

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАДЕНИЯ КАПЛИ ПЕСТИЦИДА ПРИ ХИМИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЕ ПОСЕВОВ

И.С. Крук, канд. техн. наук, доцент, Ю.С. Биза, канд. ф.-м. наук, доцент, А.В. Мучинский, канд. техн. наук, доцент, Ф.И. Назаров, магистрант (БГАТУ)

### Аннотация

*В статье исследованы закономерности движения капли рабочего раствора пестицида в сопротивляющейся среде с использованием элементов математического моделирования вдоль вертикальной и горизонтальной осей, на основании которых получены зависимости для определения скорости и координат ее положения в рассматриваемый момент времени.*

*The laws of motion of the drop of the working solution of the pesticide in a resisting medium using mathematical modeling elements along the vertical and horizontal axes on which the dependences to determine the velocity and position of its position at a given moment of time are given in the article.*

### Введение

Механизм полета и осаждения капель рабочего раствора пестицидов на обрабатываемой поверхности сложен и многообразен. Капля, оторвавшись от выброшенной из сопла распылителя струи жидкости, обладая запасом кинетической энергии, замедленно движется под действием движущей силы (силы тяжести) и силы сопротивления среды. Спустя некоторое время, когда эти силы взаимно уравновесятся, она достигает конечной скорости падения и движется по определенной траектории, параметры которой определяются начальными условиями истечения жидкости из сопла и состоянием окружающей среды [1].

Исследование закономерностей движения капель в воздушной среде позволяет определить скорость и координаты падения на обрабатываемую поверхность, обосновать конструкцию, размеры, оптимальные режимы работы и параметры установки распылителей, что особенно важно на стадии проектирования конструкций распылителей рабочего раствора пестицидов и полевых опрыскивателей.

### Основная часть

Для изучения закономерностей движения капель в воздушной среде примем следующие допущения: расчетная форма капли в виде шара, силы сопротивления ее полету пропорциональны квадрату скорости и она не меняет своей массы и формы на протяжении всей траектории движения.

Капля жидкости М массой  $m_k$ , выброшенная из сопла распылителя в окружающую среду со скоростью  $g_{k0}$  под углом  $\gamma_0$  к вертикали, совершает дальнейшее движение под действием сил тяжести  $G_k$  и лобового сопротивления воздуха  $F_c$ . Сила лобового сопротивления направлена по касательной к траектории полета в сторону, противоположную направлению движения, и является заданной функцией скорости капли  $g_k$

$$F_c = -\lambda \cdot g_k^2,$$

где  $\lambda$  – приведенный коэффициент сопротивления, кг/м.

Сила тяжести, действующая на каплю, определяется по формуле

$$G_k = m_k g,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

Для исследования закономерностей движения капли свяжем с ней неподвижную (декартовую) –  $xOz$ , начало которой поместим в точку вылета капли из сопла распылителя О (рис. 1).

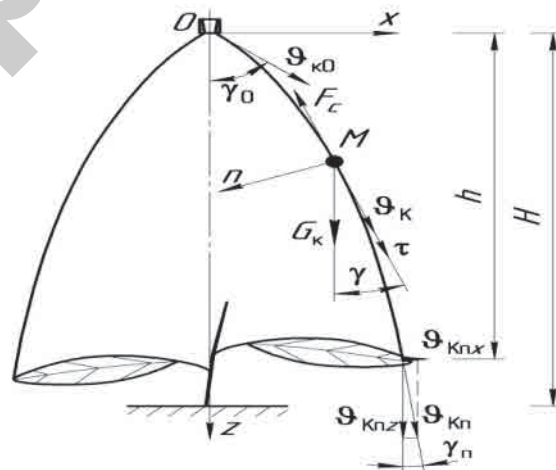


Рисунок 1. Расчетная схема падения капли жидкости в воздушной среде

Уравнения движения капли вдоль осей будут иметь вид:

$$Ox: m_k \cdot \frac{dg_{kx}}{dt} = -\lambda \cdot g_{kx}^2; \quad (1)$$

$$Oz: m_k \cdot \frac{dg_{kz}}{dt} = m_k \cdot g - \lambda \cdot g_{kz}^2, \quad (2)$$

где  $g_{kv}, g_{kz}$  – проекции скорости движения капли соответственно на ось  $Ox$  и  $Oz$ .

$$g_{kx} = g_k \cdot \sin \gamma;$$

$$g_{kz} = g_k \cdot \cos \gamma.$$

Разделив левую и правую части уравнений на массу капли  $m_k$ , получим:

$$\frac{dg_{kv}}{dt} = -\frac{\lambda}{m_k} \cdot g_{kv}^2 = -C_T \cdot g_{kv}^2; \quad (3)$$

$$\frac{dg_{kz}}{dt} = g - \frac{\lambda}{m_k} \cdot g_{kz}^2 = g - C_T \cdot g_{kz}^2, \quad (4)$$

где  $C_T$  – отношение приведенного коэффициента сопротивления движению капли к ее массе,  $1/m$  [2]:

$$C_T = \frac{\lambda}{m_k} = \frac{\xi \cdot S_k \cdot \rho_r}{2 \cdot m_k}, \quad (5)$$

где  $S_k$  – площадь миделева сечения капли,  $m^2$ ;  
 $\rho_r$  – плотность воздуха при нормальных условиях,  $кг/м^3$ ;

$\xi$  – коэффициент аэродинамического сопротивления движению капли в окружающей среде.

Найдем решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям вылета капли из сопла распылителя (при  $g_{kv} = g_{kv_0}$ ,  $t_0 = 0$ ). Для этого проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int \frac{dg_{kv}}{g_{kv}^2} = -C_T \int dt,$$

или

$$-\frac{1}{g_{kv}} = -C_T \cdot t + C_1 = -C_T \cdot t - \frac{1}{g_{kv_0}}, \quad (6)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования. При начальных условиях  $g_{kv} = g_{kv_0}$ ,  $t_0 = 0$   $C_1 = -\frac{1}{g_{kv_0}}$ .

Тогда

$$-\frac{1}{g_{kv}} = -C_T \cdot t - \frac{1}{g_{kv_0}},$$

откуда

$$g_{kv} = \frac{1}{C_T \cdot t + \frac{1}{g_{kv_0}}} = \frac{g_{kv_0}}{C_T \cdot g_{kv_0} \cdot t + 1}. \quad (7)$$

Для определения координаты капли на горизонтальную ось  $Ox$  уравнение (7) представим в следующем виде

$$g_{kv} = \frac{dx}{dt} = \frac{g_{kv_0}}{1 + C_T \cdot g_{kv_0} \cdot t}$$

или

$$dx = \frac{g_{kv_0}}{1 + C_T \cdot g_{kv_0} \cdot t} dt. \quad (8)$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (8), получим

$$\int dx = \int \frac{g_{kv_0}}{1 + C_T \cdot g_{kv_0} \cdot t} dt.$$

Или

$$x = \frac{g_{kv_0}}{C_T \cdot g_{kv_0}} \ln |1 + C_T \cdot g_{kv_0} \cdot t| + C_2 = \frac{1}{C_T} \ln |1 + C_T \cdot g_{kv_0} \cdot t|, \quad (9)$$

где  $C_2$  – постоянная интегрирования. При начальных условиях ( $t_0 = 0$ ,  $x = 0$ )  $C_2 = 0$ .

Представим зависимость (9) в следующем виде

$$e^{C_T \cdot x} = 1 + C_T \cdot g_{kv_0} \cdot t,$$

и определим время  $t$

$$t = \frac{e^{C_T \cdot x} - 1}{C_T \cdot g_{kv_0}}. \quad (10)$$

Запишем уравнение (4) в следующем виде

$$\frac{dg_{kz}}{dt} = C_T \left( \frac{g}{C_T} - g_{kz}^2 \right) = C_T (j^2 - g_{kz}^2), \quad (11)$$

где  $j^2 = \frac{g}{C_T}$ .

Проинтегрируем левую и правую части выражения (11) (для условия  $g_{kz}^2 < j^2$  [3]), получим

$$\int \frac{dg_{kz}}{j^2 - g_{kz}^2} = C_T \int dt.$$

или

$$\frac{1}{2j} \ln \frac{j + g_{kz}}{j - g_{kz}} = C_T t + C_3 = C_T t + \frac{1}{2j} \ln \frac{j + g_{kz_0}}{j - g_{kz_0}}, \quad (12)$$

где  $C_3$  – постоянная интегрирования. При начальных условиях ( $g_{kz} = g_{kz_0}$ ,  $t_0 = 0$ )  $C_3 = \frac{1}{2j} \ln \frac{j + g_{kz_0}}{j - g_{kz_0}}$ .

Обозначим  $v = \frac{j + g_{kz}}{j - g_{kz}}$ , тогда уравнение (12)

примет вид

$$\frac{1}{2j} \ln \frac{j + g_{kz}}{j - g_{kz}} = C_T t + \frac{1}{2j} \ln v. \quad (13)$$

Запишем зависимость (13) в следующем виде:

$$\frac{1}{2j} \ln \frac{j + \mathcal{G}_{\text{кз}}}{v(j - \mathcal{G}_{\text{кз}})} = C_1 t.$$

или

$$\ln \frac{j + \mathcal{G}_{\text{кз}}}{v(j - \mathcal{G}_{\text{кз}})} = 2j C_1 t. \quad (14)$$

Преобразуем зависимость (14), получим

$$\frac{j + \mathcal{G}_{\text{кз}}}{j - \mathcal{G}_{\text{кз}}} = v e^{2j C_1 t}.$$

или

$$j + \mathcal{G}_{\text{кз}} = v j e^{2j C_1 t} - v \mathcal{G}_{\text{кз}} e^{2j C_1 t}.$$

$$\mathcal{G}_{\text{кз}} (v e^{2j C_1 t} + 1) = j (v e^{2j C_1 t} - 1).$$

Откуда скорость капли вдоль оси Oz равна

$$\mathcal{G}_{\text{кз}} = \frac{j (v e^{2j C_1 t} - 1)}{v e^{2j C_1 t} + 1}. \quad (15)$$

Для определения координаты капли на оси Oz уравнение (15) представим в следующем виде

$$\mathcal{G}_{\text{кз}} = \frac{dz}{dt} = \frac{j (v e^{2j C_1 t} - 1)}{v e^{2j C_1 t} + 1}.$$

Проинтегрируем левую и правую части данной зависимости, получим

$$\begin{aligned} \int dz &= \int \frac{j (v e^{2j C_1 t} - 1)}{v e^{2j C_1 t} + 1} dt = \\ &= \int \frac{j v e^{2j C_1 t}}{1 + v e^{2j C_1 t}} dt - \int \frac{j}{1 + v e^{2j C_1 t}} dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя формулы интегрирования [3], получим

$$\begin{aligned} z &= \frac{jv}{2jC_1 v} \ln |1 + v e^{2jC_1 t}| - \\ &- j \left[ \frac{t}{1} - \frac{1}{2jC_1} \ln |1 + v e^{2jC_1 t}| \right] + C_4 = \\ &= \frac{1}{C_1} \ln |1 + v e^{2jC_1 t}| - jt + C_4, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $C_4$  – постоянная интегрирования.

При начальных условиях ( $z_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ ) постоянная интегрирования равна

$$C_4 = -\frac{1}{C_1} \ln |1 + v|. \quad (18)$$

Тогда выражение (17) примет вид

$$z = \frac{1}{C_1} \ln |1 + v e^{2jC_1 t}| - jt - \frac{1}{C_1} \ln |1 + v|, \quad (19)$$

или

$$z = \frac{1}{C_1} \ln \left| \frac{1 + v e^{2jC_1 t}}{1 + v} \right| - jt. \quad (20)$$

Учитывая зависимости (7) и (15) и зная, что

$$\mathcal{G}_{\text{к}} = \left( \mathcal{G}_{\text{кк}}^2 + \mathcal{G}_{\text{кз}}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

получим зависимость для определения скорости капли в момент соприкосновения с обрабатываемой поверхностью

$$\mathcal{G}_{\text{к}} = \left[ \left( \frac{\mathcal{G}_{\text{кк}_0}}{C_1 \cdot \mathcal{G}_{\text{кк}_0} \cdot t + 1} \right)^2 + \left( \frac{j (v e^{2jC_1 t} - 1)}{v e^{2jC_1 t} + 1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

При опрыскивании сельскохозяйственных культур штанговым опрыскивателем наименьшее расстояние между соплом распылителя и обрабатываемой поверхностью составляет 0,5 м. Вылет капель жидкости из распылителя характеризуется начальной скоростью  $\mathcal{G}_{\text{к}_0} = 2 \dots 10$  м/с, направленной под углом  $\gamma_0 = 20 \dots 25^\circ$  к вертикали. В момент соприкосновения капли с обрабатываемой поверхностью угол между вектором скорости и вертикалью уменьшается не более чем на  $5 \dots 7^\circ$  [3].

Зная начальные условия вылета капли из сопла распылителя и состояние окружающей среды, используя зависимости (7), (9), (15), (20) и (21) с учетом ранее принятых обозначений, можно определить координаты ее положения и величину скорости движения.

### Заключение

В результате проведенных исследований закономерностей движения капли пестицида в факеле распыла, предложены математические зависимости, позволяющие при заданных начальных условиях определить величину скорости и координаты положения капли в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Методика инженерного расчета кинематических параметров движения капель рабочего раствора пестицидов в воздушной среде / О.В. Гордеенко [и др.] // Агропанорама. – 2011. – № 6. – С. 6-10.
2. Левич, Б.Г. Физико-химическая гидродинамика – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Физматгиз, 1959. – 699 с.
3. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Гос. изд-во техн.-теоретич. литературы, 1955. – 610 с.
4. Гордеенко, О.В. Повышение эффективности ухода за посевами овощных культур на гребнях совершенствованием оборудования для ленточного внесения гербицидов: дис. ...канд. техн. наук / О.В. Гордеенко. – Горки, 2004. – 218 л.