — Минск : БГАТУ, 2003. — 33 с.

17. Теоретические основы электротехники: методические указания к выполнению расчетно-графических заданий с применением ЭВМ: в 3 ч. Ч. 3 / сост. : В.С. Корко [и др.]. — Минск : БГАТУ, 2005. — 25 с.

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебно-методический комплекс

Составители:

**Крутов Анатолий Викторович,
Кочетова Эмма Леонидовна,
Гузанова Татьяна Федоровна**

Ответственный за выпуск *А. В. Крутов*
Компьютерная верстка *Д. О. Хмелевской*

Подписано в печать 20.07.2011 г. Формат 60×84¹/₁₆.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 18,83. Уч.-изд. л. 14,72. Тираж 400 экз. Заказ 693.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».

ЛИ № 02330/0552984 от 14.04.2010.

ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.

Пр. Независимости. 99–2. 220023, Минск.