МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.Н. Леонов, М.М. Дечко, В.Б. Ловкис

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области сельского хозяйства в качестве учебно-методического пособия для студентов высших учебных заведений группы специальностей 74 06 Агроинженерия

Под редакцией доктора технических наук, профессора А.Н. Леонова

Минск
БГАТУ
2013

УДК 001.89:519.2+519.22](07)
ББК 72.4я7
Л47

Рецензенты:
заведующий кафедрой «Машины и технология обработки металлов давлением» БНТУ,
доктор технических наук, профессор *К.Е. Белявин*;
главный научный сотрудник лаборатории механизации приготовления концентрированных кормов «НПЦ НАН Беларуси по механизации сельского хозяйства»,
доктор технических наук, профессор *В.И. Передня*

Леонов, А.Н.

Л47 Основы научных исследований в примерах и задачах: учебно-методическое пособие / А.Н. Леонов, М.М. Дечко, В.Б. Ловкис; под ред. А.Н. Леонова. – Минск : БГАТУ, 2013. – 136 с.

ISBN 978-985-519-558-1.

Состоит из 3-х модулей (предварительная обработка экспериментальных данных методами математической статистики; однофакторный эксперимент; многофакторный эксперимент) и содержит в каждом модуле краткий перечень математических формул, необходимых для решения примеров и задач, подробное решение типовой задачи, а также контрольные вопросы и задачи, отражающие основное содержание учебной дисциплины «Основы научных исследований».

Предназначено для студентов, магистрантов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников высших учебных заведений инженерного профиля.

УДК 001.89:519.2+519.22](07)
ББК 72.4я7

ISBN 978-985-519-558-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Любая вузовская дисциплина состоит из двух частей: теоретической и практической. Очевидно, что они взаимосвязаны. Опыт преподавания показывает, что одной теории, даже хорошо усвоенной, бывает недостаточно для решения практических задач. Необходимо приобретение практических навыков. Например, теория езды на двухколесном велосипеде достаточно «проста»: суммарный вектор сил, действующих на велосипедиста, должен проходить через площадь опоры. Однако вряд ли найдется человек, который, усвоив эту «нехитрую» теорию, обучаясь езде на велосипеде, ни разу не упадет.

Кроме того, отсутствие практических навыков приводит студентов – будущих инженеров – в некоторое недоумение, выражаемое в немом вопросе: для чего все это надо? Найти ответ на этот вопрос помогают приобретенные практические навыки, которые, с одной стороны, способствуют глубокому усвоению теории, а с другой – эффективному решению практических задач.

Цель учебно-методического пособия – оказание методической помощи в изучении теории и практики стохастического моделирования путем решения примеров и задач **методами математической статистики**.

Многие авторы, работающие в области математической статистики, отмечают наличие двух типов научной литературы: 1) научные монографии по теоретической математической статистике, ориентированные на математиков-теоретиков; 2) теоретико-прикладные издания, ориентированные на научных работников, имеющих дело с обработкой статистических данных. К сожалению, и тот, и другой тип научной литературы достаточно сложен для инженеров-практиков, не владеющих математикой в объеме механико-математических факультетов университетов.

Издание настоящего учебно-методического пособия является попыткой восполнить пробел в научно-технической литературе такого типа, являясь своеобразным **«букварем»** по прикладной математической статистике, и поэтому при его написании авторы придерживались следующих упрощающих принципов:

а) для практического использования пособия необходимо минимальное знание математики в объеме средней школы;

б) практически все формулы приводятся без доказательств в надежде на то, что справедливо утверждение: «понять – это привыкнуть и научиться пользоваться»;

в) уравнения регрессии, с помощью которых осуществлялось стохастическое моделирование технических систем, представлены в виде степенного ряда, состоящего **только** из ортогональных факторов, благодаря чему весь математический аппарат, используемый в пособии, сведен к алгебраическим уравнениям без применения матричной алгебры;

г) при планировании эксперимента использовались только четыре плана: однофакторный равномерный симметричный, многофакторный центральный полный факторный, многофакторный центральный дробный факторный и многофакторный ортогональный центральный композиционный. Предложенные планы универсальны и просты, но, тем не менее, они позволяют продемонстрировать всю мощь и красоту регрессионного анализа;

д) для численного решения примеров и задач, предложенных в пособии, достаточно калькулятора, хотя авторы рекомендуют использовать относительно простые и широко распространенные компьютерные программы MS Excel и Mathcad;

е) изложение материала ведется от простого к сложному: **предварительная обработка** экспериментальных данных, **моделирование** изучаемых **однофакторных**, затем **многофакторных** технических систем, и в заключение – их **оптимизация**. Для логической преемственности используется единый алгоритм изложения с иллюстрацией большим количеством подробно решенных примеров и типовых задач.

Интерес к стохастическому моделированию технических систем при неполном знании механизма явлений во всем мире объясняется тем, что при относительно небольшом объеме эмпирической информации по известным **алгоритмам** можно построить математическую модель. Стохастическое моделирование позволяет не только прогнозировать поведение «плохо организованных систем», но и найти режим их оптимального функционирования. Однако математическое моделирование, «сжимающее» эмпирическую информацию, является не самоцелью, а всего лишь промежуточным этапом исследований, необходимым для **принятия обоснованных решений**. Именно такой подход является логическим завершением изучения технических систем, и именно такой подход позволяет эффективно модернизировать производство.

Предлагаемое пособие охватывает относительно небольшой класс прикладных задач. Однако приобретенные теоретические знания и практические навыки могут оказать помощь в дальнейшем изучении теории, необходимой для решения более сложных задач, а также эффективном использовании пакета прикладных компьютерных программ.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, магистрантов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников высших учебных заведений инженерного профиля.

ТЕРМИНЫ И УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Детерминированные закономерности – закономерности, при которых заданной совокупности факторов со 100%-ой вероятностью всегда соответствует только одно значение параметра технической системы.

Стохастические закономерности – закономерности, при которых заданной совокупности факторов соответствуют различные значения параметра технической системы, причем каждое значение может реализоваться с различной вероятностью.

Вероятность – мера достоверности случайного состояния технической системы.

Математическая статистика – наука о математических методах анализа поведения технических систем, подчиняющихся стохастическим закономерностям.

Генеральная совокупность – число состояний технической системы, выражаемое в полном множестве значений параметра при всех возможных комбинациях факторов.

Выборка – совокупность относительно небольшого количества состояний технической системы, входящих в генеральную совокупность.

Фактор – детерминированная величина, влияющая на состояние технической системы.

Параметр – наблюдаемая величина, количественно отражающая состояние технической системы.

Математическая модель – математическое уравнение, адекватно описывающее зависимость одного или нескольких параметров от одного или нескольких факторов. Математическая модель может быть: 1) детерминированной, получаемой на базе фундаментальных законов природы; 2) стохастической, получаемой на базе массива эмпирических данных, обрабатываемых методами математической статистики.

Уравнение регрессии – стохастическая математическая модель, представляющая собой степенной ряд m-го порядка. В данном пособии используются степенные ряды, состоящие только из ортогональных факторов 1-го или 2-го порядка: а) **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + b_1 X_1$; б) **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_{11}(X_1^2 - \lambda_1)$; в) **многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка (k факторов) $Y = b_0 + \sum_{r=1}^{k} b_r X_r$; г) **многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка (k факторов) $Y = b_0 + \sum_{r=1}^{k} b_r X_r + \sum_{\substack{r=1 \\ r<s}}^{k} b_{rs} X_r X_s + \sum_{r=1}^{k} b_{rr}(X_r^2 - \lambda_k)$.

Равномерный симметричный план (РСП) – план **однофакторного** эксперимента, в котором фактор варьируется на равноотстоящих друг от друга уровнях. Количество РСП $N \geq 5$.

Полный факторный план (ПФП) – план **многофакторного** эксперимента (k факторов), в котором каждый фактор варьируется только на 2-х уровнях. Число опытов ПФП $N_{k0} = 2^k$.

Центральный полный факторный план (ЦПФП) – план **многофакторного** эксперимента (k факторов), состоящий из опытов ПФП и одного опыта в центре плана. Число опытов ЦПФП $N_k = N_{k0} + 1 = 2^k + 1$.

Дробный факторный план (ДФП) – план **многофакторного** эксперимента (k факторов), состоящий из $1/2^g$ части опытов ПФП ($g = 1, 2, 3, \ldots$ – число генерирующих соотношений). Число опытов ДФП $N_{kg} = 2^{k-g}$.

Центральный дробный факторный план (ЦДФП) – план **многофакторного** эксперимента (k факторов), состоящий из опытов ДФП и одного опыта в центре плана. Число опытов ЦДФП $N_k = N_{kg} + 1 = 2^{k-g} + 1$.

Ортогональный центральный композиционный план (ОЦКП) – план **многофакторного** эксперимента (k факторов), состоящий из опытов ЦПФП (ЦДФП) и $2k$ – опытов в звездных точках. Число опытов ОЦКП $N_k = 2^k + 1 + 2k$ $(N_k = 2^{k-g} + 1 + 2k)$.

Матрица планирования (МП) – таблица, состоящая из N_k опытов и n дублей в каждом опыте и содержащая столбцы нормированных и натуральных значений k факторов, задающих условия проведения опытов. **МП**, созданная под конкретное уравнение регрессии, предназначена для проведения предварительной обработки экспериментальных данных (расчет выборочных средних и выборочных дисперсий в каждом опыте, проверка всех выборочных дисперсий на однородность, расчет дисперсии воспроизводимости и ее числа степеней свободы).

Матрица моделирования (ММ) – таблица, состоящая из **МП** и вспомогательных столбцов, на базе которых производится окончательная обработка экспериментальных данных (расчет коэффициентов уравнения регрессии, проверка их на значимость, проверка уравнения регрессии на адекватность, расчет абсолютной погрешности прогнозирования параметра оптимизации).

Оптимизация – математическая операция, связанная с нахождением оптимальных значений факторов, при которых параметр оптимизации достигает экстремума.

САО – среднее абсолютное отклонение.

МНК – метод наименьших квадратов.

Детерминированный эксперимент

Y – рассчитываемый параметр.

ΔY – абсолютная погрешность параметра Y.

$\Delta Y/Y$ – относительная погрешность параметра Y.

x, z – детерминированные факторы в натуральном исчислении.

$\Delta x, \Delta z$ – абсолютные погрешности определения факторов x, z.

Одна выборка

μ – генеральное среднее.

σ^2 – генеральная дисперсия.

σ – генеральное стандартное отклонение.

$Y_1, ..., Y_i, ..., Y_n$ – выборка случайных значений.

n – объем выборки.

i – текущий номер случайной величины Y_i в выборке, $i = 1, ..., n$.

$\overline{Y}$ – выборочное среднее.

S^2 – выборочная дисперсия.

S – выборочное стандартное отклонение.

f_S – число степеней свободы выборочной дисперсии S^2 (выборочного стандартного отклонения S).

$Y_{\min}$, $(Y_{\max})$ – минимальное (максимальное) значение параметра Y.

$\Delta\overline{Y}$ – доверительный интервал генерального среднего μ.

Две выборки

j – текущий номер выборки, $j = 1, 2$.

n_j – число дублей в каждой выборке.

i – текущий номер случайной величины в выборке, $i = 1, ..., n_j$.

Y_{ji} – значение параметра Y в j-ой выборке и i-ом дубле.

$\overline{Y}_j$ – выборочное среднее в j-ой выборке.

S_j^2 – выборочная дисперсия в j-ой выборке.

S_j – выборочное стандартное отклонение в j-ой выборке.

f_{S_j} - число степеней свободы выборочной дисперсии S_j^2 (выборочного стандартного отклонения S_j).

Однофакторный эксперимент

N – число опытов в эксперименте.

j – текущий номер опыта, $j = 1, ..., N$.

n – число дублей в каждом опыте.

i – текущий номер случайной величины в каждом опыте, $i = 1, ..., n$.

x_1 – натуральное значение фактора.

x_{1j} – натуральное значение фактора x_1 в j-ом опыте.

$x_{1\min}$, $(x_{1\max})$ – минимальное (максимальное) значение фактора x_1.

$x_{1\text{опт}}$ – оптимальное значение фактора x_1.

x_{10} – основной уровень фактора x_1.

Δx_1 – интервал варьирования фактора x_1.

Y – параметр оптимизации.

Y_{ji} – значение параметра Y в j-ом опыте и i-ом дубле.

$\overline{Y_j}$ – выборочное среднее в j-ом опыте.

$Y_{\min}$, $(Y_{\max})$ – минимальное (максимальное) значение параметра оптимизации.

S_j^2 – выборочная дисперсия в j-ом опыте.

f_{S_j} – число степеней свободы каждой выборочной дисперсии S_j^2 (выборочного стандартного отклонения S_j).

$\max S_j^2$ – максимальная выборочная дисперсия среди N дисперсий.

X_0 – нормированное значение фиктивного фактора.

X_{0j} – нормированное значение фактора X_0 в j-ом опыте, все $X_{0j} = +1$.

X_1 – нормированное значение фактора.

X_{1j} – нормированное значение фактора X_1 в j-ом опыте.

$X_{1\text{опт}}$ – оптимальное значение фактора X_1.

λ_1 – ортогонализирующий коэффициент квадратичного члена X_1^2 в **однофакторном ортогонализированном** уравнении регрессии **второго** порядка.

b_0, b_1, b_{11} – коэффициенты **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** и **второго** порядка: $Y = b_0 + b_1 X_1$, $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_{11}(X_1^2 - \lambda_1)$.

$S^2_{\text{воспр}}$ – дисперсия воспроизводимости.

$f_{\text{воспр}}$ – число степеней свободы дисперсии воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$.

$S^2(b_0), S^2(b_1), S^2(b_{11})$ – дисперсии значимости коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** и **второго** порядка.

$\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_{11}$ – доверительные интервалы коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** и **второго** порядка.

B – число значимых коэффициентов уравнения регрессии.

φ – остаточная сумма квадратов.

Y_j^p – значение параметра Y в j-ом опыте, рассчитанное по соответствующему уравнению регрессии.

$S^2_{\text{ад}}$ – дисперсия адекватности.

$f_{\text{ад}}$ – число степеней свободы дисперсии адекватности $S^2_{\text{ад}}$.

Многофакторный эксперимент

k – число факторов.

N_k – число опытов в эксперименте.

j – текущий номер опыта, $j = 1, ..., N_k$.

n – число дублей в каждом опыте.

i – текущий номер случайной величины в опыте, $i = 1, ..., n$.

x_r – натуральное значение фактора.

r – текущий номер фактора x_r, $r = 1, ..., k$.

x_{rj} – натуральное значение фактора x_r в j-ом опыте.

$x_{r\,\max}$ ($x_{r\,\min}$) – максимальное (минимальное) натуральное значение фактора x_r.

x_{r0} – основной уровень фактора x_r.

Δx_r – интервал варьирования фактора x_r.

Y – параметр оптимизации.

Y_{ji} – значение параметра Y в j-ом опыте и i-ом дубле.

$\overline{Y_j}$ – выборочное среднее в j-ом опыте.

$Y_{\min}$, ($Y_{\max}$) – минимальное (максимальное) значение параметра оптимизации.

S_j^2 – выборочная дисперсия в j-ом опыте.

f_{S_j} – число степеней свободы каждой выборочной дисперсии S_j^2 (выборочного стандартного отклонения S_j).

$\max S_j^2$ – максимальная выборочная дисперсия среди N_k дисперсий.

X_0 – нормированное значение фиктивного фактора.

X_{0j} – нормированное значение фактора X_0 в j-ом опыте, все $X_{0j} = +1$.

X_r – нормированное значение x_r фактора.

X_{rj} – нормированное значение фактора X_r в j-ом опыте.

g – число генерирующих соотношений в ДФП.

α_k – звездное плечо.

λ_k – ортогонализирующий коэффициент квадратичного члена X_r^2 в **многофакторном ортогонализированном** уравнении регрессии **второго** порядка.

b_0, b_r, b_{rs}, b_{rr} – коэффициенты **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** и **второго** порядка (k факторов): $Y = b_0 + \sum\limits_{r=1}^{k} b_r X_r$, или

$$Y = b_0 + \sum_{r=1}^{k} b_r X_r + \sum_{\substack{r=1 \\ r<s}}^{k} b_{rs} X_r X_s + \sum_{r=1}^{k} b_{rr} (X_r^2 - \lambda_k).$$

$S^2(b_0)$, $S^2(b_r)$, $S^2(b_{rs})$, $S^2(b_{rr})$ – дисперсии значимости коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** и **второго** порядка.

$\Delta b_0, \Delta b_r, \Delta b_{rs}, \Delta b_{rr}$ – доверительные интервалы коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** и **второго** порядка.

B – число значимых коэффициентов уравнения регрессии.

$S^2_{\text{воспр}}$ – дисперсия воспроизводимости.

$f_{\text{воспр}}$ – число степеней свободы дисперсии воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$.

φ – остаточная сумма квадратов.

Y_j^p – значение параметра Y в j-ом опыте, рассчитанное по уравнению регрессии.

$S^2_{\text{ад}}$ – дисперсия адекватности.

$f_{\text{ад}}$ – число степеней свободы дисперсии адекватности $S^2_{\text{ад}}$.

Критерии проверки статистических гипотез

$\tau_э$ – экспериментальное значение критерия Смирнова – Граббса.

$\tau_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Смирнова – Граббса с числом степеней свободы f при доверительной вероятности p.

$t_э$ – экспериментальное значение критерия Стьюдента.

$t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента с числом степеней свободы f при доверительной вероятности p.

$\chi^2_{f;\,(1-p)/2}$ – нижнее табличное значение критерия Пирсона с числом степеней свободы f при доверительной вероятности p.

$\chi^2_{f;\,(1+p)/2}$ – верхнее табличное значение критерия Пирсона с числом степеней свободы f при доверительной вероятности p.

$F_э$ – экспериментальное значение критерия Фишера.

$F_{f_{\text{числ}};\,f_{\text{знам}};\,p}$ – табличное значение критерия Фишера, в котором на первом месте стоит число степеней свободы **большей** дисперсии $f_{\text{числ}}$, а на втором – число степеней свободы **меньшей** дисперсии $f_{\text{знам}}$ при доверительной вероятности p.

$G_э$ – экспериментальное значение критерия Кохрена.

$G_{f_{\text{числ}};\,f_{\text{знам}};\,p}$ – табличное значение критерия Кохрена, в котором на первом месте стоит число степеней свободы максимальной дисперсии $f_{\text{числ}} = n-1$, а на втором – число степеней свободы, равное числу всех дисперсий $f_{\text{знам}} = N$ при доверительной вероятности p.

МОДУЛЬ 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1.1. ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Перечень рассматриваемых вопросов:

- детерминированные закономерности;
- расчет абсолютной и относительной погрешности при обработке результатов расчета научных и инженерных экспериментов;
- алгоритм корректного оформления результатов расчета научных и инженерных экспериментов.

Теория с примерами (кратко)

1. Необходимые формулы из **школьной программы**.

1.1. Правила действия со степенями $(x > 0,\quad -\infty < \alpha < +\infty, -\infty < \beta < +\infty)$:

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}; \tag{1}$$

$$x^{0} = 1; \tag{2}$$

$$x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}; \tag{3}$$

$$\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = x^{\alpha-\beta}; \tag{4}$$

$$(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}; \tag{5}$$

$$\sqrt[\beta]{x^{\alpha}} = x^{\alpha/\beta}, \ (\beta \neq 0). \tag{6}$$

1.2. Производные некоторых элементарных функций:

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \ x > 0, \quad (-\infty < \alpha < +\infty); \tag{7}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \tag{8}$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \tag{9}$$

$$\left(\mathrm{e}^{x}\right)' = \mathrm{e}^{x}; \tag{10}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ x > 0. \tag{11}$$

1.3. Производная сложной функции

$$Y = f\left\{\psi\left[\varphi(x)\right]\right\} \tag{12}$$

равна

$$\frac{dY}{dx}=\frac{df\{\psi[\varphi(x)]\}}{d\psi}\cdot\frac{d\psi[\varphi(x)]}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

или

$$Y'_x=f'_\psi\cdot\psi'_\varphi\cdot\varphi'_x. \tag{13}$$

2. Заданы функции $f(x)$ и $g(z)$, факторы которых определены с абсолютной погрешностью $x\pm\Delta x$ и $z\pm\Delta z$. Функция Y имеет вид

$$Y{=}Y(x,z)=f(x)\cdot g(z),\quad f(x)\neq 0,\ g(z)\neq 0 \tag{14}$$

или

$$Y{=}Y(x,z)=\frac{f(x)}{g(z)},\quad f(x)\neq 0,\ g(z)\neq 0. \tag{15}$$

В обоих случаях относительную погрешность параметра Y рассчитывают по уравнению

$$\frac{\Delta Y}{Y}=\left|\frac{f'_x(x)}{f(x)}\right|\Delta x+\left|\frac{g'_z(z)}{g(z)}\right|\Delta z. \tag{16}$$

Абсолютную погрешность рассчитывают по уравнению

$$\Delta Y=\left(\left|\frac{f'_x(x)}{f(x)}\right|\Delta x+\left|\frac{g'_z(z)}{g(z)}\right|\Delta z\right)\cdot Y. \tag{17}$$

Пример 1.1.1. Дано

$$Y=x^\alpha z^\beta \text{ или } Y=\frac{x^\alpha}{z^\beta},\ (x>0,\quad z>0,\quad -\infty<\alpha<+\infty,\quad -\infty<\beta<+\infty). \tag{18}$$

Доказать, что

$$\frac{\Delta Y}{Y}=|\alpha|\cdot\frac{\Delta x}{|x|}+|\beta|\cdot\frac{\Delta z}{|z|}. \tag{19}$$

Доказательство. Так как по уравнению (7)

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\quad\text{и}\quad (z^\beta)'=\beta z^{\beta-1},$$

то относительную погрешность $\Delta Y/Y$ рассчитаем по уравнениям (3), (14) – (16)

$$\frac{\Delta Y}{Y}=\left|\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha}\right|\cdot\Delta x+\left|\frac{\beta z^{\beta-1}}{z^\beta}\right|\cdot\Delta z=\left|\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}\cdot x}\right|\cdot\Delta x+\left|\frac{\beta z^{\beta-1}}{z^{\beta-1}\cdot z}\right|\cdot\Delta z=|\alpha|\cdot\frac{\Delta x}{|x|}+|\beta|\cdot\frac{\Delta z}{|z|}.$$

Пример 1.1.2. Дано $Y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{z}}$ $(x\neq 0,\quad z\neq 0)$.

Доказать, что $\dfrac{\Delta Y}{Y}=2\cdot\dfrac{\Delta x}{|x|}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\Delta z}{|z|}$.

Доказательство. Так как по уравнению (6) $\sqrt[3]{z}=z^{1/3}$, то относительную погрешность $\Delta Y/Y$ рассчитаем по уравнениям (18) – (19)

$$\frac{\Delta Y}{Y}=2\cdot\frac{\Delta x}{|x|}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\Delta z}{|z|}.$$

Пример 1.1.3. Дано $Y=\sin x\cdot\ln z$, $x\neq\pi n$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$, $z>0$, $z\neq 1$.

Доказать, что $\dfrac{\Delta Y}{Y}=|\mathrm{ctg}x|\Delta x+\dfrac{\Delta z}{z\cdot|\ln z|}$.

Доказательство. Так как по уравнениям (8), (11) $(\sin x)' = \cos x$ и $(\ln z)' = 1/z$, то относительную погрешность $\Delta Y / Y$, рассчитаем по уравнениям (14), (16)

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \left|\frac{\cos x}{\sin x}\right|\Delta x + \left|\frac{1/z}{\ln z}\right|\Delta z = \left|\mathrm{ctg} x\right|\Delta x + \frac{\Delta z}{\left|z \cdot \ln z\right|}.$$

Пример 1.1.4. Дано $Y = \dfrac{\cos x}{e^z}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Доказать, что $\dfrac{\Delta Y}{Y} = \left|\mathrm{tg} x\right|\Delta x + \Delta z$.

Доказательство. Так как по уравнениям (9), (10) $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^z)' = e^z$, то относительную погрешность $\Delta Y / Y$ рассчитаем по уравнениям (15), (16)

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \left|\frac{-\sin x}{\cos x}\right|\Delta x + \left|\frac{e^z}{e^z}\right|\Delta z = \left|tgx\right|\Delta x + \Delta z.$$

Пример 1.1.5.

Дано $Y = \ln\left[\sin\left(x^5\right)\right]$, $2\pi n < x^5 < \pi(2n+1)$, $x^5 \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Доказать, что $\dfrac{\Delta Y}{Y} = 5x^4 \cdot \left|\dfrac{\mathrm{ctg}\left(x^5\right)}{\ln\left[\sin\left(x^5\right)\right]}\right| \cdot \Delta x$.

Доказательство. Так как по уравнениям (7), (8), (11) – (13)

$$\left\{\ln\left[\sin\left(x^5\right)\right]\right\}' = \frac{1}{\sin\left(x^5\right)} \cdot \cos\left(x^5\right) \cdot 5x^4 = \mathrm{ctg}\left(x^5\right) \cdot 5x^4,$$

то относительную погрешность $\Delta Y / Y$ рассчитаем по уравнениям (14), (16)

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \left|\frac{\left\{\ln\left[\sin\left(x^5\right)\right]\right\}'}{\ln\left[\sin\left(x^5\right)\right]}\right| \cdot \Delta x = \left|\frac{\mathrm{ctg}\left(x^5\right) \cdot 5x^4}{\ln\left[\sin\left(x^5\right)\right]}\right| \cdot \Delta x = 5x^4 \cdot \left|\frac{\mathrm{ctg}\left(x^5\right) \cdot}{\ln\left[\sin\left(x^5\right)\right]}\right| \cdot \Delta x.$$

Пример 1.1.6. Дано $Y = e^{\sin\left(\sqrt{x}\right)}$, $x > 0$.

Доказать, что $\dfrac{\Delta Y}{Y} = \dfrac{\left|\cos\sqrt{x}\right|}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x$.

Доказательство. Так как по уравнениям (6) – (8), (10), (12) – (13) $(e^{\sin\sqrt{x}})' = e^{\sin\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$, то относительную погрешность $\Delta Y / Y$ рассчитаем по уравнениям (14), (16)

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \left|\frac{\left(e^{\sin\sqrt{x}}\right)'}{e^{\sin\sqrt{x}}}\right| \cdot \Delta x = \left|\frac{e^{\sin\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}}{e^{\sin\sqrt{x}}}\right| \cdot \Delta x = \frac{\left|\cos\sqrt{x}\right|}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \Delta x.$$

3. **Алгоритм** корректного оформления результатов расчета научных и инженерных экспериментов.

3.1. **Алгоритм** округления чисел:

- **если известна** цифра, до которой следует произвести округление заданного числа, то при отбрасывании после нее 0, 1, 2, 3, 4 округляемая цифра остается без изменений, а при отбрасывании после нее 5, 6, 7, 8, 9 округляемая цифра увеличивается на единицу.

3.2. **Алгоритм** округления **абсолютной** погрешности ΔY :

- абсолютную погрешность, заданную в десятичном формате, представить в экспоненциальном формате: $\alpha \cdot 10^p$, где $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $1 \le \alpha < 10$;

- число α округлить до ближайшей реперной точки: 1,0; 1,1; 1,2; …, 5,5; 5,6; 5,7; 5,8; 5,9; 6; 7; 8; 9; 10 (всего 55 реперных точек);

- после округления абсолютной погрешности возвратить ее в десятичный формат.

3.3. **Алгоритм** корректного оформления результатов расчета параметра Y :

- округлить рассчитанный параметр Y до значащих цифр реперной точки абсолютной погрешности ΔY ;

- результаты расчета представить в виде $Y \pm \Delta Y$.

3.4. **Алгоритм** округления относительной погрешности $\Delta Y / Y$ такой же, как и алгоритм округления абсолютной погрешности ΔY .

Пример 1.1.7. Образцы корректного оформления результатов расчета научных и инженерных экспериментов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Образцы корректного оформления результатов расчета научных и инженерных экспериментов

Исходные данные $Y \pm \Delta Y$	Преобразование абсолютной погрешности ΔY	Округленная абсолютная погрешность ΔY	Конечный результат $Y \pm \Delta Y$
19,53126 ± 0,01238	$0{,}01238 \to 1{,}238 \cdot 10^{-2} \to 1{,}2 \cdot 10^{-2} \neq$	$0{,}0\underline{12}$	$\mathbf{19{,}5\underline{31} \pm 0{,}0\underline{12}}$
54,076432 ± 0,54856	$0{,}54858 \to 5{,}4858 \cdot 10^{-1} \to 5{,}5 \cdot 10^{-1}$	$0{,}\underline{55}$	$\mathbf{54{,}\underline{08} \pm 0{,}\underline{55}}$
12,435607 ± 0,0594999	$0{,}0594999 \to 5{,}94999 \cdot 10^{-2} \to 5{,}9 \cdot 10^{-2}$	$0{,}0\underline{59}$	$\mathbf{12{,}4\underline{36} \pm 0{,}0\underline{59}}$
12,435607 ± 0,0595000	$0{,}0595001 \to 5{,}95001 \cdot 10^{-2} \to 6 \cdot 10^{-2}$	$0{,}0\underline{6}$	$\mathbf{12{,}4\underline{4} \pm 0{,}0\underline{6}}$
654,325 ± 1,952	$1{,}952 \to 1{,}952 \cdot 10^{0} \to 2{,}0 \cdot 10^{0}$	$\underline{2{,}0}$	$\mathbf{65\underline{4{,}3} \pm \underline{2{,}0}}$
0,19874 ± 0,007832	$0{,}007832 \to 7{,}832 \cdot 10^{-3} \to 8 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00\underline{8}$	$\mathbf{0{,}19\underline{9} \pm 0{,}00\underline{8}}$
219,53129 ± 0,9687	$0{,}9687 \to 9{,}687 \cdot 10^{-1} \to 10 \cdot 10^{-1}$	$\underline{1{,}0}$	$\mathbf{21\underline{9{,}5} \pm \underline{1{,}0}}$
987 345,3 ± 98342,7	$98342{,}7 \to 9{,}83427 \cdot 10^{4} \to 10 \cdot 10^{4}$	$\underline{10}0\ 000$	$\mathbf{\underline{99}0\ 000 \pm \underline{10}0\ 000}$
997 345,3 ± 98342,7	$98342{,}7 \to 9{,}83427 \cdot 10^{4} \to 10 \cdot 10^{4}$	$\underline{10}0\ 000$	$\mathbf{1\ \underline{00}0\ 000 \pm \underline{10}0\ 000}$
0,0099985 ± 0,00009578	$0{,}00009578 \to 9{,}578 \cdot 10^{-5} \to 10 \cdot 10^{-5}$	$0{,}000\underline{10}$	$\mathbf{0{,}01\underline{00}0 \pm 0{,}000\underline{10}}$

Типовая задача

Цель. Освоение метода расчета относительной и абсолютной погрешности детерминированного параметра и корректного оформления результатов расчета научных и инженерных экспериментов.

Формулировка задачи. Рассчитать диаметр шарика D из золота, а также его абсолютную и относительную погрешность, если масса шарика $M = (5{,}820 \pm 0{,}020)$ г, а плотность золота $\rho = (19300 \pm 20)$ кг/м^3. Для расчетов принять $\pi \equiv 3{,}14159$.

План решения задачи

1. Внимательно прочитать условия задачи.
2. Перевести экспериментальные данные в единицы системы СИ (кг, м, с, А, В, Гц, Гн, Ф, Ом).
3. Используя законы физики, написать формулу для определения диаметра шарика D и рассчитать его.
4. Написать уравнение для определения относительной погрешности $\Delta D/D$ и рассчитать ее.
5. Рассчитать абсолютную погрешность ΔD диаметра D и корректно оформить результат расчета. Как Вы думаете, что нужно сделать, чтобы погрешность определения диаметра шарика была в 2 раза меньше?

NB! Все промежуточные расчеты производить с точностью не менее 4-х значащих цифр.

Решение задачи по плану

1. Пункт 1 выполните самостоятельно.
2. Переведем экспериментальные данные задачи в единицы системы СИ:

$$M = (5,820 \pm 0,020)\ \text{г} = (0,005820 \pm 0,000020)\ \text{кг};$$

$$\rho = (19\,300 \pm 20)\ \text{кг/м}^3.$$

3. Используя законы физики, напишем формулу для расчета диаметра шарика D и рассчитаем его.

Так как объем шарика $V = \dfrac{\pi D^3}{6}$, то его плотность равна

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{6M}{\pi D^3}.$$

Из полученного уравнения следует, что диаметр шарика D равен

$$D = \sqrt[3]{\frac{6M}{\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0,005820}{3,14159 \cdot 19300}} = 0,00831998\ \text{м}.$$

4. Напишем уравнение для определения относительной погрешности $\Delta D/D$ и рассчитаем ее.

Так как по уравнению (6) диаметр шарика можно записать как $D = \sqrt[3]{\dfrac{6M}{\pi\rho}} = \sqrt[3]{\dfrac{6}{\pi}} \cdot \dfrac{M^{1/3}}{\rho^{1/3}}$, то относительную погрешность $\Delta D / D$ рассчитаем по уравнениям (18) – (19)

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta M}{M} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,000020}{0,005820} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{19\,300} = 0,0011455 + 0,0003454 = 0,0014909.$$

5. Рассчитаем абсолютную погрешность ΔD по уравнению (17) и корректно оформим результаты расчета (см. раздел 1.1, п. 3)

$$\Delta D = \left(\frac{\Delta D}{D}\right) \cdot D = 0,0014909 \cdot 0,0083200 = 0,000012404 \approx 0,000012\ \text{м};$$

$$D = (0,0083200 \pm 0,000012)\ \text{м} \approx (0,008320 \pm 0,000012)\ \text{м} = (8,320 \pm 0,012)\ \text{мм}$$

$$\frac{\Delta D}{D} = 0,00149090 \approx 0,0015 \to 0,15\,\%.$$

Вывод. Со 100%-ой вероятностью можно утверждать, что величина диаметра шарика D из золота находится в интервале $(8,308 \le D \le 8,332)$ мм.

Если потребуется повысить точность определения диаметра шарика в 2 раза, то следует в 2 раза повысить точность определения его массы и плотности. Например, если $M = (5,820 \pm 0,010)$ г, $\rho = (19\,300 \pm 10)$ кг/м^3, то со 100%-ой вероятностью можно утверждать, что диаметр шарика D из золота равен $D = (8,320 \pm 0,006)$ мм, то есть будет находиться в интервале $(8,314 \le D \le 8,326)$ мм.

Ответ. 1) $D = \sqrt[3]{\dfrac{6M}{\pi\rho}}$.

2) $\dfrac{\Delta D}{D} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\Delta M}{M} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\Delta\rho}{\rho}$.

3) $D = (8,320 \pm 0,012)$ мм.

4) $\dfrac{\Delta D}{D} = 0,15\,\%$.

Контрольные вопросы

1. Поясните, в чем смысл задачи, какова ее цель?
2. Детерминированный параметр $Y(x, z) = f(x)/g(z)$. Напишите уравнение для расчета его относительной и абсолютной погрешности.
3. Корректно оформите результаты расчета:

$$Y = 0,05969972 \pm 0,00029743;$$

$$Y = 0,05969972 \pm 0,00097243;$$

$$Y = 2637,6859 \pm 29,7248;$$

$$Y = 267,2859 \pm 0,9724;$$

$$Y = 2637,2859 \pm 96,7248.$$

4. Чему равна относительная погрешность параметра $Y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{5 \cdot \cos z}$?
5. Чему равна относительная погрешность параметра $Y = \dfrac{\sqrt[6]{x^3}}{2 \cdot e^z}$?
6. Чему равна относительная погрешность параметра $Y(x) = f^2(x)$?
7. Чему равна относительная погрешность параметра $Y(x) = \sqrt{f(x)}$?

Контрольные задачи

1. Рассчитать мощность стартера W, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если напряжение аккумулятора, питающего стартер $U = (12,2 \pm 0,6)$ В, а сила тока $I = (255 \pm 8)$ А.
2. Рассчитать мощность нагревателя W, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если нагреватель включен в сеть с напряжением $U = (230 \pm 10)$ В, а его омическое сопротивление $R = (18,30 \pm 0,50)$ Ом.
3. Рассчитать мощность генератора W, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если генератор питается током $I = (35,0 \pm 1,0)$ А, а его омическое сопротивление $R = (21,2 \pm 0,7)$ Ом.
4. Рассчитать кинетическую энергию автомобиля E, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если масса автомобиля $M = (8,70 \pm 0,40)$ т, а скорость его движения $V = (72,0 \pm 2,0)$ км/ч.
5. Определить время t, за которое гоночный автомобиль «Порше» достигнет скорости $V = (100,0 \pm 2,0)$ км/ч при стартовом ускорении $a = (8,90 \pm 0,20)$ м/с^2. Рассчитать также абсолютную и относительную погрешность его определения.
6. Определить величину избыточного давления P на глубине моря $H = (100,0 \pm 1,0)$ м при плотности морской воды $\rho = (1035 \pm 15)$ кг/м^3, а также абсолютную и относительную погрешность его определения. Ускорение свободного падения $g \equiv 9,81$ м/с^2.
7. Рассчитать плотность металлического кубика ρ, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если масса кубика $M = (583,0 \pm 5,0)$ г, а его ребро $l = (60,00 \pm 0,50)$ мм. Как Вы думаете, какой это металл?

8. Рассчитать плотность металлического шарика ρ, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если масса шарика $M = (590,0 \pm 2,0)$ г, а его диаметр $D = (50,10 \pm 0,10)$ мм. Для расчетов принять $\pi \equiv 3,14159$. Как Вы думаете, какой это металл?

9. Рассчитать потенциальную энергию кирпича $П$ на высоте Останкинской телебашни в Москве, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если масса кирпича $M = (4,80 \pm 0,20)$ кг, а высота телебашни $H = (532,0 \pm 5,0)$ м. Ускорение свободного падения $g \equiv 9,81$ м/с^2.

10. Определить период колебаний маятника T в Исаакиевском соборе Санкт-Петербурга, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если длина маятника $l = (95,00 \pm 0,20)$ м, а ускорение свободного падения $g = (9,807 \pm 0,030)$ м/с^2. Для расчетов принять $\pi \equiv 3,14159$.

11. Определить величину тока в утюге I, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если мощность утюга $W = (1,25 \pm 0,06)$ кВт и он включен в сеть с напряжением $U = (230 \pm 10)$ В.

12. Определить напряжение U, приложенного к электроплитке, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если мощность плитки $W = (1,500 \pm 0,050)$ кВт, а ее сопротивление $R = (10,9 \pm 0,6)$ Ом.

13. Определить скорость V, с которой камень упадет на землю, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если камень сброшен с высоты Эйфелевой башни $H = (320,0 \pm 3,0)$ м. Ускорение свободного падения $g = (9,81 \pm 0,07)$ м/с^2.

14. Рассчитать значение тока в электрофене I, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если мощность фена $W = (1,760 \pm 0,050)$ кВт, а его сопротивление $R = (15,00 \pm 0,10)$ Ом.

15. Рассчитать значение тока I, проходящего через сопротивление, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если величина сопротивления $R = (1,950 \pm 0,020)$ Ом, а падение напряжения на нем $U = (12,00 \pm 0,10)$ В.

16. Рассчитать сопротивление нагревателя R, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если мощность нагревателя $W = (2,80 \pm 0,10)$ кВт и он подключен к сети с напряжением $U = (230,0 \pm 5,0)$ В.

17. Рассчитать сопротивление сушильного шкафа R, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если мощность сушильного шкафа $W = (3,50 \pm 0,10)$ кВт и он питается током $I = (10,00 \pm 0,20)$ А.

18. Рассчитать ускорение гоночного автомобиля «Порше» a, при котором автомобиль достигнет скорости $V = (100,0 \pm 2,0)$ км/ч за время $t = (2,80 \pm 0,10)$ с. Рассчитать также абсолютную и относительную погрешность его определения.

19. Определить глубину моря H, на которой избыточное давление будет равно $P = (55,00 \pm 0,40)$ МПа (≈ 550 атм) при плотности морской воды $\rho = (1035 \pm 11)$ кг/м^3. Рассчитать также абсолютную и относительную погрешность ее определения. Ускорение свободного падения $g \equiv 9,807$ м/с^2.

20. Рассчитать ускорение свободного падения на Луне a, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если период колебаний маятника на Луне длиной $l = (2,500 \pm 0,020)$ м равен $T = (7,770 \pm 0,030)$ с. Для расчетов принять $\pi \equiv 3,14159$.

21. Определить скорость автомобиля «Порше» V, которую он достигнет за время $t = (7,20 \pm 0,10)$ с при стартовом ускорении $a = (8,90 \pm 0,20)$ м/с^2. Рассчитать также абсолютную и относительную погрешности ее определения.

22. Определить длину маятника l, обеспечивающую период колебаний маятника $T = (1,000 \pm 0,010)$ с. Рассчитать также абсолютную и относительную погрешность ее определения. Ускорение свободного падения $g = (9,807 \pm 0,050)$ м/с^2. Для расчетов принять $\pi \equiv 3,14159$.

23. Определить, до какой высоты H долетит камень, если его бросить вверх со скоростью $V = (25,50 \pm 0,10)$ м/с при ускорении свободного падения $g = (9,807 \pm 0,050)$ м/с^2. Рассчитать также абсолютную и относительную погрешность ее определения.

24. Определить напряжение на входных клеммах электросчетчика U, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если сопротивление всех работающих в квартире приборов $R = (16,3 \pm 0,3)$ Ом, а ток на подсоединенных к счетчику проводах $I = (14,1 \pm 0,4)$ А (в квартире работают холодильник, телевизор, утюг, стиральная машина, горят 20 осветительных лампочек и сверкает огнями новогодняя елка).

25. Рассчитать величину ребра кубика из титана l, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если масса кубика $M = (4,90 \pm 0,10)$ г, а плотность титана $\rho = (4540 \pm 30)$ кг/м^3.

26. Определить центростремительное ускорение a_n, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если линейная скорость вращения тела $V = (36,0 + 1,0)$ км/ч, а радиус вращения $R = (50,0 \pm 2,0)$ см.

27. Рассчитать величину первой космической скорости V_1, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если радиус Земли $R = (6380 \pm 25)$ км, а ускорение свободного падения $g = (9,807 \pm 0,030)$ м/с^2.

28. Рассчитать энергию конденсатора W, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если емкость конденсатора $C = (450,0 \pm 5,0)$ мкФ, а напряжение на его обкладках $U = (1250 \pm 10)$ В.

29. Рассчитать частоту колебательного контура ν, а также абсолютную и относительную погрешность ее определения, если емкость колебательного контура $C = (25,0 \pm 0,50)$ мкФ, а индуктивность $L = (60,0 \pm 1,0)$ мГн.

30. Рассчитать диаметр шарика из золота D, а также абсолютную и относительную погрешность его определения, если масса шарика $M = (5,820 \pm 0,020)$ г, а плотность золота $\rho = (19\,300 \pm 20)$ кг/м^3. Для расчетов принять $\pi \equiv 3,14159$.

1.2. ОБРАБОТКА ДАННЫХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА. ОДНА ВЫБОРКА

Перечень рассматриваемых вопросов:

- стохастические закономерности;
- генеральная совокупность и ее параметры;
- выборка и ее параметры;
- проверка случайных значений выборки на промах по критерию Смирнова – Граббса;
- проверка случайных значений выборки на принадлежность их нормальному закону распределения по критерию САО;
- оценка генерального среднего по случайным значениям выборки по критерию Стьюдента;
- оценка генеральной дисперсии по случайным значениям выборки по критерию Пирсона.

Теория с примерами (кратко)

1. Генеральная совокупность случайных значений, принадлежащих нормальному закону распределения, характеризуется следующими параметрами: μ – генеральное среднее; σ^2 – генеральная дисперсия; σ – генеральное стандартное отклонение.

2. Для оценки генеральных параметров можно использовать выборочные параметры. Выборку объемом n, состоящую из n случайных величин $Y_1, \ldots, Y_i, \ldots, Y_n$ $(i = 1, ..., i, ..., n)$, характеризуют следующими выборочными параметрами:

- выборочное среднее

$$\overline{Y} = \frac{Y_1 + \ldots + Y_i + \ldots + Y_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}; \tag{20}$$

- выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{(Y_1 - \overline{Y})^2 + \ldots + (Y_i - \overline{Y})^2 + \ldots + (Y_n - \overline{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}{n-1}; \tag{21}$$

- выборочное стандартное отклонение

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}{n-1}}; \tag{22}$$

- число степеней свободы выборочной дисперсии S^2 (выборочного стандартного отклонения S)

$$f_S = n - 1. \tag{23}$$

Пример 1.2.1. Дана выборка случайных значений 3; 2; 2; 4; 3; 10; 1; 3. Рассчитать выборочные параметры.

Решение. Рассчитаем выборочные параметры:

- объем выборки $n = 8$ (определите объем выборки самостоятельно);
- выборочное среднее рассчитаем по уравнению (20)

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \frac{3+2+2+4+3+10+1+3}{8} = \frac{28}{8} = 3{,}500;$$

- выборочную дисперсию рассчитаем по уравнению (21)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}{n-1} = \frac{(3-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 + (10-3{,}5)^2}{8-1} +$$

$$+ \frac{(1-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2}{8-1} = \frac{0{,}25 + 2{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 42{,}25 + 6{,}25 + 0{,}25}{7} = \frac{54{,}00}{7} = 7{,}714;$$

- выборочное стандартное отклонение рассчитаем по уравнению (22)

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{7,714} = 2,777\,;$$

- число степеней свободы выборочной дисперсии рассчитаем по уравнению (23)

$$f_S = n - 1 = 8 - 1 = 7\,.$$

Ответ. Выборочные параметры: $\overline{Y} = 3,500$; $S^2 = 7,714$; $S = 2,777$; $n = 8$; $f_S = 7$.

Для того чтобы использовать выборочные параметры для оценки параметров генеральной совокупности, необходимо убедиться в том, что среди случайных значений выборки нет промаха (грубой ошибки), а случайные значения выборки принадлежат нормальному закону распределения.

3. Проверка случайных значений выборки $Y_1, \ldots, Y_i, \ldots, Y_n$ на промах по критерию Смирнова – Граббса:

- экспериментальное значение критерия Смирнова – Граббса

$$\tau_э = \frac{\max\left|Y_i - \overline{Y}\right|}{S}\,, \tag{24}$$

где в качестве Y_i выбирается такое значение выборки, которое «убежало» от выборочного среднего $\overline{Y}$ на максимальное расстояние, то есть такое значение, для которого $\left|Y_i - \overline{Y}\right| = \max$;

- табличное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_{f_\tau;\,p}$ при числе степеней свободы $f_\tau = n - 2$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выбирают из таблицы приложения 1;

- выполнение неравенства

$$\tau_э < \tau_{f_\tau;\,p} = \tau_{n-2;\,0,95} \tag{25}$$

означает, что в выборке $Y_1, \ldots, Y_i, \ldots, Y_n$ нет промаха;

- выполнение неравенства

$$\tau_э \geq \tau_{f_\tau;\,p} = \tau_{n-2;\,0,95} \tag{26}$$

означает, что в выборке $Y_1, \ldots, Y_i, \ldots, Y_n$ значение Y_i, для которого $\left|Y_i - \overline{Y}\right| = \max$, является промахом.

Если в выборке обнаружен промах, то его следует исключить, а оставшиеся случайные значения подвергнуть повторной проверке на промах.

Пример 1.2.2. Проверить случайные значения выборки 3; 2; 2; 4; 3; 10; 1; 3 на промах по критерию Смирнова – Граббса.

Решение. Для заданной выборки $n = 8$; $\overline{Y} = 3,500$; $S = 2,777$ (см. пример 1.2.1). Найдем случайное значение выборки Y_i, которое «убежало» от выборочного среднего $\overline{Y} = 3,500$ на максимальное расстояние, то есть найдем такое значение Y_i, для которого разность $\left|Y_i - \overline{Y}\right| = \max$. Очевидно, что таким свойством обладает либо самое большое значение $Y_6 = 10$, либо самое маленькое $Y_7 = 1$. Так как $\left|Y_6 - \overline{Y}\right| = \left|10 - 3,500\right| = 6,500 > \left|Y_7 - \overline{Y}\right| = \left|1 - 3,500\right| = 2,500$, то на промах проверим значение $Y_6 = 10$:

- экспериментальное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_э$ для $Y_6 = 10$ рассчитаем по уравнению (24)

$$\tau_э = \frac{\max\left|Y_i - \overline{Y}\right|}{S} = \frac{\left|Y_6 - \overline{Y}\right|}{S} = \frac{\left|10 - 3,500\right|}{2,777} = \frac{6,500}{2,777} = 2,341\,;$$

- табличное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_{f_\tau;\,p}$ при числе степеней свободы $f_\tau = n - 2 = 8 - 2 = 6$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 1

$$\tau_{f_\tau;\,p} = \tau_{n-2;\,0,95} = \tau_{6;\,0,95} = 2,172\,.$$

Ответ. В выборке 3; 2; 2; 4; 3; 10; 1; 3 случайная величина $Y_6 = 10$ является промахом, так как согласно уравнению (26) $\tau_э = 2,341 > 2,172 = \tau_{6;\,0,95}$.

Пример 1.2.3. Из выборки 3; 2; 2; 4; 3; 10; 1; 3 исключим случайное значение $Y_6 = 10$, так как оно является промахом (см. пример 1.2.2). Проверить оставшиеся случайные значения 3; 2; 2; 4; 3; 1; 3 на промах по критерию Смирнова – Граббса.

Решение. Сначала рассчитаем выборочные параметры обновленной выборки:

- объем выборки $n = 7$ (объем выборки определите самостоятельно);
- выборочное среднее рассчитаем по уравнению (20)

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \frac{3+2+2+4+3+1+3}{7} = \frac{18}{7} = 2{,}571;$$

- выборочное стандартное отклонение рассчитаем по уравнению (21)

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{n-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3-2{,}571)^2 + (2-2{,}571)^2 + (2-2{,}571)^2 + (4-2{,}571)^2 + (3-2{,}571)^2 + (1-2{,}571)^2 + (3-2{,}571)^2}{7-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}1840 + 0{,}3260 + 0{,}3260 + 2{,}0420 + 0{,}1840 + 2{,}4680 + 0{,}1840}{7-1}} = \sqrt{\frac{5{,}714}{6}} = \sqrt{0{,}9524} = 0{,}9759.$$

Найдем случайное значение выборки Y_i, которое «убежало» от выборочного среднего $\overline{Y} = 2{,}571$ на максимальное расстояние, то есть такое значение Y_i, для которого разность $\left|Y_i - \overline{Y}\right| = \max$. Очевидно, что таким свойством обладает либо самое большое значение выборки $Y_4 = 4$, либо самое маленькое $Y_6 = 1$. Так как $\left|Y_4 - \overline{Y}\right| = \left|4 - 2{,}571\right| = 1{,}429 < \left|Y_6 - \overline{Y}\right| = \left|1 - 2{,}571\right| = 1{,}571$, то на промах проверим значение $Y_6 = 1$:

- экспериментальное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_э$ для $Y_6 = 1$ рассчитаем по уравнению (24)

$$\tau_э = \frac{\max\left|Y_i - \overline{Y}\right|}{S} = \frac{\left|Y_6 - \overline{Y}\right|}{S} = \frac{\left|1 - 2{,}571\right|}{0{,}9759} = \frac{1{,}571}{0{,}9759} = 1{,}610;$$

- табличное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_{f_\tau;\, p}$ при числе степеней свободы $f_\tau = n - 2 = 7 - 2 = 5$ и доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выберем из таблицы приложения 1

$$\tau_{f_\tau;\, p} = \tau_{n-2;\, 0{,}95} = \tau_{5;\, 0{,}95} = 2{,}093.$$

Ответ. В выборке 3; 2; 2; 4; 3; 1; 3 промаха нет, так как даже для самого удаленного от выборочного среднего значения $Y_6 = 1$ согласно уравнению (25) $\tau_э = 1{,}610 < 2{,}093 = \tau_{5;\, 0{,}95}$.

4. Проверка случайных значений выборки $Y_1, \ldots, Y_i, \ldots, Y_n$ на принадлежность их нормальному закону распределения по критерию среднего абсолютного отклонения (САО):

- экспериментальное значения критерия САО

$$\theta_э = \left|\frac{\text{САО}}{S} - 0{,}7979\right| = \left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|Y_i - \overline{Y}\right|}{nS} - 0{,}7979\right|; \tag{27}$$

- табличное значения критерия САО при доверительной вероятности $p = 0{,}95$

$$\theta_{n;\, p} = \frac{0{,}4}{\sqrt{n}}; \tag{28}$$

- выполнение неравенства

$$\theta_э < \theta_{n;\,p} \tag{29}$$

означает, что случайные значения выборки $Y_1, \ldots, Y_i, \ldots, Y_n$ принадлежат нормальному закону распределения;

- выполнение неравенства

$$\theta_э \geq \theta_{n;\,p} \tag{30}$$

означает, что случайные значения выборки $Y_1, \ldots, Y_i, \ldots, Y_n$ не принадлежат нормальному закону распределения.

NB! Если случайные значения выборки не принадлежат нормальному закону распределения, то ее выборочные параметры не могут быть использованы для оценки параметров генеральной совокупности с помощью тех формул, которые будут приведены ниже.

Пример 1.2.4. Проверить случайные значения выборки 3; 2; 2; 4; 3; 1; 3 на принадлежность их нормальному закону распределения. Для выборки $n = 7$; $\overline{Y} = 2{,}571$; $S = 0{,}9759$ (см. пример 1.2.3).

Решение. Для решения поставленной задачи воспользуемся критерием САО:

- экспериментальное значение критерия САО рассчитаем по уравнению (27)

$$\theta_э = \left|\frac{\text{САО}}{S} - 0{,}7979\right| = \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left|Y_i - \overline{Y}\right|}{nS} - 0{,}7979\right| = \left|\frac{|3-2{,}571| + |2-2{,}571| + |2-2{,}571| + |4-2{,}571| + |3-2{,}571|}{7 \cdot 0{,}9759} +\right.$$

$$\left. + \frac{|1-2{,}571| + |3-2{,}571|}{7 \cdot 0{,}9759} - 0{,}7979\right| = \left|\frac{0{,}429 + 0{,}571 + 0{,}571 + 1{,}429 + 0{,}429 + 1{,}571 + 0{,}429}{6{,}8313} - 0{,}7979\right| =$$

$$= \left|\frac{5{,}429}{6{,}8313} - 0{,}7979\right| = |0{,}7947 - 0{,}7979| = 0{,}0032;$$

- табличное значение критерия САО рассчитаем по уравнению (28)

$$\theta_{n;\,p} = \theta_{7;\,0,95} = \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{7}} = \frac{0{,}4}{2{,}646} = 0{,}1512.$$

Ответ. Случайные значения выборки 3; 2; 2; 4; 3; 1; 3 принадлежат нормальному закону распределения, так как согласно уравнению (29) $\theta_э = 0{,}0032 < 0{,}1512 = \theta_{7;\,0,95}$.

Если в выборке промаха нет, а ее значения принадлежат нормальному закону распределения, то такую выборку будем называть очищенной. Параметры очищенной выборки используют для оценки параметров генеральной совокупности.

5. Оценка генерального среднего по выборочным параметрам очищенной выборки:

- абсолютная ошибка $\Delta\overline{Y}$ генерального среднего μ

$$\Delta\overline{Y} = \frac{t_{f_S,\,p} \cdot S}{\sqrt{n}}, \tag{31}$$

где $t_{f_S;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f_S = n-1$ и доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выбирают из таблицы приложения 2;

- доверительный интервал генерального среднего μ равен

$$\mu_{\min} < \mu < \mu_{\max}, \tag{32}$$

где

$$\mu_{\min} = \overline{Y} - \Delta\overline{Y}; \tag{33}$$

$$\mu_{\max} = \overline{Y} + \Delta\overline{Y}. \tag{34}$$

Пример 1.2.5. Оценить генеральное среднее по случайным значениям очищенной выборки 3; 2; 2; 4; 3; 1; 3. Для этой выборки $n = 7$; $\overline{Y} = 2{,}571$; $S = 0{,}9759$ (см. примеры 1.2.3 и 1.2.4). Корректно оформить результаты расчета (см. раздел 1.1, п. 3).

Решение. Так как среди случайных значений выборки промаха нет, и они принадлежат нормальному закону распределения, то оценим генеральное среднее μ по выборочным параметрам:

- абсолютную ошибку $\Delta\overline{Y}$ генерального среднего μ рассчитаем по уравнению (31)

$$\Delta\overline{Y} = \frac{t_{f_S;\,p} \cdot S}{\sqrt{n}} == \frac{t_{n-1;\,0,95} \cdot S}{\sqrt{n}} = \frac{t_{6;\,0,95} \cdot S}{\sqrt{7}} = \frac{2{,}447 \cdot 0{,}9759}{2{,}646} = 0{,}9025 \approx 0{,}9\,,$$

где $t_{f_S;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f_S = n - 1 = 7 - 1 = 6$ и доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выберем из таблицы приложения 2

$$\tau_{f_S;\,p} = \tau_{n-1;\,0,95} = \tau_{6;\,0,95} = 2{,}447\,;$$

- доверительный интервал генерального среднего μ рассчитаем по уравнениям (32) - (34)

$$\mu_{\min} < \mu < \mu_{\max}\,,$$

где

$$\mu_{\min} = \overline{Y} - \Delta\overline{Y} = 2{,}571 - 0{,}9 = 2{,}6 - 0{,}9 = 1{,}7\,;$$

$$\mu_{\max} = \overline{Y} + \Delta\overline{Y} = 2{,}571 + 0{,}9 = 2{,}6 + 0{,}9 = 3{,}5\,.$$

Ответ. Доверительный интервал генерального среднего $1{,}7 < \mu < 3{,}5$.

5. Оценка генерального стандартного отклонения σ по выборочным параметрам очищенной выборки:

- доверительный интервал генерального стандартного отклонения σ

$$\sigma_{\min} < \sigma < \sigma_{\max}\,, \tag{35}$$

где

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{f_S;\ (1-p)/2}}}\,; \tag{36}$$

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{f_S;\ (1+p)/2}}}\,; \tag{37}$$

$\chi^2_{f_S;\,(1-p)/2}$ и $\chi^2_{f_S;\,(1+p)/2}$ – нижнее и верхнее табличные значения критерия Пирсона с числом степеней свободы $f_S = n - 1$ при доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выбирают из таблицы приложения 3.

Пример 1.2.6. Оценить генеральное стандартное отклонение по случайным значениям очищенной выборки 3; 2; 2; 4; 3; 1; 3. Для этой выборки $n = 7$; $\overline{Y} = 2{,}571$; $S = 0{,}9759$ (см. примеры 1.2.3 и 1.2.4).

Решение. Так как среди случайных значений выборки промаха нет и случайные значения выборки принадлежат нормальному закону распределения, то оценим генеральное стандартное отклонение σ по выборочным параметрам:

- доверительный интервал генерального стандартного отклонения σ рассчитаем по уравнениям (35) – (37)

$$\sigma_{\min} < \sigma < \sigma_{\max}\,,$$

где

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{f_S;\ (1-p)/2}}} = \sqrt{\frac{(7-1) \cdot S^2}{\chi^2_{6;\ 0,025}}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 0{,}9759^2}{14{,}449}} = \sqrt{0{,}3955} = 0{,}6289 \approx 0{,}6\,;$$

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{f_S;\ (1+p)/2}}} = \sqrt{\frac{(7-1) \cdot S^2}{\chi^2_{6;\ 0,975}}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 0{,}9759^2}{1{,}237}} = \sqrt{4{,}619} = 2{,}149 \approx 2{,}1;$$

где $\chi^2_{f_S;(1-p)/2}$ и $\chi^2_{f_S;(1+p)/2}$ – нижнее и верхнее табличные значения критерия Пирсона с числом степеней свободы $f_S = n-1 = 7-1 = 6$ при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 3

$$\chi^2_{f_S;(1-p)/2} = \chi^2_{n-1;(1-p)/2} = \chi^2_{6;\,0,025} = 14,449;$$

$$\chi^2_{f_S;(1+p)/2} = \chi^2_{n-1;(1+p)/2} = \chi^2_{6;\,0,975} = 1,277;$$

Ответ. Доверительный интервал генерального среднего $0,6 < \sigma < 2,1$.

Типовая задача

Цель. Освоить метод оценки параметров генеральной совокупности по случайным значениям выборки.

Формулировка задачи. На предприятии изготавливают антифрикционные втулки методом порошковой металлургии (прессование и спекание смеси порошков меди и олова). Качество изготовленных втулок оценивают пределом прочности при растяжении (МПа).

Изготовленные втулки поступают в отдел технического контроля партиями в коробках по 1000 шт. Контроль качества партии втулок ведут выборочным методом. Из коробки случайным образом извлекают некоторое количество втулок, проводят испытание их на прочность, по результатам которого делается заключение о пригодности партии втулок.

Математическая формулировка задачи. 1) На основе выборочных значений прочности 11 втулок (481; 452; 447; 437; 463; 401; 485; 469; 468; 476; 459) МПа рассчитать доверительный интервал генерального среднего $\mu_{\min} < \mu < \mu_{\max}$ и доверительный интервал генерального стандартного отклонения $\sigma_{\min} < \sigma < \sigma_{\max}$. 2) Принять решение о пригодности партии втулок в количестве 1000 шт. В качестве критерия пригодности партии втулок принять выполнение следующего неравенства: $\mu_{\min} - 2\sigma_{\max} \geq [\mu]$, где $[\mu] = 350$ МПа. В противном случае проверяемую партию втулок следует признать непригодной.

План решения задачи

1. Внимательно прочитать условия задачи.
2. Методами математической статистики провести предварительную обработку экспериментальных данных **исходной** выборки.
3. Методами математической статистики провести предварительную обработку экспериментальных данных **очищенной** выборки.
4. Оценить параметры генеральной совокупности по случайным значениям очищенной выборки.
5. По принятому критерию качества $\mu_{\min} - 2\sigma_{\max} \geq [\mu]$ принять решение о пригодности партии втулок в количестве 1000 шт.

NB! Все промежуточные расчеты производить с точностью не менее 4-х значащих цифр.

Решение задачи плану

1. Пункт 1 выполнить самостоятельно.
2. Для **исходной** выборки (481; 452; 447; 437; 463; 401; 485; 469; 468; 476; 459) МПа объемом $n_0 = 11$ определим выборочные параметры:

- выборочное среднее **исходной** выборки рассчитаем по уравнению (20)

$$\overline{Y}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} Y_i}{n_0} = \frac{481+452+447+437+463+401+485+469+468+476+459}{11} = 458,0;$$

- выборочную дисперсию **исходной** выборки рассчитаем по уравнению (21)

$$S_0^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_0}\left(Y_i-\overline{Y_0}\right)^2}{n_0-1}=\frac{(481-458,0)^2+(452-458,0)^2+(447-458,0)^2+(437-458,0)^2+(463-458,0)^2}{11-1}+$$

$$+\frac{(401-458,0)^2+(485-458,0)^2+(469-458,0)^2+(468-458,0)^2+(476-458,0)^2+(459-458,0)^2}{11-1}=567,6\,;$$

- выборочное стандартное отклонение **исходной** выборки рассчитаем по уравнению (22)

$$S_0=\sqrt{S_0^2}=\sqrt{567,6}=23,82\,;$$

- число степеней свободы f_{S_0} выборочной дисперсии S_0^2 **исходной** выборки рассчитаем по уравнению (23)

$$f_{S_0}=n_0-1=11-1=10\,.$$

Проверим случайные значения **исходной** выборки объемом $n_0=11$ на промах по критерию Смирнова – Граббса.

Найдем случайное значение **исходной** выборки Y_i, которое «убежало» от выборочного среднего $\overline{Y}_0=458,0$ на максимальное расстояние, то есть такое значение Y_i, для которого разность $\left|Y_i-\overline{Y}\right|=\max$. Очевидно, что таким свойством обладает либо самое большое значение выборки $Y_7=485$, либо самое маленькое – $Y_6=401$. Так как $\left|Y_6-\overline{Y}_0\right|=\left|401-458,0\right|=57,0>\left|Y_7-\overline{Y}_0\right|=\left|485-458,0\right|=27,0$, то на промах проверим $Y_6=401$:

- экспериментальное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_{э0}$ для $Y_6=401$ рассчитаем по уравнению (24)

$$\tau_{э0}=\frac{\max\left|Y_i-\overline{Y}_0\right|}{S_0}=\frac{\left|Y_6-\overline{Y}_0\right|}{S_0}=\frac{\left|401-458,0\right|}{23,82}=\frac{57,0}{23,82}=2,393\,;$$

- табличное значение критерия Смирнова – Граббса $t_{f_{\tau0};\,p}$ при числе степеней свободы $f_{\tau0}=n_0-2=11-2=9$ и доверительной вероятности $p=0,95$ выберем из таблицы приложения 1

$$\tau_{f_{\tau0};\,p}=\tau_{n_0-2;\,0,95}=\tau_{9;\,0,95}=2,343\,.$$

Вывод. В **исходной** выборке случайная величина $Y_6=401$ является промахом, так как согласно уравнению (26) $\tau_{э0}=2,393>2,343=\tau_{9;\,0,95}$.

Проводить проверку случайных значений выборки *А* на принадлежность их нормальному закону распределения некорректно, пока не исключен промах.

3. После исключения промаха из **исходной** выборки определим выборочные параметры **обновленной** выборки объемом $n_1=10$ (481; 452; 447; 437; 463; 485; 469; 468; 476; 459) МПа:

- выборочное среднее **обновленной** выборки рассчитаем по уравнению (20)

$$\overline{Y_1}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}Y_i}{n_1}=\frac{481+452+447+437+463+485+469+468+476+459}{10}=463,7;$$

- выборочную дисперсию **обновленной** выборки рассчитаем по уравнению (21)

$$S_1^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}\left(Y_i-\overline{Y_1}\right)^2}{n_1-1}=\frac{(481-463,7)^2+(452-463,7)^2+(447-463,7)^2+(437-463,7)^2+(463-463,7)^2}{10-1}+$$

$$+\frac{(485-463,7)^2+(469-463,7)^2+(468-463,7)^2+(476-463,7)^2+(459-463,7)^2}{10-1}=233,6\,;$$

- выборочное стандартное отклонение **обновленной** выборки рассчитаем по уравнению (22)

$$S_1 = \sqrt{S_1^2} = \sqrt{233,6} = 15,28\,;$$

- число степеней свободы f_{S_1} выборочной дисперсии S_1^2 **обновленной** выборки рассчитаем по уравнению (23)

$$f_{S_1} = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9\,.$$

Проверим случайные значения **обновленной** выборки объемом $n_1 = 10$ на промах по критерию Смирнова – Граббса.

Найдем случайное значение выборки Y_i, которое «убежало» от выборочного среднего $\overline{Y}_1 = 463,7$ на максимальное расстояние, то есть такое значение Y_i, для которого разность $\left|Y_i - \overline{Y}_1\right| = \max$. Очевидно, что таким свойством обладает либо самое большое значение выборки $Y_6 = 485$, либо самое маленькое – $Y_4 = 437$. Так как $\left|Y_4 - \overline{Y}_1\right| = \left|437 - 463,7\right| = 26,7 > \left|Y_6 - \overline{Y}_1\right| = \left|485 - 463,7\right| = 21,3$, то на промах проверим $Y_4 = 437$:

- экспериментальное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_{э1}$ для $Y_4 = 437$ рассчитаем по уравнению (24)

$$\tau_{э1} = \frac{\max\left|Y_i - \overline{Y}_1\right|}{S_1} = \frac{\left|Y_4 - \overline{Y}_1\right|}{S_1} = \frac{\left|437 - 463,7\right|}{15,28} = \frac{26,7}{15,28} = 1,747\,;$$

- табличное значение критерия Смирнова – Граббса $t_{f_{\tau 1};\,p}$ при числе степеней свободы $f_{\tau 1} = n_1 - 2 = 10 - 2 = 8$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 1

$$\tau_{f_{\tau 1};\,p} = \tau_{n_1 - 2;\,p} = \tau_{8;\,0,95} = 2,294\,.$$

Вывод. В **обновленной** выборке объемом $n_1 = 10$ промаха нет, потому что даже самое удаленное от выборочного среднего значение $Y_4 = 437$ не является промахом, так как согласно уравнению (25) $\tau_{э1} = 1,747 < 2,294 = \tau_{8;\,0,95}$.

Проверим случайные значения **обновленной** выборки объемом $n_1 = 10$ на принадлежность их нормальному закону распределения по критерию САО:

- экспериментальное значения критерия САО рассчитаем по уравнению (27)

$$\theta_{э_1} = \left|\frac{\text{САО}}{S_1} - 0,7979\right| = \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left|Y_i - \overline{Y}_1\right|}{n_1 S_1} - 0,7979\right| =$$

$$= \left|\frac{\left|481-463,7\right| + \left|452-463,7\right| + \left|447-463,7\right| + \left|437-463,7\right| + \left|463-463,7\right| + \left|485-463,7\right| + \left|469-463,7\right|}{10\cdot 15,28} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left|468-463,7\right| + \left|476-463,7\right| + \left|459-463,7\right|}{10\cdot 15,28} - 0.7979\right| = \left|\frac{121,0}{152,8} - 0,7979\right| = \left|0,7919 - 0,7979\right| = 0,0060\,;$$

- табличное значения $\theta_{n_1;\,p}$ критерия САО рассчитаем по уравнению (28)

$$\theta_{n_1;\,p} = \theta_{10;\,0,95} = \frac{0,4}{\sqrt{n_1}} = \frac{0,4}{\sqrt{10}} = 0,1265\,.$$

Вывод. Случайные значения **обновленной** выборки объемом $n_1 = 10$ принадлежат нормальному закону распределения, так как согласно уравнению (29) $\theta_{э1} = 0,0060 < 0,1265 = \theta_{10;\,0,95}$.

Так как в **обновленной** выборке промахов нет, а ее случайные значения принадлежат нормальному закону распределения, то **обновленная** выборка является **очищенной** объемом $n_1 = 10$.

4. По выборочным параметрам **очищенной** выборки оценим параметры генеральной совокупности.

Для **очищенной** выборки объемом $n_1 = 10$ найдем доверительный интервал генерального среднего μ по критерию Стьюдента:

- абсолютную ошибку $\Delta\overline{Y}_1$ генерального среднего μ рассчитаем по уравнению (31)

$$\Delta\overline{Y}_1 = \frac{t_{f_{S_1};\,p} \cdot S_1}{\sqrt{n_1}} = \frac{t_{n_1-1;\,p} \cdot S_1}{\sqrt{n_1}} = \frac{t_{9;\,0,95} \cdot S_1}{\sqrt{10}} = \frac{2,262 \cdot 15,28}{\sqrt{10}} = 10,93,$$

где $t_{f_{S_1};\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f_{S_1} = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{f_{S_1};\,p} = t_{n_1-1,\,0,95} = t_{9;\,0,95} = 2,262;$$

- доверительный интервал генерального среднего рассчитаем по уравнениям (32) – (34) и корректно оформим результаты расчета (см. раздел 1.1, п. 3)

$$\mu_{\min} < \mu < \mu_{\max},$$

где

$$\mu_{\min} = 463,7 - 10,93 = 464 - 11 = 453;$$

$$\mu_{\max} = 463,7 + 10,93 = 464 + 11 = 475;$$

Вывод. Доверительный интервал генерального среднего $453 < \mu < 475$ (МПа).

Для **очищенной** выборки объемом $n_1 = 10$ найдем доверительный интервал по критерию Пирсона:

- доверительный интервал генерального стандартного отклонения σ рассчитаем по уравнениям (35) – (37) и корректно оформим результаты расчета (см. раздел 1.1, п. 3)

$$\sigma_{\min} < \sigma < \sigma_{\max},$$

где

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{(n_1-1) \cdot S_1^2}{\chi^2_{f_{S_1};\,(1-p)/2}}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 233,6}{\chi^2_{9;\,0,025}}} = \sqrt{\frac{2102,4}{19,023}} = \sqrt{110,5} = 10,51 \approx 11;$$

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{(n_1-1) \cdot S_1^2}{\chi^2_{f_{S_1};\,(1+p)/2}}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 233,6}{\chi^2_{9;\,0,975}}} = \sqrt{\frac{2102,4}{2,700}} = \sqrt{778,7} = 27,90 \approx 28,$$

$\chi^2_{f_{S_1};\,(1-p)/2}$ и $\chi^2_{f_{S_1};\,(1+p)/2}$ – нижнее и верхнее табличные значения критерия Пирсона с числом степеней свободы $f_{S_1} = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 3

$$\chi^2_{f_{S_1};\,(1-p)/2} = \chi^2_{n_1-1;\,(1-p)/2} = \chi^2_{9;\,0,025} = 19,023;$$

$$\chi^2_{f_{S_1};\,(1+p)/2} = \chi^2_{n_1-1;\,(1+p)/2} = \chi^2_{9;\,0,975} = 2,700;$$

Вывод. Доверительный интервал генерального стандартного отклонения $11 < \sigma < 28$ (МПа).

5. По критерию качества втулок $\mu_{\min} - 2\sigma_{\max} > [\mu]$ примем решение о пригодности партии втулок в количестве 1000 шт. Выполнение равенства

$$\mu_{\min} - 2\sigma_{\max} = 453 - 2 \cdot 28 = 397 > 350 = [\mu]$$

означает, что партию втулок в количестве 1000 шт. следует считать **пригодной**.

Ответ.

1) Параметры **исходной** выборки: $n_0 = 11$; $\overline{Y_0} = 458,0$; $S_0^2 = 567,6$; $S_0 = 23,82$; $f_{S_0} = 10$. Значение $\overline{Y}_6 = 401$ – промах, так как $\tau_{э0} = 2,393 > 2,343 = \tau_{9;\,0,95}$.

2) Параметры **обновленной** выборки: $n_0 = 10$; $\overline{Y}_1 = 463,7$; $S_1^2 = 233,6$; $S_1 = 15,28$; $f_{S_1} = 9$. Среди случайных значений выборки промаха нет, так как даже для самого удаленного значения от выборочного среднего $Y_4 = 437$ $\tau_{э1} = 1,747 < 2,294 = \tau_{8;\,0,95}$. Случайные значения обновленной выборки принадлежат нормальному закону распределения, так как $\theta_{э1} = 0,0060 < 0,1265 = \theta_{10;\,0,95}$.

3) Доверительные интервалы генерального среднего и генерального стандартного отклонения равны:

$$453 < \mu < 475 \text{ (МПа)};$$

$$11 < \sigma < 28 \text{ (МПа)}.$$

4) Статистический контроль показал, что партию втулок в количестве 1000 шт. следует считать **пригодной**, так как $\mu_{\min} - 2\sigma_{\max} = 357 > 350 = [\mu]$.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулы для расчета выборочных параметров.
2. Сформулируйте критерий Смирнова-Граббса для проверки случайных значений выборки на промах.
3. Сформулируйте критерий САО для проверки на принадлежность случайных значений выборки нормальному закону распределения.
4. Как рассчитать доверительный интервал генерального среднего по критерию Стьюдента?
5. Как рассчитать доверительный интервал генеральной дисперсии по критерию Пирсона?

Контрольные задачи

Таблица 2

Выборочные значения предела прочности при сжатии для втулок, МПа

Номер обр.	Номера вариантов														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	473	400	491	484	490	408	424	525	380	456	440	493	451	470	490
2	414	472	442	484	305	428	471	463	476	482	486	414	458	453	413
3	480	482	450	452	493	479	467	476	481	373	442	478	439	445	447
4	478	491	479	446	392	405	452	461	445	423	516	403	380	478	458
5	355	425	471	438	467	446	453	450	410	472	442	489	472	479	429
6	452	489	446	416	456	320	433	471	415	405	429	462	438	457	450
7	474	451	367	440	493	476	505	468	466	440	452	454	470	464	349
8	417	473	422	419	392	462	452	443	417	446	437	459	482	503	458
9	406	473	463	460	463	481	453	443	442	444	438	465	424	458	448
10	465	432	452	447	411	482	433	460	454	437	429	467	484	459	467
11	444	555	422	532	460	460	452	431	322	443	487	556	455	472	458
12	423	460	430	450	435		453	489	417	430	450	477	435	466	422
13	431	455	456	467			433		442	456	433	455	459	470	412
14	436	477	490							476	439	438		465	
15	436	460								444	456				
16	456									425					
17	456									449					
$[\mu]$	350	370	360	370	280	310	400	380	320	360	370	340	360	420	350

Окончание табл. 2

Номер обр.	Номера вариантов														
	16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1	471	461	457	451	465	480	420	441	438	440	459	481	479	496	481
2	467	463	439	424	444	458	420	451	428	443	448	371	481	442	452
3	462	478	476	471	428	465	432	453	478	427	435	469	483	485	447
4	443	417	438	416	456	439	355	442	473	479	457	435	462	450	437
5	447	432	450	490	478	383	486	439	470	456	517	457	465	491	463
6	449	529	464	331	469	464	466	441	432	455	472	416	456	430	401
7	483	437	440	454	535	437	446	464	485	381	469	457	451	431	485
8	444	438	451	495	427	459	469	405	489	471	478	457	466	416	469
9	394	429	506	463	476	423	432	558	465	439	439	432	455	446	468
10	425	466	448	414	428	462	461	475	434	453	439	458	473	452	476
11	466	455		454	400	485	490	495	535	462	443	444	514	543	459
12	456			440	465	432	416	467	478	455	432	423	475	416	
13				455	453	425	422	472	469	449	462	445		446	
14					443	445	430	454	451	423	468			452	
15						453	445	437	446	411				416	
16							457	427	435					446	
17								425							
$[\mu]$	390	350	390	330	350	370	350	350	360	380	400	360	410	360	350

1.3. ОБРАБОТКА ДАННЫХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА. ДВЕ ВЫБОРКИ

Перечень рассматриваемых вопросов:
- проверка 2-х выборочных дисперсий на однородность по критерию Фишера;
- проверка 2-х выборочных средних на существенное различие по критерию Стьюдента;
- сравнительный анализ однотипной продукции 2-х партий по качеству.

Теория с примерами (кратко)

1. Прежде чем провести сравнительный анализ однотипной продукции 2-х партий по качеству, следует выполнить предварительную обработку экспериментальных данных методами математической статистики, которая включает в себя следующие операции:

- выборочные параметры 2-х выборок ($\overline{Y_1}, S_1^2, S_1, n_1, f_{S_1}$), ($\overline{Y_2}, S_2^2, S_2, n_2, f_{S_2}$) рассчитывают по уравнениям (20) – (23)

$$\overline{Y_j} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{ji}}{n}; \quad S_j^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (Y_{ji} - \overline{Y_j})^2}{n-1}; \; S_j = \sqrt{S_j^2}\,; \; f_{sj} = n_j - 1, \quad j = 1, 2;$$

- случайные значения 2-х выборок проверяют на промах по критерию Смирнова – Граббса ($\tau_{э1}, \tau_{n_1-2;\ 0,95}$), ($\tau_{э2}, \tau_{n_2-2;\ 0,95}$) по уравнениям (24) – (26)

$$\tau_{э\,j} = \frac{\max\left|Y_{ji} - \overline{Y_j}\right|}{S_j} < \tau_{n_j-2;\,0,95}, \quad j = 1, 2;$$

- случайные значения 2-х выборок проверяют на принадлежность их нормальному закону распределению по критерию САО ($\theta_{э1}, \theta_{n_1;\,0,95}$), ($\theta_{э2}, \theta_{n_2;\,0,95}$)по уравнениям (27) – (30)

$$\theta_{э\,j} = \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left|Y_{ji} - \overline{Y_j}\right|}{n_j S_j} - 0,7979\right| < \frac{0,4}{\sqrt{n_j}} = \theta_{n_j;\,0,95}, \quad j = 1, 2.$$

Если в результате предварительной обработки экспериментальных данных 2-х выборок будет установлено, что они являются очищенными, то математически корректно провести сравнительный анализ однотипной продукции по качеству.

2. Если однотипная продукция имеет одинаковое качество, то математически это означает, что выборочные параметры обеих партий принадлежат одному и тому же нормальному закону распределения, то есть обе партии имеют одинаковые генеральные параметры $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ и $\mu_1 = \mu_2$.

Поэтому алгоритм сравнительного анализа однотипной продукции по качеству следующий: а) сначала следует убедиться в однородности выборочных дисперсий обеих выборок, то есть, несмотря на то, что $S_1^2 \neq S_2^2$, соответствующие генеральные дисперсии равны $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$; б) в случае однородности выборочных дисперсий (и только в этом случае!!!) можно проверить выборочные средние $\overline{Y_1}$ и $\overline{Y_2}$ на существенное различие: если при $\overline{Y_1} \neq \overline{Y_2}$ окажется, что $\mu_1 = \mu_2$, то это означает, что качество обеих партий одинаковое; если при $\overline{Y_1} \neq \overline{Y_2}$ окажется, что $\mu_1 \neq \mu_2$, то это означает, что качество обеих партий различное.

3. Даны выборочные параметры 2-х очищенных выборок: ($\overline{Y_1}, S_1^2, n_1$), ($\overline{Y_2}, S_2^2, n_2$). Выборочные дисперсии при $S_1^2 \neq S_2^2$ считают однородными, если соответствующие им генеральные дисперсии равны между собой, то есть $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Однородность выборочных дисперсий S_1^2 и S_2^2 определяют по критерию Фишера по следующему алгоритму:

- экспериментальное значение критерия Фишера $F_э$ – это отношение **большей** дисперсии к **меньшей**

$$F_э = \frac{\max S_j^2}{\min S_j^2}, \quad j = 1, 2; \tag{38}$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$, в котором на первом месте стоит число степеней свободы **большей** дисперсии $f_{числ}$, а на втором – число степеней свободы **меньшей** дисперсии $f_{знам}$, при доверительной вероятности $p = 0,95$ выбирают из таблицы приложения 4;

- величины $f_{числ}$ и $f_{знам}$ рассчитывают по следующему алгоритму:

$$f_{числ} = \begin{cases} n_1 - 1, \text{ если } & S_1^2 > S_2^2 \\ n_2 - 1, \text{ если } & S_2^2 > S_1^2 \end{cases}; \tag{39}$$

$$f_{знам} = \begin{cases} n_2 - 1, \text{ если } & S_1^2 > S_2^2 \\ n_1 - 1, \text{ если } & S_2^2 > S_1^2 \end{cases}; \tag{40}$$

- выборочные дисперсии S_1^2 $(f_{S_1} = n_1 - 1)$ и S_2^2 $(f_{S_2} = n_2 - 1)$ **однородны**, то есть $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, если

$$F_э < F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}; \tag{41}$$

- выборочные дисперсии S_1^2 $(f_{S_1} = n_1 - 1)$ и S_2^2 $(f_{S_2} = n_2 - 1)$ **неоднородны**, то есть $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, если

$$F_э \geq F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}. \tag{42}$$

Если выборочные дисперсии неоднородны, то дальнейший анализ однотипной продукции по качеству с помощью приведенного ниже алгоритма некорректен. Можно провести повторный эксперимент для получения новых выборочных данных, но это не гарантирует однородности дисперсий, так как их неоднородность может быть неслучайной.

Пример 1.3.1. Даны две очищенные выборки: $(\overline{Y_1} = 25,\ S_1^2 = 30,\ n_1 = 24)$ и $(\overline{Y_2} = 30,\ S_2^2 = 90,\ n_2 = 7)$. Проверить выборочные дисперсии S_1^2 и S_2^2 на однородность.

Решение. Для проверки 2-х выборочных дисперсий на однородность используем критерий Фишера:

- экспериментальное значение критерия Фишера рассчитаем по уравнению (38)

$$F_э = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{90}{30} = 3,000, \text{ так как } S_2^2 > S_1^2;$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (39) – (40): на первом месте стоит число степеней свободы **большей** дисперсии $f_{числ} = f_{S_2} = n_2 - 1 = 7 - 1 = 6$, а на втором – число степеней свободы **меньшей** дисперсии $f_{знам} = f_{S_1} = n_1 - 1 = 24 - 1 = 23$, и при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p} = F_{f_{S_2};\, f_{S_1};\, 0,95} = F_{n_2-1;\, n_1-1;\, 0,95} = F_{6;\, 23;\, 0,95} = 2,528.$$

Ответ. Выборочные дисперсии $S_1^2 = 30$ $(f_{S_1} = 23)$ и $S_2^2 = 90$ $(f_{S_2} = 6)$ **неоднородны**, так как согласно уравнению (42) $F_э = 3,000 > 2,528 = F_{6;\, 23;\, 0,95}$.

Пример 1.3.2. Даны две очищенные выборки: $(\overline{Y_1} = 25,\ S_1^2 = 30,\ n_1 = 10)$ и $(\overline{Y_2} = 30,\ S_2^2 = 90,\ n_2 = 5)$. Проверить выборочные дисперсии S_1^2 и S_2^2 на однородность.

Решение. Для проверки 2-х выборочных дисперсий на однородность используем критерий Фишера:

- экспериментальное значение критерия Фишера рассчитаем по уравнению (38)

$$F_э = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{90}{30} = 3,000, \text{ так как } S_2^2 > S_1^2;$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (39) – (40): на первом месте стоит число степеней свободы **большей** дисперсии $f_{\text{числ}} = f_{S_2} = n_2 - 1 = 5 - 1 = 4$, а на втором – число степеней свободы **меньшей** дисперсии $f_{\text{знам}} = f_{S_1} = n_1 - 1 = 10 - 1 = 9$, и при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p} = F_{f_{S_2};\, f_{S_1};\, 0,95} = F_{n_2-1;\, n_1-1;\, 0,95} = F_{4;\, 9;\, 0,95} = 3,633 .$$

Ответ. Выборочные дисперсии $S_1^2 = 30$ $(f_{S_1} = 9)$ и $S_2^2 = 90$ $(f_{S_2} = 4)$ **однородны**, так как согласно уравнению (41) $F_э = 3,000 < 3,633 = F_{4;\, 9;\, 0,95}$.

NB! Две выборочные дисперсии $S_1^2 = 30$ и $S_2^2 = 90$ могут быть однородными и неоднородными. Например, выборочные дисперсии $S_1^2 = 30$ $(f_{S_1} = 9)$ и $S_2^2 = 90$ $(f_{S_2} = 4)$ однородны, в то же время эти же выборочные дисперсии, но с другими степенями свободы $S_1^2 = 30$ $(f_{S_1} = 23)$ и $S_2^2 = 90$ $(f_{S_2} = 6)$, неоднородны.

Еще раз обратите внимание на то, что при нахождении табличного значения критерия Фишера $F_{f_{\text{числ}},\, f_{\text{знам}},\, p}$ на первом месте всегда стоит число степеней свободы **большей** ***дисперсии, а на втором -*** **меньшей.**

2. Даны две очищенные выборки $(\overline{Y_1}, S_1^2, n_1)$ и $(\overline{Y_2}, S_2^2, f_{n_2})$. Если выборочные дисперсии однородны ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), то можно сравнить однотипную продукцию по качеству.

Сравнение однотипной продукции по качеству – это сравнение выборочных средних, которые характеризуют качество продукции на существенное различие. Пусть $\overline{Y_1} \neq \overline{Y_2}$. Выяснение, является ли это неравенство **статистически** существенным, осуществляется по критерию Стьюдента:

- экспериментальное значение критерия Стьюдента

$$t_э = \frac{\left|\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2\right|}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}\,; \qquad (43)$$

- табличное значение критерия Стьюдента $t_{f;\, p}$ при числе степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выбирают из таблицы приложения 2;

- различие между выборочными средними $\overline{Y_1}$ и $\overline{Y_2}$ **статистически** несущественно, то есть $\mu_1 = \mu_2$ (качество продукции обеих выборок **одинаковое**), если

$$t_э < t_{f;\, p} = t_{n_1+n_2-2;\, 0,95}\,; \qquad (44)$$

- - различие между выборочными средними $\overline{Y_1}$ и $\overline{Y_2}$ **статистически** существенно, то есть $\mu_1 \neq \mu_2$ (качество продукции обеих выборок **различное**), если

$$t_э \geq t_{f;\, p} = t_{n_1+n_2-2;\, 0,95}\,. \qquad (45)$$

В общем случае при выполнении неравенства (45) различие между выборочными средними $\overline{Y_1}$ и $\overline{Y_2}$ **статистически** существенно, причем если

$$\overline{Y_1} > \overline{Y_2}\text{, то и } \mu_1 > \mu_2\,; \qquad (46)$$

$$\overline{Y_2} > \overline{Y_1}\text{, то и } \mu_2 > \mu_1\,. \qquad (47)$$

Пример 1.3.3. Даны две выборки: $(\overline{Y_1} = 25,\ S_1^2 = 30,\ n_1 = 7)$ и $(\overline{Y_2} = 30,\ S_2^2 = 90,\ n_2 = 34)$. Проверить, действительно ли выборочное среднее $\overline{Y_2} = 30$ **статистически** больше выборочного среднего $\overline{Y_1} = 25$?

Решение. Чтобы корректно проверить выборочные средние $\overline{Y_1}$ и $\overline{Y_2}$ на существенное различие, проверим сначала выборочные дисперсии S_1^2 и S_2^2 на однородность:

- экспериментальное значение критерия Фишера рассчитаем по уравнению (38)

$$F_э = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{90}{30} = 3,000, \text{ так как } S_2^2 > S_1^2;$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (39) – (40): на первом месте стоит число степеней свободы **большей** дисперсии $f_{числ} = f_{S_2} = n_2 - 1 = 34 - 1 = 33$, а на втором – число степеней свободы **меньшей** дисперсии $f_{знам} = f_{S_1} = n_1 - 1 = 7 - 1 = 6$, и при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p} = F_{f_{S_2};\, f_{S_1};\, 0,95} = F_{n_2-1;\, n_1-1;\, 0,95} = F_{33;\, 6;\, 0,95} = 3,796;$$

- выборочные дисперсии $S_1^2 = 30$ $(f_{S_1} = 6)$ и $S_2^2 = 90$ $(f_{S_2} = 33)$ **однородны**, так как согласно уравнению (41) $F_э = 3,000 < 3,796 = F_{33;\, 6;\, 0,95}$.

Так как выборочные дисперсии $S_1^2 = 30$ $(f_{S_1} = 6)$ и $S_2^2 = 90$ $(f_{S_2} = 33)$ **однородны,** то проверим, выборочные средние $\overline{Y_1} = 25$ и $\overline{Y_2} = 30$ на **статистически** существенное различие по критерию Стьюдента:

- экспериментальное значение критерия Стьюдента рассчитаем по уравнению (43)

$$t_э = \frac{\left|\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2\right|}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = \frac{|25 - 30|}{\sqrt{6\cdot 30 + 33\cdot 90}} \sqrt{\frac{7\cdot 34\cdot 39}{41}} = 1,340;$$

- табличное значение критерия Стьюдента $t_{f;\, p}$ при числе степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2 = 7 + 34 - 2 = 39$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{f;\, p} = t_{n_1+n_2-2;\, 0,95} = t_{39;\, 0,95} = 2,023.$$

Ответ. Различие между выборочными средними $\overline{Y_1} = 25$ и $\overline{Y_2} = 30$ **статистически** несущественно, так как согласно уравнению (44) $t_э = 1,340 < 2,023 = t_{39;\, 0,95}$.

Пример 1.3.4. Даны две выборки: $(\overline{Y_1} = 25,\ S_1^2 = 8,\ n_1 = 7)$ и $(\overline{Y_2} = 30,\ S_2^2 = 24,\ n_2 = 34)$. Проверить выборочные средние $\overline{Y_1} = 25$ и $\overline{Y_2} = 30$ на **статистически** существенное различие?

Решение. Чтобы корректно проверить выборочные средние $\overline{Y_1}$ и $\overline{Y_2}$ на **статистически** существенное различие, сначала проверим выборочные дисперсии S_1^2 и S_2^2 на однородность:

- экспериментальное значение критерия Фишера рассчитаем по уравнению (38)

$$F_э = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{24}{8} = 3,000, \text{ так как } S_2^2 > S_1^2;$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (39) – (40): на первом месте стоит число степеней свободы **большей** дисперсии $f_{числ} = f_{S_2} = n_2 - 1 = 34 - 1 = 33$, а на втором – число степеней свободы **меньшей** дисперсии, $f_{знам} = f_{S_1} = n_1 - 1 = 7 - 1 = 6$, и при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{числ},\, f_{знам};\, p} = F_{f_{S_2};\, f_{S_1};\, 0,95} = F_{n_2-1;\, n_1-1;\, 0,95} = F_{33;\, 6;\, 0,95} = 3,796.$$

- выборочные дисперсии $S_1^2 = 8$ $(f_{S_1} = 6)$ и $S_2^2 = 24$ $(f_{S_2} = 33)$ **однородны**, так как согласно уравнению (41) $F_э = 3,000 < 3,796 = F_{33;\,6;\,0,95}$.

Так как выборочные дисперсии $S_1^2 = 8$ $(f_{S_1} = 6)$ и $S_2^2 = 24$ $(f_{S_2} = 33)$ **однородны**, то проверим выборочные средние $\overline{Y_1} = 25$ и $\overline{Y_2} = 30$ на **статистически** существенное различие по критерию Стьюдента:

- экспериментальное значение критерия Стьюдента рассчитаем по уравнению (43)

$$t_э = \frac{\left|\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2\right|}{\sqrt{(n_1-1)\cdot S_1^2 + (n_2-1)\cdot S_2^2}}\sqrt{\frac{n_1\cdot n_2\cdot(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} = \frac{|25-30|}{\sqrt{6\cdot 8 + 33\cdot 24}}\sqrt{\frac{7\cdot 34\cdot 39}{41}} = 2,596\,;$$

- табличное значение критерия Стьюдента $t_{f;\,p}$ при числе степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2 = 39$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{f;\,p} = t_{n_1+n_2-2;\,0,95} = t_{39;\,0,95} = 2,023\,.$$

Ответ. Различие между выборочными средними $\overline{Y_1} = 25$ и $\overline{Y_2} = 30$ **статистически** существенно, так как согласно уравнениям (45), (47) $t_э = 2,596 > 2,023 = t_{39;\,0,95}$. Согласно уравнению (47) следует, что выборочное среднее $\overline{Y_2} = 30$ **статистически** существенно больше выборочного среднего $\overline{Y_1} = 25$, то есть $\mu_2 > \mu_1$ (качество 2-ой партии изделий лучше, чем 1-ой).

NB! Различие между выборочными средними $\boldsymbol{\overline{Y_1} = 25}$ **и** $\boldsymbol{\overline{Y_2} = 30}$ ***может быть статистически существенным, а может быть и статистически несущественным. Это зависит от выборочных дисперсий*** $\boldsymbol{S_1^2}$, $\boldsymbol{S_2^2}$ ***и их степеней свободы*** $\boldsymbol{f_1, f_2}$***. Например, различие между выборочными средними*** $\boldsymbol{\overline{Y_1} = 25}$ $\boldsymbol{(S_1^2 = 30,\ n_1 = 7)}$ ***и*** $\boldsymbol{\overline{Y_2} = 30}$ $\boldsymbol{(S_2^2 = 90,\ n_2 = 34)}$ ***статистически несущественно, в то же время различие между этими же выборочными средними, но с другими дисперсиями и степенями свободы*** $\boldsymbol{\overline{Y_1} = 25}$ $\boldsymbol{(S_1^2 = 8, n_1 = 7)}$ ***и*** $\boldsymbol{\overline{Y_2} = 30}$ $\boldsymbol{(S_2^2 = 24, n_2 = 34)}$ ***статистически существенно.***

Типовая задача

Рассматриваемый тип задачи условно можно назвать – «оценка социальной значимости рацпредложений и изобретений».

Цель. Освоить метод сравнительного анализа однотипной продукции 2-х партий по качеству путем определения **статистически** существенного различия между выборочными средними.

Формулировка задачи. Для производства продукции в механическом цехе используют сверла марки *A*. Качество сверл определяют по их стойкости. Показателем стойкости является время непрерывной работы сверла до переточки режущей кромки (мин). При очередной оптовой закупке сверл выясняется, что сверла марки *A* на базе, услугами которой пользовался цех, отсутствуют. Консультанты базы советуют купить сверла марки *B*, мотивируя это тем, что сверла марки *B* обладают **большей** стойкостью по сравнению со стойкостью сверл марки *A*. Однако сверла марки *B* стоят дороже, нежели сверла марки *A*. Так как речь идет о покупке крупной партии сверл (10 000 шт.), то главный инженер завода отдает распоряжение: провести **сравнительные испытания сверл** и сделать заключение о целесообразности покупки сверл той или иной марки. Экспериментальные данные по стойкости сверл, полученные при сравнительных испытаниях, выглядят следующим образом:

марка *A*: $(21,5; 14,2; 9,2; 18,4; 20,3; 4,6; 18,5; 11,0; 33,6; 20,4; 22,2; 24,0)$ мин;

марка *B*: $(19,8; 37,8; 33,6; 14,3; 14,8; 41,0; 21,6; 28,9; 16,1; 22,2)$ мин.

Математическая формулировка задачи. На основе сравнительных испытаний сверл 2 - х марок проверить выборочные средние $\overline{Y_A}$ и $\overline{Y_B}$ на **статистически** существенное различие и сделать заключение о целесообразности покупки сверл той или иной марки.

План решения задачи

1. Внимательно прочитать условие задачи.
2. Методами математической статистики провести предварительную обработку экспериментальных данных, полученных при испытании сверл марки *A*.
3. Методами математической статистики провести предварительную обработку экспериментальных данных, полученных при испытании сверл марки *B*.
4. Проверить выборочные дисперсии S_A^2 и S_B^2 на однородность по критерию Фишера.
5. Проверить выборочные средние $\overline{Y}_A$ и $\overline{Y}_B$ на **статистически** существенное различие по критерию Стьюдента.
6. Выдать рекомендации о покупке сверл той или иной марки.

NB! Все промежуточные расчеты производить с точностью не менее 4-х значащих цифр.

Решение задачи по плану

1. Пункт 1 выполнить самостоятельно.
2. Методами математической статистики проведем предварительную обработку экспериментальных данных выборки *A* объемом $n_A = 12$:

- выборочное среднее рассчитаем по уравнению (20)

$$\overline{Y}_A = \frac{\sum_{i=1}^{12} Y_{Ai}}{12} = \frac{21,5+14,2+9,2+18,4+20,3+4,6+18,5+11,0+33,6+20,4+22,2+24,0}{12} = 18,16\ ;$$

- выборочную дисперсию рассчитаем по уравнению (21)

$$S_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{12}\left(Y_{Ai}-\overline{Y}_A\right)^2}{12-1} = \frac{(21,5-18,16)^2+(14,2-18,16)^2+(9,2-18,16)^2+(18,4-18,16)^2}{12-1}+$$

$$+\frac{(20,3-18,16)^2+(4.6-18.16)^2+(18,5-18,16)^2+(11,0-18,16)^2+(33,6-18,16)^2}{12-1}+$$

$$+\frac{(20,4-18,16)^2+(22,2-18,16)^2+(24,0-18,16)^2}{12-1} = \frac{640,85}{11} = 58,26;$$

- выборочное стандартное отклонение рассчитаем по уравнению (22)

$$S_A = \sqrt{S_A^2} = \sqrt{58,26} = 7,633\ ;$$

- число степеней свободы f_{S_A} выборочной дисперсии S_A^2 рассчитаем по уравнению (23)

$$f_{S_A} = n_A - 1 = 12 - 1 = 11\ .$$

Проверим случайные значения выборки *A* объемом $n_A = 12$ на промах по критерию Смирнова - Граббса. Найдем случайное значение выборки Y_{Ai}, которое «убежало» от выборочного среднего $\overline{Y}_A = 18,16$ на максимальное расстояние, то есть такое значение Y_{Ai}, для которого разность $\left|Y_{Ai} - \overline{Y}_A\right| = \max$. Очевидно, что таким свойством обладает либо самое большое значение выборки $Y_{A9} = 33,6$, либо самое маленькое значение выборки $Y_{A6} = 4,6$. Так как $\left|Y_{A9} - \overline{Y}_A\right| = |33,6 - 18,16| = 15,64 > \left|Y_{A6} - \overline{Y}_A\right| = |4,6 - 18,16| = 13,56$, то проверим на промах $Y_{A9} = 33,6$:

- экспериментальное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_{эA}$ для $Y_{A9} = 33,6$ рассчитаем по уравнению (24)

$$\tau_{эA} = \frac{\max\left|Y_{Ai} - \overline{Y}_A\right|}{S_A} = \frac{\left|33,6 - 18,16\right|}{7,633} = \frac{15,44}{7,633} = 2,023 ;$$

- табличное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_{f_{\tau A};\, p}$ при числе степеней свободы $f_{\tau A} = n_A - 2 = 12 - 2 = 10$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 1

$$\tau_{f_{\tau A};\, p} = \tau_{n_A - 2;\, p} = \tau_{10;\, 0,95} = 2,387 .$$

Вывод. В выборке *А* промаха нет, так как согласно уравнению (25) $\tau_{э_A} = 2,023 < 2,387 = \tau_{10;\, 0,95}$.

Проверим случайные значения выборки *А* объемом $n_A = 12$ на принадлежность их нормальному закону распределения по критерию САО:

- экспериментальное значение критерия САО рассчитаем по уравнению (27)

$$\theta_э = \left|\frac{\text{САО}}{S_A} - 0,7979\right| = \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_A}\left|Y_{iA} - \overline{Y}_1\right|}{n_A S_A} - 0,7979\right| = \left|\frac{\left|21,5 - 18,16\right| + \left|14,2 - 18,16\right| + \left|9,2 - 18,16\right|}{12 \cdot 7,633}\right. +$$

$$+ \frac{\left|18,4 - 18,16\right| + \left|20,3 - 18,16\right| + \left|4,6 - 18,16\right| + \left|18,5 - 18,16\right| + \left|11,0 - 18,16\right| + \left|33,6 - 18,16\right|}{12 \cdot 7,633} +$$

$$\left. + \frac{\left|20,4 - 18,16\right| + \left|22,2 - 18,16\right| + \left|24,0 - 18,16\right|}{12 \cdot 7,633} - 0,7979\right| = \left|\frac{67,26}{12 \cdot 7,633} - 0,7979\right| = 0,0636 ;$$

- табличное значение критерия САО рассчитаем по уравнению (28)

$$\theta_{nA;\, p} = \frac{0,4}{\sqrt{n_A}} = \theta_{10;\, 0,95} = \frac{0,4}{\sqrt{12}} = 0,1155 .$$

Вывод. Случайные значения выборки *А* объемом $n_A = 12$ принадлежат нормальному закону распределения, так как согласно уравнению (29) $\theta_{эA} = 0,0636 < 0,1155 = \theta_{10;\, 0,95}$.

Так как среди случайных значений выборки *А* промаха нет и они принадлежат нормальному закону распределения, то выборка *А* является очищенной.

3. Методами математической статистики проведем предварительную обработку экспериментальных данных выборки *В* объемом $n_B = 10$:

- выборочное среднее рассчитаем по уравнению (20)

$$\overline{Y}_B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10} Y_{Bi}}{10} = \frac{19,8 + 37,8 + 33,6 + 14,3 + 14,8 + 41,0 + 21,6 + 28,9 + 16,1 + 22,2}{10} = 25,01 ;$$

- выборочную дисперсию рассчитаем по уравнению (21)

$$S_B^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10}\left(Y_{Bi} - \overline{Y}_B\right)^2}{10 - 1} = \frac{(19,8 - 25,01)^2 + (37,8 - 25,01)^2 + (33,6 - 25,01)^2 + (14,3 - 25,01)^2 + (14,8 - 25,01)^2}{10 - 1} +$$

$$+ \frac{(41,0 - 25,01)^2 + (21,6 - 25,01)^2 + (28,9 - 25,01)^2 + (16,1 - 25,01)^2 + (22,2 - 25,01)^2}{10 - 1} = \frac{853,19}{9} = 94,80 ;$$

- выборочное стандартное отклонение рассчитаем по уравнению (22)

$$S_B = \sqrt{S_B^2} = \sqrt{94,80} = 9,737 ;$$

- число степеней свободы f_{S_B} выборочной дисперсии S_B^2 рассчитаем по уравнению (23)

$$f_{S_B} = n_B - 1 = 10 - 1 = 9 .$$

Проверим случайные значения выборки *B* объемом $n_B = 10$ на промах по критерию Смирнова - Граббса. Найдем случайное значение выборки Y_{Bi}, которое «убежало» от выборочного среднего $\overline{Y}_B = 25,01$ на максимальное расстояние, то есть такое значение Y_{Bi}, для которого разность $\left|Y_{Bi} - \overline{Y}_B\right| = \max$. Очевидно, что таким свойством обладает либо самое большое значение выборки $Y_{B6} = 41,0$, либо самое маленькое значение $Y_{B4} = 14,3$. Так как $\left|Y_{B6} - \overline{Y}_B\right| = |41,0 - 25,01| = 15,99 > \left|Y_{B4} - \overline{Y}_B\right| = |14,3 - 25,01| = 10,71$, то на промах проверим $Y_{B6} = 41,0$:

- экспериментальное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_{эB}$ для $Y_{B6} = 41,0$ рассчитаем по уравнению (24)

$$\tau_{эB} = \frac{\max\left|Y_{Bi} - \overline{Y}_B\right|}{S_B} = \frac{|41,0 - 25,01|}{9,737} = \frac{15,99}{9,737} = 1,642 ;$$

- табличное значение критерия Смирнова – Граббса $\tau_{f_{\tau B};\, p}$ при числе степеней свободы $f_{\tau B} = n_B - 2 = 10 - 2 = 8$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 1

$$\tau_{f_{\tau B};\, p} = \tau_{n_B - 2;\, 0,95} = \tau_{8;\, 0,95} = 2,294 .$$

Вывод. В выборке *B* промаха нет, так как согласно уравнению (25) $\tau_{Bэ} = 1,642 < 2,294 = \tau_{8;\, 0,95}$.

Проверим случайные значения выборки *B* объемом $n_B = 10$ на принадлежность их нормальному закону распределения по критерию САО:

- экспериментальное значения критерия САО рассчитаем по уравнению (27)

$$\theta_{эA} = \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_B}\left|Y_{Bi} - \overline{Y}_B\right|}{n_B S_B} - 0,7979\right| = \left|\frac{|19,8 - 25,01| + |37,8 - 25,01| + |33,6 - 25,01| + |14,3 - 25,01| + |14,8 - 25,01|}{10 \cdot 9,737} + \right.$$

$$\left. + \frac{|41,0 - 25,01| + |21,6 - 25,01| + |28,9 - 25,01| + |16,1 - 25,01| + |22,2 - 25,01|}{10 \cdot 9,737} - 0,7979\right| = \left|\frac{82,52}{10 \cdot 9,737} - 0,7979\right| = 0,0496 ;$$

- табличное значения критерия САО рассчитаем по уравнению (28)

$$\theta_{n_B;\, p} = \theta_{10;\, 0,95} = \frac{0,4}{\sqrt{n_B}} = \frac{0,4}{\sqrt{10}} = 0,1265 .$$

Вывод. Случайные значения выборки *B* объемом $n_B = 10$ принадлежат нормальному закону распределения, так как согласно уравнению (29) $\theta_{эA} = 0,0496 < 0,1265 = \theta_{10;\, 0,95}$.

Так как в выборке *B* промаха нет и ее значения принадлежат нормальному закону распределения, то она является очищенной.

4. Проверим выборочные дисперсии обеих выборок на однородность по критерию Фишера:

- экспериментальное значение критерия Фишера рассчитаем по уравнению (38)

$$F_э = \frac{S_B^2}{S_A^2} = \frac{94,80}{58,26} = 1,627 \text{, так как } \quad S_B^2 > S_A^2 ;$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (39) – (40): на первом месте стоит число степени свободы **большей** дисперсии $f_{числ} = f_B = n_B - 1 = 10 - 1 = 9$, а на втором – число степени свободы **меньшей** дисперсии

$f_{\text{знам}} = f_A = n_A - 1 = 12 - 1 = 11$, и при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p} = F_{n_B-1;\, n_A-1;\, p} = F_{9;\,11;\,0,95} = 2,896.$$

Вывод. Выборочные дисперсии $S_A^2 = 58,26$ и $S_B^2 = 94,80$ однородны, так как согласно уравнению (41) $F_э = 1,627 < 2,896 = F_{9;\,11;\,0,95}$.

5. Так как выборочные дисперсии S_A^2 и S_B^2 однородны, то по критерию Стьюдента можно проверить выборочные средние $\overline{Y}_A = 18,16$ и $\overline{Y}_B = 25,01$ на **статистически** существенное различие:

- экспериментальное значение критерия Стьюдента рассчитаем по уравнению (43)

$$t_э = \frac{\left|\overline{Y}_A - \overline{Y}_B\right|}{\sqrt{(n_A-1)\cdot S_A^2 + (n_B-1)\cdot S_B^2}}\sqrt{\frac{n_A n_B (n_A + n_B - 2)}{n_A + n_B}} = \frac{\left|18,16 - 25,01\right|}{\sqrt{11\cdot 58,26 + 9\cdot 94,80}}\sqrt{\frac{12\cdot 10\cdot 20}{22}} = 1,851;$$

- табличное значение критерия Стьюдента $t_{f;\,p}$ при числе степеней свободы $f = n_A + n_B - 2 = 12 + 10 - 2 = 20$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{f;\,p} = t_{n_A+n_B-2;\,p} = t_{20;\,0,95} = 2,086.$$

Вывод. Различие между выборочными средними $\overline{Y}_\text{А} = 18,16$ и $\overline{Y}_\text{В} = 25,01$ **статистически** несущественно, так как согласно уравнению (44) $t_э = 1,851 < 2,086 = t_{20;\,0,95}$.

6. Рекомендации о покупке сверл. Так как выборочные средние $\overline{Y}_A = 18,16$ и $\overline{Y}_B = 25,01$ в данной задаче определяют среднюю стойкость сверл марок *A* и *B*, то **статистически** несущественное различие между ними означает, что качество сверл обоих типов одинаковое. Поэтому целесообразно купить сверла марки *A*, так как их качество такое же, как и качество сверл марки *B*, но они дешевле.

Ответ. 1) $\overline{Y}_A = 18,16$; $S_A^2 = 58,26$; $S_A = 7,633$; $n_A = 12$; $f_A = 11$. Выборка *A* является очищенной, так как промаха в ней нет $(\tau_{эA} = 2,023 < 2,387 = \tau_{10;\,0,95})$ и ее случайные значения принадлежат нормальному закону распределения $(\theta_{эA} = 0,0636 < 0,1155 = \theta_{12;\,0,95})$.

2) $\overline{Y}_B = 25,01$; $S_B^2 = 94,80$; $S_B = 9,736$; $n_B = 10$; $f_B = 9$. Выборка *B* является очищенной, так как промаха в ней нет $(\tau_{эB} = 1,642 < 2,294 = \tau_{8;\,0,95})$ и ее случайные значения принадлежат нормальному закону распределения $(\theta_{эB} = 0,0496 < 0,1265 = \theta_{10;\,0,95})$.

3) Выборочные дисперсии $S_A^2 = 58,26$ $(f_A = 11)$ и $S_B^2 = 94,80$ $(f_B = 9)$ **однородны**, так как $F_э = 1,627 < 2,896 = F_{9;\,11;\,0,95}$.

4) Различие между выборочными средними $\overline{Y}_A = 18,16$ и $\overline{Y}_B = 25,01$ **статистически** несущественно, так как $t_э = 1,851 < 2,086 = t_{20;\,0,95}$.

5) Следует купить сверла марки *A*, так как качество сверл обеих марок одинаковое, но сверла марки *A* дешевле.

Контрольные вопросы

1. Поясните, в чем смысл задачи, какова ее цель?
2. По какому параметру оценивается качество сверл?
3. Сформулируйте алгоритм проверки 2-х выборочных дисперсий на однородность по критерию Фишера.
4. Сформулируйте алгоритм проверки 2-х выборочных средних на **статистически** существенное различие по критерию Стьюдента.

Контрольные задачи

Таблица 3

Результаты испытаний свёрл (стойкость сверл, мин)

№	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10	
	А	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**
1	17,8	29,1	28,5	24,1	28,2	22,4	28,5	29,2	31,6	9,0	28,5	31,4	17,7	25,7	26,5	31,7	23,3	29,3	28,4	19,2
2	24,1	18,1	28,3	24,8	30,0	20,2	18,7	23,0	28,8	26,5	17,0	23,2	37,6	36,2	20,5	26,8	28,0	30,1	14,1	18,0
3	19,3	25,2	30,8	25,4	26,4	21,5	49,9	10,2	36,8	28,5	21,6	16,7	43,7	14,4	22,0	34,6	28,6	17,3	22,6	40,6
4	13,9	23,4	25,9	20,6	20,9	20,1	34,9	27,8	23,5	23,5	29,4	32,9	30,3	15,2	20,8	29,6	16,3	18,4	22,7	19,9
5	18,4	23,6	42,5	22,0	12,5	26,2	23,7	25,0	29,9	13,3	27,0	25,9	40,3	21,2	25,1	26,7	20,0	23,2	24,6	15,3
6	21,3	17,8	22,8	32,6	30,4	19,8	38,2	16,6	34,0	25,6	29,4	19,2	20,7	19,1	30,0	21,3	32,3	34,7	26,7	31,6
7	25,2	26,1	31,7	27,1	18,7	24,4	33,6	14,7	25,9	10,8	20,9	16,9	30,1	23,3	28,2	38,6	21,0	27,3	12,1	28,7
8	24,7	22,5	33,0	21,3	25,1	27,0	16,3	26,8	30,8	32,8	24,8	21,4	26,7	33,0	35,3	33,4	29,0	27,1	26,4	23,0
9	16,2	31,3	18,9	27,9	16,0	19,2	24,3	33,7	19,3	24,4	21,1	28,6	25,4	17,5	29,0	23,3	25,1	36,6	16,9	30,9
10	20,9	26,2	27,0	15,1	27,7	16,9	25,4	28,0	26,0	27,0	23,6	37,9	42,9	13,8	29,3	29,8	22,4	26,6	20,2	24,7
11	10,9		24,7	24,0	25,4	21,4	42,1	25,4	27,7	19,2	23,6	30,3	22,0	19,4	24,7	34,0	22,2	34,9	15,0	23,5
12	18,7		38,2	22,4	23,0	21,5	23,8	23,0	33,1	16,9	13,7	29,1	34,0		18,4	33,4	24,2	29,2	14,4	10,0
13	12,3		33,3		20,3	25,8	27,9	20,3	29,9	21,4		36,3	33,4			27,7	21,1		12,5	29,9
14	26,0		28,6		25,7	27,8	15,1	25,7		28,6		31,7	24,8			33,1	23,6		27,6	31,8
15	15,8		27,1			26,4	23,7			37,9		35,3				29,9			17,7	33,3
16	23,5		26,6			20,0	24,0			23,7		39,0							25,9	38,6
17	20,4					12,6				24,0		28,0							19,9	35,8
18										22,4										30,9

№	Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15		Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20	
	А	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**
1	20,3	19,1	31,9	25,2	22,1	27,9	23,3	22,9	28,1	19,3	33,7	22,4	20,2	25,8	23,4	36,3	15,0	32,8	32,7	28,0
2	37,6	13,8	24,4	14,6	20,0	27,7	33,2	23,9	23,5	21,5	33,0	26,3	39,4	26,1	27,3	22,3	24,2	32,2	26,5	34,0
3	15,6	30,7	31,5	24,9	28,0	15,7	22,0	30,8	25,6	29,1	32,9	21,6	21,0	14,6	15,8	31,9	20,8	28,8	23,4	10,9
4	31,0	31,7	23,9	22,0	26,4	27,6	10,3	26,6	24,3	23,6	19,8	23,1	31,3	20,7	22,7	20,4	34,5	30,3	21,4	20,7
5	35,8	37,1	40,9	29,8	11,2	24,7	21,3	30,8	31,0	20,6	15,8	19,4	29,4	31,8	25,8	27,7	23,5	28,8	39,9	38,9
6	27,7	22,2	25,7	37,2	23,0	27,2	22,1	23,6	27,5	22,4	20,2	4,4	14,2	19,4	26,6	28,3	32,5	38,9	28,2	16,6
7	12,5	34,8	28,2	10,8	28,4	21,9	22,6	24,6	28,6	25,8	22,4	18,6	34,5	28,1	26,1	36,9	24,8	35,6	22,1	26,8
8	27,6	23,2	27,2	23,2	30,4	22,4	23,8	31,1	31,3	16,6	22,4	5,2	18,6	26,7	17,4	37,0	20,9	21,6	24,1	35,1
9	17,7	26,8	34,9	16,4	26,1		29,5	32,5	25,3	23,8	30,3	14,7	12,1	18,2	23,3	26,1	27,1	30,1	27,0	26,9
10	25,9	29,4	29,2	20,4	29,0		13,9	34,5	30,4	22,9	27,8	27,7	11,4	15,6	17,8			38,8	31,4	16,0
11	19,9	19,1	24,9	29,6	13,4		13,6		28,7			24,0	36,5		16,7			29,3	35,5	26,8
12	9,8	23,3	37,5	26,7	20,8		26,2		20,1			19,5	31,3		23,6			30,5	33,7	22,3
13	10,8	33,0	27,7	21,3	26,2		12,9					18,2	24,8					34,4	20,2	20,8
14	23,2	17,5	33,1	28,6	12,9		23,4					15,6	20,9					27,7	22,4	33,5
15	16,4	13,8	29,9		23,4		22,6					24,8	27,1						22,4	24,8
16	20,4	19,4	23,4		22,6							20,9	24,8						30,3	20,9
17		17,2	23,3									27,1	23,4							27,1
18			29,8										26,0							27,8

№	Вариант 21		Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24		Вариант 25		Вариант 26		Вариант 27		Вариант 28		Вариант 29		Вариант 30	
	А	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**
1	33,0	15,2	42,4	33,1	18,8	31,8	33,8	30,7	22,7	29,1	29,4	20,2	24,2	20,9	27,3	9,7	31,5	24,2	21,5	19,8
2	26,1	13,6	26,1	27,9	27,1	40,9	36,2	27,1	18,2	29,9	33,3	21,0	34,2	18,5	24,2	19,4	27,9	18,1	14,2	37,8
3	39,4	33,1	12,4	26,4	21,1	36,6	22,5	21,4	20,1	22,0	27,5	15,5	25,7	35,4	15,7	21,5	30,1	25,9	9,2	33,6
4	26,5	22,2	32,3	16,9	28,8	36,2	6,5	40,5	23,0	34,5	27,3	20,9	22,4	16,4	15,4	24,5	25,9	18,3	18,4	14,3
5	36,2	16,7	35,9	25,4	31,1	32,5	28,1	25,0	18,3	28,5	35,7	22,6	16,8	23,9	11,5	23,6	28,9	29,0	20,3	14,8
6	39,1	30,1	42,8	22,1	30,7	37,0	9,7	23,7	25,0	34,4	25,2	22,2	21,7	29,8	28,6	20,7	35,4	23,8	4,6	41,0
7	22,9	36,7	26,8	11,1	24,0	31,9	21,0	20,6	26,5	20,1	21,5	23,2	35,6	28,4	30,2	24,5	26,9	29,0	18,5	21,6
8	27,4	17,4	22,3	16,2	22,3	28,6	26,2	22,0	14,6	28,7	26,3	19,2	21,2	23,0	17,5	15,9	32,0	30,5	11,0	28,9
9	32,3	34,6	20,8		20,8	31,2	35,0	27,2	17,8	19,8	20,2	26,4	34,0	32,6	26,5	19,2	32,9	28,8	33,6	16,1
10	29,9		33,5		13,7	33,2	17,9	10,2	18,9	20,6	26,6	19,0	22,0	35,6		25,3	29,5		20,4	22,2
11	32,4		43,5		25,5	34,4	14,2		25,8	35,1	29,3	21,8	26,9				25,2			28,3
12	38,8		35,1			26,3	21,8		21,1	29,8	23,7	26,4	32,0				28,0			30,0
13	29,3		29,8				19,2		22,9	32,6	28,4	26,8	26,6				29,6			26,9
14	30,5		32,6				26,4		27,4	35,6	23,0	22,3	32,7				26,6			31,5
15	34,4		35,6				19,0		32,3	32,0	32,6		27,0				32,7			
16	17,7		32,0						29,9	29,6	35,6						27,0			
17									21,7	26,6	21,2						23,6			
18										32,7	34,0									

МОДУЛЬ 2

ОДНОФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Перечень рассматриваемых вопросов:

- моделирование технических систем, описываемых стохастическими закономерностями, **однофакторными ортогонализированными** уравнениями регрессии **первого** и **второго** порядка;
- взаимосвязь натуральных и нормированных значений фактора;
- равномерный симметричный план (РСП);
- матрица планирования и предварительная обработка экспериментальных данных (выборочные средние и выборочные дисперсии в каждом опыте, проверка выборочных дисперсий на однородность по критерию Кохрена, дисперсия воспроизводимости и ее число степеней свободы);
- матрица моделирования и окончательная обработка экспериментальных данных (расчет коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** и **второго** порядка, проверка их на значимость по критерию Стьюдента, проверка уравнения регрессии на адекватность по критерию Фишера, расчет абсолютной погрешности прогнозирования параметра оптимизации);
- оптимизация изучаемой технической системы.

2.1. ОДНОФАКТОРНОЕ ОРТОГОНАЛИЗИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. РАВНОМЕРНЫЙ СИММЕТРИЧНЫЙ ПЛАН (РСП)

Теория с примерами (кратко)

1. **Однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка имеет вид

$$Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 . \qquad (48)$$

Уравнение регрессии строится в **нормированных** значениях факторов.

2. Натуральные значения фактора x_1 заданы на отрезке $x_1 \in [x_{1\min}; x_{1\max}]$. Взаимосвязь нормированных значений X_1 с натуральными значениями фактора x_1 определяется следующими уравнениями:

$$X_1 = \frac{x_1 - x_{10}}{\Delta x_1}; \qquad (49)$$

$$x_1 = x_{10} + X_1 \Delta x_1; \qquad (50)$$

$$x_{10} = \frac{x_{1\max} + x_{1\min}}{2}; \qquad (51)$$

$$\Delta x_1 = \frac{x_{1\max} - x_{1\min}}{2}, \qquad (52)$$

где x_{10}, Δx_1, $x_{1\max}$, $x_{1\min}$ – основной уровень, интервал варьирования, максимальное и минимальное натуральные значения фактора x_1 соответственно. Из уравнений (49) – (52) следует, что если $x_1 \in [x_{1\min}, x_{1\max}]$, то $X_1 \in [-1, +1]$.

Пример 2.1.1. Значения фактора x_1 заданы на отрезке $[40; 150]\ ^{\circ}\mathrm{C}$. Написать формулы взаимосвязи натуральных значений фактора x_1 с нормированными значениями X_1.

Решение. Так как $x_{1\min} = 40\ ^{\circ}\mathrm{C}$, $x_{1\max} = 150\ ^{\circ}\mathrm{C}$ то, используя уравнения (51), (52), получим:

$$x_{10} = \frac{x_{1\max} + x_{1\min}}{2} = \frac{150 + 40}{2} = 95\ ^{\circ}\mathrm{C};$$

$$\Delta x_1 = \frac{x_{1\max} - x_{1\min}}{2} = \frac{150 - 40}{2} = 55\ ^{\circ}\text{C}.$$

Используя уравнения (49), (50), напишем уравнения взаимосвязи x_1 и X_1:

$$X_1 = \frac{x_1 - x_{10}}{\Delta x_1} = \frac{x_1 - 95}{55};$$

$$x_1 = x_{10} + X_1 \Delta x_1 = 95 + 55 \cdot X_1.$$

3. **Матрица планирования (МП)** представляет собой таблицу, состоящую из N опытов с числом дублей n в каждом опыте, которая включает в себя столбцы: N, X_{1j}, x_{1j}, Y_{ji}, $\overline{Y_j}$, S_j^2. Значения Y_{ji} позволяют провести предварительную обработку экспериментальных данных (расчет выборочных средних $\overline{Y_j}$ и выборочных дисперсий S_j^2 в каждом опыте, проверка всех выборочных дисперсий на однородность по критерию Кохрена, расчет дисперсии воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$ и ее числа степеней свободы $f_{\text{воспр}}$). Число опытов N должно быть больше числа коэффициентов уравнения регрессии. Для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка рекомендуем брать число опытов не менее 5. Выбор числа опытов $N \geq 5$ обеспечивает надежную проверку на адекватность **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии, как **первого**, так и **второго** порядка. Следует отметить, что чем больше число опытов N и число дублей n, тем выше точность прогнозирования параметра Y по уравнению регрессии.

Для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка создадим **МП** на базе равномерного симметричного плана (РСП), в котором нормированные значения фактора $X_1 \in [-1;\ 1]$ выбирают на равноотстоящих друг от друга уровнях

$$X_{1j} = -1 + \frac{2 \cdot (j-1)}{N-1}, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{53}$$

NB! Нормированные значения фактора $\mathbf{X_{1j}}$ на базе РСП зависят только от числа опытов $\mathbf{N}$ и не зависят от интервала варьирования фактора $\mathbf{x_1 \in [x_{1\min}, x_{1\max}]}$.

С учетом уравнений (49) – (53) натуральные значения $x_1 \in [x_{1\min}; x_{1\max}]$ на базе РСП имеют следующие значения

$$x_{1j} = x_{1\min} + \frac{j-1}{N-1} \cdot (x_{1\max} - x_{1\min}), \quad j = 1, \ldots, N. \tag{54}$$

Пример 2.1.2. Создать **МП** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 5$, числом дублей n. Интервал варьирования $x_1 \in [60, 120]\ ^{\circ}\text{C}$. Результаты расчета внесены в таблицу 4.

Решение. Рассчитаем нормированные X_1 и натуральные значения фактора x_1 по уравнениям (53), (54), например, для $j = 1$

$$X_{11} = -1 + \frac{2(j-1)}{N-1} = -1 + \frac{2 \cdot (1-1)}{5-1} = -1 + \frac{2 \cdot 0}{4} = -1;$$

$$x_{11} = x_{1\min} + \frac{j-1}{N-1} \cdot (x_{1\max} - x_{1\min}) = 60 + \frac{1-1}{5-1} \cdot (120 - 60) = 60 + \frac{0}{4} \cdot 60 = 60\ ^{\circ}\text{C};$$

для $j = 4$

$$X_{14} = -1 + \frac{2 \cdot (j-1)}{N-1} = -1 + \frac{2 \cdot (4-1)}{5-1} = -1 + \frac{2 \cdot 3}{4} = 0{,}5;$$

$$x_{14} = x_{1\min} + \frac{j-1}{N-1} \cdot (x_{1\max} - x_{1\min}) = 60 + \frac{4-1}{5-1} \cdot (120 - 60) = 60 + \frac{3}{4} \cdot 60 = 105\ ^{\circ}\text{C}.$$

Значения факторов для $j = 2,\ 3,\ 5$ рассчитайте самостоятельно.

Таблица 4

МП для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 5$.
Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N	X_{1j}	x_{1j}	Y_{j1}	Y_{ji}	Y_{jn}	$\overline{Y_j}$	S_j^2
1	– 1,0	60	Y_{11}	Y_{1i}	Y_{1n}	$\overline{Y_1}$	S_1^2
2	– 0,5	75	Y_{21}	Y_{2i}	Y_{2n}	$\overline{Y_2}$	S_2^2
3	0,0	90	Y_{31}	Y_{3i}	Y_{3n}	$\overline{Y_3}$	S_3^2
4	0,5	105	Y_{41}	Y_{4i}	Y_{4n}	$\overline{Y_4}$	S_4^2
5	1,0	120	Y_{51}	Y_{5i}	Y_{5n}	$\overline{Y_5}$	S_5^2
$G_э$		$G_{n-1;\,N;\,p}\ \dfrac{1}{n}$		$S^2_{воспр}$ $\quad f_{воспр}$		$\sum\limits_{j=1}^{5} S_j^2$	

Пример 2.1.3. Создать **МП** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 6$, числом дублей *n*. Интервал варьирования $x_1 \in [60, 120]$ °С. Результаты расчета внесены в таблицу 5.

Решение. Рассчитаем нормированные X_1 и натуральные значения фактора x_1 по уравнениям (53), (54), например, для $j = 2$

$$X_{12} = -1 + \frac{2 \cdot (j-1)}{N-1} = -1 + \frac{2 \cdot (2-1)}{6-1} = -1 + \frac{2 \cdot 1}{5} = -\,0,6\,;$$

$$x_{12} = x_{1\min} + \frac{j-1}{N-1} \cdot (x_{1\max} - x_{1\min}) = 60 + \frac{2-1}{6-1} \cdot (120-60) = 60 + \frac{1}{5} \cdot 60 = 72\ ^{\circ}\mathrm{C}\,;$$

для $j = 4$

$$X_{14} = -1 + \frac{2 \cdot (j-1)}{N-1} = -1 + \frac{2 \cdot (4-1)}{6-1} = -1 + \frac{2 \cdot 3}{5} = 0,2\,;$$

$$x_{14} = x_{1\min} + \frac{j-1}{N-1} \cdot (x_{1\max} - x_{1\min}) = 60 + \frac{4-1}{6-1} \cdot (120-60) = 60 + \frac{3}{5} \cdot 60 = 96\ ^{\circ}\mathrm{C}\,.$$

Значения факторов для $j = 1,\ 3,\ 5,\ 6$ рассчитайте самостоятельно.

Таблица 5

МП для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 6$.
Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N	X_{1j}	x_{1j}	Y_{j1}	Y_{ji}	Y_{jn}	$\overline{Y_j}$	S_j^2
1	– 1,0	60	Y_{11}	Y_{1i}	Y_{1n}	$\overline{Y_1}$	S_1^2
2	– 0,6	72	Y_{21}	Y_{2i}	Y_{2n}	$\overline{Y_2}$	S_2^2
3	– 0,2	84	Y_{31}	Y_{3i}	Y_{3n}	$\overline{Y_3}$	S_3^2
4	0,2	96	Y_{41}	Y_{4i}	Y_{4n}	$\overline{Y_4}$	S_4^2
5	0,6	108	Y_{51}	Y_{5i}	Y_{5n}	$\overline{Y_5}$	S_5^2
6	1,0	120	Y_{61}	Y_{6i}	Y_{6n}	$\overline{Y_6}$	S_6^2
$G_э$		$G_{n-1;\,N;\,p}$		$S^2_{воспр}$ $\quad f_{воспр}$		$\sum\limits_{j=1}^{6} S_j^2$	

Пример 2.1.4. Создать **МП** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 9$, числом дублей *n*. Интервал варьирования $x_1 \in [60, 120]$ °С. Результаты расчета внесены в таблицу 6.

Решение. Рассчитаем нормированные X_1 и натуральные значения фактора x_1 по уравнениям (53), (54), например, для $j = 3$

$$X_{13} = -1 + \frac{2 \cdot (j-1)}{N-1} = -1 + \frac{2 \cdot (3-1)}{9-1} = -1 + \frac{2 \cdot 2}{8} = -0{,}50\,;$$

$$x_{13} = x_{1\min} + \frac{j-1}{N-1} \cdot (x_{1\max} - x_{1\min}) = 60 + \frac{3-1}{9-1} \cdot (120-60) = 60 + \frac{2}{8} \cdot 60 = 75{,}0\ ^{\circ}\mathrm{C}\,;$$

для $j = 5$

$$X_{15} = -1 + \frac{2 \cdot (j-1)}{N-1} = -1 + \frac{2 \cdot (5-1)}{9-1} = -1 + \frac{2 \cdot 4}{8} = 0\,;$$

$$x_{15} = x_{1\min} + \frac{j-1}{N-1} \cdot (x_{1\max} - x_{1\min}) = 60 + \frac{5-1}{9-1} \cdot (120-60) = 60 + \frac{4}{8} \cdot 60 = 90{,}0\ ^{\circ}\mathrm{C}\,;$$

для $j = 8$

$$X_{18} = -1 + \frac{2 \cdot (j-1)}{N-1} = -1 + \frac{2 \cdot (8-1)}{9-1} = -1 + \frac{2 \cdot 7}{8} = 0{,}75\,;$$

$$x_{18} = x_{1\min} + \frac{j-1}{N-1} \cdot (x_{1\max} - x_{1\min}) = 60 + \frac{8-1}{9-1} \cdot (120-60) = 60 + \frac{7}{8} \cdot 60 = 112{,}5\ ^{\circ}\mathrm{C}.$$

Значения факторов для $j = 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9$ рассчитайте самостоятельно.

Таблица 6

МП для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 9$. Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N	X_{1j}	x_{1j}	Y_{j1}	Y_{ji}	Y_{jn}	$\overline{Y_j}$	S_j^2
1	– 1,0	60,0	Y_{11}	Y_{1i}	Y_{1n}	$\overline{Y_1}$	S_1^2
2	– 0,75	67,5	Y_{21}	Y_{2i}	Y_{2n}	$\overline{Y_2}$	S_2^2
3	– 0,50	75,0	Y_{31}	Y_{3i}	Y_{3n}	$\overline{Y_3}$	S_3^2
4	– 0,25	82,5	Y_{41}	Y_{4i}	Y_{4n}	$\overline{Y_4}$	S_4^2
5	0,00	90,0	Y_{51}	Y_{5i}	Y_{5n}	$\overline{Y_5}$	S_5^2
6	0,25	97,5	Y_{61}	Y_{6i}	Y_{6n}	$\overline{Y_6}$	S_6^2
7	0,50	105,0	Y_{71}	Y_{7i}	Y_{7n}	$\overline{Y_7}$	S_7^2
8	0,75	112,5	Y_{81}	Y_{8i}	Y_{8n}	$\overline{Y_8}$	S_8^2
9	1,00	120,0	Y_{91}	Y_{9i}	Y_{9n}	$\overline{Y_9}$	S_9^2
$G_э$		$G_{n-1;\,N;\,p}$		$S^2_{воспр}$	$f_{воспр}$	$\sum_{j=1}^{9} S_j^2$	

4. Предварительная обработка экспериментальных данных **МП** для N опытов $(j = 1, \ldots, N)$ и n дублей в каждом опыте $(i = 1, \ldots, n)$.

4.1. Расчет выборочных параметров:

- выборочное среднее в каждом опыте

$$\overline{Y_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{ji}}{n}, \quad j = 1, \ldots, N\,; \tag{55}$$

- выборочная дисперсия в каждом опыте

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_{ji} - \overline{Y_j})^2}{n-1}, \quad j = 1, \ldots, N\,. \tag{56}$$

4.2. Проверка выборочных дисперсий на однородность по критерию Кохрена при условии, что объем всех выборок одинаковый $n_1 = \ldots = n_N = n$:

- экспериментальное значение критерия Кохрена

$$G_э = \frac{\max S_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{N} S_j^2}; \tag{57}$$

- табличное значение критерия Кохрена $G_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$, в котором на первом месте стоит число степеней свободы максимальной дисперсии $f_{числ} = n-1$, а на втором – число степеней свободы, равное числу всех дисперсий $f_{знам} = N$, при доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выбирают из таблицы приложения 5;

- выборочные дисперсии $S_1^2, ..., S_N^2$ **однородны**, если

$$G_э < G_{n-1;\, N;\, p}; \tag{58}$$

- выборочные дисперсии $S_1^2, ..., S_N^2$ **неоднородны**, если

$$G_э \ge G_{n-1;\, N;\, p}, \tag{59}$$

Если выборочные дисперсии неоднородны, то дальнейшее моделирование изучаемой технической системы предложенным математическим аппаратом – некорректно. Необходимо переделать опыт, в котором выборочная дисперсия наибольшая.

Пример 2.1.5. Даны выборочные дисперсии: $S_1^2 = 2{,}0$; $S_2^2 = 1{,}0$; $S_3^2 = 9{,}0$; $S_4^2 = 4{,}0$; $S_5^2 = 1{,}0$; $S_6^2 = 3{,}0$, каждая из которых определена с числом дублей $n = 5$. Проверить выборочные дисперсии на однородность.

Решение. Так как объем всех выборок одинаковый, то проверку выборочных дисперсий проведем по критерию Кохрена:

- экспериментальное значение критерия Кохрена рассчитаем по уравнению (57)

$$G_э = \frac{\max S_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{N} S_j^2} = \frac{9{,}0}{2{,}0+1{,}0+9{,}0+4{,}0+1{,}0+3{,}0} = \frac{9{,}0}{20{,}0} = 0{,}450;$$

- табличное значение критерия Кохрена $G_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$, в котором на первом месте стоит число степеней свободы максимальной дисперсии $f_{числ} = n-1 = 5-1 = 4$, а на втором – число степеней свободы, равное числу всех дисперсий $f_{знам} = N = 6$, при доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выберем из таблицы приложения 5

$$G_{f_{числ};\, f_{знам};\, p} = G_{n-1;\, N;\, 0{,}95} = G_{4;\, 6;\, 0{,}95} = 0{,}480.$$

Ответ. Все 6 выборочных дисперсий **однородны**, так как согласно уравнению (58) $G_э = 0{,}450 < 0{,}480 = G_{4;\, 6;\, 0{,}95}$.

4.3. Если число дублей $\boldsymbol{n > 6}$, то экспериментальные данные каждого опыта следует поверить на промах по критерию Смирнова – Граббса, а также на принадлежность их нормальному закону распределения по критерию САО. В случае обнаружения промаха или отклонения экспериментальных данных от нормального закона распределения в каком-либо опыте, последний необходимо переделать. Если число дублей $\boldsymbol{n \le 6}$, то проверку случайных значений выборки на промах и на принадлежность их к нормальному закону распределения можно не проводить.

4.4. Если все выборочные дисперсии однородны, то дисперсия воспроизводимости $S_{воспр}^2$ и ее число степеней свободы $f_{воспр}$ рассчитывают по уравнениям:

$$S_{воспр}^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} S_j^2}{N}; \tag{60}$$

$$f_{воспр} = N(n-1). \tag{61}$$

Пример 2.1.6. Для выборочных дисперсий примера 2.1.5 рассчитать дисперсию воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{воспр}}$.

Решение. Так как выборочные дисперсии однородны, то по уравнениям (60), (61)

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} S_j^2}{N} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{6} S_j^2}{6} = \frac{2,0+1,0+9,0+4,0+1,0+3,0}{6} = \frac{20,0}{6} = 3,333;$$

$$f_{\text{воспр}} = N(n-1) = 6 \cdot (5-1) = 24.$$

5. **Матрица моделирования (ММ)** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка представляет собой таблицу, состоящую из N опытов $(j=1,...,N)$ с числом дублей n $(i=1,...,n)$, включает в себя столбцы $N, X_{0j}, X_{1j}, \overline{Y_j}, X_{0j}\overline{Y_j}, X_{1j}\overline{Y_j}$, $Y_j^p, \left(\overline{Y_j}-Y_j^p\right)^2$, значения которых позволяют провести окончательную обработку экспериментальных данных (расчет коэффициентов уравнения регрессии b_0, b_1, проверка их на значимость по критерию Стьюдента, проверка уравнения регрессии на адекватность по критерию Фишера, расчет абсолютной ошибки прогнозирования изучаемого параметра в случае адекватности уравнения регрессии). Столбец фиктивного фактора X_0 состоит из элементов $X_{0j}=+1$. Столбец нормированных значений фактора X_1 в **ММ** переносятся из **МП** (см. таблицы 4 – 6).

Пример 2.1.7. Создать **ММ** (см. **МП** – таблицу 4) для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N=5$ (таблица 7).

Таблица 7

ММ для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N=5$.
Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j}-Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1,0	$\overline{Y_1}$	$1\cdot\overline{Y_1}$	$-1,0\cdot\overline{Y_1}$	Y_1^p	$(\overline{Y_1}-Y_1^p)^2$
2	+ 1	– 0,5	$\overline{Y_2}$	$1\cdot\overline{Y_2}$	$-0,5\cdot\overline{Y_2}$	Y_2^p	$(\overline{Y_2}-Y_2^p)^2$
3	+ 1	0	$\overline{Y_3}$	$1\cdot\overline{Y_3}$	$0\cdot\overline{Y_3}$	Y_3^p	$(\overline{Y_3}-Y_3^p)^2$
4	+ 1	0,5	$\overline{Y_4}$	$1\cdot\overline{Y_4}$	$0,5\cdot\overline{Y_4}$	Y_4^p	$(\overline{Y_4}-Y^p)^2$
5	+ 1	1,0	$\overline{Y_5}$	$1\cdot\overline{Y_5}$	$1,0\cdot\overline{Y_5}$	Y_5^p	$(\overline{Y_5}-Y_5^p)^2$
$\sum\limits_{j=1}^{5} X_{0j}^2 = 5$		$\sum\limits_{j=1}^{5} X_{1j}^2 = 2,500$		$\sum\limits_{j=1}^{5} X_{0j}\overline{Y_j}$	$\sum\limits_{j=1}^{5} X_{1j}\overline{Y_j}$	$\varphi = \sum\limits_{j=1}^{5} (\overline{Y_j}-Y_j^p)^2$	

Пример 2.1.8. Создать **ММ** (см. **МП** – таблицу 5) для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N=6$ (таблица 8).

Таблица 8

ММ для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N=6$.
Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j}-Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1,0	$\overline{Y_1}$	$1\cdot\overline{Y_1}$	$-1,0\cdot\overline{Y_1}$	Y_1^p	$(\overline{Y_1}-Y_1^p)^2$
2	+ 1	– 0,6	$\overline{Y_2}$	$1\cdot\overline{Y_2}$	$-0,6\cdot\overline{Y_2}$	Y_2^p	$(\overline{Y_2}-Y_2^p)^2$
3	+ 1	– 0,2	$\overline{Y_3}$	$1\cdot\overline{Y_3}$	$-0,2\cdot\overline{Y_3}$	Y_3^p	$(\overline{Y_3}-Y_3^p)^2$
4	+ 1	0,2	$\overline{Y_4}$	$1\cdot\overline{Y_4}$	$0,2\cdot\overline{Y_4}$	Y_4^p	$(\overline{Y_4}-Y^p)^2$
5	+ 1	0,6	$\overline{Y_5}$	$1\cdot\overline{Y_5}$	$0,6\cdot\overline{Y_5}$	Y_5^p	$(\overline{Y_5}-Y_5^p)^2$
6	+ 1	1,0	$\overline{Y_6}$	$1\cdot\overline{Y_6}$	$1,0\cdot\overline{Y_6}$	Y_6^p	$(\overline{Y_6}-Y_6^p)^2$
$\sum\limits_{j=1}^{6} X_{0j}^2 = 6$		$\sum\limits_{j=1}^{6} X_{1j}^2 = 2,800$		$\sum\limits_{j=1}^{6} X_{0j}\overline{Y_j}$	$\sum\limits_{j=1}^{6} X_{1j}\overline{Y_j}$	$\varphi = \sum\limits_{j=1}^{6} (\overline{Y_j}-Y_j^p)^2$	

Пример 2.1.9. Создать **ММ** (см. **МП** – таблицу 6) для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 9$ (таблица 9).

Таблица 9

ММ для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 9$.
Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j}-Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1,00	$\overline{Y_1}$	$1\cdot\overline{Y_1}$	$-1{,}00\cdot\overline{Y_1}$	Y_1^p	$(\overline{Y_1}-Y_1^p)^2$
2	+ 1	– 0,75	$\overline{Y_2}$	$1\cdot\overline{Y_2}$	$-0{,}75\cdot\overline{Y_2}$	Y_2^p	$(\overline{Y_2}-Y_2^p)^2$
3	+ 1	– 0,50	$\overline{Y_3}$	$1\cdot\overline{Y_3}$	$-0{,}50\cdot\overline{Y_3}$	Y_3^p	$(\overline{Y_3}-Y_3^p)^2$
4	+ 1	– 0,25	$\overline{Y_4}$	$1\cdot\overline{Y_4}$	$-0{,}25\cdot\overline{Y_4}$	Y_4^p	$(\overline{Y_4}-Y^p)^2$
5	+ 1	0,00	$\overline{Y_5}$	$1\cdot\overline{Y_5}$	$0\cdot\overline{Y_5}$	Y_5^p	$(\overline{Y_5}-Y_5^p)^2$
6	+ 1	0,25	$\overline{Y_6}$	$1\cdot\overline{Y_6}$	$0{,}25\cdot\overline{Y_6}$	Y_6^p	$(\overline{Y_6}-Y_6^p)^2$
7	+ 1	0,50	$\overline{Y_7}$	$1\cdot\overline{Y_7}$	$0{,}50\cdot\overline{Y_7}$	Y_7^p	$(\overline{Y_7}-Y_7^p)^2$
8	+ 1	0,75	$\overline{Y_8}$	$1\cdot\overline{Y_8}$	$0{,}75\cdot\overline{Y_8}$	Y_8^p	$(\overline{Y_8}-Y_8^p)^2$
9	+ 1	1,00	$\overline{Y_9}$	$1\cdot\overline{Y_9}$	$1{,}00\cdot\overline{Y_9}$	Y_9^p	$(\overline{Y_9}-Y_9^p)^2$
$\sum\limits_{j=1}^{9} X_{0j}^2 = 9$		$\sum\limits_{j=1}^{9} X_{1j}^2 = 3{,}750$		$\sum\limits_{j=1}^{9} X_{0j}\overline{Y_j}$	$\sum\limits_{j=1}^{9} X_{1j}\overline{Y_j}$	$\varphi = \sum\limits_{j=1}^{9} (\overline{Y_j}-Y_j^p)^2$	

В данном пособии для моделирования технических систем, описываемых стохастическими закономерностями, используются уравнения регрессии в виде степенного ряда, состоящего **только** из ортогональных факторов.

Определение. Два фактора, например, X_0 и X_1 являются ортогональными, если выполняется равенство $\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}X_{1j} = 0$.

Пример 2.1.10. Доказать, что факторы X_0 и X_1 РСП ортогональны.

Доказательство. Покажем сначала, что для нормированных значений фактора X_1 РСП выполняется равенство $X_{1j} + X_{1(N+1-j)} = 0$. Например, для $N = 6$: $X_{11} + X_{16} = 0$; $X_{12} + X_{15} = 0$; $X_{13} + X_{14} = 0$ (см., например, таблицу 8). Используя уравнение (53), рассчитаем величины:

$$X_{1j} = -1 + \frac{2\cdot(j-1)}{N-1} = \frac{-N+1+2j-2}{N-1} = \frac{-N+2j-1}{N-1} = -\frac{N-2j+1}{N-1};$$

$$X_{1(N+1-j)} = -1 + \frac{2\cdot(N+1-j-1)}{N-1} = -1 + \frac{2\cdot(N-j)}{N-1} = \frac{-N+1+2N-2j}{N-1} = \frac{N-2j+1}{N-1}.$$

Складывая выражения X_{1j} и $X_{1(N+1-j)}$, получаем $X_{1j} + X_{1(N+1-j)} = 0$ для всех $j = 1, ..., N$.

С учетом полученного равенства и того, что значения фиктивного фактора $X_{0j} = +1$ для всех $j = 1, ..., N$, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} X_{0j}X_{1j} = \sum_{j=1}^{N} X_{1j} = X_{11} + X_{12} + X_{13} + ... X_{1(N-2)} + X_{1(N-1)} + X_{1N} = 0.$$

Ответ. Факторы X_0 и X_1 РСП ортогональны, так как $\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}X_{1j} = 0$.

Ортогональность факторов позволяет определять коэффициенты регрессии и их доверительные интервалы независимо друг от друга.

5.1. Коэффициенты b_0, b_1 **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0X_0 + b_1X_1$, при условии, что факторы X_0 и X_1 ортогональны, рассчитывают по уравнениям:

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{0j}\overline{Y_j}}{\sum_{j=1}^{N} X_{0j}^2}; \qquad (62)$$

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{1j}\overline{Y_j}}{\sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2}. \qquad (63)$$

Для расчета коэффициентов b_0, b_1 по уравнениям (62), (63) в **ММ** (см., например, таблицы 7 – 9) строят вспомогательные столбцы $X_{0j}\overline{Y_j}$, $X_{1j}\overline{Y_j}$ и рассчитывают их суммы $\sum_{j=1}^{N} X_{0j}\overline{Y_j}$, $\sum_{j=1}^{N} X_{1j}\overline{Y_j}$.

Суммы $\sum_{j=1}^{N} X_{0j}^2$ и $\sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2$ получают прямым подсчетом столбцов **ММ** (см., например, таблицы 7 – 9):

$$\sum_{j=1}^{N} X_{0j}^2 = N, \text{ так как } X_{0j} = 1 \text{ для всех } j = 1, ..., N; \qquad (64)$$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{1j}^2 = (-1)^2 + (-0,5)^2 + 0^2 + 0,5^2 + 1^2 = 2,500; \qquad (65)$$

$$\sum_{j=1}^{6} X_{1j}^2 = (-1)^2 + (-0,6)^2 + (-0,2)^2 + 0,2^2 + 0,6^2 + 1^2 = 2,800; \qquad (66)$$

$$\sum_{j=1}^{9} X_{1j}^2 = (-1)^2 + (-0,75)^2 + (-0,5)^2 + (-0,25)^2 + 0^2 + 0,25^2 + 0,5^2 + 0,75^2 + 1^2 = 3,750. \qquad (67)$$

Если такой способ расчета покажется громоздким, то можно воспользоваться следующим уравнением, справедливым **только для РСП**

$$\sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2 = \frac{N(N+1)}{3(N-1)}. \qquad (68)$$

В таблице 10 приведены значения сумм факторов $\sum_{j=1}^{N} X_{0j}^2$ и $\sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2$ для $N = 5,\ 6,\ 9,\ 11,\ 17,\ 21$, рассчитанные по уравнениям (64), (68).

Таблица 10

Значения сумм квадратов факторов для N опытов РСП

N	$\sum_{j=1}^{N} X_{0j}^2$	$\sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2$
5	5	2,500
6	6	2,800
9	9	3,750
11	11	4,400
17	17	6,375
21	21	7,700

Сравнительный анализ показывает, что результаты расчета $\sum_{j=1}^{N} X_{0j}^2$ и $\sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2$ по уравнениям (64), (68), которые внесены в таблицу 10, совпадают с результатами расчетов по уравнениям (65) – (67).

Пример 2.1.11. Рассчитать коэффициенты **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + b_1 X_1$, если **ММ** с числом опытов $N = 11$ имеет следующий вид (таблица 11). Столбцы **ММ** Y_j^p, $(\overline{Y}_j - Y_j^p)^2$ исключены, так как в данной задаче они не нужны.

Решение. Для построения **ММ** с числом опытов $N = 11$ воспользуемся тем, что все $X_{0j} = +1$, а нормированные значения фактора X_{1j} рассчитаем по уравнению (53) (результаты расчета внесены в таблицу 11), например, для $j = 4$

$$X_{14} = -1 + \frac{2 \cdot (j-1)}{N-1} = -1 + \frac{2 \cdot (4-1)}{11-1} = -1 + \frac{2 \cdot 3}{10} = -0,4\,;$$

для $j = 9$

$$X_{19} = -1 + \frac{2 \cdot (j-1)}{N-1} = -1 + \frac{2 \cdot (9-1)}{11-1} = -1 + \frac{2 \cdot 8}{10} = 0,6\,.$$

Из таблицы 11 находим, что $\sum\limits_{j=1}^{11} X_{0j}\overline{Y}_j = 33,00$ и $\sum\limits_{j=1}^{11} X_{1j}\overline{Y}_j = -8,800$, а из таблицы 10 $\sum\limits_{j=1}^{11} X_{0j}^2 = 11$ и $\sum\limits_{j=1}^{11} X_{1j}^2 = 4,400$.

Рассчитаем коэффициенты b_0, b_1 по уравнениям (62) – (63):

$$b_0 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{11} X_{0j}\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{11} X_{0j}^2} = \frac{33,00}{11} = 3,000\,;$$

$$b_1 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} X_{1j}\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{N} X_{1j}^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{11} X_{1j}\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{11} X_{1j}^2} = \frac{-8,800}{4,400} = -2,000\,.$$

Таблица 11

ММ для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + b_1X_1$ на базе РСП с числом опытов $N = 11$.
Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	$\overline{Y}_j$	$X_{0j}\overline{Y}_j$	$X_{1j}\overline{Y}_j$
1	+ 1	– 1,0	5,0	5,000	– 5,000
2	+ 1	– 0,8	4,6	4,600	– 3,680
3	+ 1	– 0,6	4,2	4,200	– 2,520
4	+ 1	– 0,4	3,8	3,800	– 1,520
5	+ 1	– 0,2	3,4	3,400	– 0,680
6	+ 1	0	3,0	3,000	0
7	+ 1	0,2	2,6	2,600	0,520
8	+ 1	0,4	2,2	2,200	0,880
9	+ 1	0,6	1,8	1,800	1,080
10	+ 1	0,8	1,4	1,400	1,120
11	+ 1	1,0	1,0	1,000	1,000
$\sum\limits_{j=1}^{11} X_{0j}^2 = 11$		$\sum\limits_{j=1}^{11} X_{1j}^2 = 4,400$		$\sum\limits_{j=1}^{11} X_{0j}\overline{Y}_j = 33,00$	$\sum\limits_{j=1}^{11} X_{1j}\overline{Y}_j = -8,800$

Ответ. Коэффициенты **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + b_1X_1$ равны: $b_0 = 3,000$; $b_1 = -2,000$.

5.2. Проверка коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на значимость по критерию Стьюдента.

Дисперсии значимости коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнении регрессии **первого** порядка при условии, что факторы X_0 и X_1 ортогональны, рассчитывают по уравнениям:

$$S^2(b_0) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}^2}; \tag{69}$$

$$S^2(b_1) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{N} X_{1j}^2}. \tag{70}$$

Доверительные интервалы коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка Δb_0, Δb_1 рассчитывают по критерию Стьюдента:

$$\Delta b_0 = t_{f;\,p} \cdot S(b_0); \tag{71}$$

$$\Delta b_1 = t_{f;\,p} \cdot S(b_1), \tag{72}$$

где $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N(n-1)$ и доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выбирают из таблицы приложения 2.

Коэффициенты **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка значимы, если справедливы следующие неравенства:

$$\Delta b_0 < |b_0|; \tag{73}$$

$$\Delta b_1 < |b_1|. \tag{74}$$

Если для какого-либо регрессионного коэффициента указанное неравенство не выполняется, то этот регрессионный коэффициент незначим и его следует исключить из полученного уравнения регрессии.

Пример 2.1.12. Пусть в примере 2.1.11 число дублей в каждом опыте $n = 7$ (число опытов $N = 11$), а дисперсия воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}} = 1{,}500$. Проверить найденные в примере 2.1.11 коэффициенты $b_0 = 3{,}000$; $b_1 = -\,2{,}000$ **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на значимость.

Решение. Дисперсии значимости коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнении регрессии **первого** порядка при условии, что факторы X_0 и X_1 ортогональны, рассчитаем по уравнениям (69), (70):

$$S^2(b_0) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}^2} = \frac{1{,}500}{7 \cdot 11} = 0{,}01948, \quad S(b_0) = \sqrt{0{,}01948} = 0{,}1396;$$

$$S^2(b_1) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{N} X_{1j}^2} = \frac{1{,}500}{7 \cdot 4{,}400} = 0{,}04870, \quad S(b_1) = \sqrt{0{,}04830} = 0{,}2207.$$

Доверительные интервалы коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка Δb_0, Δb_1 используя критерий Стьюдента, рассчитаем по уравнениям (71), (72):

$$\Delta b_0 = t_{f;\,p} \cdot S(b_0) = t_{N(n-1);\,p} \cdot S(b_0) = t_{66;\,0{,}95} \cdot S(b_0) = 1{,}997 \cdot 0{,}1396 = 0{,}2788;$$

$$\Delta b_1 = t_{f;\,p} \cdot S(b_1) = t_{N(n-1);\,p} \cdot S(b_1) = t_{66;\,0{,}95} \cdot S(b_1) = 1{,}997 \cdot 0{,}2207 = 0{,}4407,$$

где $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N(n-1) = 11 \cdot (7-1) = 66$ и доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{f;\,p} = t_{N(n-1);\,p} = t_{66;\,0{,}95} = 1{,}997.$$

Рассчитанные коэффициенты **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка значимы, так как справедливы неравенства (73)

$$\Delta b_0 = 0,2788 < 3,000 = |b_0| ;$$

$$\Delta b_1 = 0,4407 < |-2,000| = |b_1| .$$

Корректно оформим результаты расчета коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка b_0, b_1 и их доверительных интервалов Δb_0, Δb_1 (см. раздел 1.1, п. 3):

$$b_0 = 3,000 \pm 0,2788 = 3,00 \pm 0,28 ;$$

$$b_1 = -2,000 \pm 0,4407 = -2,00 \pm 0,44 .$$

Ответ. Коэффициенты **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + b_1 X_1$ значимы и равны $b_0 = 3,00 \pm 0,28$, $b_1 = -2,00 \pm 0,44$.

5.3. Проверка **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на адекватность.

Дисперсию адекватности $S^2_{\text{ад}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ для **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка рассчитывают по уравнениям:

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{n\varphi}{N - B} ; \tag{75}$$

$$f_{\text{ад}} = N - B ; \tag{76}$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} \left(\overline{Y}_j - Y_j^p \right)^2 , \tag{77}$$

где φ – остаточная сумма квадратов; N – число опытов; n – число дублей в каждом опыте; Y_j^p $(j = 1, ..., N)$ – расчетные значения параметра Y по **однофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **первого** порядка $Y_j^p = b_0 X_{0j} + b_1 X_{1j}$, в котором оставлены только значимые коэффициенты; B – число значимых коэффициентов **однофакторного** уравнения регрессии **первого** порядка.

Пример 2.1.13. Получено **однофакторное ортогонализированное** уравнение **первого** порядка $Y = 2,0 \cdot X_1$ (коэффициент b_0 незначим). Число опытов $N = 11$, число дублей $n = 4$. Выборочные средние $\overline{Y_j}$ приведены в таблице 12. Рассчитать дисперсию адекватности $S^2_{\text{ад}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{ад}}$.

Таблица 12

ММ для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = 2,0 \cdot X_1$ на базе РСП с числом опытов $N = 11$.
Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{1j}	$\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$
1	– 1,0	– 1,9	– 2,0	0,01
2	– 0,8	– 1,4	– 1,6	0,04
3	– 0,6	– 1,1	– 1,2	0,01
4	– 0,4	– 0,9	– 0,8	0,01
5	– 0,2	– 0,5	– 0,4	0,01
6	0	– 0,2	0	0,04
7	0,2	0,1	0,4	0,09
8	0,4	0,6	0,8	0,04
9	0,6	1,3	1,2	0,01
10	0,8	1,8	1,6	0,04
11	1,0	2,2	2,0	0,04
			$\varphi = 0,34$	

Решение. Рассчитаем значения Y_j^p для **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = 2,0 \cdot X_1$ в каждом опыте, например, для $j = 4$

$$Y_4^p = 2 \cdot \left(-0,4\right) = 0,800\ ;$$

для $j = 9$

$$Y_9^p = 2 \cdot 0,6 = 1,200\ .$$

Остальные значения Y_j^p для $j = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12$ рассчитайте самостоятельно.

Все значения Y_j^p внесены в таблицу 12. Остаточную сумму квадратов φ рассчитаем по уравнению (77)

$$\varphi = \sum_{j=1}^{11}\left(\overline{Y}_j - Y_j^p\right)^2 = (-1,9+2,0)^2 + (-1,4+1,6)^2 + (-1,1+1,2)^2 + (-0,9+0,8)^2 + (-0,5+0,4)^2 +$$

$$+(-0,2-0)^2 + (0,1-0,4)^2 + (0,6-0,8)^2 + (1,3-1,2)^2 + (1,8-1,6)^2 + (2,2-1,0)^2 =$$

$$= 0,1^2 + 0,2^2 + 0,1^2 + (-0,1)^2 + (-0,1)^2 + (-0,2)^2 + (-0,3)^2 + (-0,2)^2 + 0,1^2 + 0,2^2 + 0,2^2 = 0,3400\ .$$

Дисперсию адекватности $S^2_{\text{ад}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ для **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка рассчитаем по уравнениям (75) - (77):

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{n\varphi}{N-B} = \frac{4 \cdot 0,34}{11-1} = 0,1360\ ;$$

$$f_{\text{ад}} = N - B = 11 - 1 = 10\ ,$$

где B – число значимых коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. В данной задаче $B = 1$.

Ответ. Дисперсия адекватности и ее число степеней свободы равны: $S^2_{\text{ад}} = 0,1360$; $f_{\text{ад}} = 10$.

В процессе построении **любого** уравнения регрессии обязательной процедурой является расчет дисперсии воспроизводимости и дисперсии адекватности, а также их чисел степеней свободы $S^2_{\text{воспр}}$ $(f_{\text{воспр}} = N(n-1))$ и $S^2_{\text{ад}}$ $(f_{\text{ад}} = N - B)$. Проверка **любого** уравнения регрессии на адекватность сводится к проверке дисперсий $S^2_{\text{воспр}}$ и $S^2_{\text{ад}}$ на однородность по критерию Фишера, которую проводят по уравнениям (38) – (42):

- экспериментальное значение критерия Фишера (отношение **большей** дисперсии к **меньшей**) равно

$$F_{\text{э}} = \frac{\max(S^2_{\text{воспр}}, S^2_{\text{ад}})}{\min(S^2_{\text{воспр}}, S^2_{\text{ад}})}\ ; \tag{78}$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p}$, в котором на первом месте стоит число степени свободы **большей** дисперсии $f_{\text{числ}}$, а на втором – число степени свободы **меньшей** дисперсии $f_{\text{знам}}$, при доверительной вероятности $p = 0,95$ выбирают из таблицы приложения 4;

- величины $f_{\text{числ}}$ и $f_{\text{знам}}$ определяют следующим образом:

$$f_{\text{числ}} = \begin{cases} N - B, \text{ если } \ S^2_{\text{ад}} > S^2_{\text{воспр}} \\ N(n-1), \text{ если } \ S^2_{\text{воспр}} > S^2_{\text{ад}} \end{cases}; \tag{79}$$

$$f_{\text{знам}} = \begin{cases} N(n-1), \text{ если } \ S^2_{\text{ад}} > S^2_{\text{воспр}} \\ N - B, \text{ если } \ S^2_{\text{воспр}} > S^2_{\text{ад}} \end{cases}; \tag{80}$$

- **любое** уравнение регрессии **адекватно,** то есть $\sigma^2_{воспр} = \sigma^2_{ад}$, если

$$F_э < F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}; \tag{81}$$

- **любое** уравнение регрессии **неадекватно** ($\sigma^2_{воспр} \neq \sigma^2_{ад}$), если

$$F_э \geq F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}. \tag{82}$$

Пример 2.1.14. Получено **однофакторное ортогонализированное** уравнение **первого** порядка,. Число опытов $N = 11$, число дублей $n = 4$, число значимых коэффициентов уравнения регрессии $B = 1$. Дисперсия воспроизводимости и ее число степеней свободы $S^2_{воспр} = 0,0600$ и $f_{воспр} = N(n-1) = 11 \cdot (4-1) = 33$, а также дисперсия адекватности и ее число степеней свободы $S^2_{ад} = 0,1360$ и $f_{ад} = N - B = 11 - 1 = 10$. Проверить полученное уравнение регрессии на адекватность.

Решение. Проверка полученного уравнения регрессии на адекватность осуществляется путем проверки дисперсий $S^2_{воспр}$ и $S^2_{ад}$ на однородность по критерию Фишера:

- экспериментальное значение критерия Фишера (отношение **большей** дисперсии к **меньшей)** рассчитаем по уравнению (78)

$$F_э = \frac{\max(S^2_{воспр}, S^2_{ад})}{\min(S^2_{воспр}, S^2_{ад})} = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{воспр}} = \frac{0,1360}{0,0600} = 2,267 \text{, так как } S^2_{ад} > S^2_{воспр};$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (79) – (80): на первом месте стоит число степени свободы **большей** дисперсии $f_{числ} = f_{ад} = 10$, а на втором – число степени свободы **меньшей** дисперсии $f_{знам} = f_{воспр} = 33$, и при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{числ};\, f_{знам}} = F_{f_{ад};\, f_{воспр}} = F_{10;\, 33;\, 0,95} = 2,133.$$

Ответ. Полученное уравнение **неадекватно**, так как согласно уравнению (82) $F_э = 2,267 > 2,133 = F_{10,\, 33,\, 0,95}$.

5.4. Если полученное **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка **адекватно**, то абсолютная погрешность $\Delta Y(X_1)$ параметра $Y(X_1)$, определяемого по уравнению регрессии $Y = b_0 X_0 + b_1 X_1$, при условии ортогональности факторов X_0 и X_1, рассчитывают по уравнению

$$\Delta Y(X_1) = t_{N(n-1),\, p} \cdot \sqrt{S^2(b_0) + X_1^2 S^2(b_1)}, \tag{83}$$

где $t_{f;\, p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N(n-1)$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выбирают из таблицы приложения 2.

Пример 2.1.15. Во сколько раз абсолютная погрешность параметра $Y(X_1)$ на верхней и нижней границах факторного пространства ($X_1 = \pm 1$) больше, чем в его центре ($X_1 = 0$)? Число опытов при построении **однофакторного** уравнения регрессии **первого** порядка $N = 35$.

Решение. Рассчитаем дисперсии значимости $S^2(b_0)$, $S^2(b_1)$ по уравнениям (64), (69) – (70):

$$S^2(b_0) = \frac{S^2_{воспр}}{n \sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}^2} = \frac{S^2_{воспр}}{nN};$$

$$S^2(b_1) = \frac{S^2_{воспр}}{n \sum\limits_{j=1}^{N} X_{1j}^2} = \frac{3(N-1) S^2_{воспр}}{nN(N+1)}.$$

Абсолютную погрешность параметра Y рассчитаем по уравнениям (83) и найденным значениям $S^2(b_0)$ и $S^2(b_1)$

$$\Delta Y(X_1) = t_{N(n-1);p} \cdot \sqrt{S^2(b_0) + X_1^2 S^2(b_1)} =$$

$$= t_{N(n-1);p} \cdot \sqrt{\frac{S^2_{\text{воспр}}}{nN} + X_1^2 \cdot \frac{3(N-1)S^2_{\text{воспр}}}{nN(N+1)}} = t_{N(n-1),\,p} \frac{S_{\text{воспр}}}{\sqrt{nN}} \cdot \sqrt{1 + \frac{3(N-1)}{(N+1)} X_1^2}\ .$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\Delta Y(\pm 1) = t_{N(n-1);\,p} \frac{S_{\text{воспр}}}{\sqrt{nN}} \cdot \sqrt{1 + \frac{3(N-1)}{(N+1)}}\ ;$$

$$\Delta Y(0) = t_{N(n-1);\,p} \cdot \frac{S_{\text{воспр}}}{\sqrt{nN}}\ .$$

Искомую величину получим, разделив значение $\Delta Y(\pm 1)$ на $\Delta Y(0)$.

$$\frac{\Delta Y(\pm 1)}{\Delta Y(0)} = \sqrt{1 + \frac{3 \cdot (N-1)}{N+1}}\ .$$

Так как по условию задачи $N = 35$, то

$$\frac{\Delta Y(\pm 1)}{\Delta Y(0)} = \sqrt{1 + \frac{3 \cdot (N-1)}{N+1}} = \sqrt{1 + \frac{3 \cdot (35-1)}{35+1}} = \sqrt{1 + \frac{3 \cdot 34}{36}} = \sqrt{3{,}833} = 1{,}958 \approx 2{,}0\ .$$

Ответ. Абсолютная погрешность параметра $Y(X_1)$ на нижней и верхней границах факторного пространства в 2 раза больше, чем в центре факторного пространства.

Обратите внимание, что найденное соотношение, которое зависит только от числа опытов N и не зависит от числа дублей n в каждом опыте и величины дисперсии воспроизводимости, справедливо только **для РСП!**

6. Если **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка неадекватно, следует перейти к построению уравнению регрессии **второго** порядка.

2.2. ОДНОФАКТОРНОЕ ОРТОГОНАЛИЗИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. РАВНОМЕРНЫЙ СИММЕТРИЧНЫЙ ПЛАН (РСП)

Теория с примерами (кратко)

1. **Уравнение регрессии второго порядка: однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка, в котором все 3 фактора $X_0, X_1, (X_1^2-\lambda_1)$ ортогональны, имеет вид

$$Y = b_0X_0 + b_1X_1 + b_{11}(X_1^2-\lambda_1)\,. \tag{84}$$

NB!!! В данном пособии моделирование технических систем, подчиняющихся стохастическим закономерностям, осуществляется с помощью уравнений регрессии в виде степенного ряда только с ортогональными факторами.

2. Коэффициент λ_1 для **ортогонализации** квадратичного фактора $X_1^2-\lambda_1$ в общем случае рассчитывают по уравнению (68) (последнее слагаемое формулы справедливо только для РСП)

$$\lambda_1 = \overline{X_1^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} X_j^2}{N} = \frac{N+1}{3\cdot(N-1)}\,. \tag{85}$$

Для расчета коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка b_0, b_1, b_{11} для РСП приведем без доказательства уравнение для расчета выражения $\sum\limits_{j=1}^{N}\left(X_{1j}^2-\lambda_1\right)^2$ (см. аналогичные уравнения (64), (68) для расчета $\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}^2$, $\sum\limits_{j=1}^{N} X_{1j}^2$)

$$\sum_{j=1}^{N}\left(X_{1j}^2-\lambda_1\right)^2 = \frac{4N(N+1)(N^2-4)}{45(N-1)^3}\,. \tag{86}$$

В таблице 13 приведены значения сумм факторов $\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}^2$, $\sum\limits_{j=1}^{N} X_{1j}^2$, $\sum\limits_{j=1}^{N}\left(X_{1j}^2-\lambda_1\right)^2$, а также значения **ортогонализирующего** коэффициента λ_1 для РСП ($N = 5,\ 6,\ 9,\ 11,\ 17,\ 21$), рассчитанные по уравнениям (64), (68), (85), (86).

Таблица 13

Значения сумм квадратов факторов и **ортогонализирующего** коэффициента для N опытов РСП

N	$\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}^2$	$\sum\limits_{j=1}^{N} X_{1j}^2$	λ_1	$\sum\limits_{j=1}^{N}\left(X_{1j}^2-\lambda_1\right)^2$
5	5	2,500	0,5000	0,875
6	6	2,800	0,4667	0,956
9	9	3,750	0,4167	1,203
11	11	4,400	0,4000	1,373
17	17	6,375	0,3750	1,893
21	21	7,700	0,3667	2,243

Пример 2.2.1. Рассчитать величину ортогонализирующего коэффициента λ_1 для $N \gg 1$.

Решение. Воспользовавшись уравнением (85), преобразуем выражение для расчета λ_1

$$\lambda_1 = \frac{N+1}{3\cdot(N-1)} = \frac{1+1/N}{3\cdot\left(1-1/N\right)}\,.$$

Из полученного выражения следует, что при $N\to\infty$ **ортогонализирующий** коэффициент $\lambda_1 = 1/3$. ***NB! Обратите внимание на тенденцию изменения*** λ_1 ***в таблице 13.***

Ответ. Для $N \gg 1$ **ортогонализирующий** коэффициент $\lambda_1 \approx 1/3$.

3. Если **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка окажется неадекватным, то следует перейти к построению **однофакторного ортогонализированного**

уравнения регрессии **второго** порядка. Такое построение можно выполнить на базе обновленной **МП** с измененным диапазоном варьирования фактора $[x_{\min}, x_{\max}]$, числом опытов N и дублей n в каждом опыте. Однако, в данном пособии **МП** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка сохраним в том же виде, как для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка: те же экспериментальные данные, то же число опытов N и то же число дублей n в каждом опыте, тот же базовый план – РСП (см. таблицы 4 – 6). В связи с этим параметры $\overline{Y_j}, S_j^2, G_э, G_{n-1;\,N;\,0,95}$, $S^2_{\text{воспр}}$, $f_{\text{воспр}}$, рассчитанные в результате предварительной обработки экспериментальных данных при построении **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + b_1 \cdot X_1$, сохраняют свои значения и при построении **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка $Y = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_{11} \cdot (X_1^2 - \lambda_1)$.

4. **ММ** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка в связи с вводом нового квадратичного члена $X_1^2 - \lambda_1$ несколько отличается от **ММ** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. **ММ** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка состоит из N опытов и включает в себя столбцы: N, X_{0j}, X_{1j}, $X_{1j}^2 - \lambda_1$, $\overline{Y_j}$, $X_{0j}\overline{Y_j}$, $X_{1j}\overline{Y_j}$, $(X_{1j}^2 - \lambda_1)\overline{Y_j}$, Y_j^p, $(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$ (см. таблицы 7 – 9).Значение ортогонализирующего коэффициента рассчитывают по уравнению (85), см. также таблицу 13.

Так как факторы X_0, X_1 и $(X_1^2 - \lambda_1)$ **ортогональны**, то это позволяет рассчитать коэффициенты уравнения регрессии b_0, b_1, b_{11} и их дисперсии значимости $S^2(b_0)$, $S^2(b_1)$, $S^2(b_{11})$ независимо друг от друга. Так как число опытов N и число дублей n остается тем же самым, то введение **ортогонального** фактора $(X_1^2 - \lambda_1)$ не изменит уже рассчитанные параметры b_0, b_1, $S^2(b_0)$, $S^2(b_1)$, Δb_0, Δb_1, полученные при построении **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. Поэтому для окончательного построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка необходимо рассчитать только те параметры, которые связаны с введением квадратичного члена $(X_1^2 - \lambda_1)$.

Значения столбцов **ММ** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка позволяют провести окончательную обработку экспериментальных данных (расчет коэффициента уравнения регрессии b_{11} и проверка его на значимость по критерию Стьюдента, проверка уравнения регрессии на адекватность по критерию Фишера, расчет абсолютной погрешности в случае адекватности уравнения регрессии **второго** порядка).

Пример 2.2.2. Создать **ММ** (см. **МП** – таблица 4, **ММ** – таблица 7) для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 5$ (таблица 14). Из таблицы 13 находим, что $\lambda_1 = 0{,}5000$.

Таблица 14

ММ для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 5$. Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	$X_{1j}^2 - 0{,}5$	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	$(X_{1j}^2 - 0.50)\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1,0	0,5000	$\overline{Y_1}$	$1 \cdot \overline{Y_1}$	$-1{,}0 \cdot \overline{Y_1}$	$0{,}5000 \cdot \overline{Y_1}$	Y_1^p	$(\overline{Y_1} - Y_1^p)^2$
2	+ 1	– 0,5	– 0,2500	$\overline{Y_2}$	$1 \cdot \overline{Y_2}$	$-0{,}5 \cdot \overline{Y_2}$	$-0{,}2500 \cdot \overline{Y_2}$	Y_2^p	$(\overline{Y_2} - Y_2^p)^2$
3	+ 1	0	– 0,5	$\overline{Y_3}$	$1 \cdot \overline{Y_3}$	$0 \cdot \overline{Y_3}$	$-0{,}5000 \cdot \overline{Y_3}$	Y_3^p	$(\overline{Y_3} - Y_3^p)^2$
4	+ 1	0,5	– 0,2500	$\overline{Y_4}$	$1 \cdot \overline{Y_4}$	$0{,}5 \cdot \overline{Y_4}$	$-0{,}2500 \cdot \overline{Y_4}$	Y_4^p	$(\overline{Y_4} - Y^p)^2$
5	+ 1	1,0	0,5000	$\overline{Y_5}$	$1 \cdot \overline{Y_5}$	$1{,}0 \cdot \overline{Y_5}$	$0{,}5000 \cdot \overline{Y_5}$	Y_5^p	$(\overline{Y_5} - Y_5^p)^2$
$\sum^2$	**5**	**2,5**	**0,875**		$\sum_{j=1}^{5} X_{0j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{5} X_{1j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{5} (X_{1j}^2 - 0{,}50)\overline{Y_j}$	$\varphi = \sum_{j=1}^{5} (\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$	

Пример 2.2.3. Создать **ММ** (см. **МП** – таблица 5, **ММ** – таблица 8) для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 6$ (таблица 15). Из таблицы 13 находим, что $\lambda_1 = 0,4667$.

Таблица 15

ММ для построения **однофакторного ортогонализированного**
уравнения регрессии **второго** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 6$.
Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	$X_{1j}^2 - 0.4667$	$\overline{Y}_j$	$X_{0j}\overline{Y}_j$	$X_{1j}\overline{Y}_j$	$(X_{1j}^2 - 0.4667)\overline{Y}_j$	Y_j^p	$(\overline{Y}_j - Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1,0	0,5333	$\overline{Y}_1$	$1 \cdot \overline{Y}_1$	$-1,0 \cdot \overline{Y}_1$	$0,5333 \cdot \overline{Y}_1$	Y_1^p	$(\overline{Y}_1 - Y_1^p)^2$
2	+ 1	– 0,6	– 0,1067	$\overline{Y}_2$	$1 \cdot \overline{Y}_2$	$-0,6 \cdot \overline{Y}_2$	$-0,1067 \cdot \overline{Y}_2$	Y_2^p	$(\overline{Y}_2 - Y_2^p)^2$
3	+ 1	– 0,2	– 0,4267	$\overline{Y}_3$	$1 \cdot \overline{Y}_3$	$-0,2 \cdot \overline{Y}_3$	$-0,4267 \cdot \overline{Y}_3$	Y_3^p	$(\overline{Y}_3 - Y_3^p)^2$
4	+ 1	0,2	– 0,4267	$\overline{Y}_4$	$1 \cdot \overline{Y}_4$	$0,2 \cdot \overline{Y}_4$	$-0,4267 \cdot \overline{Y}_4$	Y_4^p	$(\overline{Y}_4 - Y^p)^2$
5	+ 1	0,6	– 0,1067	$\overline{Y}_5$	$1 \cdot \overline{Y}_5$	$0,6 \cdot \overline{Y}_5$	$0,1067 \cdot \overline{Y}_5$	Y_5^p	$(\overline{Y}_5 - Y_5^p)^2$
6	+ 1	1,0	0,5333	$\overline{Y}_6$	$1 \cdot \overline{Y}_6$	$1,0 \cdot \overline{Y}_6$	$0,5333 \cdot \overline{Y}_5$	Y_6^p	$(\overline{Y}_6 - Y_6^p)^2$
$\sum^2$	**6**	**2,8**	**0,9557**		$\sum_{j=1}^{6} X_{0j}\overline{Y}_j$	$\sum_{j=1}^{6} X_{1j}\overline{Y}_j$	$\sum_{j=1}^{6} (X_{1j}^2 - 0,4667)\overline{Y}_j$	$\varphi = \sum_{j=1}^{6} (\overline{Y}_j - Y_j^p)^2$	

Пример 2.2.4. Создать **ММ** (см. **МП** – таблица 6, **ММ** – таблица 9) для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 9$ (таблица 16). Из таблицы 13 находим, что $\lambda_1 = 0,4167$.

Таблица 16

ММ для построения **однофакторного ортогонализированного**
уравнения регрессии **второго** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 9$.
Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	$X_{1j}^2 - 0.4167$	$\overline{Y}_j$	$X_{0j}\overline{Y}_j$	$X_{1j}\overline{Y}_j$	$(X_{1j}^2 - 0.4167)\overline{Y}_j$	Y_j^p	$(\overline{Y}_j - Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1,00	0,5833	$\overline{Y}_1$	$1 \cdot \overline{Y}_1$	$-1,00 \cdot \overline{Y}_1$	$0,5833 \cdot \overline{Y}_1$	Y_1^p	$(\overline{Y}_1 - Y_1^p)^2$
2	+ 1	– 0,75	0,1458	$\overline{Y}_2$	$1 \cdot \overline{Y}_2$	$-0,75 \cdot \overline{Y}_2$	$0,1458 \cdot \overline{Y}_2$	Y_2^p	$(\overline{Y}_2 - Y_2^p)^2$
3	+ 1	– 0,50	– 0,1667	$\overline{Y}_3$	$1 \cdot \overline{Y}_3$	$-0,50 \cdot \overline{Y}_3$	$-0,1667 \cdot \overline{Y}_3$	Y_3^p	$(\overline{Y}_3 - Y_3^p)^2$
4	+ 1	– 0,25	– 0,3542	$\overline{Y}_4$	$1 \cdot \overline{Y}_4$	$-0,25 \cdot \overline{Y}_4$	$-0,3542 \cdot \overline{Y}_4$	Y_4^p	$(\overline{Y}_4 - Y^p)^2$
5	+ 1	0,00	– 0,4167	$\overline{Y}_5$	$1 \cdot \overline{Y}_5$	$0 \cdot \overline{Y}_5$	$-0,4167 \cdot \overline{Y}_5$	Y_5^p	$(\overline{Y}_5 - Y_5^p)^2$
6	+ 1	0,25	– 0,3542	$\overline{Y}_6$	$1 \cdot \overline{Y}_6$	$0,25 \cdot \overline{Y}_6$	$-0,3542 \cdot \overline{Y}_6$	Y_6^p	$(\overline{Y}_6 - Y_6^p)^2$
7	+ 1	0,50	– 0,1667	$\overline{Y}_7$	$1 \cdot \overline{Y}_7$	$0,50 \cdot \overline{Y}_7$	$-0,1667 \cdot \overline{Y}_7$	Y_7^p	$(\overline{Y}_7 - Y_7^p)^2$
8	+ 1	0,75	0,1458	$\overline{Y}_8$	$1 \cdot \overline{Y}_8$	$0,75 \cdot \overline{Y}_8$	$0,1458 \cdot \overline{Y}_8$	Y_8^p	$(\overline{Y}_8 - Y_8^p)^2$
9	+ 1	1,00	0,5833	$\overline{Y}_9$	$1 \cdot \overline{Y}_9$	$1,00 \cdot \overline{Y}_9$	$0,5833 \cdot \overline{Y}_9$	Y_9^p	$(\overline{Y}_9 - Y_9^p)^2$
$\sum^2$	**9**	**3,75**	**1,2031**		$\sum_{j=1}^{9} X_{0j}\overline{Y}_j$	$\sum_{j=1}^{9} X_{1j}\overline{Y}_j$	$\sum_{j=1}^{9} (X_{1j}^2 - 0,4167)\overline{Y}_j$	$\varphi = \sum_{j=1}^{9} (\overline{Y}_j - Y_j^p)^2$	

В данном пособии, как отмечалось ранее, рассматриваются уравнения регрессии только с ортогональными факторами. Например, в **ММ** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка все три фактора $X_0, X_1, (X_1^2 - \lambda_1)$ **ортогональны**, так как

$$\sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{1j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_{0j} (X_{1j}^2 - \lambda_1) = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_{1j}(X_{1j}^2 - \lambda_1) = 0 .$$

Пример 2.2.5. Доказать вышеприведенные уравнения для РСП.

Доказательство. Первое равенство было доказано в примере 2.1.10.

Для доказательства **второго равенства** напомним, что все $X_{0j} = +1$, а значение ортогонализирующего параметра λ_1 рассчитывают по уравнению (85)

$$\sum_{j=1}^{N} X_{0j}(X_{1j}^2 - \lambda_1) = \sum_{j=1}^{N} (X_{1j}^2 - \lambda_1) = \sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2 - \lambda_1 N = \sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2}{N} \cdot N = 0 .$$

Для доказательства **третьего равенства** достаточно использовать уравнения

$$\sum_{j=1}^{N} X_{1j} = X_{11} + X_{12} + ... + X_{1(N-1)} + X_{1N} = 0 ;$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_{1j}^3 = X_{11}^3 + X_{12}^3 + ... + X_{1(N-1)}^3 + X_{1N}^3 = 0 ,$$

справедливость которых следует из равенства $X_{1j} = -X_{1(N+1-j)}$, доказанного в примере 2.1.10 и равенства $X_{1j}^3 = -X_{1(N+1-j)}^3$, которое является следствием предыдущего. Таким образом

$$\sum_{j=1}^{N} X_{1j}(X_{1j}^2 - \lambda_1) = \sum_{j=1}^{N} X_{1j}^3 - \lambda_1 \sum_{j=1}^{N} X_{1j} = 0 - 0 = 0 .$$

Ответ. Все **3 равенства** $\sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{1j} = 0$, $\sum_{j=1}^{N} X_{0j}(X_{1j}^2 - \lambda_1) = 0$, $\sum_{j=1}^{N} X_{1j}(X_{1j}^2 - \lambda_1) = 0$ справедливы.

Отметим, что если бы квадратичный многочлен имел форму X_1^2, то он не был бы ортогонален фактору X_0, так как

$$\sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{1j}^2 = \sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2 > 0 .$$

5. Квадратичный коэффициент b_{11} **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии второго порядка с учетом того, что все 3 фактора $X_0, X_1, (X_1^2 - \lambda_1)$ ортогональны, рассчитывают по уравнению

$$b_{11} = \frac{\sum_{j=1}^{N} (X_{1j}^2 - \lambda_1)\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{N} (X_{1j}^2 - \lambda_1)^2} . \tag{87}$$

6. Проверка коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка для РСП на значимость.

Ортогональность факторов X_0, X_1, $(X_1^2 - \lambda_1)$ позволяет определить все дисперсии значимости коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка независимо друг от друга. Поэтому величины $S^2(b_0)$, $S^2(b_1)$, Δb_0, Δb_1, рассчитанные для **однофакторного** уравнения регрессии **первого** порядка, нет необходимости заново рассчитывать при построении **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка, так как они остаются такими же.

6.1. Дисперсию значимости коэффициента b_{11} **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка с учетом того, что все 3 фактора $X_0, X_1, (X_1^2 - \lambda_1)$ ортогональны, рассчитывают по уравнению

$$S^2(b_{11}) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum_{j=1}^{N}\left(X^2_{1j} - \lambda_1\right)^2}\,. \tag{88}$$

6.2. Доверительный интервал коэффициента b_{11} однофакторного ортогонализированного уравнения регрессии **второго порядка** рассчитывают по критерию Стьюдента

$$\Delta b_{11} = t_{N(n-1);\,p} \cdot S(b_{11})\,, \tag{89}$$

где $t_{f;\,p}$ – значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N(n-1)$ и доверительной вероятности p выбирают из таблицы приложения 2.

6.3. Коэффициент b_{11} **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка значим, если

$$\Delta b_{11} < |b_{11}|\,, \tag{90}$$

Если выполнятся неравенство

$$\Delta b_{11} \ge |b_{11}|\,, \tag{91}$$

то это означает, что коэффициент b_{11} незначим и следует перейти к построению **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **третьего** порядка.

7. Проверка **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на адекватность.

7.1. Дисперсию адекватности $S^2_{\text{ад}}$ и число ее степеней свободы $f_{\text{ад}}$ для **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка рассчитывают по уравнениям, аналогичным уравнениям (75) – (77):

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{n\varphi}{N - B}\,; \tag{92}$$

$$f_{\text{ад}} = N - B\,; \tag{93}$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N}\left(\overline{Y}_j - Y^p_j\right)^2, \tag{94}$$

где φ – остаточная сумма квадратов; N – число опытов; n – число дублей в каждом опыте; Y^p_j $(j = 1, ..., N)$ расчетные значения параметра Y, полученные по **однофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **второго** порядка $Y^p_j = b_0X_{0j} + b_1X_{1j} + b_{11}(X^2_{1j} - \lambda_1)$, в котором оставлены только значимые коэффициенты; B – число значимых коэффициентов **однофакторного ортогонализированному** уравнения регрессии **второго** порядка.

7.2. Адекватность уравнения регрессии **любого** порядка проверяется по критерию Фишера (см. аналогичные уравнения (78) – (80)).

8. Если полученное **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка адекватно, то абсолютную погрешность $\Delta Y(X_1)$ параметра $Y(X_1)$, рассчитанного по уравнению $Y = b_0X_0 + b_1X_1 + b_{11}(X^2_1 - \lambda_1)$, в котором все 3 фактора $X_0, X_1, (X^2_1 - \lambda_1)$ **ортогональны**, рассчитывают по уравнению

$$\Delta Y(X_1) = t_{f;\,p} \cdot \sqrt{S^2(b_0) + X^2_1 S^2(b_1) + (X^2_1 - \lambda_1)^2 S^2(b_{11})}\,, \tag{95}$$

где $t_{f;\,p}$ – значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N(n-1)$ и доверительной вероятности p выбирают из таблицы приложения 2.

9. Параметр Y, описываемый **однофакторным ортогонализированным** уравнением регрессии **второго** порядка, **<u>всегда</u>** имеет экстремум: **максимум** при $b_{11} < 0$, или **минимум** при $b_{11} > 0$. Необходимое условие максимума (минимума) – равенство нулю первой производной – $Y'(X_1) = 0$. Продифференцировав **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка

$Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_{11}(X_1^2 - \lambda_1)$ по фактору X_1 и приравняв к нулю первую производную $Y'(X_1) = 0$, получим следующее уравнение для расчета оптимального значения фактора X_1:

$$b_1 + 2b_{11} X_{1\text{опт}} = 0, \tag{96}$$

откуда

$$X_{1\text{опт}} = -\frac{b_1}{2b_{11}}. \tag{97}$$

Соответствующее натуральное значение фактора $x_{1\text{ опт}}$ рассчитывают по уравнению (50):

$$x_{1\text{ опт}} = x_{10} + X_{1\text{ опт}} \Delta x_1. \tag{98}$$

Максимум (минимум) параметра $Y_{\max,\min}(X_{1\text{ опт}})$ и предельную абсолютную погрешность $\Delta Y(X_{1\text{опт}})$ рассчитывают по уравнениям (84) и (95):

$$Y_{\max,\min} = b_0 + b_1 X_{1\text{опт}} + b_{11}(X_{1\text{опт}}^2 - \lambda_1); \tag{99}$$

$$\Delta Y_{\max,\min} = t_{f,\,p} \cdot \sqrt{S^2(b_0) + X_{1\text{опт}}^2 S^2(b_1) + (X_{1\text{опт}}^2 - \lambda_1)^2 S^2(b_{11})}, \tag{100}$$

где $t_{f;\,p}$ – значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N(n-1)$ и доверительной вероятности p выбирают из таблицы приложения 2.

Пример 2.2.6. Получено адекватное **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка $Y = 52{,}3 - 12{,}8 \cdot X_1 - 8{,}4 \cdot (X_1^2 - 0{,}400)$ кВт·ч/т. Варьируемый фактор $x_1 \in [80, 120]$ °С (то есть $x_{10} = 100$ °С, а $\Delta x_1 = 20$ °С). Необходимо определить оптимальный режим функционирования изучаемой технической системы.

Решение. Полученное уравнение регрессии имеет максимум, так как $b_{11} = -8{,}4 < 0$. Воспользуемся уравнением (97) и рассчитаем $X_{1\text{опт}}$

$$X_{1\text{опт}} = -\frac{b_1}{2b_{11}} = -\frac{-12{,}8}{2 \cdot (-8{,}4)} = -0{,}7619.$$

Соответствующее натуральное значение фактора $x_{1\text{ опт}}$ рассчитаем по уравнению (50)

$$x_{1\text{ опт}} = x_{10} + X_{1\text{ опт}} \Delta x_1 = 100 - 0{,}7619 \cdot 20 = 84{,}76 \approx 85 \text{ °С}.$$

Максимальное значение параметра оптимизации $Y_{\max}$ рассчитаем по уравнению (99)

$$Y_{\max} = 52{,}3 - 12{,}8 \cdot X_{1\text{ опт}} - 8{,}4 \cdot (X_{1\text{опт}}^2 - 0{,}400) =$$

$$= 52{,}3 - 12{,}8 \cdot (-0{,}7619) - 8{,}4 \cdot ((-0{,}7619)^2 - 0{,}400) = 52{,}3 + 9{,}752 - 1{,}516 = 60{,}54.$$

***NB!* Значение $Y_{\max} = 60{,}54$ не округляют, так как неизвестна абсолютная погрешность параметра оптимизации.**

Ответ. Максимальное значение параметра оптимизации $Y_{\max} = 60{,}54$ кВт·ч/т достигается при температуре 85 °С ($X_{1\text{опт}} = -0{,}7619$).

10. Если полученное **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка неадекватно, следует перейти к построению **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **третьего** порядка.

Типовая задача

Цель. Освоить методы моделирования и оптимизации **однофакторных** технических систем, описываемых стохастическими закономерностями.

Формулировка задачи. Зерно, собранное комбайном, имеет влажность ≈30 %. На току оно подсыхает до влажности ≈20 %. Для долгосрочного хранения на элеваторе зерно должно иметь влажность 14 %. Для сушки зерна до указанной влажности используют специальные сушила, теплоносителем в которых является горячий воздух. Важнейшим параметром, характеризующим эффективность работы сушила, является удельный расход энергии (параметр Y, кВт·ч/т). При прочих равных условиях удельный расход энергии зависит от температуры теплоносителя (фактор x_1, °С). Эксперимент был проведен по РСП, результаты которого приведены в таблице 17. Необходимо изучить зависимость удельного расхода энергии Y от температуры теплоносителя, варьируемого в интервале $x_1 \in [x_{1\min}, x_{1\max}] = [60, 120]\ ^{\circ}\mathrm{C}$, и определить оптимальный режим функционирования сушила.

Таблица 17

Экспериментальные данные для РСП

N	X_{1j}, °С	Y_{j1}, кВт·ч/т	Y_{j2}, кВт·ч/т	Y_{j3}, кВт·ч/т	Y_{j4}, кВт·ч/т
1	– 1,0	73,5	75,3	73,5	74,1
2	– 0,5	60,4	60,2	63,7	61,5
3	0	55,4	59,0	58,8	54,8
4	0,5	54,8	55,5	54,3	51,9
5	1,0	59,7	62,5	57,9	57,8

Математическая формулировка задачи: 1) построить адекватное уравнение регрессии, отражающее зависимость удельного расхода энергии (Y, кВт·ч/т) от температуры воздуха (x_1, °С); 2) рассчитать оптимальное значение фактора x_1 (°С), при котором удельный расход энергии будет минимальным.

План решения задачи

1. Внимательно прочитать условие задачи.
2. Написать формулы взаимосвязи натуральных значений фактора x_1 с нормированными X_1.
3. Создать **МП** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка и выполнить предварительную обработку экспериментальных данных.
4. Создать **ММ** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка и выполнить окончательную обработку экспериментальных данных.
5. Принять решение о дальнейшем исследовании изучаемой технической системы. Если **однофакторное** уравнение регрессии **первого** порядка окажется **неадекватным**, то, не меняя количество опытов N и число дублей n в каждом опыте, создать **ММ** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка и выполнить окончательную обработку экспериментальных данных (расчет **ортогонализирующего** коэффициента λ_1, расчет коэффициент b_{11} и проверка его на значимость по критерию Стьюденту, проверка уравнения регрессии на адекватность по критерию Фишера, расчет абсолютной ошибки $\Delta Y(X_1)$ прогнозирования параметра $Y(X_1)$, если уравнение окажется адекватным).
6. В случае адекватности **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка провести оптимизацию изучаемого объекта (рассчитать оптимальные значения факторов $X_{1\,\text{опт}}$ и $x_{1\,\text{опт}}$, значение $Y_{\min}$, а также абсолютную ошибку $\Delta Y_{\min}$).
7. По результатам моделирования и оптимизации изучаемой технической системы сделать окончательный вывод.

NB! Все предварительные расчеты проводить с точностью не менее 4-х значащих цифр.

Решение задачи по плану

1. Пункт 1 выполнить самостоятельно.
2. Уровни и интервал варьирования фактора, а также формулы перевода натуральных x_1 в нормированные X_1 и обратно, рассчитанные по уравнениям (49) – (52), приведены в таблице 18.

Таблица 18

Уровни и интервал варьирования фактора x_1 и X_1

Значения	фактор	
	x_1, °С	X_1
Нижний уровень	$x_{1\,max} = 120$	+ 1
Верхний уровень	$x_{1\,min} = 60$	– 1
Основной уровень	$x_{10} = 90$	0
Интервал варьирования	$\Delta x_1 = 30$	
Формулы взаимосвязи натуральных значений фактора x_1 с нормированными значениями X_1	$X_1 = \frac{x_1 - 90}{30}$; $x_1 = 90 + 30 \cdot X_1$	

3. Решение задачи начнем с построения **однофакторного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 5$ и числом дублей $n = 4$. Создадим **МП** (таблица 19) для построения **однофакторного** уравнения регрессии **первого** порядка (см. таблицу 4), которая состоит из столбцов N, X_{1j}, x_{1j} и экспериментальных данных $Y_{1j}, Y_{2j}, Y_{3j}, Y_{4j}$ из таблицы 17. Создадим также столбцы $\overline{Y_j}$, S_j^2.

Таблица 19

МП для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 5$. Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N_2	X_{1j}	x_{1j}	Y_{j1}, кВт·ч/т	Y_{j2} кВт·ч/т	Y_{j3}, кВт·ч/т	Y_{j4}, кВт·ч/т	$\overline{Y_j}$	S_j^2
1	– 1,0	60	73,5	75,3	73,5	74,1	74,100	0,7200
2	– 0,5	75	60,4	60,2	63,7	61,5	61,450	2,5767
3	0,0	90	55,4	59,0	58,8	54,8	57,000	4,8800
4	0,5	105	54,8	55,5	54,3	51,9	54,125	2,4425
5	1,0	120	59,7	62,5	57,9	57,8	59,475	4,8292
$G_э = 0,316$		$G_{3;\,5;\,0,95} = 0,598$		$S^2_{воспр} = 3,090$ $f_{воспр} = 15$			$\sum_{j=1}^{5} S_j^2 = 15,448$	

3.1. **Методика эксперимента.** Для повышения точности эксперимента температура воздуха x_1 в сушиле поддерживалась на требуемом уровне с точностью $\pm 0,5\ ^{\circ}\mathrm{C}$. Все остальные факторы (объемный расход и влажность воздуха, линейная скорость обдува зерна) поддерживались на фиксированных уровнях, одинаковых для всех опытов. Зерно сушилось до влажности $14,0 \pm 0,1\,\%$. Если влажность зерна на выходе из сушила превышала 14 %, то скорость конвейерной ленты уменьшалась, если влажность зерна становилась меньше 14 %, то скорость конвейерной ленты увеличивалась с помощью датчика влажности, встроенного в обратную связь. Каждые 2 ч по счетчику электроэнергии с относительной погрешностью 0,1 % определяли величину электроэнергии, затраченной на работу сушила (энергия на подогрев воздуха, энергия на работу компрессора для обдува зерна, энергия двигателя, приводящего в движение конвейерную ленту). За тот же период измерялась масса высушенного зерна с относительной погрешностью 0,1 %. Параметр Y при заданной температуре теплоносителя определялся как отношение величины затраченной электроэнергии (кВт·ч/т) за 2 ч к массе высушенного зерна (т) за этот же период времени. За смену (8 ч) при заданной температуре теплоносителя параметр Y определялся 4 раза $(n = 4)$. Полностью изучение зависимости параметра Y от температуры теплоносителя x_1 осуществлялось в течение 5 дней (число опытов $N = 5$) при температурах 60, 75, 90, 105 и 120 °С.

3.2. Проведем предварительную обработку экспериментальных данных (результаты расчета внесены в таблицу 19):

- выборочное среднее рассчитаем по уравнению (55), например, для $j = 3$

$$\overline{Y_3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{3i}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{4} Y_{3i}}{4} = \frac{55,4 + 59,0 + 58,8 + 54,8}{4} = \frac{228,0}{4} = 57,00\,;$$

- выборочную дисперсию рассчитаем по уравнению (56), например, для $j = 3$

$$S_3^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(Y_{3i}-\overline{Y}_3\right)^2}{n-1}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\left(Y_{3i}-\overline{Y}_3\right)^2}{4-1}=\frac{(55,4-57,00)^2+(59,0-57,00)^2+(58,8-57,00)^2+(54,8-5700)^2}{3}=$$

$$=\frac{2,560+4,000+3,240+4,840}{3}=\frac{14,64}{3}=4,880\,.$$

Однородность выборочных дисперсий по критерию Кохрена:
- экспериментальное значение критерия Кохрена рассчитаем по уравнению (57)

$$G_э=\frac{\max S_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{N}S_j^2}=\frac{4,880}{0,7200+2,5767+4,8800+2,4425+4,8292}=\frac{4,880}{15,448}=0,316\,;$$

- табличное значение критерия Кохрена $G_{f_{\text{числ}};\,f_{\text{знам}};\,p}$, $G_{f_{\text{числ}};\,f_{\text{знам}};\,p}$, в котором на первом месте стоит число степеней свободы максимальной дисперсии $f_{\text{числ}}=n-1=4-1=3$, а на втором – число степеней свободы, равное числу всех дисперсий $f_{\text{знам}}=N=5$, при доверительной вероятности $p=0,95$ выберем из таблицы приложения 5

$$G_{f_{\text{числ}};\,f_{\text{знам}};\,p}=G_{n-1;\,N;\,p}=G_{3;\,5;\,0,95}=0,598\,.$$

Вывод. Все выборочные дисперсии однородны, так как согласно уравнению (58) $G_э=0,316<0,598=G_{3;\,5;\,0,95}$.

Так как число дублей $n=4$, то проверку случайных значений каждого опыта на промах и на принадлежность их нормальному закону распределения можно не проводить.

Дисперсию воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{воспр}}$ рассчитаем по уравнениям (60) – (61):

$$S^2_{\text{воспр}}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{5}S_j^2}{5}=\frac{15,448}{5}=3,090\,;$$

$$f_{\text{воспр}}=N(n-1)=5\cdot(4-1)=15\,.$$

4. Создадим **ММ** (таблица 20) для построения **однофакторного** ортогонализированного уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N=5$ (см. таблицы 7 и 19).

Таблица 20

ММ для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе РСП с числом опытов $N=5$. Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j}-Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1,0	74,100	74,100	– 74,100	68,545	30,86
2	+ 1	– 0,5	61,450	61,450	– 30,725	64,888	11,82
3	+ 1	0,0	57,000	57,000	0	61,230	17,89
4	+ 1	0,5	54,125	54,125	27,063	57,573	11,89
5	+ 1	1,0	59,475	59,475	59,475	53,915	30,91
$\sum^2$	**5**	**2,500**	$\sum$	306,15	- 18,287	$\varphi=103,4$	
$F_э=44,63$; $F_{3;15;\ 0,95}=3,287$			b_r	**61,230**	**- 7,315**	$S^2_{\text{ад}}=137,9$	
Уравнение неадекватно			Δb_r	**0,8**	**1,2**	$f_{\text{ад}}=3$	

4.1. Проверим факторы X_0 и X_1 на ортогональность. Факторы X_0 и X_1 ортогональны, так как

$$\sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{1j} = \sum_{j=1}^{5} X_{0j} X_{1j} = 1\cdot(-1) + 1\cdot(-0,5) + 1\cdot 0 + 1\cdot 0,5 + 1\cdot 1 = 0 .$$

4.2. Рассчитаем коэффициенты **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 X_0 + b_1 X_1$ (результаты расчета внесены в таблицу 20).

Образуем столбцы $X_{0j}\overline{Y}_j$, $X_{1j}\overline{Y}_j$ и рассчитаем их суммы:

$$\sum_{j=1}^{5} X_{0j}\overline{Y}_j = 1\cdot 74,100 + 1\cdot 61,450 + 1\cdot 57,000 + 1\cdot 54,125 + 1\cdot 59,475 = 306,15 ;$$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{1j}\overline{Y}_j = (-1)\cdot 74,100 + (-0,5)\cdot 61,45 + 0\cdot 57,000 + 0,5\cdot 54,125 + 1\cdot 59,475 = -18,287 .$$

Суммы квадратов столбцов найдем из таблицы 10 – $\sum_{j=1}^{5} X_{0j}^2 = 5$ и $\sum_{j=1}^{5} X_{1j}^2 = 2,5$.

Коэффициенты **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка b_0 и b_1 рассчитаем по уравнениям (62) – (63):

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{0j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{N} X_{0j}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{5} X_{0j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{5} X_{0j}^2} = \frac{306,15}{5} = 61,23 ;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{1j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{5} X_{1j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{5} X_{1j}^2} = \frac{-18,287}{2,500} = -7,315 .$$

4.3. Проверим коэффициенты b_0, b_1 **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на значимость по критерию Стьюдента:

- дисперсии значимости коэффициентов регрессии b_0, b_1 рассчитаем по уравнениям (69), (70)

$$S^2(b_0) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\cdot\sum_{j=1}^{N} X_{0j}^2} = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{4\cdot\sum_{j=1}^{5} X_{0j}^2} = \frac{3,090}{4\cdot 5} = 0,1545 ; \quad S(b_0) = \sqrt{S^2(b_0)} = \sqrt{0,1545} = 0,3931 ;$$

$$S^2(b_1) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\cdot\sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2} = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{4\cdot\sum_{j=1}^{5} X_{1j}^2} = \frac{3,090}{4\cdot 2,500} = 0,3090 ; \quad S(b_1) = \sqrt{S^2(b_1)} = \sqrt{0,3090} = 0,5559 ;$$

- доверительные интервалы Δb_0, Δb_1 коэффициентов b_0, b_1 **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка рассчитаем по уравнениям (71), (72) и корректно оформим результаты расчета (см. раздел 1.1, п. 3):

$$\Delta b_0 = t_{f;\,p}\cdot S(b_0) = t_{15;\,0,95}\cdot S(b_0) = 2,131\cdot 0,3931 = 0,8377 \approx 0,8 ;$$

$$\Delta b_1 = t_{f;\,p}\cdot S(b_1) = t_{15;\,0,95}\cdot S(b_1) = 2,131\cdot 0,5559 = 1,1846 \approx 1,2 ,$$

где $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N(n-1) = 5\cdot(4-1) = 15$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{f;\,p} = t_{N(n-1);\,p} = t_{15;\,0,95} = 2,131 ;$$

- оба регрессионные коэффициента b_0, b_1 значимы, так как выполняются неравенства (73), (74):

$$\Delta b_0 = 0{,}8 < 61{,}23 = |b_0|,$$

$$\Delta b_1 = 1{,}2 < 7{,}315 = |b_1|.$$

Вывод. **Однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка, в котором все коэффициенты значимы, имеет вид

$$Y = 61{,}23 - 7{,}315 \cdot X_1.$$

4.4. Проверим **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка на адекватность по критерию Фишера:

- значение Y_j^p в каждом опыте рассчитаем по **однофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **первого** порядка $Y = 61{,}23 - 7{,}315 \cdot X_1$, например, для $j = 1$

$$Y_1^p = 61{,}23 - 7{,}315 \cdot (-1) = 61{,}23 + 7{,}315 = 68{,}545;$$

- образуем столбец $(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$ и рассчитаем остаточную сумму квадратов φ по уравнению (77)

$$\varphi = \sum_{j=1}^{5} \left(\overline{Y_j} - Y_j^p\right)^2 = (74{,}100 - 68{,}545)^2 + (61{,}450 - 64{,}888)^2 + (57{,}000 - 61{,}230)^2 + (54{,}125 - 57{,}573)^2 +$$

$$+(59{,}475 - 53{,}915)^2 = 5{,}555^2 + (-3{,}438)^2 + (-4{,}230)^2 + (-3{,}448)^2 + 5{,}560^2 = 103{,}4;$$

- дисперсию адекватности $S^2_{\text{ад}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ рассчитаем по уравнениям (75), (76):

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{n\varphi}{N - B} = \frac{4 \cdot 103{,}4}{5 - 2} = \frac{414{,}0}{3} = 137{,}9;$$

$$f_{\text{ад}} = N - B = 5 - 2 = 3;$$

- экспериментальное значение критерия Фишера рассчитаем по уравнению (78)

$$F_{\text{э}} = \frac{S^2_{\text{ад}}}{S^2_{\text{воспр}}} = \frac{137{,}9}{3{,}090} = 44{,}63, \text{ так как } S^2_{\text{ад}} > S^2_{\text{воспр}};$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (79) – (80): на первом месте стоит число степени свободы **большей** дисперсии $f_{\text{числ}} = f_{\text{ад}} = N - B = 5 - 2 = 3$, а на втором - число степени свободы **меньшей** дисперсии $f_{\text{знам}} = f_{\text{воспр}} = N(n-1) = 5 \cdot (4-1) = 15$, при доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p} = F_{f_{\text{ад}};\, f_{\text{воспр}};\, p} = F_{N-B;\, N(n-1);\, p} = F_{3;\, 15;\, 0{,}95} = 3{,}287.$$

Вывод. Полученное **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = 61{,}23 - 7{,}315 \cdot X_1$ **неадекватно**, так как согласно уравнению (82) $F_{\text{э}} = 44{,}63 > 3{,}287 = F_{3;\, 15;\, 0{,}95}$.

5. В связи с тем, что **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = 61{,}23 - 7{,}315 X_1$ **неадекватно**, перейдем к построению **однофакторного ортогонализированного** уравнения **второго** порядка $Y = 61{,}23 - 7{,}315 X_1 + b_{11}(X_1^2 - \lambda_1)$.

МП для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка оставим без всяких изменений (см. таблицу 19), так как число опытов $N = 5$ достаточно, чтобы рассчитать коэффициенты b_0, b_1, b_{11} и проверить полученное **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка на адекватность. Даже если все коэффициенты уравнения регрессии окажутся значимыми ($B = 3$), дисперсия адекватности имеет минимум 2 степени свободы – $f_{\text{ад}} = N - B = 5 - 3 = 2$. Поэтому все результаты предварительной обработки экспериментальных данных $(\overline{Y_j}, S_j^2, G_э < G_{n-1;\,N;\,0,95},\ S^2_{\text{воспр}}, f_{\text{воспр}})$, полученные при построении **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка, остаются такими же и для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка.

Создадим **ММ** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка $Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_{11}(X_1^2 - \lambda_1)$ (таблица 21). **ММ** содержит столбцы: N, X_{0j}, X_j, $(X_{1j}^2 - \lambda_1)$, $\overline{Y_j}$, $X_{0j}\overline{Y_j}$, $X_{1j}\overline{Y_j}$, $(X_{1j}^2 - \lambda_1)\overline{Y_j}$, Y_j^p, $(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$ (см. таблицы 14, 19). Ортогонализирующий коэффициент $\lambda_1 = 0,5000$ (см. таблицу 13).

5.1. Убедимся в том, что факторы X_0 и X_1 ортогональны фактору $(X_1^2 - \lambda_1)$, то есть $\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j}(X_1^2 - \lambda_1) = 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{N} X_{1j}(X_1^2 - \lambda_1) = 0$ (см. пример 2.2.5):

$$\sum_{j=1}^{N} X_{0j}(X_1^2 - \lambda_1) = \sum_{j=1}^{5} X_{0j}(X_1^2 - \lambda_1) = 1 \cdot 0,50 + 1 \cdot (-0,25) + 1 \cdot (-0,50) + 1 \cdot (-0,25) + 1 \cdot 0,50 = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_{1j}(X_1^2 - \lambda_1) = \sum_{j=1}^{5} X_{1j}(X_1^2 - \lambda_1) = (-1) \cdot 0,50 + (-0,5) \cdot (-0,25) + 0 \cdot (-0,50) + 0,5 \cdot (-0,25) + 1 \cdot 0,50 = 0.$$

Так как факторы X_0, X_1, $(X_1^2 - \lambda_1)$ **ортогональны**, то параметры $b_0, b_1, \Delta b_0, \Delta b_1$, рассчитанные для **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка, будут такими же и для **однофакторного** уравнения регрессии **второго** порядка, которые из таблицы 20 перенесены в таблицу 21 без изменений, и поэтому рассчитаем только параметры, связанные с появлением нового квадратичного члена $(X_1^2 - \lambda_1)$ (результаты расчета внесены в таблицу 21).

Таблица 21

ММ для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 5$. Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	$X_{1j}^2 - \lambda_1$	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	$(X_{1j}^2 - \lambda_1)\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1,0	0,50	74,100	74,100	– 74,100	37,050	73,915	0,0342
2	+ 1	– 0,5	– 0,25	61,450	61,450	– 30,725	– 15,363	62,203	0,5670
3	+ 1	0	– 0,50	57,000	57,000	0	– 28,500	55,860	1,2996
4	+ 1	0,5	– 0,25	54,125	54,125	27,063	– 13,531	54,888	0,5822
5	+ 1	1,0	0,50	59,475	59,475	59,475	29,738	59,285	0,0361
$\sum^2$	**5**	**2,8**	**0,875**	$\sum$	**306,15**	**– 18,288**	**9,394**	**φ = 2,519**	
$F_э = 1,630$; $F_{2;\,15;\,0.95} = 3,682$				b_r	**61,230**	**– 7,315**	**10,74**	$S^2_{\text{ад}} = 5,038$, $f_{\text{ад}} = 2$	
$S^2_{\text{воспр}} = 3,090$; $f_{\text{воспр}} = 15$ **Уравнение адекватно**				Δb_r	**0,8**	**1,2**	**2,0**		

5.2. Рассчитаем регрессионный коэффициент b_{11} для **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка $Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_{11}(X_1^2 - \lambda_1)$:

- сумму квадратов фактора $(X_{1j}^2 - \lambda_1)$ найдем из таблицы 13 $\sum\limits_{j=1}^{N}\left(X_j^2 - \lambda_1\right)^2 = 0,875$;

- образуем столбец $(X_{1j}^2 - \lambda_1)\overline{Y_j}$ и рассчитаем сумму $\sum\limits_{j=1}^{N}(X_{1j}^2 - \lambda_1)\overline{Y_j}$

$$\sum_{j=1}^{5}(X_1^2 - \lambda_1)\overline{Y_j} = 0,50 \cdot 74,100 + (-0,25) \cdot 61,450 + (-0,50) \cdot 57,000 + (-0,25) \cdot 54,125 + 0,50 \cdot 59,475 = 9,394;$$

- коэффициент b_{11}, так как факторы X_0, X_1, $(X_1^2 - \lambda_1)$ **ортогональны,** рассчитаем по уравнению (87)

$$b_{11} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N}(X_{1j}^2-\lambda_1)\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{N}(X_{1j}^2-\lambda_1)^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{5}(X_{1j}^2-\lambda_1)\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{5}(X_{1j}^2-\lambda_1)^2} = \frac{9,394}{0,875} = 10,74\,.$$

5.3. Проверим регрессионный коэффициент b_{11} на значимость по критерию Стьюдента:

- дисперсию значимости $S^2(b_{11})$ рассчитаем по уравнению (88) с учетом того, что $S^2_{\text{воспр}} = 3,090$ (см. таблицу 19):

$$S^2(b_{11}) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{N}(X_{1j}^2-\lambda_1)^2} = \frac{3,090}{4\cdot 0,875} = 0,8829\,;$$

$$S(b_{11}) = \sqrt{S^2(b_{11})} = \sqrt{0,8829} = 0,9396\,;$$

- доверительный интервал коэффициента b_{11}, рассчитаем по уравнению (89) и корректно оформим результаты расчета (см. раздел 1.1, п. 3):

$$\Delta b_{11} = t_{f;\,p}\cdot S(b_{11}) = t_{5;\,0,95}\cdot S(b_{11}) = 2,131\cdot 0,9396 = 2,002 \approx 2,0\,,$$

где $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N(n-1) = 5\cdot(4-1) = 15$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{f;\,p} = t_{N(n-1);\,p} = t_{15;\,0,95} = 2,131\,;$$

- коэффициент b_{11} значим, так как согласно уравнению (90) $\Delta b_{11} = 2,002 < 10,74 = |b_{11}|$.

Вывод. Все три коэффициента b_0, b_1, b_{11} **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка $Y = 61,23 - 7,315X_1 + 10,74\cdot(X_1^2 - 0,5000)$ значимы.

5.4. Проверим **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка на адекватность по критерию Фишера (результаты расчета внесены в таблицу 21):

- параметр Y_j^p в каждом опыте рассчитаем по **однофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **второго** порядка $Y = 61,24 - 7,312X_1 + 10,74\cdot(X_1^2 - 0,5000)$, например, для $j = 1$

$$Y_1^p = 61,23 - 7,315\cdot(-1) + 10,74\cdot 0,5 = 61,24 + 7,312 + 5,370 = 73,915\,;$$

- образуем столбец $(\overline{Y}_j - Y_j^p)^2$ и рассчитаем его значения, например, для $j = 1$

$$(\overline{Y}_1 - Y_1^p)^2 = (74,100 - 73,915)^2 = 0,185^2 = 0,0342\,;$$

- остаточную сумму квадратов φ рассчитаем по уравнению (94)

$$\varphi = \sum_{j=1}^{5}\left(\overline{Y}_j - Y_j^p\right)^2 = (74,100-73,915)^2 + (61,450-62,203)^2 + (57,000-55,860)^2 + (54,125-54,888)^2 +$$

$$+(59,475-59,285)^2 = 0,185^2 + (-0,753)^2 + 1,140^2 + (-0,763)^2 + 0,190^2 = 2,519$$

- дисперсию адекватности $S^2_{\text{ад}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ рассчитаем по уравнениям (92), (93):

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{n\varphi}{N-B} = \frac{4\cdot 2,519}{5-3} = 5,038\,,$$

$$f_{\text{ад}} = N - B = 5 - 3 = 2\,;$$

- экспериментальное значение критерия Фишера, рассчитанное по уравнению (78), равно

$$F_э = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{воспр}} = \frac{5,038}{3,090} = 1,630 \text{, так как } S^2_{ад} > S^2_{воспр};$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (79) – (80): на первом месте стоит число степени свободы **большей** дисперсии $f_{числ} = f_{ад} = N - B = 5 - 3 = 2$, а на втором – число степени свободы **меньшей** дисперсии $f_{знам} = f_{воспр} = N(n-1) = 5 \cdot (4-1) = 15$, при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p} = F_{f_{ад};\, f_{воспр};\, p} = F_{N-B;\, N(n-1);\, p} = F_{2;\, 15;\, 0,95} = 3,682 .$$

Вывод. Полученное **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка $Y = 61,23 - 7,315X_1 + 10,74 \cdot (X_1^2 - 0,5000)$ **адекватно**, так как согласно уравнению (81) $F_э = 1,630 < 3,682 = F_{2;\, 5;\, 0,95}$.

6. Оптимизация изучаемой технической системы.

6.1. Параметр $Y(X_1)$ имеет минимум, так как $b_{11} = 10,7 > 0$:

- оптимальное значение фактора $X_{1\,опт}$ рассчитаем по уравнению (97)

$$X_{1\,опт} = -\frac{b}{b_{11}} = -\frac{-7,315}{2 \cdot 10,74} = 0,3405;$$

- оптимальное значение фактора $x_{1\,опт}$ рассчитаем по уравнению (98) и данным таблицы 18)

$$x_{1\,опт} = x_{10} + X_{1\,опт} \cdot \Delta x_1 = 90 + 0,3405 \cdot 30 = 90 + 10,22 = 100,22 \approx 100\ ^{o}\mathrm{C};$$

- минимальное значение параметра Y_{min} рассчитаем по уравнению (99)

$$Y_{min} = 61,23 - 7,315X_{1\,опт} + 10,74 \cdot (X^2_{1\,опт} - 0,500) = 61,23 - 7,315 \cdot 0,3405 +$$

$$+10,74 \cdot (0,3405^2 - 0,500) = 61,23 - 2,491 - 4,125 = 54,61 \text{ кВт·ч/т}.$$

6.2. Абсолютную погрешность ΔY_{min} параметра Y_{min}, значение которого найдено по **однофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **второго** порядка $Y = b_0X_0 + b_1X_1 + b_{11}(X_1^2 - \lambda_1)$, при условии **ортогональности** всех факторов X_0, X_1, $(X_1^2 - \lambda_1)$ рассчитаем по уравнению (100)

$$\Delta Y_{min} = t_{N(n-1);\, p} \cdot \sqrt{S^2(b_0) + X^2_{1опт}S^2(b_1) + (X^2_{1опт} - \lambda_1)^2 S^2(b_{11})} =$$

$$= t_{15;\, 0,95} \cdot \sqrt{0,1545 + 0,3405^2 \cdot 0,3090 + (0.3405^2 - 0,500)^2 \cdot 0,8829} =$$

$$= 2,131 \cdot \sqrt{0,1545 + 0,03583 + 0,1302} = 2,131 \cdot \sqrt{0,3206} = 2,131 \cdot 0,5662 = 1,207 \text{ кВт·ч/т.}$$

Корректно оформим результаты расчета b_1, b_2, b_3, Δb_0, Δb_1, Δb_{11} и ΔY_{min} по их абсолютных погрешностях Δb_0, Δb_1, Δb_{11} и ΔY_{min} (см. раздел 1.1, п. 3):

$$b_0 = 61,23 \pm 0,8 \approx 61,2 \pm 0,8;$$

$$b_1 = -7,315 \pm 1,2 \approx -7,3 \pm 1,2;$$

$$b_{11} = 10,74 \pm 2,0 = 10,7 \pm 2,0;$$

$$Y_{min} = 54,63 \pm 1,2 = (54,6 \pm 1,2) \text{ кВт·ч/т}.$$

7. **Окончательный вывод. Однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка со значимыми регрессионными коэффициентами $Y = 61,2 - 7,3X_1 + 10,7 \cdot (X_1^2 - 0,50)$ адекватно описывает процесс сушки зерна. Минимальные энергозатраты при сушке зерна при температуре воздуха $x_{1\,\text{опт}} = 100\ ^{\circ}\text{C}$ составят $Y_{\min} = (54,6 \pm 1,2)$ кВт·ч/т.

Ответ.

1) **Однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка

$$Y = \underset{\pm 0,8}{61,2} - \underset{\pm 1,2}{7,3} \cdot X_1, \text{ кВт·ч/т}.$$

Все выборочные дисперсии однородны, так как $G_э = 0,316 < 0,598 = G_{3;\,5;\,0,95}$.

$$S^2_{\text{воспр}} = 3,090;\ f_{\text{воспр}} = 15;\quad S^2_{\text{ад}} = 137,9;\quad f_{\text{ад}} = 3.$$

Однофакторное ортогонализированное уравнение регрессии **первого** порядка **неадекватно**, так как $F_э = 44,63 > 3,287 = F_{3;\,15;\,0,95}$.

2) **Однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка

$$Y = \underset{\pm 0,8}{61,2} - \underset{\pm 1,2}{7,3} \cdot X_1 + \underset{\pm 2,0}{10,7} \cdot (X_1^2 - 0,50), \text{ кВт·ч/т}.$$

$$S^2_{\text{воспр}} = 3,090;\quad f_{\text{воспр}} = 15;\quad S^2_{\text{ад}} = 5,038;\quad f_{\text{ад}} = 2.$$

Однофакторное ортогонализированное уравнение регрессии **второго** порядка **адекватно**, так как $F_э = 1,630 < 3,682 = F_{2;\,15;\,0,95}$.

3) Оптимальные параметры:

$$Y_{\min} = (54,6 \pm 1,2) \text{ кВт·ч/т};$$

$$X_{1\,\text{опт}} = 0,3405;\ x_{1\,\text{опт}} \approx 100\ ^{\circ}\text{C}.$$

Контрольные вопросы

1. Написать в общем виде **однофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** и **второго** порядка.
2. Написать формулы взаимосвязи нормированных X_1 и натуральных x_1 значений фактора.
3. Построить **МП** на базе РСП с числом опытов $N = 21$ для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка.
4. Какие операции включает в себя предварительная обработка экспериментальных данных?
5. Сформулировать алгоритм проверки выборочных дисперсий на однородность по критерию Кохрена. Как найти табличное значение критерия Кохрена?
6. Написать формулы для расчета дисперсии воспроизводимости и ее числа степеней свободы.
7. Написать формулу для расчета ортогонализирующего коэффициента λ_1.
8. Построить **ММ** для построения **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе РСП с числом опытов $N = 11$.
9. Написать формулы для расчета коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка.
10. Написать формулы для расчета дисперсий значимости и доверительных интервалов коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка, Сформулировать критерий проверки регрессионных коэффициентов на значимость. Как найти табличное значение критерия Стьюдента?
11. Написать уравнение для расчета дисперсии адекватности и ее числа степени свободы.
12. Сформулировать алгоритм проверки уравнения регрессии **любого порядка** на адекватность, Как найти табличное значение критерия Фишера?
13. Написать уравнение для расчета абсолютной погрешности $\Delta Y(X_1)$ параметра $Y(X_1)$, рассчитанного по **ортогонализированному однофакторному** уравнению регрессии **второго** порядка.
14. Сформулировать алгоритм оптимизации технической системы, описываемой **однофакторным ортогонализированным** уравнением регрессии **второго** порядка.

Контрольные задачи

Примечание. Для получения исходных данных для решения выбранного варианта задачи следует действовать следующим образом. Допустим, Вы решаете вариант № 41, Для этого варианта число опытов $N = 8$, число дублей $n = 5$, интервал варьирования фактора $x_1 \in [76, 118]$) (см. таблицу 22). Необходимо сначала построить матрицу планирования эксперимента (см., например, таблицу 3). Для этого по уравнениям (10) – (11) следует рассчитать 8 значений факторов x_{1j} и X_{1j}. Следующий этап – выбрать **первые** (!) 5 дублей для каждого из 8-ми значений фактора $x_{1j} = 76, 82, 88, 94, 100, 106, 112, 118$ $^{\circ}$C (см. таблицу 23).

Таблица 22

Номера вариантов (N – число опытов; n – число дублей, интервал варьирования фактора $x_1 \in [x_{1\,\min}, x_{1\,\max}]$)

1 вариант $N = 21$; $n = 4$; [60; 100]	2 вариант $N = 21$; $n = 5$; [80; 120]	3 вариант $N = 21$; $n = 6$; [70; 110]
4 вариант $N = 20$; $n = 4$; [82; 120]	5 вариант $N = 20$; $n = 5$; [66; 104]	6 вариант $N = 20$; $n = 6$; [76; 114]
7 вариант $N = 19$; $n = 4$; [82; 118]	8 вариант $N = 19$; $n = 5$; [64; 100]	9 вариант $N = 19$; $n = 6$; [72; 108]
10 вариант $N = 18$; $n = 4$; [82; 116]	11 вариант $N = 18$; $n = 5$; [66; 100])	12 вариант $N = 18$; $n = 6$; [70; 104]
13 вариант $N = 17$; $n = 4$; [82; 114]	14 вариант $N = 17$; $n = 5$; [64; 96])	15 вариант $N = 17$; $n = 6$; [70; 102]
16 вариант $N = 16$; $n = 4$; [88; 118]	17 вариант $N = 16$; $n = 5$; [60; 120])	18 вариант $N = 16$; $n = 6$; [76; 106]
19 вариант $N = 15$; $n = 4$; [88; 116]	20 вариант $N = 15$; $n = 5$; [64; 120])	21 вариант $N = 15$; $n = 6$; [76; 104]
22 вариант $N = 14$; $n = 4$; [86; 112]	23 вариант $N = 14$; $n = 5$; [64; 116])	24 вариант $N = 14$; $n = 6$; [78; 104]
25 вариант $N = 13$; $n = 4$; [84; 108]	26 вариант $N = 13$; $n = 5$; [70; 118])	27 вариант $N = 13$; $n = 6$; [80; 104]
28 вариант $N = 12$; $n = 4$; [82; 104]	29 вариант $N = 12$; $n = 5$; [62; 106])	30 вариант $N = 12$; $n = 6$; [76; 120]
31 вариант $N = 11$; $n = 4$; [80; 100]	32 вариант $N = 11$; $n = 5$; [62; 102])	33 вариант $N = 11$; $n = 6$; [80; 120]
34 вариант $N = 10$; $n = 4$; [88; 106]	35 вариант $N = 10$; $n = 5$; [60; 114])	36 вариант $N = 10$; $n = 6$; [70; 106]
37 вариант $N = 9$; $n = 4$; [82; 98]	38 вариант $N = 9$; $n = 5$; [66; 114])	39 вариант $N = 9$; $n = 6$; [70; 102]
40 вариант $N = 8$; $N = 4$; [60; 116])	41 вариант $N = 8$; $n =5$; [76; 118])	42 вариант $N = 8$; $n = 6$; [88; 116]
43 вариант $N = 7$; $n = 4$; [60; 108]	44 вариант $N = 7$; $n = 5$; [74; 110])	45 вариант $N = 7$; $n = 6$; [90; 114]
46 вариант $N = 6$; $n = 4$; [86; 116]	47 вариант $N = 6$; $n = 5$; [60; 100])	48 вариант $N = 6$; $n = 6$; [60; 120]
49 вариант $N =5$; $n = 4$; [86; 110]	50 вариант $N = 5$; $n = 5$; [70; 110])	51 вариант $N = 5$; $n = 6$; [60; 116]

Таблица 23

Экспериментальные данные, отражающие зависимость удельного расхода энергии при сушке зерна (параметр Y, кВт·ч/т) от температуры теплоносителя (фактор x_1, °С)

x_1, °С	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
60	76,3	79,4	79,3	76,4	76,0	76,2
62	72,5	75,2	72,8	72,4	69,8	74,9
64	72,0	64,1	70,1	70,4	69,1	69,2
66	69,6	65,9	70,2	64,2	69,3	66,6
68	65,1	64,0	68,2	67,0	69,1	67,6
70	60,9	63,8	60,9	60,2	62,4	63,5
72	61,8	62,4	60,6	62,8	61,8	57,4
74	55,3	58,6	59,2	59,7	60,6	57,8
76	55,6	58,2	58,8	55,4	56,5	58,3
78	55,6	55,1	55,7	54,2	57,4	57,7
80	55,2	53,4	54,7	54,4	58,3	52,8
82	55,6	54,4	51,8	53,5	53,1	51,3
84	49,9	52,8	51,7	50,9	54,6	54,2
86	52,3	52,4	52,5	50,9	50,3	53,4
88	52,3	51,3	50,8	50,4	52,3	51,4
90	48,8	50,3	50,7	50,7	54,7	47,5
92	49,9	48,0	51,9	51,3	48,5	49,5
94	47,4	46,4	50,1	50,3	49,9	49,8
96	51,7	51,8	50,8	51,6	51,4	49,8
98	52,3	49,2	49,8	47,4	49,0	52,8
100	50,1	50,8	51,0	51,4	52,4	50,5
102	52,3	51,9	52,1	51,7	50,1	50,1
104	51,2	51,6	53,2	49,4	54,2	53,6
106	53,6	54,9	54,4	53,8	54,8	53,0
108	56,7	53,6	55,8	54,1	53,4	51,6
110	55,2	55,7	56,4	57,6	60,6	58,5
112	54,8	56,1	58,0	58,0	58,3	58,2
114	61,9	56,5	59,3	59,1	60,3	59,9
116	62,4	61,2	59,7	62,8	60,7	57,8
118	66,4	62,7	63,4	64,0	60,7	62,0
120	64,3	65,3	66,1	65,8	65,0	63,0

x_1, °С	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
76	55,6	58,2	58,8	55,4	56,5
82	55,6	54,4	51,8	53,5	53,1
88	52,3	51,3	50,8	50,4	52,3
94	47,4	46,4	50,1	50,3	49,9
100	50,1	50,8	51,0	51,4	52,4
106	53,6	54,9	54,4	53,8	54,8
112	54,8	56,1	58,0	58,0	58,3
118	66,4	62,7	63,4	64,0	60,7

Далее задача решается по плану решения типовой задачи.

МОДУЛЬ 3

МНОГОФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Перечень рассматриваемых вопросов:

- моделирование технических систем, подчиняющихся стохастическим закономерностям, **многофакторными ортогонализированными** уравнениями регрессии **первого** и **второго** порядка;
- взаимосвязь натуральных и нормированных значений факторов;
- полный факторный план (ПФП), центральный полный факторный план (ЦПФП), дробный факторный план (ДФП), центральный дробный факторный план (ЦДФП), ортогональный центральный композиционный план (ОЦКП);
- матрица планирования и предварительная обработка экспериментальных данных (выборочные средние и выборочные дисперсии в каждом опыте, проверка выборочных дисперсий на однородность по критерию Кохрена, дисперсия воспроизводимости и ее число степеней свободы);
- матрица моделирования и окончательная обработка экспериментальных данных (расчет ортогонализирующего коэффициента, расчет коэффициентов **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** и **второго** порядка, проверка их на значимость по критерию Стьюдента, проверка уравнения регрессии на адекватность по критерию Фишера, расчет абсолютной погрешности прогнозирования параметра оптимизации);
- крутое восхождение (спуск);
- оптимизация изучаемой технической системы.

3.1. МНОГОФАКТОРНОЕ ОРТОГОНАЛИЗИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ПЛАН ЦПФП

Теория с примерами (кратко)

1. **Многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка для k факторов имеет вид

$$Y = b_0 X_0 + \sum_{r=1}^{k} b_r X_r \ , \qquad (101)$$

Уравнение регрессии строится в **нормированных** значениях факторов.

2. Натуральные значения фактора x_1 заданы на отрезке $x_1 \in [x_{1\min}; x_{1\max}]$. Взаимосвязь нормированных значений X_1 с натуральными значениями фактора x_1 определяется следующими уравнениями (см. аналогичные зависимости для однофакторного эксперимента (49) – (52)):

$$X_r = \frac{x_r - x_{r0}}{\Delta x_r}, \quad r = 1, \ldots, k\ ; \qquad (102)$$

$$x_r = x_{r0} + \Delta x_r \cdot X_r, \quad r = 1, \ldots, k\ ; \qquad (103)$$

$$x_{r0} = \frac{x_{r\max} + x_{r\min}}{2}, \quad r = 1, \ldots, k\ ; \qquad (104)$$

$$\Delta x_r = \frac{x_{r\max} - x_{r\min}}{2}, \quad r = 1, \ldots, k\ , \qquad (105)$$

где x_{r0}, Δx_r, $x_{r\max}$, $x_{r\min}$ – основной уровень, интервал варьирования, максимальное и минимальное натуральные значения фактора x_r соответственно. Из уравнений (102) – (105) следует, что если $x_r \in [x_{r\min}, x_{r\max}]$, то $X_r \in [-1, +1]$ для всех $r = 1, \ldots, k$.

3. **МП** представляет собой таблицу, состоящую из N_k опытов $(j=1,...,N_k)$ с числом дублей n $(i=1,...,n)$ в каждом опыте и включающая в себя столбцы: $N_k, X_{rj}, x_{rj}, Y_{ji}, \overline{Y_j}, S_j^2$ $(r=1,...,k)$. Значения Y_{ji} позволяют провести предварительную обработку экспериментальных данных (расчет выборочных средних $\overline{Y_j}$ и дисперсий S_j^2 в каждом опыте, проверка всех выборочных дисперсий на однородность по критерию Кохрена, расчет дисперсии воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$ и ее числа степеней свободы $f_{\text{воспр}}$).

Для построения **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка создают **МП** на базе центрального полного факторного плана (ЦПФП). План ЦПФП - композиционный план, состоящий из полного факторного плана (ПФП) и одного опыта в центре плана (0, 0, …, 0). План ПФП представляет собой полный набор всех опытов, в которых каждый фактор варьируется только на 2-х уровнях $X_r = \pm 1$ $(r=1,...,k)$. Количество опытов ПФП равно

$$N_{k0} = 2^k . \tag{106}$$

Соответственно количество опытов ЦПФП равно

$$N_k = N_{k0} + 1 = 2^k + 1 . \tag{107}$$

Пример 3.1.1. Создать **МП** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $(k=2)$ на базе ЦПФП с числом опытов $N_2 = 2^2 + 1 = 5$, числом дублей n, $x_1 \in [2, 5]$ ц/га, $x_2 \in [1, 2]$ ц/га. Результаты расчета внесены в таблицу 24.

Таблица 24

МП для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N_2 = 5$. Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N_2	X_{1j}	X_{2j}	x_{1j}	x_{2j}	Y_{j1}	Y_{ji}	Y_{jn}	$\overline{Y_j}$	S_j^2
1	− 1	− 1	2	1	Y_{11}	Y_{1i}	Y_{1n}	$\overline{Y_1}$	S_1^2
2	+ 1	− 1	5	1	Y_{21}	Y_{2i}	Y_{2n}	$\overline{Y_2}$	S_2^2
3	− 1	+ 1	2	2	Y_{31}	Y_{3i}	Y_{3n}	$\overline{Y_3}$	S_3^2
4	+ 1	+ 1	5	2	Y_{41}	Y_{4i}	Y_{4n}	$\overline{Y_4}$	S_4^2
5	0	0	3,5	1,5	Y_{51}	Y_{5i}	Y_{5n}	$\overline{Y_5}$	S_5^2
$G_э$		$G_{n-1;\,5;\,0,95}$		$S^2_{\text{воспр}}$		$f_{\text{воспр}}$	$\sum_{j=1}^{5} S_j^2$		

Пример 3.1.2. Создать **МП** для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $(k=3)$ на базе ЦПФП с числом опытов $N_3 = 2^3 + 1 = 9$, числом дублей n, $x_1 \in [2, 5]$ ц/га, $x_2 \in [1, 2]$ ц/га, $x_3 \in [16, 28]$ °С. Результаты расчета внесены в таблицу 25.

Предварительная обработка экспериментальных данных. Число опытов N_k $(j=1,...,N_k)$ и число дублей n в каждом опыте $(i=1,...,n)$.

3.1. Выборочные параметры:

- выборочное среднее в каждом опыте

$$\overline{Y_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{ji}}{n}, \quad j=1,...,N_k ; \tag{108}$$

- выборочная дисперсия в каждом опыте

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_{ji} - \overline{Y_j})^2}{n-1}, \quad j = 1, ..., N_k . \tag{109}$$

Таблица 25

МП для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения
регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N_3 = 9$.
Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N_3	X_{1j}	X_{2j}	X_{2j}	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	Y_{j1}	Y_{ji}	Y_{jn}	$\overline{Y_j}$	S_j^2
1	– 1	– 1	– 1	2	1	16	Y_{11}	Y_{1i}	Y_{1n}	$\overline{Y_1}$	S_1^2
2	+ 1	– 1	– 1	5	1	16	Y_{21}	Y_{2i}	Y_{2n}	$\overline{Y_2}$	S_2^2
3	– 1	+ 1	– 1	2	2	16	Y_{31}	Y_{3i}	Y_{3n}	$\overline{Y_3}$	S_3^2
4	+ 1	+ 1	– 1	5	2	16	Y_{41}	Y_{4i}	Y_{4n}	$\overline{Y_4}$	S_4^2
5	– 1	– 1	+ 1	2	1	28	Y_{51}	Y_{5i}	Y_{5n}	$\overline{Y_5}$	S_5^2
6	+ 1	– 1	+ 1	5	1	28	Y_{61}	Y_{6i}	Y_{6n}	$\overline{Y_6}$	S_6^2
7	– 1	+ 1	+ 1	2	2	28	Y_{71}	Y_{7i}	Y_{7n}	$\overline{Y_7}$	S_7^2
8	+ 1	+ 1	+ 1	5	2	28	Y_{81}	Y_{8i}	Y_{8n}	$\overline{Y_8}$	S_8^2
9	0	0	0	3,5	1,5	22	Y_{91}	Y_{9i}	Y_{9n}	$\overline{Y_9}$	S_9^2
$G_э$			$G_{n-1;\,9;\,0,95}$			$S^2_{воспр}$		$f_{воспр}$	$\sum_{j=1}^{9} S_j^2$		

3.2. Проверка всех N_k выборочных дисперсий на однородность. Так как объем всех выборок одинаковый $n_1 = ... = n_N = n$, то проверку дисперсий на однородность проводят по критерию Кохрена:

- экспериментальное значение критерия Кохрена

$$G_э = \frac{\max S_j^2}{\sum_{j=1}^{N_k} S_j^2}; \tag{110}$$

- табличное значение критерия Кохрена $G_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$, в котором на первом месте стоит число степеней свободы максимальной дисперсии $f_{числ} = n-1$, а на втором – число степеней свободы, равное числу всех дисперсий $f_{знам} = N_k$, при доверительной вероятности $p = 0,95$ выбирают из таблицы приложения 5;

- выборочные дисперсии $S_1^2, ..., S_N^2$ однородны, если

$$G_э < G_{n-1;\, N_k;\, p}; \tag{111}$$

- выборочные дисперсии $S_1^2, ..., S_N^2$ неоднородны, если

$$G_э \geq G_{n-1;\, N_k;\, p}. \tag{112}$$

Если выборочные дисперсии неоднородны, то дальнейшее моделирование изучаемой технической системы предложенным математическим аппаратом некорректно. Необходимо переделать опыт, в котором выборочная дисперсия наибольшая.

3.3. Если число дублей $n > 6$, то случайные значения каждого опыта следует проверить на промах по критерию Смирнова – Граббса, а также на принадлежность их нормальному закону распределения по критерию среднего абсолютного отклонения. В случае обнаружения промаха или отклонения экспериментальных данных от нормального закона распределения в каком-либо опыте, последний необходимо переделать. Если число дублей $n \leq 6$, то проверку случайных значений выборки на промах и на принадлежность их нормальному закону распределения можно не проводить.

3.4. Если все выборочные дисперсии однородны, то дисперсию воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{воспр}}$ рассчитывают по уравнениям:

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k} S_j^2}{N_k}; \tag{113}$$

$$f_{\text{воспр}} = N_k (n-1). \tag{114}$$

4. **ММ** для построения **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка представляет собой таблицу, состоящую из N_k опытов $(j = 1, ..., N_k)$ с числом дублей n $(i = 1, ..., n)$ и включающая в себя столбцы: N_k, X_{0j}, X_{rj}, $\overline{Y_j}$, $X_{0j}\overline{Y_j}$, $X_{rj}\overline{Y_j}$, Y_j^p, $\left(\overline{Y_j} - Y_j^p\right)^2$ $(r = 1, ..., k)$, значения которых позволяют провести окончательную обработку экспериментальных данных (расчет коэффициентов b_0, b_r, проверка их на значимость по критерию Стьюденту, проверка уравнения регрессии на адекватность по критерию Фишера, расчет абсолютной ошибки прогнозирования параметра оптимизации в случае адекватности уравнения регрессии). Столбец нормированного фиктивного фактора X_0 состоит из элементов $X_{0j} = +1$. Столбцы нормированных значений фактора X_r в **ММ** переносятся из **МП** для **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка.

Пример 3.1.3. Создать **ММ** (см. **МП** – таблица 24) для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $(k = 2)$ на базе ЦПФП с числом опытов $N_2 = 2^2 + 1 = 5$ (таблица 26).

Таблица 26

ММ для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N_2 = 5$. Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N_k	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	$X_{2j}\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$
1	$+1$	-1	-1	$\overline{Y_1}$	$+\overline{Y_1}$	$-\overline{Y_1}$	$-\overline{Y_1}$	Y_1^p	$(\overline{Y_1} - Y_1^p)^2$
2	$+1$	$+1$	-1	$\overline{Y_2}$	$+\overline{Y_2}$	$+\overline{Y_2}$	$-\overline{Y_2}$	Y_2^p	$(\overline{Y_2} - Y_2^p)^2$
3	$+1$	-1	$+1$	$\overline{Y_3}$	$+\overline{Y_3}$	$-\overline{Y_3}$	$+\overline{Y_3}$	Y_3^p	$(\overline{Y_3} - Y_3^p)^2$
4	$+1$	$+1$	$+1$	$\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	Y_4^p	$(\overline{Y_4} - Y^p)^2$
5	$+1$	0	0	$\overline{Y_5}$	$+\overline{Y_5}$	$0 \cdot \overline{Y_5}$	$0 \cdot \overline{Y_5}$	Y_5^p	$(\overline{Y_5} - Y_5^p)^2$
$\sum{}^2$	**5**	**4**	**4**		$\sum\limits_{j=1}^{5} X_{0j}\overline{Y_j}$	$\sum\limits_{j=1}^{5} X_{1j}\overline{Y_j}$	$\sum\limits_{j=1}^{5} X_{2j}\overline{Y_j}$	$\varphi = \sum\limits_{j=1}^{5} (\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$	

Пример 3.1.4. Создать **ММ** (см. **МП** – таблица 25) для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $(k = 3)$ на базе ЦПФП с числом опытов $N_3 = 2^3 + 1 = 9$ (таблица 27).

В данном пособии рассматриваются уравнения регрессии **только** с ортогональными факторами. **ММ** для **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка факторы X_0 и X_r ортогональны, так как $\sum\limits_{j=1}^{N} X_{0j} X_{rj} = 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj} X_{sj} = 0$ $(r, s = 1, ..., k, \quad r < s)$ (проверить самостоятельно, используя данные таблиц 26, 27). Ортогональность факторов позволяет определять коэффициенты регрессии и их дисперсии значимости независимо друг от друга.

Таблица 27

ММ для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N_2 = 9$.
Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N_k	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	$X_{2j}\overline{Y_j}$	$X_{3j}\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$
1	+1	−1	−1	−1	$\overline{Y_1}$	$+\overline{Y_1}$	$-\overline{Y_1}$	$-\overline{Y_1}$	$-\overline{Y_1}$	Y_1^p	$(\overline{Y_1} - Y_1^p)^2$
2	+1	+1	−1	−1	$\overline{Y_2}$	$+\overline{Y_2}$	$+\overline{Y_2}$	$-\overline{Y_2}$	$-\overline{Y_2}$	Y_2^p	$(\overline{Y_2} - Y_2^p)^2$
3	+1	−1	+1	−1	$\overline{Y_3}$	$+\overline{Y_3}$	$-\overline{Y_3}$	$+\overline{Y_3}$	$-\overline{Y_3}$	Y_3^p	$(\overline{Y_3} - Y_3^p)^2$
4	+1	+1	+1	−1	$\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$-\overline{Y_4}$	Y_4^p	$(\overline{Y_4} - Y_4^p)^2$
5	+1	−1	−1	+1	$\overline{Y_5}$	$+\overline{Y_5}$	$-\overline{Y_5}$	$-\overline{Y_5}$	$+\overline{Y_5}$	Y_5^p	$(\overline{Y_5} - Y_5^p)^2$
6	+1	+1	−1	+1	$\overline{Y_6}$	$+\overline{Y_6}$	$+\overline{Y_6}$	$-\overline{Y_6}$	$+\overline{Y_6}$	Y_6^p	$(\overline{Y_6} - Y_6^p)^2$
7	+1	−1	+1	+1	$\overline{Y_7}$	$+\overline{Y_7}$	$-\overline{Y_7}$	$+\overline{Y_7}$	$+\overline{Y_7}$	Y_7^p	$(\overline{Y_7} - Y_7^p)^2$
8	+1	+1	+1	+1	$\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	Y_8^p	$(\overline{Y_8} - Y_8^p)^2$
9	+1	0	0	0	$\overline{Y_9}$	$+\overline{Y_9}$	$0 \cdot \overline{Y_9}$	$0 \cdot \overline{Y_9}$	$0 \cdot \overline{Y_9}$	Y_9^p	$(\overline{Y_9} - Y_9^p)^2$
$\sum^2$	**9**	**8**	**8**	**8**		$\sum\limits_{j=1}^{9} X_{0j}\overline{Y_j}$	$\sum\limits_{j=1}^{9} X_{1j}\overline{Y_j}$	$\sum\limits_{j=1}^{9} X_{2j}\overline{Y_j}$	$\sum\limits_{j=1}^{9} X_{3j}\overline{Y_j}$	$\varphi = \sum\limits_{j=1}^{9} (\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$	

4.1. Коэффициенты b_0, b_r **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 X_0 + \sum\limits_{r=1}^{k} b_r X_r$ (все факторы $X_0, X_1, ..., X_k$ взаимно ортогональны) рассчитывают по уравнениям:

$$b_0 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j}\overline{Y_j}}{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j}^2}; \qquad (115)$$

$$b_r = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}\overline{Y_j}}{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2}, \quad r = 1, ..., k. \qquad (116)$$

Для расчета коэффициентов b_0, b_r в **ММ** следует построить вспомогательные столбцы $X_{0j}\overline{Y_j}$ и $X_{rj}\overline{Y_j}$, рассчитать их суммы $\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j}\overline{Y_j}$ и $\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}\overline{Y_j}$.

Суммы $\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j}^2$ и $\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2$ рассчитывают по уравнениям (106), (107). В таблице 28 приведены значения этих сумм для ЦПФП для $k = 2, 3, 4, 5, 6$.

Таблица 28

Значения сумм квадратов факторов для *k* факторов ЦПФП

k	N_k	$\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j}^2$	N_{k0}	$\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2$
2	5	5	4	4
3	9	9	8	8
4	17	17	16	16
5	33	33	32	32
6	65	65	64	64

Пример 3.1.5. Рассчитать коэффициенты **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$, если **ММ** с числом опытов $N_3 = 9$ имеет следующий вид (таблица 29).

Таблица 29

ММ для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N_3 = 9$.
Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N_3	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	$X_{2j}\overline{Y_j}$	$X_{3j}\overline{Y_j}$
1	+ 1	– 1	– 1	– 1	56,0	+ 56,0	– 56,0	– 56,0	– 56,0
2	+ 1	+ 1	– 1	– 1	37,0	+ 37,0	+ 37,0	– 37,0	– 37,0
3	+ 1	– 1	+ 1	– 1	83,0	+ 83,0	– 83,0	+ 83,0	– 83,0
4	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	70,0	+ 70,0	+ 70,0	+ 70,0	– 70,0
5	+ 1	– 1	– 1	+ 1	33,0	+ 33,0	– 33,0	– 33,0	– 33,0
6	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	13,0	+ 13,0	+ 13,0	– 13,0	+ 13,0
7	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	65,0	+ 65,0	– 65,0	+ 65,0	+ 65,0
8	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	43,0	+ 43,0	+ 43,0	+ 43,0	+ 43,0
9	+ 1	0	0	0	50,0	+ 50,0	0	0	0
$\sum^2$	**9**	**8**	**8**	**8**	$\sum$	450,0	– 74,00	122,0	– 92,00
						b_0	b_1	b_2	b_3
						50,00	**– 9,250**	**15,25**	**– 11,50**

Коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3 рассчитаем по уравнениям (115) – (116) и данным таблиц 28 и 29:

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N_3} X_{0j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{N_3} X_{0j}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{9} X_{0j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9} X_{0j}^2} = \frac{450,0}{9} = 50,00;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N_3} X_{1j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{N_3} X_{1j}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{9} X_{1j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9} X_{1j}^2} = \frac{-74,00}{8} = -9,250;$$

$$b_2 = \frac{\sum_{j=1}^{N_3} X_{2j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{N_3} X_{2j}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{9} X_{2}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9} X_{2j}^2} = \frac{122,0}{8} = 15,25;$$

$$b_3 = \frac{\sum_{j=1}^{N_3} X_{3j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{N_3} X_{3j}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{9} X_{3j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9} X_{3j}^2} = \frac{-92,00}{8} = -11,50.$$

Ответ. Трехфакторное ортогонализированное уравнение регрессии **первого** порядка имеет вид $Y = 50,00 - 9,25 \cdot X_1 + 15,25 \cdot X_2 - 11,50 \cdot X_3$.

4.2. Проверка коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на значимость.

Дисперсии значимости коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка (факторы X_0 и X_r **ортогональны)** рассчитывают по уравнениям:

$$S^2(b_0) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum_{j=1}^{N_k} X_{0j}^2}; \tag{117}$$

$$S^2(b_r) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2}, \quad r = 1, ..., k. \tag{118}$$

Важным свойством ЦПФП является равенство дисперсий всех линейных коэффициентов.

$$S^2(b_1) = S^2(b_2) = ... = S^2(b_k). \tag{119}$$

4.3. Доверительные интервалы коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка рассчитывают по критерию Стьюдента:

$$\Delta b_0 = t_{f;\,p} \cdot S(b_0); \tag{120}$$

$$\Delta b_r = t_{f;\,p} \cdot S(b_r), \quad r = 1, ..., k, \tag{121}$$

где $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N_k(n-1)$ и доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выбирают из таблицы приложения 2.

Равенство доверительных интервалов всех линейных коэффициентов является следствием уравнений (119) и (121):

$$\Delta b_1 = \Delta b_2 = ... = \Delta b_k. \tag{122}$$

Коэффициенты **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка значимы, если

$$\Delta b_0 < |b_0|, \tag{123}$$

$$\Delta b_r < |b_r|, \quad r = 1, ..., k. \tag{124}$$

Если для какого-либо коэффициента уравнения регрессии указанное неравенство не выполняется, то этот коэффициент незначим, и он исключается из полученного уравнения регрессии.

5. Проверка **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на адекватность.

5.1. Дисперсию адекватности $S^2_{\text{воспр}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ для **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка рассчитывают по уравнениям:

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{n\varphi}{N_k - B}; \tag{125}$$

$$f_{\text{ад}} = N_k - B; \tag{126}$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N_k} \left(\overline{Y}_j - Y_j^p\right)^2, \tag{127}$$

где φ – остаточная сумма квадратов; N_k – число опытов; n – число дублей в каждом опыте; Y_j^p $(j = 1, ..., N)$ – рассчитанные значения параметра Y по **многофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **первого** порядка $Y_j^p = b_0 X_{0j} + \sum\limits_{r=1}^{k} b_r X_{rj}$, в котором оставлены только значимые коэффициенты; B – число значимых коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка.

5.2. В процессе построении уравнения регрессии обязательной процедурой является расчет дисперсии воспроизводимости и дисперсии адекватности, а также их числа степеней свободы: $S^2_{\text{воспр}}$ $(f_{\text{воспр}} = N_k(n-1))$ и $S^2_{\text{ад}}$ $(f_{\text{ад}} = N_k - B)$. Проверка уравнения регрессии **любого** порядка на адекватность сводится к проверке дисперсий $S^2_{\text{воспр}}$ и $S^2_{\text{ад}}$ на однородность по критерию Фишера по уравнениям (78) – (82).

6. Если **многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка адекватно, то абсолютная погрешность $\Delta Y(X_1, ..., X_k)$ параметра $Y(X_1, ..., X_k)$, рассчитанного по **многофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + \sum_{r=1}^{k} b_k X_k$ (факторы $X_0, X_1, ..., X_k$ **ортогональны**), рассчитывают по уравнению

$$\Delta Y(X_1, ..., X_k) = t_{f;\,p} \cdot \sqrt{S^2(b_0) + S^2(b_1) \sum_{r=1}^{k} X_r^2}\,, \tag{128}$$

где $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N_k(n-1)$ и доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выбирают из таблицы приложения 2.

Пример 3.1.6. Во сколько раз абсолютная погрешность параметра $Y(X_1, ..., X_k)$ в вершинах факторного пространства $(X_r = \pm 1)$ больше, чем в его центре $(0, ..., 0)$?

Решение. Из уравнений (106), (107) следует, что $\sum_{j=1}^{N_k} X_{0j}^2 = N_k = 2^k + 1$, $\sum_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2 = N_{k0} = 2^k$, а из уравнений (117), (118) – $S^2(b_0) = \dfrac{S^2_{\text{воспр}}}{n \sum_{j=1}^{N_k} X_{oj}^2} = \dfrac{S^2_{\text{воспр}}}{n \cdot (2^k + 1)}$, $S^2(b_r) = \dfrac{S^2_{\text{воспр}}}{n \sum_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2} = \dfrac{S^2_{\text{воспр}}}{n \cdot 2^k}$. Воспользовавшись уравнением (128), получим:

$$\Delta Y(0, ..., 0) = t_{f;\,p} \cdot \sqrt{S^2(b_0)} = t_{f;\,p} \cdot \sqrt{\frac{S^2_{\text{воспр}}}{n \cdot (2^k + 1)}} = \frac{t_{f;\,p} \cdot S_{\text{воспр}}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^k + 1}}\,;$$

$$\Delta Y(\pm 1, ..., \pm 1) = t_{f;\,p} \cdot \sqrt{S^2(b_0) + S^2(b_1) \cdot k} = t_{f;\,p} \cdot \sqrt{\frac{S^2_{\text{воспр}}}{n \cdot (2^k + 1)} + \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n \cdot 2^k} \cdot k} = \frac{t_{f;\,p} \cdot S_{\text{воспр}}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^k + 1} + \frac{k}{2^k}}\,;$$

$$\gamma = \frac{\Delta Y(\pm 1, ..., \pm 1)}{\Delta Y(0, ..., 0)} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{2^k + 1} + \dfrac{k}{2^k}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2^k + 1}}} = \sqrt{1 + k \cdot \frac{2^k + 1}{2^k}} = \sqrt{1 + k \cdot \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}\,.$$

Для $k = 2,\ 3,\ 4$ $\gamma = 1{,}87;\ 2{,}09;\ 2{,}29$, соответственно. Для $k >> 1$ получаем $\gamma \approx \sqrt{1 + k}$.

Ответ. Абсолютная погрешность параметра $Y(X_1, ..., X_k)$ для $k >> 1$ в вершинах факторного пространства $(X_r = \pm 1)$ больше, чем в его центре $(0, ..., 0)$ в $\sqrt{1 + k}$ раз.

7. Если полученное **многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка **адекватно**, то следует перейти к крутому восхождению для достижения стационарной зоны.

Если полученное **многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка **неадекватно**, то следует перейти к построению **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка.

Типовая задача

Цель. Освоить методы моделирования и оптимизации **многофакторных** технических систем, описываемых стохастическими закономерностями.

Формулировка задачи. На международной сельскохозяйственной ярмарке у канадской фирмы был закуплен элитный сорт твердой пшеницы. Так как климат и плодородие земель в Канаде и Беларуси различаются, то для адаптации агротехнического процесса возделывания канадской пшеницы к белорусским условиям было принято решение исследовать ее урожайность для природно-климатических условий Беларуси. Известно, что урожайность пшеницы зависит от большого числа факторов, влияние которых аналитически оценить невозможно. Для иллюстрации метода моделирования многофакторных технических систем рассмотрим несколько упрощенный вариант - изучим зависимость урожайности пшеницы только от двух факторов: количества семян и органического удобрения.

Математическая формулировка задачи. 1) Построить адекватное уравнение регрессии, отражающее зависимость урожайности пшеницы (параметр Y, ц/га) от количества посевного материала (фактор x_1, ц/га) и количества неорганического удобрения (фактор x_2, ц/га) при $x_1 \in [x_{1\min}; x_{1\max}] = [0,5;\ 1,5]$ ц/га и $x_2 \in [x_{2\min}; x_{2\max}] = [0,25;\ 0,75]$ ц/га . 2) Определить оптимальные значения факторов $x_{1\text{ опт}}$ и $x_{2\text{ опт}}$, при которых урожайность пшеницы будет максимальной $Y_{\max}$.

Решение задачи начнем с моделирования изучаемой технической системы **двухфакторным ортогонализированным** уравнением регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N = 5$ и числом дублей $n = 4$. Для достижения цели используем **МП,** представленную в таблице 24. Результаты эксперимента приведены в таблице 30.

Таблица 30

Экспериментальные данные для ЦПФП

№	X_{1j}	X_{2j}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j3}	Y_{j4}
1	– 1	– 1	16,0	15,8	15,8	16,4
2	+ 1	– 1	29,6	29,5	29,9	29,9
3	– 1	+ 1	27,2	27,5	27,7	27,3
4	+ 1	+ 1	40,6	40,7	41,0	40,8
5	0	0	28,5	28,2	28,5	28,1

План решения задачи

1. Внимательно прочитать условие задачи.
2. Написать формулы взаимосвязи натуральных значений факторов x_1, x_2 с нормированными X_1, X_2 .
3. Создать **МП** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. Выполнить предварительную обработку экспериментальных данных.
4. Создать **ММ** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. Выполнить окончательную обработку экспериментальных данных.
5. Принять решение о дальнейшем пути исследования изучаемой технической системы.

NB! Все предварительные расчеты проводить с точностью не менее 4-х значащих цифр.

Решение задачи по плану

1. Пункт плана 1 выполнить самостоятельно.
2. Уровни и интервалы варьирования факторов, а также формулы взаимосвязи натуральных значений факторов x_1, x_2 с нормированными X_1, X_2 приведены в таблице 31. Для расчета основных уровней, уровней варьирования факторов и нахождения взаимосвязи натуральных и нормированных значений факторов использованы уравнения (102) – (105).

Таблица 31

Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы	1-й фактор (семена)		2-й фактор (удобрение)	
	x_1, ц/га	X_1	x_2, ц/га	X_2
Нижний уровень	$x_{1\min} = 0,5$	– 1	$x_{2\min} = 0,25$	– 1
Верхний уровень	$x_{1\max} = 1,5$	+ 1	$x_{2\max} = 0,75$	+ 1
Основной уровень	$x_{10} = 1,0$	0	$x_{20} = 0,50$	0
Интервал варьирования	$\Delta x_1 = 0,5$		$\Delta x_2 = 0,25$	
Формулы взаимосвязи натуральных значений факторов x_1, x_2 с нормированными X_1, X_2	$X_1 = \frac{x_1 - 1,0}{0,5}$; $x_1 = 1,0 + 0,5 \cdot X_1$; $X_2 = \frac{x_1 - 0,50}{0,25}$; $x_2 = 0,50 + 0,25 X_2$.			

3. Создадим **МП** (таблица 32) для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2$ на базе ЦПФП ($k = 2$) с числом опытов, количество которых рассчитаем по уравнению (107) $N_2 = N_{20} + 1 = 2^2 + 1 = 5$, и числом дублей $n = 4$. **МП** состоит из следующих столбцов: N_2, X_{1j}, X_{2j}, x_{1j}, x_{2j}. В таблицу 32 внесены экспериментальные данные Y_{1j}, Y, Y_{3j}, Y_{4j} из таблицы 30.

Таблица 32

МП для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N = 5$. Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N_2	X_{1j}	X_{2j}	x_{1j}	x_{2j}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j3}	Y_{j4}	$\overline{Y}_j$	S_j^2
1	– 1	– 1	0,5	0,25	16,0	15,8	15,8	16,4	16,00	0,08000
2	+ 1	– 1	1,5	0,25	29,6	29,5	29,9	29,9	29,73	0,04250
3	– 1	+ 1	0,5	0,75	27,2	27,5	27,7	27,3	27,43	0,04917
4	+ 1	+ 1	1,5	0,75	40,6	40,7	41,0	40,8	40,78	0,02917
5	0	0	1,0	0,50	28,5	28,2	28,5	28,1	28,33	0,04250
$G_э = 0{,}329$			$G_{3;\,5;\,0{,}95} = 0{,}598$			$S^2_{\text{воспр}} = 0{,}04866$; $f_{\text{воспр}} = 15$			$\sum\limits_{j=1}^{5} S_j^2 = 0{,}2433$	

3.1. **Методика эксперимента.** Для уменьшения влияния неуправляемых факторов эксперимент проводится в теплице. Так как общее количество опытов $N_2 = 5$ и число дублей $n = 4$, организуем 20 делянок площадью по 1 м^2. Посевной материал и неорганическое удобрение вносились в каждую делянку согласно **МП,** представленной в таблице 32. Все остальные факторы (количество влаги, света, тепла) для имитации климатических условий Беларуси поддерживались на уровнях, характерных для апреля – августа за последние 10 лет (средние значения температуры ночью, утром, днем, вечером, количество пасмурных и солнечных дней, количество выпавшей воды в виде дождей были взяты из отчетов Гидрометцентра Беларуси).

3.2. Предварительная обработка экспериментальных данных (результаты расчета внесены в таблицу 32):

- выборочное среднее в каждом опыте рассчитаем по уравнению (108), например, для $j = 1$

$$\overline{Y_1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_{1i}}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} Y_{1i}}{4} = \frac{16{,}0 + 15{,}8 + 15{,}8 + 16{,}4}{4} = 16{,}00;$$

- выборочную дисперсию в каждом опыте рассчитаем по уравнению (109), например, для $j = 1$

$$S_1^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (Y_{1i} - \overline{Y_1})^2}{n-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} (Y_{1i} - \overline{Y_1})^2}{4-1} = \frac{(16{,}0-16{,}00)^2 + (15{,}8-16{,}00)^2 + (15{,}8-16{,}00)^2 + (16{,}4-16{,}00)^2}{3} =$$

$$= \frac{0^2 + 0{,}2^2 + 0{,}2^2 + 0{,}4^2}{3} = \frac{0 + 0{,}0400 + 0{,}0400 + 0{,}1600}{3} = \frac{0{,}2400}{3} = 0{,}08000;$$

- однородность выборочных дисперсий по критерию Кохрена:
- экспериментальное значение критерия Кохрена рассчитаем по уравнению (110)

$$G_э = \frac{\max S_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{5} S_j^2} = \frac{0{,}08000}{0{,}08000 + 0{,}04250 + 0{,}04917 + 0{,}02917 + 0{,}04250} = \frac{0{,}08000}{0{,}2433} = 0{,}329;$$

- табличное значение критерия Кохрена $G_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p}$, в котором на первом месте стоит число степеней свободы максимальной дисперсии $f_{\text{числ}} = n - 1 = 4 - 1 = 3$, а на втором – число степеней свободы, равное числу всех дисперсий $f_{\text{знам}} = N_2 = 5$, при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 5

$$G_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p} = G_{n-1;\, N_2;\, p} = G_{3;\,5;\,0,95} = 0,598 .$$

Вывод. Все выборочные дисперсии однородны, так как согласно уравнению (111) $G_э = 0,329 < 0,598 = G_{3;\,5;\,0,95}$.

В каждом опыте число дублей $n = 4 < 6$, поэтому проверку случайных значений каждого опыта на промах и на принадлежность их нормальному закону распределения проводить не будем (раздел 2.1, п. 4.3).

Так как все выборочные дисперсии однородны, то дисперсию воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{воспр}}$ рассчитаем по уравнениям (113) – (114):

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{5} S_j^2}{5} = \frac{0,2433}{5} = 0,04866 ;$$

$$f_{\text{воспр}} = N_k (n-1) = 5 \cdot (4-1) = 15 .$$

4. Создадим **ММ** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N = 5$ (см. таблицу 26). Рассчитаем коэффициенты b_0, b_1, b_2 и проверим их на значимость, а само уравнение на адекватность (таблица 33).

Таблица 33

ММ для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N = 5$. Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	$X_{2j}\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1	– 1	16,00	16,00	– 16,00	– 16,00	16,07	0,00490
2	+ 1	+ 1	– 1	29,73	29,73	+ 29,73	– 29,73	29,61	0,01440
3	+ 1	– 1	+ 1	27,43	27,43	– 27,43	+ 27,43	27,31	0,01440
4	+ 1	+ 1	+ 1	40,78	40,78	+ 40,78	+ 40,78	40,85	0,00490
5	+ 1	0	0	28,33	28,33	0	0	28,46	0,01690
$\sum^2$	**5**	**4**	**4**	$\sum$	**142,3**	**27,08**	**22,48**	$\varphi = 0,05550$	
$F_э = 2,281;\ F_{2;15;0,95} = 5,786$				b_r	**28,46**	**6,770**	**5,620**	$S^2_{\text{ад}} = 0,1110$	
Уравнение адекватно				Δb_r	**0,11**	**0,12**	**0,12**	$f_{\text{ад}} = 2$	

4.1. Проверим факторы X_0, X_1, X_2 **ММ** на **ортогональность**. Факторы X_0, X_1, X_2 **ортогональны,** так как, используя данные таблицы 33, получаем следующие уравнения:

$$\sum_{j=1}^{N_2} X_{0j} X_{1j} = \sum_{j=1}^{5} X_{0j} X_{1j} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (+1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (+1) + 1 \cdot 0 = 0 ;$$

$$\sum_{j=1}^{N_2} X_{0j} X_{2j} = \sum_{j=1}^{5} X_{0j} X_{2j} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (+1) + 1 \cdot (+1) + 1 \cdot 0 = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^{N_2} X_{1j} X_{2j} = \sum_{j=1}^{5} X_{1j} X_{2j} = (-1) \cdot (-1) + (+1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (+1) + (+1) \cdot (+1) + 0 \cdot 0 = 0.$$

4.2. Построим **двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$ (результаты внесены в таблицу 33):

- образуем столбцы $X_{0j}\overline{Y_j}$, $X_{1j}\overline{Y_j}$, $X_{2j}\overline{Y_j}$ и рассчитаем их суммы:

$$\sum_{j=1}^{5} X_{0j} \overline{Y_j} = 1 \cdot 16,00 + 1 \cdot 29,73 + 1 \cdot 27,43 + 1 \cdot 40,78 + 1 \cdot 28,33 = 142,3 ;$$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{0j}\overline{Y}_j = (-1)\cdot 16,00 + 1\cdot 29,73 + (-1)\cdot 27,43 + 1\cdot 40,78 + 0\cdot 28,33 = 27,08\,;$$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{2j}\overline{Y}_j = (-1)\cdot 16,00 + (-1)\cdot 29,73 + 1\cdot 27,43 + 1\cdot 40,78 + 0\cdot 28,33 = 22,48\,;$$

- значения сумм $\sum_{j=1}^{N_2} X_{0j}^2 = 5$, $\sum_{j=1}^{N_2} X_{1j}^2 = 4$ возьмем из таблицы 28;

- коэффициенты **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка b_0, b_1, b_2, так как факторы X_0, X_1, X_2 **ортогональны**, рассчитаем по уравнениям (115), (116):

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N_2} X_{0j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{N_2} X_{0j}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{5} X_{0j}\overline{Y}_j}{5} = \frac{142,3}{5} = 28,46\,;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N_2} X_{1j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{N_2} X_{1j}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{5} X_{1j}\overline{Y}_j}{4} = \frac{27,08}{4} = 6,770\,;$$

$$b_2 = \frac{\sum_{j=1}^{N_2} X_{2j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{N_2} X_{2j}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{5} X_{2j}\overline{Y}_j}{4} = \frac{22,48}{4} = 5,620\,.$$

4.3. Проверим коэффициенты b_0, b_1, b_2 **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на значимость по критерию Стьюдента:

- дисперсии значимости коэффициентов регрессии b_0, b_1, b_2 при условии, что факторы X_0, X_1, X_2 **ортогональны**, рассчитаем по уравнениям (117) – (119):

$$S^2(b_0) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum_{j=1}^{N_2} X_{0j}^2} = \frac{0,04866}{4\cdot 5} = 0,002433 \rightarrow S(b_0) = 0,04933;$$

$$S^2(b_1) = S^2(b_2) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum_{j=1}^{N_2} X_{1j}^2} = \frac{0,04866}{4\cdot 4} = 0,003041 \rightarrow S(b_1) = S(b_2) = 0,05515;$$

- доверительные интервалы коэффициентов b_0, b_1, b_2 **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка рассчитаем по уравнениям (120) – (122) и корректно оформим результаты расчета (см. раздел 1.1, п. 3):

$$\Delta b_0 = t_{f;\,p}\cdot S(b_0) = 2{,}131\cdot 0,04933 = 0{,}1051 \approx 0{,}11\,;$$

$$\Delta b_1 = \Delta b_2 = t_{f;\,p}\cdot S(b_1) = 2{,}131\cdot 0,05515 = 0{,}1175 \approx 0{,}12\,,$$

где $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N(n-1) = 5\cdot(4-1) = 15$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{f;\,p} = t_{N_2(n-1);\,p} = t_{15;\,0,95} = 2{,}131\,;$$

- все три коэффициента регрессии b_0, b_1, b_2 значимы, так как по уравнениям (123) – (124):

$$\Delta b_0 = 0{,}11 < 28{,}46 = |b_0|,$$

$$\Delta b_1 = 0{,}12 < 6{,}770 = |b_1|,$$

$$\Delta b_2 = 0{,}12 < 5{,}620 = |b_2|.$$

Вывод. **Двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка, в котором все коэффициенты значимы, имеет вид

$$Y = 28{,}46 + 6{,}770 \cdot X_1 + 5{,}620 \cdot X_2 .$$

4.4. Проверим **двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = 28{,}46 + 6{,}770 \cdot X_1 + 5{,}620 \cdot X_2$ на адекватность по критерию Фишера (данные внесены в таблицу 33):

- значение Y_j^p в каждом опыте рассчитаем по **двухфакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **первого** порядка $Y = 28{,}46 + 6{,}770 \cdot X_1 + 5{,}620 \cdot X_2$, например, для $j = 1$

$$Y_1^p = 28{,}46 + 6{,}770 \cdot (-1) + 5{,}620 \cdot (-1) = 16{,}07 ;$$

- образуем столбец $(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$ и рассчитаем его значения, например, для $j = 1$

$$(\overline{Y_1} - Y_1^p)^2 = (16{,}00 - 16{,}07)^2 = 0{,}07^2 = 0{,}004900 ;$$

- остаточную сумма квадратов φ рассчитаем по уравнению (127):

$$\varphi = \sum_{j=1}^{5} (\overline{Y}_j - Y_j^p)^2 = (16{,}00 - 16{,}07)^2 + (29{,}73 - 29{,}61)^2 + (27{,}43 - 27{,}31)^2 + (40{,}78 - 40{,}85)^2 +$$

$$+ (28{,}33 - 28.46)^2 = 0{,}0049 + 0{,}0144 + 0{,}0144 + 0{,}0049 + 0{,}0169 = 0{,}05550 ;$$

- дисперсию адекватности $S_{\text{ад}}^2$ и ее число степеней свободы $f_{\text{ад}}$, рассчитаем по уравнению (136), (137):

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{n\varphi}{N_2 - B} = \frac{4 \cdot 0{,}0555}{5 - 3} = 0{,}1110 ;$$

$$f_{\text{ад}} = N_2 - B = 5 - 3 = 2 ;$$

- экспериментальное значение критерия Фишера рассчитаем по уравнению (78)

$$F_э = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_{\text{воспр}}^2} = \frac{0{,}1110}{0{,}04866} = 2{,}281 , \quad \text{так как } S_{\text{ад}}^2 > S_{\text{воспр}}^2 ;$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{числ};\, f_{знам};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (79) – (80): на первом месте стоит число степеней свободы **большей** дисперсии $f_{\text{ад}} = N_k - B = 5 - 3 = 2$, а на втором – число степеней свободы **меньшей** дисперсии $f_{\text{воспр}} = N_k(n-1) = 5 \cdot (4-1) = 15$, при доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p} = F_{f_{\text{ад}};\, f_{\text{воспр}};\, p} = F_{N_2 - B;\, N_2(n-1);\, p} = F_{2;\,15;\,0{,}95} = 3{,}682 .$$

Вывод. Полученное **двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = 28{,}46 + 6{,}770 \cdot X_1 + 5{,}620 \cdot X_2$ **адекватно**, так как согласно уравнению (81) $F_э = 2{,}557 < 3{,}682 = F_{2;\,15;\,0{,}95}$.

4.5. Так как полученное уравнение регрессии адекватно, оценим абсолютную погрешность прогнозирования параметра оптимизации. Факторы X_0, X_1, X_2 ортогональны, поэтому для оценки абсолютной ошибки параметра оптимизации *Y*, например, в точках факторного пространства $(\pm 1, \pm 1)$, воспользуемся уравнением (128) и значениями дисперсий значимости коэффициентов уравнения регрессии $S^2(b_0)$, $S^2(b_1)$

$$\Delta Y(X_1, X_2) = \Delta Y(\pm 1, \pm 1) = t_{f;\,p} \cdot \sqrt{S^2(b_0) + X_1^2 S^2(b_1) + X_2^2 S^2(b_1)} =$$

$$= t_{f;\,p} \cdot \sqrt{S^2(b_0) + 2 \cdot S^2(b_1)} = 2{,}131 \cdot \sqrt{0{,}002433 + 2 \cdot 0{,}003041} = 0{,}1966 \approx 0{,}20 \text{ ц/га},$$

где $S^2(b_0) = 0{,}002433$, $S^2(b_1) = 0{,}003041$ взяты из п. 4.3 типовой задачи, $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N(n-1) = 5 \cdot (4-1) = 15$ и доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{f;\,p} = t_{N_2(n-1);\,p} = t_{15;\,0{,}95} = 2{,}131;$$

5. **Окончательный вывод**. С учетом доверительных интервалов коэффициентов b_0, b_1, b_2, корректно оформим результаты расчетов (см. раздел 1.1, п. 3):

$$b_0 = 28{,}46 \pm 0{,}11;$$

$$b_1 = 6{,}770 \pm 0{,}12 = 6{,}77 \pm 0{,}12;$$

$$b_2 = 5{,}620 \pm 0{,}12 = 5{,}62 \pm 0{,}12.$$

Так как **двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = 28{,}46 + 6{,}77 \cdot X_1 + 5{,}62 \cdot X_2$ **адекватно**, то для нахождения стационарной зоны целесообразно применить процедуру крутого восхождения.

Ответ.

1) **Двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка

$$Y = \underset{\pm 0{,}11}{28{,}46} + \underset{\pm 0{,}12}{6{,}77} \cdot X_1 + \underset{\pm 0{,}12}{5{,}62} \cdot X_2.$$

Все выборочные дисперсий однородны, так как $G_э = 0{,}329 < 0{,}598 = G_{3;\,5;\,0{,}95}$.

$$S^2_{воспр} = 0{,}04866; \quad f_{воспр} = 15; \quad S^2_{ад} = 0{,}1110; \quad f_{ад} = 2.$$

Двухфакторное ортогонализированное уравнение регрессии **первого** порядка **адекватно,** так как $F_э = 2{,}281 < 3{,}682 = F_{2;15;\,0{,}95}$.

2) Так как **двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка **адекватно**, то для нахождения стационарной зоны целесообразно применить процедуру крутого восхождения.

Контрольные вопросы

1. Чем отличается ЦПФП от ПФП для одного и того же числа факторов *k*? Сколько опытов в ЦПФП? Сколько опытов в ПФП?
2. Дайте определение **ортогональности** факторов.
3. Напишите формулы для расчета коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка.
4. Сформулируйте алгоритм проверки коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на значимость.
5. Напишите формулу для расчета абсолютной погрешности прогнозирования параметра, рассчитанного по адекватному **многофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **первого** порядка.

Контрольные задачи

Таблица 34

Урожайность пшеницы Y, ц/га

Вариант 1

$x_1 \in [0,4;\ 1,4]$ ц/га

$x_2 \in [0,15;\ 0,65]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
20,8	20,9	20,9	21,2
25,2	24,8	25,2	25,3
37,0	37,0	37,1	36,7
41,1	41,4	41,2	41,1
31,2	30,7	31,3	30,9

Вариант 2

$x_1 \in [0,7;\ 1,7]$ ц/га

$x_2 \in [0,15;\ 0,65]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
19,6	19,2	19,2	19,3
24,3	24,7	24,7	24,7
35,4	35,6	35,5	35,6
40,5	40,5	40,5	40,3
30,2	30,5	30,2	29,8

Вариант 3

$x_1 \in [0,3;\ 1,3]$ ц/га

$x_2 \in [0,25;\ 0,75]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
17,5	17,7	17,4	17,6
26,7	26,6	26,3	26,2
33,8	33,8	33,5	33,5
42,6	41,9	42,1	42,2
30,1	29,9	29,9	29,9

Вариант 4

$x_1 \in [0,7;\ 1,7]$ ц/га

$x_2 \in [0,25;\ 0;75]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
16,8	16,7	17,0	16,5
27,1	27,2	27,1	27,4
32,5	32,8	33,2	32,7
43,0	43,5	43,4	43,2
29,6	30,0	30,0	30,1

Вариант 5

$x_1 \in [0,7;\ 1;7]$ ц/га

$x_2 \in [0,15;\ 0,65]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
18,6	18,5	18,7	18,4
25,9	25,7	25,4	25,6
35,0	34,6	34,4	34,9
41,4	41,8	41,1	41,2
29,9	29,9	30,4	29,8

Вариант 6

$x_1 \in [0,7;\ 1,7]$ ц/га

$x_2 \in [0,35;\ 0,85]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
17,2	17,3	17,5	17,1
26,7	26,5	26,6	26,6
33,0	33,2	33,3	33,2
42,6	42,5	43,2	42,8
30,0	30,2	30,1	30,4

Вариант 7

$x_1 \in [0,7;\ 1,7]$ ц/га

$x_2 \in [0,25;\ 0,75]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
18,6	18,5	18,0	18,6
23,4	23,7	23,6	23,3
34,3	34,6	34,3	34,3
40,1	39,6	39,9	39,4
28,8	29,0	29,0	28,7

Вариант 8

$x_1 \in [0,5;\ 1,5]$ ц/га

$x_2 \in [0,25;\ 0,75]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
12,2	11,5	11,8	12,0
28,1	27,7	27,9	27,9
27,7	28,1	28,3	27,8
43,8	44,3	43,6	43,9
27,9	27,7	27,9	27,8

Вариант 9

$x_1 \in [0,4;\ 1,4]$ ц/га

$x_2 \in [0,35;\ 0,85]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
14,0	13,6	13,6	14,1
28,0	28,0	27,9	28,3
30,0	29,9	29,9	30,0
44,3	44,3	44,0	44,3
29,1	28,8	29,1	28,9

Вариант 10

$x_1 \in [0,3;\ 1,3]$ ц/га

$x_2 \in [0,15;\ 0,65]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
16,7	16,7	16,6	16,6
25,3	25,5	25,5	25,0
32,4	32,3	32,7	32,5
41,7	41,2	41,4	41,4
28,9	29,4	28,9	29,0

Вариант 11

$x_1 \in [0,6;\ 1,6]$ ц/га

$x_2 \in [0,35;\ 0,85]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
11,7	11,1	11,2	11,6
28,3	28,7	28,8	28,1
27,4	27,7	27,8	27,2
44,4	44,2	44,7	44,4
27,7	28,2	28,2	27,8

Вариант 12

$x_1 \in [0,7;\ 1,7]$ ц/га

$x_2 \in [0,35;\ 0,85]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
14,5	14,2	14,4	14,2
27,7	27,8	27,8	27,4
30,5	30,6	30,5	30,5
43,6	43,5	43,8	43,3
29,0	28,6	29,1	29,2

Вариант 13

$x_1 \in [0,5;\ 1,5]$ ц/га

$x_2 \in [0,4;\ 0,9]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
20,9	21,1	21,0	20,6
23,0	23,2	23,1	23,5
37,5	37,0	37,0	36,8
39,3	38,8	39,0	38,8
29,9	29,9	30,2	30,1

Вариант 14

$x_1 \in [0,3;\ 1,3]$ ц/га

$x_2 \in [0,45;\ 0,95]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
18,5	18,2	18,4	18,4
24,0	23,9	23,2	23,6
34,3	34,3	34,1	34,7
39,8	40,0	39,5	39,7
28,7	29,1	29,1	29,0

Вариант 15

$x_1 \in [0,5;\ 1,5]$ ц/га

$x_2 \in [0,2;\ 0,7]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
16,8	17,3	17,1	16,6
22,7	22,9	22,8	23,2
33,1	33,1	33,2	33,1
39,0	38,9	39,4	38,6
27,9	28,0	28,3	27,8

Вариант 16

$x_1 \in [0,3;\ 1,3]$ ц/га

$x_2 \in [0,4;\ 0,9]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
15,0	15,2	15,0	15,2
26,6	27,1	26,6	26,8
31,6	30,6	31,0	31,5
42,9	42,9	42,6	42,6
29,4	28,8	28,9	29,0

Вариант 17

$x_1 \in [0,5;\ 1,5]$ ц/га

$x_2 \in [0,15;\ 0,65]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
15,4	14,6	15,0	15,3
27,0	26,8	26,7	26,9
31,0	31,1	30,9	31,2
42,7	42,9	42,9	43,0
28,7	29,1	28,9	28,6

Вариант 18

$x_1 \in [0,6;\ 1,6]$ ц/га

$x_2 \in [0,15;\ 0,65]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
17,4	17,4	17,0	17,4
26,7	26,5	26,5	26,8
33,3	33,4	33,5	33,3
42,5	42,6	42,3	42,2
30,1	29,9	30,0	30,4

Вариант 19

$x_1 \in [0,6;\ 1,6]$ ц/га

$x_2 \in [0,15;\ 0,65]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
19,2	19,6	19,4	19,3
24,6	24,6	24,7	24,7
35,6	35,3	35,0	35,3
40,9	40,8	40,8	40,6
29,9	30,3	30,2	30,3

Вариант 20

$x_1 \in [0,3;\ 1,3]$ ц/га

$x_2 \in [0,25;\ 0,75]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
19,9	19,1	19,5	19,7
24,5	24,5	24,3	24,4
35,5	35,9	35,4	36,0
40,9	40,3	40,4	40,8
29,8	30,3	29,9	29,6

Вариант 21

$x_1 \in [0,4;\ 1,4]$ ц/га

$x_2 \in [0,35;\ 0,85]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
20,0	20,6	20,4	20,4
23,6	23,9	23,8	23,6
36,0	36,2	36,4	35,8
40,1	39,9	39,1	40,1
30,1	29,7	30,0	30,2

Вариант 22

$x_1 \in [0,3;\ 1,3]$ ц/га

$x_2 \in [0,15;\ 0,65]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
19,6	20,1	20,0	19,3
24,1	24,3	24,4	24,3
35,7	35,7	35,8	35,7
40,5	40,3	40,2	40,2
30,3	30,3	29,7	30,0

Вариант 23

$x_1 \in [0,6;\ 1,6]$ ц/га

$x_2 \in [0,25;\ 0,75]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
17,3	17,2	17,4	17,2
24,7	24,8	24,7	24,7
33,1	33,2	33,4	33,4
41,0	40,9	40,7	40,7
28,9	29,2	29,0	29,1

Вариант 24

$x_1 \in [0,5;\ 1,5]$ ц/га

$x_2 \in [0,3;\ 0,8]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
16,2	15,7	16,2	15,8
26,8	27,0	26,7	26,9
32,0	31,5	32,0	31,9
43,0	42,8	43,1	43,2
29,6	30,0	29,5	29,4

Вариант 25

$x_1 \in [0,6;\ 1,6]$ ц/га

$x_2 \in [0,25;\ 0,75]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
16,7	17,1	17,3	17,1
26,7	27,0	26,9	26,7
33,3	33,2	33,4	32,9
42,4	43,1	43,0	42,8
30,0	29,4	29,9	29,8

Вариант 26

$x_1 \in [0,4;\ 1,4]$ ц/га

$x_2 \in [0,15;\ 0,65]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
18,5	18,6	18,4	18,5
24,6	24,6	24,7	24,4
34,5	34,4	34,5	34,4
40,5	40,5	40,6	40,7
29,6	29,2	29,5	29,3

Вариант 27

$x_1 \in [0,4;\ 1,4]$ ц/га

$x_2 \in [0,25;\ 0,75]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
16,4	16,6	16,7	16,5
25,2	25,3	25,3	25,0
33,0	33,0	32,8	32,8
41,2	41,6	41,0	41,2
29,0	29,2	28,9	29,2

Вариант 28

$x_1 \in [0,5;\ 1,5]$ ц/га

$x_2 \in [0,15;\ 0,65]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
18,1	18,0	17,9	18,1
22,9	23,0	22,9	23,4
34,5	34,5	33,9	33,8
38,8	39,2	39,2	39,0
28,3	28,8	28,3	28,2

Вариант 29

$x_1 \in [0,6;\ 1,6]$ ц/га

$x_2 \in [0,35;\ 0,85]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
15,9	16,2	15,9	15,8
24,3	23,9	24,0	24,1
32,5	32,0	32,2	32,2
40,1	39,9	40,1	39,8
27,9	28,1	28,1	28,4

Вариант 30

$x_1 \in [0,4;\ 1,4]$ ц/га

$x_2 \in [0,25;\ 0,75]$ ц/га

Y_{1j}	Y_{2j}	Y_{3j}	Y_{4j}
11,6	11,3	11,4	11,6
32,1	32,6	32,6	32,4
27,9	27,5	27,5	27,4
48,6	48,6	48,3	48,6
29,9	29,9	29,5	30,1

3.2. МНОГОФАКТОРНОЕ ОРТОГОНАЛИЗИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ПЛАН (ЦДФП)

Теория с примерами (кратко)

1. С увеличением количества факторов *k* число опытов ПФП типа 2^k возрастает по экспоненте, так как $2^k = e^{k \ln 2}$. ЦПФП для *k* факторов состоит из $N_k = 2^k + 1$ опытов. Например, для $k = 8$ число опытов ЦПФП равно $N_8 = 2^8 + 1 = 257$ (!), а число коэффициентов **восьмифакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 X_0 + \sum_{r=1}^{8} b_r X_r$ равно 9-ти (1 свободный член и 8 линейных b_r). Налицо избыточное количество опытов. Поэтому для моделирования технических систем **многофакторным ортогонализированным** уравнением регрессии **первого** порядка можно использовать только часть ЦПФП, например, 1/2, 1/4, 1/8 …, которую будем называть дробной репликой.

«Лишние» степени свободы ЦПФП можно использовать для оценки коэффициентов взаимодействия второго и более высокого порядков: $X_r X_s$, $X_r X_s X_v$, $X_r X_s X_v X_w, \ldots$. Например, ЦПФП для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии неполного **второго** порядка $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2$, представленный в таблице 35, позволяет рассчитать коэффициент двойного взаимодействия $X_1 X_2$.

Таблица 35

ЦПФП для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии неполного **второго** порядка

N_2	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}
1	+ 1	– 1	– 1	+ 1
2	+ 1	+ 1	– 1	– 1
3	+ 1	– 1	+ 1	– 1
4	+ 1	+ 1	+1	+ 1
5	+ 1	0	0	0

ЦПФП для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии неполного **второго** порядка $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3$, представленный в таблице 36, позволяет рассчитать коэффициенты взаимодействия факторов двойного и тройного порядка $X_1 X_2$, $X_1 X_3$, $X_2 X_3$, $X_1 X_2 X_3$.

Таблица 36

ЦПФП для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии неполного **второго** порядка

N_3	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	$X_{1j}X_{2j}$	$X_{1j}X_{3j}$	$X_{2j}X_{3j}$	$X_{1j}X_{2j}X_{3j}$
1	+ 1	– 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	+ 1	– 1
2	+ 1	+ 1	– 1	– 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1
3	+ 1	– 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1
4	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1	– 1	– 1
5	+ 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1
6	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1	– 1
7	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	– 1
8	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
9	+ 1	0	0	0	0	0	0	0

2. Проиллюстрируем идею сокращения количества опытов на примере построения **четырехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4$. ЦПФП типа 2^4 содержит 17 опытов $(2^4 + 1 = 17)$, а число коэффициентов уравнения регрессии первого порядка, которые необходимо найти, равно 5-ти $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$. Поэтому для построения указанного уравнения регрессии вместо ЦПФП типа 2^4 можно использовать 1/2 реплику ЦПФП типа 2^3, который содержит только 9 опытов $(2^3 + 1 = 9)$.

Вместо того чтобы по плану ЦПФП типа 2^3 определять регрессионные коэффициенты $b_0, b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{123}$, ограничимся поиском только нулевого и линейных коэффициентов регрессии b_0, b_1, b_2, b_3, а вместо тройного взаимодействия $X_1X_2X_3$ введем дополнительный фактор $X_4 = X_1X_2X_3$ (эта операция носит название «смешивание факторов»). Равенство $X_4 = X_1X_2X_3$ называется генерирующим соотношением, а план эксперимента с дополнительным фактором X_4 называют центральным **дробным** факторным планом (ЦДФП) типа 2^{k-g}, где k - число линейных факторов, а g – число генерирующих соотношений (число дополнительно введенных факторов).

В таблице 37 представлен ЦДФП типа 2^{4-1} для моделирования изучаемой технической системы **четырехфакторным ортогонализированным** уравнением регрессии **первого** порядка.

Таблица 37

ЦДФП типа 2^{4-1} для построения **четырехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка

N_3	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	$X_{4j} = X_{1j}X_{2j}X_{3j}$
1	+ 1	– 1	– 1	– 1	– 1
2	+ 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1
3	+ 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1
4	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1
5	+ 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1
6	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1
7	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1
8	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
9	+ 1	0	0	0	0

Так как все факторы ЦДФП типа 2^{4-1} ортогональны (убедитесь в этом самостоятельно по данным таблицы 37), коэффициенты уравнения регрессии рассчитывают по формулам, справедливым для ортогональных планов. Так как столбцы факторов $X_1X_2X_3$ и X_4 идентичны, то коэффициенты b_{123} и b_4 не могут быть определены раздельно:

$$b_{123} = b_4 = \frac{\sum_{j=1}^{9} (X_{1j} X_{2j} X_{3j})\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9} (X_{1j} X_{2j} X_{3j})^2} = \frac{\sum_{j=1}^{9} X_{4j}\,\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9} X_{4j}^2}. \quad (129)$$

ЦДФП типа 2^{k-g} обладает несомненным достоинством, так как позволяет значительно сократить количество опытов (в 2, 4, 8, ... раз). Отметим, что в общем случае для k факторов число опытов ЦПФП типа 2^k равно $N_k = N_{k0} + 1 = 2^k + 1$, а для ЦДФП типа 2^{k-g} число опытов равно

$$N_k = N_{kg} + 1 = 2^{k-g} + 1. \quad (130)$$

Недостаток ЦДФП типа 2^{k-g} заключается в невозможности раздельного определения линейных коэффициентов независимо от коэффициентов взаимодействий более высокого порядка. Однако этот недостаток несущественно осложняет оценку линейных коэффициентов, так как взаимодействия более высокого порядка, как правило, бывают незначимыми.

3. Алгоритм построения ЦДФП типа 2^{k-g} следующий:

- выбрать k факторов x_r $(r = 1, ..., k)$, которые предположительно существенно влияют на параметр Y;

- из соображений материально-временных затрат выбрать приемлемое число опытов базового ЦПФП типа 2^{k_0} $(k_0 < k)$. В этом случае число генерирующих соотношений $g = k - k_0$;

- при построении **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦДФП типа 2^{k-g} для k факторов и g генерирующих соотношений следует проверить выполнение ограничительного неравенства: число опытов N_k должно превышать число коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. В связи с этим число g должно удовлетворять следующему неравенству:

$$g < k - \ln k / \ln 2\,. \tag{131}$$

В таблице 38 приведено максимально возможное число генерирующих соотношений g для k факторов, рассчитанное по неравенству (131).

Таблица 38

Максимально возможное число g для ЦДФП типа 2^{k-g}

k	3	4	5	6	7	8	9	10
g	1	1	2	3	4	4	5	6

Пример 3.2.1. Можно ли для построения **семифакторного** уравнения регрессии первого порядка использовать ЦДФП типа 2^{7-4}?

Решение. Число опытов ЦДФП типа 2^{7-4} равно 9-ти опытам ($2^{7-4}+1=2^3+1=8+1=9$). Число коэффициентов **семифакторного** уравнения регрессии **первого** порядка равно 8-ми. Для построения **семифакторного** уравнения регрессии **первого** порядка можно использовать ЦДФП типа 2^{7-4}, так как число опытов ЦДФП типа 2^{7-4} больше числа коэффициентов уравнения регрессии (см. уравнение (131)).

4. Следует отметить, что выбор генерирующих соотношений для ЦДФП типа 2^{k-g} неоднозначен. Выбор того или иного генерирующего соотношения определяется априорной информацией, опытом и **интуицией** исследователя. Например, в ЦДФП (таблица 37) кроме генерирующего соотношения $X_4 = X_1X_2X_3$ можно было бы взять и другие, например: $X_4 = -X_1X_2X_3$, $X_4 = \pm X_1X_2$, $X_4 = \pm X_1X_3$, $X_4 = \pm X_2X_3$. При выборе генерирующего соотношения дополнительный фактор следует смешивать с эффектом, который на основе априорной информации, опыта и **интуиции** предполагают незначимым.

5. Сформулируем алгоритм, позволяющий определить систему смешивания коэффициентов регрессии, строящейся на базе ЦДФП типа 2^{k-g}. Для преобразований генерирующих соотношений используем следующие очевидные равенства:

$$X_0X_r = X_r\,, \quad r = 1, ..., k\,; \tag{132}$$

$$X_r^2 = 1\,, \quad r = 1, ..., k\,. \tag{133}$$

Пример 3.2.2. Определить систему смешивания коэффициентов b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 при использовании ЦДФП типа 2^{4-1} с генерирующим соотношением (см. таблицу 37)

$$X_4 = X_1X_2X_3\,. \tag{134}$$

Решение. Умножим обе части уравнения (134) на X_4, с учетом уравнения (133) получим равенство

$$\mathbf{1 = X_1X_2X_3X_4}\,. \tag{135}$$

Полученное равенство (135) называется **первичным** определяющим контрастом. Умножая обе части **первичного** определяющего контраста (135) последовательно на факторы X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, с учетом уравнений (132), (133), определим, какие из них тождественно совпадают:

$$X_0 = X_1X_2X_3X_4\,; \tag{136}$$

$$X_1 = X_2X_3X_4\,; \tag{137}$$

$$X_2 = X_1X_3X_4\,; \tag{138}$$

$$X_3 = X_1X_2X_4\,; \tag{139}$$

$$X_4 = X_1X_2X_3\,. \tag{140}$$

Из уравнений (136) – (140) вытекает система смешивания коэффициентов:

$$b_0 \to b_0 + b_{1234}; \tag{141}$$

$$b_1 \to b_1 + b_{234}; \tag{142}$$

$$b_2 \to b_2 + b_{134}; \tag{143}$$

$$b_3 \to b_3 + b_{124}; \tag{144}$$

$$b_4 \to b_4 + b_{123}. \tag{145}$$

Из уравнений (141) – (145) следует, что свободный член и линейные коэффициенты b_1, b_2, b_3, b_4 смешаны с эффектами четвертого и третьего порядков, но не смешаны с эффектами взаимодействия второго порядка. Этот факт позволяет надеяться на то, что ЦДФП типа 2^{4-1}, состоящий из 9 опытов, позволит оценить свободный и линейные коэффициенты достаточно точно, так как практика показывает, что взаимодействия высших порядков, как правило, оказываются статистически незначимыми.

Следует отметить, что уравнение (145) было уже известно как уравнение (129), так как именно оно было выбрано в качестве генерирующего соотношения.

Ответ. Система смешивания коэффициентов b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 – система уравнений (141) – 145).

6. В ЦДФП типа 2^{k-1} используется только одно генерирующее соотношение. В ЦДФП типа 2^{k-2}, в котором используются 2 генерирующих соотношения, определение системы смешивания производится следующим образом. Сначала на основе 2-х генерирующих соотношений строят 2 **первичных** определяющих контраста. Затем путем перемножения **первичных** контрастов получают еще один **вторичный** определяющий контраст. Для того чтобы охарактеризовать разрешающую способность ЦДФП типа 2^{k-2}, необходимо построить главный **определяющий** контраст, который состоит из 1 (единицы), двух **первичных** и одного **вторичного** определяющих контрастов.

Пример 3.2.3. Получить главный определяющий контраст для ЦДФП типа 2^{5-2} со следующими генерирующими соотношениями:

$$X_4 = -X_2 X_3; \tag{146}$$

$$X_5 = X_1 X_2 X_3. \tag{147}$$

На основе генерирующих соотношений (146), (147), а также с учетом уравнения (133) построим два **первичных** определяющих контраста:

$$X_4 \cdot X_4 = -X_2 X_3 \cdot X_4 \quad \to \quad \mathbf{1 = -X_2 X_3 X_4}; \tag{148}$$

$$X_5 \cdot X_5 = X_1 X_2 X_3 \cdot X_5 \quad \to \quad \mathbf{1 = X_1 X_2 X_3 X_5}. \tag{149}$$

Путем перемножения **2-х первичных** определяющих контрастов (148) и (149), а также с учетом уравнения (133) получим еще один **вторичный** определяющий контраст:

$$1 = (-X_2 X_3 X_4) \cdot (X_1 X_2 X_3 X_5) \quad \to \quad \mathbf{1 = -X_1 X_4 X_5}. \tag{150}$$

Главный **определяющий** контраст состоит из 1 (единицы), двух **первичных** (148), (149) и одного **вторичного** определяющего контраста (150):

$$\mathbf{1 = -X_2 X_3 X_4 = X_1 X_2 X_3 X_5 = -X_1 X_4 X_5}. \tag{151}$$

Ответ. Главный **определяющий** контраст – это уравнение (151).

7. Для планов ЦДФП типа 2^{k-3}, в которых используются 3 генерирующих соотношения, систему оценок смешивания строят следующим образом. Сначала на основе 3-х генерирующих соотношений строят 3 **первичных** определяющих контраста *A*, *B*, *C*. Путем попарного перемножения 3-х **первичных** определяющих контрастов строят еще 3 **вторичных** определяющих контраста *AB*, *AC*, *BC*. Затем путем тройного перемножения 3-х **первичных** находят еще один **третичный** определяющий контраст *ABC*. Главный **определяющий** контраст в этом случае вместе с 1 (единицей), 3-мя **первичными,** 3-мя **вторичными** и одним **третичным** определяющими контрастами состоит из 8-ми структурных элементов:

$$1 = A = B = C = AB = AC = BC = ABC. \tag{152}$$

В общем случае **главный** определяющий контраст состоит из 2^g структурных единиц.

8. После проведения эксперимента по ЦДФП типа 2^{k-g} алгоритм построения **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка полностью соответствует алгоритму построения **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка по ЦПФП: построение **МП** на базе ЦДФП типа 2^{k-g} с предварительной обработкой экспериментальных данных (расчет выборочных средних и дисперсий в каждом опыте, проверку всех выборочных дисперсий на однородность по критерию Кохрена, расчет дисперсии воспроизводимости и ее числа степеней свободы); построение **ММ** на базе ЦДФП типа 2^{k-g} с окончательной обработкой экспериментальных данных (расчет коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка, проверку их на значимость по критерию Стьюдента, а само уравнение – на адекватность по критерию Фишера, и в случае его адекватности – расчет абсолютной ошибки прогнозирования параметра оптимизации *Y)*. При расчетах на базе ЦДФП, по приведенным в разделе 3.1 формулам, следует заменить N_{k0} на N_{kg}, например, $(N_k = N_{k0} + 1 = 2^k + 1 \;\rightarrow\; N_k = N_{kg} + 1 = 2^{k-g} + 1)$.

Так как все факторы ЦПФП типа 2^k, также как и все факторы ЦДФП $X_0, X_1, ..., X_k$ **ортогональны**, то формулы для расчета коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка по ЦДФП типа 2^{k-g} будут такими же, как и формулы для расчета коэффициентов уравнения регрессии по ЦПФП типа 2^k:

$$b_0 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j}\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j}^2}; \qquad (153)$$

$$b_r = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2}; \quad r = 1, ..., k. \qquad (154)$$

9. Если **многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка**,** полученное на базе ЦДФП типа 2^{k-g}, **адекватно**, то следует перейти к процедуре крутого восхождения для достижения стационарной области. Если уравнение регрессии **неадекватно**, то следует перейти к процедуре построения **многофакторного** уравнения регрессии **второго** порядка по ОЦКП.

Типовая задача

Цель. Освоить метод построения ЦДФП типа 2^{k-g} для моделирования **многофакторных** технических систем, описываемых стохастическими закономерностями, и оценивания системы смешивания факторов.

Формулировка задачи. Найти оптимальный химсостав и режимы термообработки изделий из конструкционной стали, содержащей: x_1 – хром (9 – 12) %; x_2 – молибден (0,1 – 0,5) %; x_3 - углерод (0,5 - 1,5) %, остальное – железо, x_4 – температура закалки (800 – 900) °С; x_5 – скорость охлаждения при закалке (40 - 120) град/с; x_6 – температура отпуска (250 – 500) °С. Необходимо оценить влияние 6-ти факторов X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 на прочность изделий (*Y* – предел прочности при растяжении, МПа). На основе априорной информации, **опыта и интуиции** предполагается, что все тройные, четверные, пятерные и шестерные взаимодействия незначимы. Планировался эксперимент на базе ЦПФП типа 2^6 с числом дублей $n = 3$. Однако расчет показал, что потребуется 195 штук образцов $(N_6 = 2^k + 1 = 2^6 + 1 = 65,\; nN_6 = 3 \cdot 65 = 195)$. Такой объем работы по материальным и временным соображениям неприемлем. Поэтому принято решение провести эксперимент по ЦДФП типа 2^{6-2}, для реализации которого потребуется 51 образец $(N_6 = 2^{k-g} + 1 = 2^{6-2} + 1 = 17,\; nN_6 = 3 \cdot 17 = 51)$.

Математическая формулировка задачи. 1) Для моделирования технической системы **многофакторным ортогонализированным** уравнением регрессии $Y = b_0 + \sum_{r=1}^{6} b_r X_r$ построить ЦДФП типа 2^{6-2}. 2) Определить систему смешивания коэффициентов $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6$, если выбраны следующие генерирующие соотношения: $X_5 = X_1 X_2 X_3$, $X_6 = X_1 X_2 X_4$. 3) **Опыт и интуиция** подсказывают, что все взаимодействия 3 – 6 порядка незначимы.

План решения задачи

1. Внимательно прочитать условие задачи.
2. Для построения **шестифакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦДФП типа 2^{k-g} с числом опытов $N_k = 2^{k-g} + 1 = 2^{6-2} + 1 = 17$ $(k = 6)$ необходимо проверить корректность выбора числа генерирующих соотношений $g = 2$.
3. Определить систему смешивания коэффициентов $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ **шестифакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + \sum_{r=1}^{6} b_r X_r$.
4. Сделать вывод и принять решение.

Решение задачи по плану

1. Пункт плана 1 выполнить самостоятельно.
2. Так как количество опытов $k = 6$, а число генерирующих соотношений $g = 2$, то по материальным и временным соображениям выберем ЦПФП типа 2^{k_0} с числом факторов $k_0 = k - g = 6 - 2 = 4$ и числом опытов $N_{k0} = 2^{k_0} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ (таблица 37), дополнив его 2-мя столбцами факторов путем введения 2-х генерирующих соотношений $X_5 = X_1 X_2 X_3$ и $X_6 = X_1 X_2 X_4$. Построим ЦДФП типа 2^{6-2} $(N_k = 2^{k-2} + 1 = 2^{6-2} + 1 = 17)$ (таблица 39). Число генерирующих соотношений $g = 2$ для $k = 6$ при построении **шестифакторного** уравнении регрессии $Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5 + b_6 X_6$ допустимо, так как число опытов $N_6 = 2^{6-2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ больше числа коэффициентов уравнения регрессии, равного 7, что и подтверждается данными таблицы 38 (для $k = 6$ максимально допустимое значение числа генерирующих соотношений $g = 3$, а в данной задаче значение только $g = 2$).

Таблица 39

План ЦПФЭ типа 2^{6-2}

N_4	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	$X_5 = X_1X_2X_3$	$X_6 = X_1X_2X_4$
1	+ 1	– 1	– 1	– 1	– 1	– 1	– 1
2	+ 1	+ 1	– 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1
3	+ 1	– 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1
4	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1	– 1	– 1
5	+ 1	– 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1
6	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1
7	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1
8	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1
9	+ 1	– 1	– 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1
10	+ 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1
11	+ 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1
12	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1
13	+ 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
14	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1
15	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1
16	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
17	+	0	0	0	0	0	0

3. Определим, с какими эффектами смешаны коэффициенты уравнения регрессии $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6$.

На базе 2-х выбранных генерирующих соотношений $X_5 = X_1X_2X_3$ и $X_6 = X_1X_2X_4$ с учетом уравнения (133) построим 2 **первичных** определяющих контраста:

$$X_5 \cdot X_5 = X_1X_2X_3X_5 \ \rightarrow \ \mathbf{1 = X_1X_2X_3X_5};$$

$$X_6 \cdot X_6 = X_1X_2X_4X_6 \ \rightarrow \ \mathbf{1 = X_1X_2X_4X_6}.$$

На основе 2-х **первичных** определяющих контрастов путем попарного перемножения с учетом уравнения (133) построим еще 1 (один) **вторичный** определяющий контраст:

$$1 = (X_1X_2X_3X_5) \cdot (X_1X_2X_4X_6) \ \rightarrow \ \mathbf{1 = X_3X_4X_5X_6}.$$

Главный определяющий контраст состоит из 4-х структурных единиц $(2^g = 2^2 = 4)$: из 1 (единицы), 2-х **первичных** и 1-го **вторичного** определяющих контрастов

$$\mathbf{1 = X_1X_2X_3X_5 = X_1X_2X_4X_6 = X_3X_4X_5X_6}.$$

Умножая **главный** определяющий контраст поочередно на $X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6$ с учетом уравнений (132), (133) $X_r^2 = 1$ и $X_0X_r = X_r$, оставляя только линейные коэффициенты $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6$ и двойные взаимодействия (по условию задачи все взаимодействия 3 - 6 порядка незначимы), получаем:

$$b_0 \rightarrow b_0 + b_{1235} + b_{1246} + b_{3456} \approx b_0;$$

$$b_1 \rightarrow b_1 + b_{235} + b_{246} + b_{13456} \approx b_1;$$

$$b_2 \rightarrow b_2 + b_{135} + b_{146} + b_{23456} \approx b_2;$$

$$b_3 \rightarrow b_3 + b_{125} + b_{12346} + b_{456} \approx b_3;$$

$$b_4 \rightarrow b_4 + b_{12345} + b_{126} + b_{356} \approx b_4;$$

$$b_5 \rightarrow b_5 + b_{123} + b_{12456} + b_{346} \approx b_5;$$

$$b_6 \rightarrow b_6 + b_{12356} + b_{124} + b_{345} \approx b_6.$$

Вывод. Так как тройные, четверные и пятерные взаимодействия незначимы, то из полученных уравнений следует, что коэффициенты $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6$ оцениваются достаточно точно, так как все они смешаны только с незначимыми коэффициентами 3 – 5 порядка. Ни один из коэффициентов $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6$ при выбранных генерирующих соотношениях не смешан даже с двойным взаимодействием.

Если полученное **шестифакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка окажется **адекватным**, то следует перейти к процедуре крутого восхождения для достижения стационарной области. Если хотя бы часть двойных взаимодействий окажется значимой (например, возможно значимым окажется коэффициент b_{12}, отражающий зависимость температуры закалки от содержания углерода) и полученное **шестифакторное** уравнение регрессии **первого** порядка окажется **неадекватным**, то следует перейти к процедуре построения **шестифакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП.

4. При замене ЦПФП типа 2^6 с тремя дублями $(n = 3)$, требующего 195 образцов $(nN_6 = 3 \cdot (2^6 + 1) = 195)$, на ЦДФП типа 2^{6-2} с тремя дублями $(n = 3)$, требующий 51 образец $(nN_6 = 3 \cdot (2^{6-2} + 1) = 51)$, достигнута значительная экономия материалов и времени на проведение эксперимента (почти в 4 раза).

Ответ. ЦДФП представлен в таблице 39. Коэффициенты $b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6$ по ЦДФП типа 2^{6-2} можно оценить достаточно точно, так как все они смешаны только с незначимыми коэффициентами 3 – 5 порядка.

Контрольные вопросы

1. Что такое дробная реплика 2^{k-g} ? Что обозначают символом g?
2. Что такое определяющий контраст?
3. Что такое главный определяющий контраст? Как он строится? Если число генерирующих соотношений $g = 5$, то из скольких структурных единиц состоит главный определяющий контраст?
4. Напишите формулы для расчета коэффициентов нулевого и первого порядков **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка для ЦДФП типа 2^{k-g} .
5. Напишите формулы для расчета дисперсий значимости коэффициентов нулевого и первого порядков **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка для ЦДФП типа 2^{k-g} .
6. Приведите варианты дальнейших исследований **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка, полученного в результате ЦДФП.

Контрольные задачи

Таблица 40

Генерирующие соотношения

1	$X_5 = X_1X_2X_4$ $X_6 = X_1X_3X_4$	**7**	$X_5 = -X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = X_1X_3X_4$	**13**	$X_5 = X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = X_1X_2X_4$	**19**	$X_5 = -X_1X_3X_4$ $X_6 = X_2X_3X_4$	**25**	$X_5 = -X_1X_2X_3$ $X_6 = X_1X_3X_4$
2	$X_5 = -X_1X_2X_3$ $X_6 = X_1X_2X_4$	**8**	$X_5 = X_1X_2X_3$ $X_6 = X_2X_3X_4$	**14**	$X_5 = X_1X_2X_4$ $X_6 = -X_2X_3X_4$	**20**	$X_5 = X_1X_2X_4$ $X_6 = X_2X_3X_4$	**26**	$X_5 = X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = -X_1X_2X_3$
3	$X_5 = X_1X_2X_4$ $X_6 = -X_1X_3X_4$	**9**	$X_5 = X_1X_3X_4$ $X_6 = -X_2X_3X_4$	**15**	$X_5 = -X_1X_2X_4$ $X_6 = X_1X_3X_4$	**21**	$X_5 = X_1X_2X_3$ $X_6 = -X_2X_3X_4$	**27**	$X_5 = X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = X_2X_3X_4$
4	$X_5 = X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = X_1X_3X_4$	**10**	$X_5 = -X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = X_1X_2X_3$	**16**	$X_5 = X_1X_2X_3$ $X_6 = X_1X_3X_4$	**22**	$X_5 = -X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = X_2X_3X_4$	**28**	$X_5 = X_1X_2X_3$ $X_6 = -X_1X_2X_4$
5	$X_5 = -X_1X_2X_4$ $X_6 = X_2X_3X_4$	**11**	$X_5 = X_1X_3X_4$ $X_6 = X_2X_3X_4$	**17**	$X_5 = -X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = X_1X_2X_4$	**23**	$X_5 = X_1X_2X_3$ $X_6 = X_1X_2X_4$	**29**	$X_5 = -X_1X_2X_3$ $X_6 = X_2X_3X_4$
6	$X_5 = X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = -X_1X_2X_4$	**12**	$X_5 = X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = -X_2X_3X_4$	**18**	$X_5 = X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = -X_1X_3X_4$	**24**	$X_5 = X_1X_2X_3$ $X_6 = -X_1X_3X_4$	**30**	$X_5 = X_1X_2X_3X_4$ $X_6 = X_1X_2X_3$

3.3. КРУТОЕ ВОСХОЖДЕНИЕ (СПУСК)

Теория с примерами (кратко)

Как правило, исследование технической системы начинают с построения простейшей модели – **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. Если оно окажется **адекватным**, то в математической теории эксперимента известен прием, который позволяет за относительно небольшое количество опытов достичь стационарной области (область, в которой параметр оптимизации имеет экстремум). Этот прием носит название – метод крутого восхождения (спуска). Суть его заключается в проведении дополнительных опытов, которые позволяют реализовать движение в стационарную область по кратчайшему пути – по градиенту.

1. Градиент **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 + \sum_{r=1}^{k} b_r X_r$ представляет собой вектор

$$\overrightarrow{grad\, Y} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ b_k \end{Vmatrix}. \tag{155}$$

2. Параметрическое уравнение прямой линии в нормированных значениях факторов $X_1, ..., X_k$, проходящей через начало координат факторного пространства A_0 (0, 0, …, 0) параллельно градиенту функции, имеет вид

$$\begin{cases} X_1 = \xi b_1 \\ \vdots \\ X_r = \xi b_r, \quad r = 1, ..., k, \\ \vdots \\ X_k = \xi b_k \end{cases} \tag{156}$$

где ξ – числовой параметр, который пробегает значения от 0 до $+\infty$ при крутом восхождении, и от 0 до $-\infty$ – при крутом спуске.

3. Если **многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка **адекватно**, то рассчитывают направление крутого восхождения (спуска) и приступают к движению по градиенту. Начинают движение из центра факторного пространства A_0. Следующую точку на прямой крутого восхождении A_1 выбирают так, чтобы она лежала внутри исследованного факторного пространства близко к границе, а последующая точка A_2 выходила бы за его пределы. Так как нормированные значения факторов изменяются в интервале $-1 \le X_r \le 1$, то максимальное значение координаты точки A_1 не должно быть больше 1. Это означает, что

$$\xi_1 b = \mu < 1$$

или

$$\xi_1 = \frac{\mu}{b}; \tag{157}$$

$$b = \max\left|b_s\right|; \quad s \in [1,\ k], \tag{158}$$

где ξ_1 – значение числового параметра ξ для первого шага в направлении крутого восхождения (спуска); b - максимальный по модулю коэффициент **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. Значение μ целесообразно выбрать в диапазоне $0,6 \le \mu \le 0,9$ при крутом восхождении ($-0,9 \le \mu \le -0,6$ при крутом спуске).

Координаты точек крутого восхождения (спуска) с шагом h в нормированных значениях факторов X_r^h рассчитывают по уравнению

$$X_r^h = h\xi_1 b_r = h\mu \frac{b_r}{b}, \quad r = 1, ..., k, \tag{159}$$

где $h = 0, 1, 2, 3, ...$ – номер шага при крутом восхождении (спуске).

4. Натуральные значения факторов x_r^h при крутом восхождении (спуске) с учетом взаимосвязи натуральных и нормированных значений факторов, задаваемой уравнениями (102) – (105), а также уравнения (159), рассчитывают по уравнениям

$$x_r^h = x_{r0} + h\mu \frac{b_r}{b} \Delta x_r; \; r = 1, ..., k. \tag{160}$$

Пример 3.3.1. В результате изучения зависимости твердости конструкционной стали (Y, HRC) от содержания углерода x_1, никеля x_2, хрома x_3 и температуры отпуска x_4, которые варьировались в следующих диапазонах: $x_1 \in [0,6;\ 1,0]\,\%$, $x_2 \in [6;\ 14]\,\%$, $x_3 \in [0,8;\ 1,2]\,\%$, $x_4 \in [250;\ 350]\ ^{\circ}\mathrm{C}$, получено адекватное **четырехфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = 42,2 + 4,2X_1 - 3,3X_2 + 6,1X_3 - 2,8X_4$. Цель дальнейшего изучения технической системы – достижение стационарной области по кратчайшему пути. Для этого следует рассчитать натуральные значения факторов x_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ в опытах по крутому восхождению. Движение начать из центра факторного пространства $(0, ..., 0)$, а за величину первого шага примем $\mu = 0,8$. Ограничимся серией опытов $N = 6$.

Решение. Сначала по уравнениям (104), (105) рассчитаем основные уровни и интервалы варьирования 4-х факторов с учетом того, что $x_1 \in [0,6;\ 1,0]\,\%$, $x_2 \in [6;\ 14]\,\%$, $x_3 \in [0,8;\ 1,2]\,\%$, $x_4 \in [250;\ 350]\ ^{\circ}\mathrm{C}$:

$$x_{10} = \frac{x_{1\max} + x_{1\min}}{2} = \frac{1,0 + 0,6}{2} = 0,8; \quad \Delta x_1 = \frac{x_{1\max} - x_{1\min}}{2} = \frac{1,0 - 0,6}{2} = 0,2;$$

$$x_{20} = \frac{x_{2\max} + x_{2\min}}{2} = \frac{14 + 6}{2} = 10,0; \quad \Delta x_2 = \frac{x_{2\max} - x_{2\min}}{2} = \frac{14 - 6}{2} = 4,0;$$

$$x_{30} = \frac{x_{3\max} + x_{3\min}}{2} = \frac{1,2 + 0,8}{2} = 1,0; \quad \Delta x_3 = \frac{x_{3\max} - x_{3\min}}{2} = \frac{1,2 - 0,8}{2} = 0,2;$$

$$x_{40} = \frac{x_{4\max} + x_{4\min}}{2} = \frac{350 + 250}{2} = 300,0; \quad \Delta x_4 = \frac{x_{4\max} - x_{4\min}}{2} = \frac{350 - 250}{2} = 50,0.$$

Следующий шаг – найти величину b по уравнению (158). По данным задачи максимальным по модулю коэффициентом является $b = \max|b_s| = |b_3| = 6,1$.

Натуральные значения факторов x_r^h при крутом восхождении для $\mu = 0,8$ рассчитаем по уравнению (160), используя рассчитанные выше значения x_{10}, Δx_1, x_{20}, Δx_2, x_{30}, Δx_3, x_{40}, Δx_4:

$$x_1^h = x_{10} + h\mu \frac{b_1}{b} \Delta x_1 = 0,8 + h \cdot 0,8 \cdot \frac{4,2}{6,1} \cdot 0,2 = 0,8 + 0,1102 \cdot h;$$

$$x_2^h = x_{20} + h\mu\frac{b_2}{b}\Delta x_2 = 10,0 + h\cdot 0,8\cdot\frac{-3,3}{6,1}\cdot 4,0 = 10,0 - 1,7311\cdot h;$$

$$x_3^h = x_{30} + h\mu\frac{b_3}{b}\Delta x_3 = 1,0 + h\cdot 0,8\cdot\frac{6,1}{6,1}\cdot 0,2 = 1,0 + 0,1600\cdot h;$$

$$x_4^h = x_{40} + h\mu\frac{b_4}{b}\Delta x_4 = 300,0 + h\cdot 0,8\cdot\frac{-2,8}{6,1}\cdot 50,0 = 300,0 - 18,36\cdot h,$$

где $h = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ – номер шага при крутом восхождении.

Ответ. Рассчитанные натуральные значения факторов x_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ для $N = 6$ опытов крутого восхождения представлены в таблице.

N	h	x_1, %	x_2, %	x_3, %	x_4, °C
1	0	0,80	10,00	1,00	300
2	1	0,91	8,27	1,16	282
3	2	1,02	6,54	1,32	263
4	3	1,13	4,81	1,48	245
5	4	1,24	3,08	1,64	227
6	5	1,35	1,34	1,80	208

Пример 3.3.2. В результате изучения зависимости удельного расхода энергии при сушке зерна (Y, кВт·ч/т) от содержания температуры теплоносителя x_1, объемного расхода теплоносителя x_2, линейной скорости обдува зерна теплоносителем x_3 и влажности теплоносителя x_4, которые варьировались в диапазонах: $x_1 \in [30;\ 70]$ °C, $x_2 \in [3;\ 5]$ м^3/ч, $x_3 \in [2;\ 3]$ м/с, $x_4 \in [35;\ 55]$ %, получено адекватное **четырехфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = 68,8 - 3,7X_1 + 4,4X_2 - 5,5X_3 + 2,6X_4$. Цель дальнейшего изучения технической системы – достижение стационарной области по кратчайшему пути. Для этого следует рассчитать натуральные значения факторов x_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ для опытов по крутому спуску. Движение начать из центра факторного пространства, а за величину первого шага принять $\mu = -0,75$. Ограничимся серией опытов $N = 6$.

Решение. Сначала по уравнениям (104), (105) рассчитаем основные уровни и интервалы варьирования всех 4-х факторов с учетом того, что $x_1 \in [30;\ 70]$ °C, $x_2 \in [3;\ 5]$ м^3/ч, $x_3 \in [2;\ 3]$ м/с, $x_4 \in [35;\ 55]$ %:

$$x_{10} = \frac{x_{1\max} + x_{1\min}}{2} = \frac{70+30}{2} = 50,0; \quad \Delta x_1 = \frac{x_{1\max} - x_{1\min}}{2} = \frac{70-30}{2} = 20,0;$$

$$x_{20} = \frac{x_{2\max} + x_{2\min}}{2} = \frac{5+3}{2} = 4,0; \quad \Delta x_2 = \frac{x_{2\max} - x_{2\min}}{2} = \frac{5-3}{2} = 1,0;$$

$$x_{30} = \frac{x_{3\max} + x_{3\min}}{2} = \frac{3+2}{2} = 2,5; \quad \Delta x_3 = \frac{x_{3\max} - x_{3\min}}{2} = \frac{3-2}{2} = 0,5;$$

$$x_{40} = \frac{x_{4\max} + x_{4\min}}{2} = \frac{55+35}{2} = 45,0; \quad \Delta x_4 = \frac{x_{4\max} - x_{4\min}}{2} = \frac{55-35}{2} = 10,0.$$

Следующий шаг – найдем величину b по уравнению (158). По условию задачи максимальным по модулю коэффициентом является регрессионный коэффициент b_3. Поэтому согласно уравнению (158) $b = \max|b_s| = |b_3| = |-5,5| = 5,5$.

Натуральные значения факторов x_r^h при крутом спуске для $\mu = -0,75$ рассчитаем по уравнению (160), используя рассчитанные выше значения x_{10}, Δx_1, x_{20}, Δx_2, x_{30}, Δx_3, x_{40}, Δx_4:

$$x_1^h = x_{10} + h\mu\frac{b_1}{b}\Delta x_1 = 50,0 + h\cdot(-0,75)\cdot\frac{-3,7}{5,5}\cdot 20,0 = 50,0 + 10,09\cdot h;$$

$$x_2^h = x_{20} + h\mu\frac{b_2}{b}\Delta x_2 = 4,0 + h\cdot(-0,75)\cdot\frac{4,4}{5,5}\cdot 1,0 = 4,0 - 0,6000\cdot h;$$

$$x_3^h = x_{30} + h\mu\frac{b_3}{b}\Delta x_3 = 2,5 + h\cdot(-0,75)\cdot\frac{-5,5}{5,5}\cdot 0,5 = 2,5 + 0,3750\cdot h;$$

$$x_4^h = x_{40} + h\mu\frac{b_4}{b}\Delta x_4 = 45,0 + h\cdot(-0,75)\cdot\frac{2,6}{5,5}\cdot 10,0 = 45,0 - 3,545\cdot h,$$

где $h = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ – номер шага при крутом спуске.

Ответ. В таблице представлены значения факторов x_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ для 6 опытов крутого спуска.

N	h	x_1, °C	x_2, м^3/ч	x_3, м/с	x_4, %
1	0	50,0	4,00	2,50	45,0
2	1	60,1	3,40	2,88	41,5
3	2	70,2	2,80	3,25	37,9
4	3	80,3	2,20	3,63	34,4
5	4	90,4	1,60	4,00	30,8
6	5	100,5	1,00	4,38	27,3

5. После расчета натуральных значений факторов для серии опытов осуществляют крутое восхождение (спуск). Условия опыта, в котором параметр Y будет иметь наибольшее (наименьшее) значение, принимают за новый центр факторного пространства.

В новом факторном пространстве проводят исследования по ЦПФП (ЦДФП) с целью построения нового **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. Если и оно окажется адекватным, то процедуру крутого восхождения повторяют. Если же полученное **многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка окажется неадекватным (достигнута стационарная область), то переходят к построению **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП.

Типовая задача

Цель. Освоить метод крутого восхождения по **многофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **первого** порядка для достижения стационарной области.

Формулировка задачи. Продолжим решение типовой задачи **раздела 3.1.** Напомним, что при исследовании урожайности пшеницы (Y, ц/га) в факторном пространстве $x_1 \in [0,50;\ 1,50]$ ц/га (количество посевного материала – пшеницы) и $x_2 \in [0,25;\ 0,75]$ ц/га (количество неорганического удобрения) было получено **адекватное многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка со значимыми коэффициентами регрессии $Y = 28,45 + 6,77X_1 + 5,62X_2$. Полученное уравнение позволяет реализовать процедуру крутого восхождения. Необходимо рассчитать по **многофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **первого** порядка серию из 11 опытов для крутого восхождения (за 1-ый опыт взять центр факторного пространства).

Математическая формулировка задачи: рассчитать координаты параметрической прямой крутого восхождения в натуральных значениях факторов для 11-ти опытов. Начать движение по градиенту из точки (0; 0) – центра факторного пространства. За величину первого шага примем $\mu = 0,75$. По результатам крутого восхождения выбрать центр нового факторного пространства.

План решения задачи

1. Внимательно прочитать условие задачи.

2. Рассчитать координаты параметрического уравнения прямой для опытов по крутому восхождению в натуральных значениях факторов x_1 и x_2 для **адекватного многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = 28,45 + 6,77X_1 + 5,62X_2$.

3. Провести эксперимент по крутому восхождению и принять решение по дальнейшему исследованию изучаемой технической системы.

Решение задачи по плану

1. Пункт плана 1 выполнить самостоятельно.

2. Рассчитаем натуральные значения факторов x_r $(r = 1, 2)$ для опытов по крутому восхождению. Движение начнем из центра факторного пространства, а за величину первого шага примем $\mu = 0,75$. Ограничимся серией опытов $N = 11$.

Сначала, используя уравнения (104), (105), рассчитаем основные уровни и интервалы варьирования 2-х факторов с учетом того, что $x_1 \in [0,50;\ 1,50]$ ц/га и $x_2 \in [0,25;\ 0,75]$ ц/га :

$$x_{10} = \frac{x_{1\max} + x_{1\min}}{2} = \frac{1,5 + 0,5}{2} = 1,0; \quad \Delta x_1 = \frac{x_{1\max} - x_{1\min}}{2} = \frac{1,5 - 0,5}{2} = 0,5;$$

$$x_{20} = \frac{x_{2\max} + x_{2\min}}{2} = \frac{0,75 + 0,25}{2} = 0,5; \ \Delta x_2 = \frac{x_{2\max} - x_{2\min}}{2} = \frac{0,75 - 0,25}{2} = 0,25.$$

Так как среди регрессионных коэффициентов b_1, b_2 **адекватного многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = 28,45 + 6,77X_1 + 5,62X_2$ коэффициент $b_1 = 6,77$ является максимальным по абсолютной величине, то согласно уравнению (158) $b = |b_1| = 6,77$.

Натуральные значения факторов x_r^h в опытах по крутому восхождению для $\mu = 0,75$ рассчитаем по уравнению (160), используя рассчитанные выше значения x_{10}, Δx_1, x_{20}, Δx_2 :

$$x_1^h = x_{10} + h\mu\frac{b_1}{b}\Delta x_1 = 1,0 + h \cdot 0,75 \cdot \frac{6,77}{6,77} \cdot 0,5 = 1,0 + 0,3750 \cdot h;$$

$$x_2^h = x_{20} + h\mu\frac{b_2}{b}\Delta x_2 = 0,5 + h \cdot 0.75 \cdot \frac{5,62}{6,77} \cdot 0,25 = 0,5 + 0,1556 \cdot h,$$

где $h = 0, ..., 10$ – номер шага в направлении крутого восхождения.

Значения факторов опытов по крутому восхождению в натуральных координатах внесены в таблицу 41. В таблице продолжена нумерация опытов таблицы 32. В эту же таблицу внесены значения параметра Y (урожайность пшеницы, ц/га), полученные в результате эксперимента по крутому восхождению с числом дублей $n = 2$.

Таблица 41

План крутого восхождения

N	h	x_1, ц/га	x_2, ц/га	Y_1^h, ц/га	Y_2^h, ц/га	$\bar{Y}^h$, ц/га
5	0	1,000	0,500	28,2	28,6	28,4
6	1	1,375	0,656	36,9	37,5	37,2
7	2	1,750	0,811	43,5	44,1	43,8
8	3	2,125	0,967	49,0	49,2	49,1
9	4	2,500	1,123	53,2	52,8	53,0
10	5	2,876	1,279	56,4	56,0	56,2
11	6	3,251	1,434	56,5	56,7	56,6
12	**7**	**3,626**	**1,590**	**56,9**	**57,5**	**57,2**
13	8	4,001	1,746	55,7	55,1	55,4
14	9	4,376	1,901	51,8	52,2	52,5
15	10	4,571	2,077	46,2	45,8	46,0

5. Из реализованных 11-ти опытов максимальное значение параметра $\overline{Y}_{12} = 57,2$ ц/га достигается в опыте 12. Координаты наилучшего опыта с некоторым округлением примем за центр нового факторного пространства: $x_{10} = 3,5$ ц/га ; $x_{20} = 1,5$ ц/га .

Ответ. 1) Координаты опытов крутого восхождения для факторов в натуральных значениях представлены в таблице 41:

$$x_1^h = x_{10} + h\mu\frac{b_1}{b}\Delta x_1 = 1,0 + h \cdot 0,75 \cdot \frac{6,77}{6.77} \cdot 0,5 = 1,0 + 0,3750 \cdot h ;$$

$$x_2^h = x_{20} + h\mu\frac{b_2}{b}\Delta x_2 = 0,5 + h \cdot 0.75 \cdot \frac{5,62}{6,77} \cdot 0,25 = 0,5 + 0,1556 \cdot h .$$

2) Наилучший результат достигнут в 12-ом опыте – $\overline{Y}_{12} = 57,2$ ц/га . За центр нового факторного пространства примем: $x_{10} = 3,5$ ц/га ; $x_{20} = 1,5$ ц/га .

Контрольные вопросы

1. На каком этапе исследований целесообразно применять метод крутого восхождения?
2. Напишите параметрическое уравнение прямой крутого восхождения в нормированных значениях факторов, проходящей через начало координат факторного пространства.
3. Напишите параметрическое уравнение прямой крутого спуска в натуральных значениях факторов, проходящей через начало координат факторного пространства.
4. Сформулируйте алгоритм расчета первого шага при крутом восхождении (спуске).

Контрольные задачи

Таблица 42

Коэффициенты **адекватного двухфакторного** уравнения регрессии **первого** порядка и параметр Y (число дублей $n = 2$) для 10-ти опытов крутого восхождения

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10	
b_0	31,05	b_0	30,02	b_0	29,96	b_0	29,99	b_0	30,06	b_0	30,00	b_0	28,99	b_0	27,90	b_0	29,01	b_0	28,99
b_1	2,11	b_1	2,55	b_1	4,36	b_1	5,23	b_1	3,44	b_1	4,73	b_1	2,61	b_1	7,99	b_1	7,13	b_1	4,41
b_2	8,02	b_2	8,01	b_2	7,96	b_2	8,03	b_2	7,98	b_2	8,02	b_2	8,05	b_2	8,03	b_2	8,08	b_2	7,98
μ	0,93	μ	0,92	μ	0,90	μ	0,80	μ	0,93	μ	0,85	μ	0,89	μ	0,67	μ	0,72	μ	0,73
Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}
31,9	31,2	30,4	31,7	32,8	31,0	29,5	29,9	29,5	29,8	30,1	30,5	28,5	30,0	27,8	29,7	29,1	31,4	29,1	31,4
32,8	30,9	33,6	34,1	31,7	32,0	34,3	36,5	34,2	33,0	30,0	31,4	32,7	34,7	34,4	34,4	34,8	34,0	34,8	34,0
33,8	32,6	38,7	38,2	34,8	35,1	41,7	42,6	38,1	37,7	33,3	32,2	36,8	38,0	38,0	39,5	41,6	41,1	41,6	41,1
36,2	34,3	43,3	41,4	37,6	36,0	47,2	48,9	39,5	40,4	35,8	34,7	40,9	41,4	45,6	43,9	48,0	48,4	48,0	48,4
37,9	38,2	43,4	45,4	38,1	38,5	52,5	54,2	47,0	46,1	35,8	37,8	44,7	46,3	50,7	52,7	53,5	49,6	53,5	49,6
37,8	38,3	51,3	51,3	40,8	41,0	58,4	55,2	47,6	50,2	37,6	37,7	52,2	49,9	53,7	55,4	53,4	53,9	53,4	53,9
42,1	41,9	53,2	55,4	41,3	42,4	53,0	53,7	50,8	52,6	41,2	38,8	53,9	53,6	55,3	57,0	51,9	51,5	51,9	51,5
45,7	47,0	56,9	56,4	48,0	49,1	53,8	50,7	56,6	54,0	45,5	47,0	55,7	55,4	50,0	54,7	44,6	46,0	44,6	46,0
53,2	55,0	58,3	54,9	53,5	52,7	49,6	50,6	55,6	53,9	54,0	53,0	56,6	56,1	49,1	51,4	38,6	39,6	38,6	39,6
58,7	58,1	57,2	57,2	57,2	56,4	45,7	44,7	57,2	56,0	56,2	57,4	57,7	58,1	45,8	48,1	35,7	34,2	35,7	34,2
53,6	52,9	55,3	54,8	55,9	52,9	40,1	39,4	51,5	51,2	50,8	55,0	53,0	55,1	41,3	44,2	25,8	29,2	25,8	29,2

Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15		Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20	
b_0	31,05	b_0	30,02	b_0	29,96	b_0	29,99	b_0	30,06	b_0	30,00	b_0	28,99	b_0	27,90	b_0	29,01	b_0	28,99
b_1	2,11	b_1	2,55	b_1	4,36	b_1	5,23	b_1	3,44	b_1	4,73	b_1	2,61	b_1	7,99	b_1	7,13	b_1	4,41
b_2	8,02	b_2	8,01	b_2	7,96	b_2	8,03	b_2	7,98	b_2	8,02	b_2	8,05	b_2	8,03	b_2	8,08	b_2	7,98
μ	0,93	μ	0,92	μ	0,90	μ	0,80	μ	0,93	μ	0,85	μ	0,89	μ	0,67	μ	0,72	μ	0,73
Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}
26,9	27,7	30,2	28,4	31,0	27,8	29,2	27,2	28,3	28,1	29,8	31,5	27,6	29,2	29,4	30,6	29,2	29,2	29,2	30,0
34,3	35,2	36,0	35,8	32,8	33,9	30,0	30,8	29,5	28,2	29,8	29,6	32,9	30,0	32,5	31,0	33,9	34,5	33,4	32,1
43,6	44,6	39,8	40,9	38,2	35,5	34,8	30,9	33,6	33,9	33,4	30,9	33,5	32,0	33,1	33,1	38,9	39,4	36,3	38,7
50,4	50,6	46,9	45,5	41,9	40,0	34,5	34,7	36,1	34,2	33,1	35,7	33,8	35,2	33,9	33,9	43,1	43,0	42,1	43,7
52,3	53,3	54,1	54,9	41,8	45,1	39,9	38,4	38,8	34,4	34,3	35,2	37,5	34,8	35,2	37,6	47,3	47,8	46,4	44,1
56,3	55,4	54,1	53,7	46,2	48,9	42,3	41,7	38,0	37,9	36,2	34,6	40,0	35,1	37,6	36,9	50,4	49,7	53,4	51,9
53,2	53,5	54,0	55,1	49,2	50,8	48,4	48,3	41,0	42,1	39,7	37,2	50,6	49,2	38,0	40,4	51,8	53,5	54,9	52,5
52,1	49,9	55,6	57,5	50,4	50,8	51,2	51,5	45,1	44,8	47,8	48,0	53,5	53,6	47,2	47,2	54,5	53,8	54,8	53,1
50,1	47,5	54,2	55,2	55,9	56,3	55,9	55,3	51,1	52,5	51,5	55,7	57,5	56,0	51,6	51,7	56,1	55,1	56,6	53,7
45,6	46,8	53,8	53,0	54,0	53,3	51,7	54,1	56,8	53,9	55,9	57,6	55,5	52,0	57,8	54,3	56,9	57,5	57,2	55,1
41,3	39,9	50,8	53,6	52,5	52,2	48,2	51,0	51,6	51,6	53,0	54,0	50,4	51,3	51,6	55,3	55,8	53,8	54,2	54,4

Вариант 21		Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24		Вариант 25		Вариант 26		Вариант 27		Вариант 28		Вариант 29		Вариант 30	
b_0	31,05	b_0	30,02	b_0	29,96	b_0	29,99	b_0	30,06	b_0	30,00	b_0	28,99	b_0	27,90	b_0	29,01	b_0	28,45
b_1	2,11	b_1	2,55	b_1	4,36	b_1	5,23	b_1	3,44	b_1	4,73	b_1	2,61	b_1	7,99	b_1	7,13	b_1	6,77
b_2	8,02	b_2	8,01	b_2	7,96	b_2	8,03	b_2	7,98	b_2	8,02	b_2	8,05	b_2	8,03	b_2	8,08	b_2	5,62
μ	0,93	μ	0,92	μ	0,90	μ	0,80	μ	0,93	μ	0,85	μ	0,89	μ	0,67	μ	0,72	μ	0,75
Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j1}	Y_{j2}
28,6	30,4	31,7	30,3	30,3	27,5	30,4	30,4	32,7	31,6	26,8	29,3	31,3	30,1	29,8	30,7	27,2	27,5	28,2	28,6
35,5	33,9	33,1	34,0	34,3	33,4	35,3	37,6	34,5	32,6	31,6	29,6	31,0	31,9	34,4	35,5	35,1	34,4	36,9	37,5
37,5	36,6	37,3	35,1	42,2	40,1	40,8	44,3	38,1	40,4	35,0	32,8	33,9	34,0	44,3	42,1	42,3	39,8	43,5	44,1
40,6	42,0	39,0	42,7	44,0	47,3	47,1	48,6	43,0	41,3	33,4	32,6	38,0	37,2	49,3	47,9	45,6	49,4	49,0	49,2
43,1	43,9	44,4	43,1	52,7	53,6	52,6	54,6	43,3	43,9	38,2	34,0	37,4	40,8	51,4	51,5	55,4	53,6	53,2	52,8
48,2	46,6	48,6	50,9	54,3	54,6	54,6	52,7	50,1	48,6	38,9	37,6	39,2	41,2	49,2	55,0	55,2	55,0	56,4	56,0
49,4	50,9	52,4	49,7	54,8	54,6	54,5	54,7	53,4	51,1	38,8	42,2	44,0	42,0	55,0	56,2	59,0	56,9	56,5	56,7
50,7	54,3	52,1	52,1	57,1	60,7	55,9	56,8	52,4	52,5	47,4	47,5	45,8	44,9	59,8	57,6	58,8	60,4	56,9	57,5
54,6	53,4	53,3	53,1	56,2	57,4	53,9	55,2	54,9	52,5	52,5	53,2	54,7	54,2	55,9	57,1	58,7	56,6	55,7	55,1
52,8	57,2	55,2	56,4	56,1	56,4	53,6	53,3	56,1	55,4	57,4	58,0	56,4	57,8	56,2	55,1	56,0	55,7	51,8	52,2
53,6	54,2	54,3	53,3	55,5	54,7	53,0	51,4	52,7	53,4	55,0	55,3	54,4	55,2	55,9	54,1	52,6	49,9	46,2	45,8

3.4. МНОГОФАКТОРНОЕ ОРТОГОНАЛИЗИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ КОМПОЗИЦИОННЫЙ ПЛАН (ОЦКП)

Теория с примерами (кратко)

1. **Многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка, отражающее зависимость параметра Y от k факторов X_r, имеет вид

$$Y = b_0 + \sum_{r=1}^{k} b_r X_r + \sum_{\substack{r=1 \\ r<s}}^{k} b_{rs} X_r X_s + \sum_{r=1}^{k} b_{rr}(X_r^2 - \lambda_k)\,,\ r = 1, ..., k\,. \qquad (161)$$

Любое уравнение регрессии **всегда** строится в нормированных значениях факторов.

2. Для построения **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка будем использовать ортогональный центральный композиционный план (ОЦКП), который состоит из ЦПФП и $2k$ звездных точек $(\pm\alpha_k, 0, ..., 0)$,…, $(0, 0, ..., \pm\alpha_k)$ (по 2 звездные точки на каждый фактор). Количество опытов ЦПФП

$$N_k = N_{k0} + 1 = 2^k + 1\,, \qquad (162)$$

где $N_{k0} = 2^k$ – число опытов ПФП.

Количество опытов ОЦКП

$$N_k = N_{k0} + 1 + 2k = 2^k + 1 + 2k\,. \qquad (163)$$

2.1. Величины звездного плеча α_k и ортогонализирующего коэффициента λ_k для ОЦКП равны:

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{\sqrt{N_k \cdot N_{k0}} - N_{k0}}{2}}\,; \qquad (164)$$

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{N_{k0}}{N_k}}\,. \qquad (165)$$

2.2. Параметры ОЦКП для $k = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ приведены в таблице 43.

Таблица 43

Параметры ОЦКП

Параметры	Число факторов k						
	2	3	4	5	6	7	8
$N_{k0} = 2^k$	4	8	16	32	64	128	256
$2k$	4	6	8	10	12	14	16
$N_k = N_{k0} + 1 + 2k$	9	15	25	43	77	143	273
$\alpha_k = \sqrt{\sqrt{N_{k0}N_k} - N_{k0} / 2}$	1,0000	1,2154	1,4142	1,5960	1,7606	1,9095	2,0449
$\lambda_k = \sqrt{N_{k0} / N_k}$	0,6667	0,730297	0,8000	0,8627	0,9117	0,9461	0,9684
$1 - \lambda_k$	0,3333	0,2697	0,2000	0,1373	0,0883	0,0539	0,0316
$\alpha_k^2 - \lambda_k$	0,3333	0,7469	1,2000	1,6846	2,1882	2,7000	3,2133
$\sum_{j=1}^{N_k} X_{0j}^2 = N_k$	9	15	25	43	77	143	273
$\sum_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2 = \sqrt{N_{k0}N_k}$	6,000	10,954	20,000	37,094	70,200	135,292	264,363
$\sum_{j=1}^{N_k} (X_{rj}X_{sj})^2 = N_{k0}$	4	8	16	32	64	128	256
$\sum_{j=1}^{N_k} \left(X_{rj}^2 - \lambda_k\right)^2 = 2\alpha_k^4$	2,000	4,364	8,000	12,977	19,218	26,589	34,973

Пример 3.4.1. Рассчитать значения звездного плеча α_5 и ортогонализирующего коэффициента λ_5.

Решение. Сначала, воспользовавшись уравнениями (162), (163), рассчитаем число опытов ПФП и ОЦКП для $k = 5$:

$$\text{для ПФП} \rightarrow N_{50} = 2^5 = 32;$$

$$\text{для ОЦКП} \rightarrow N_5 = N_{50} + 1 + 2 \cdot 5 = 32 + 11 = 43.$$

Параметры α_5 и λ_5 рассчитаем по уравнениям (164), (165):

$$\alpha_5 = \sqrt{\frac{\sqrt{N_5 \cdot N_{50}} - N_{50}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{43 \cdot 32} - 32}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1376} - 32}{2}} = 1{,}596;$$

$$\lambda_5 = \sqrt{\frac{N_{50}}{N_5}} = \sqrt{\frac{32}{43}} = 0{,}8627.$$

Ответ. Значения звездного плеча α_5 и ортогонализирующего коэффициента λ_5 соответственно равны: $\alpha_5 = 1{,}596$; $\lambda_5 = 0{,}8627$.

3. **МП** для построения **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка для k факторов состоит из N_k опытов с n дублями в каждом опыте. **МП** строят на базе ОЦКП, который, в свою очередь, состоит из ПФП с числом опытов $N_{k0} = 2^k$ (или ДФП с числом опытов $N_k = 2^{k-g}$), в котором $X_{rj} = \pm 1$, одной точки в центре факторного пространства (0, …, 0) и $2k$ звездных точек $(\pm\alpha_k, 0, ..., 0)$, …, $(0, 0, ..., \pm\alpha_k)$. Полное число опытов ОЦКП $N_k = 2^k + 1 + 2k$. **МП** включает в себя следующие столбцы: N_k, X_{rj}, x_{rj}, Y_{ji}, $\overline{Y_j}$, S_j^2. Значения Y_{ji} позволяют провести предварительную обработку экспериментальных данных (расчет выборочных средних $\overline{Y_j}$ и выборочных дисперсий S_j^2 в каждом опыте, проверка всех выборочных дисперсий на однородность по критерию Кохрена, расчет дисперсии воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$ и ее числа степеней свободы $f_{\text{воспр}}$).

Следует отметить, что **МП** для построения **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП отличается от **МП** для построения **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП. Дело в том, что количество опытов в **МП** на базе ОЦКП равно $N_k = 2^k + 1 + 2k$, а **МП** на базе ЦПФП – $N_k = 2^k + 1$, и поэтому результаты предварительной обработки $\overline{Y_j}, S_j^2, G_{\text{э}}, G_{n-1;\, N_k;\, p}, S^2_{\text{воспр}}, f_{\text{воспр}}$ будут различаться. Для построения **МП** необходимо задать диапазоны варьирования факторов: $x_r \in [x_{r\,\min}, x_{r\,\max}]$ $(r = 1, ..., k)$. Взаимосвязь нормированных X_r и натуральных x_r значений факторов отражена в уравнениях (102) – (105). Значения фиктивного фактора X_0 равны $X_{0j} = +1$ для всех $j = 1, ..., N_k$.

Пример 3.4.2. Создать **МП** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП с числом опытов $N_k = 9$ (таблица 44). Из таблицы 43 находим $\alpha_2 = 1{,}000$.

Пример 3.4.3. Создать **МП** для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП с числом опытов $N_k = 15$ (таблица 45). Из таблицы 43 находим $\alpha_3 = 1{,}2154$.

4. Предварительная обработка экспериментальных данных **МП** с числом опытов N_k $(j = 1, ..., N_k)$ и n дублей $(i = 1, ..., n)$ в каждом опыте включает в себя расчет выборочных средних $\overline{Y_j}$ и выборочных дисперсий S_j^2 в каждом опыте, проверку выборочных дисперсий на однородность по критерию Кохрена, расчет дисперсии воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$ и ее числа степеней свободы $f_{\text{воспр}}$. Указанные процедуры выполняют по уравнениям (108) – (114).

Таблица 44

МП для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП с числом опытов $N_k = 9$.
Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N_2	X_{1j}	X_{2j}	x_{1j}	x_{2j}	Y_{j1}	Y_{ji}	Y_{jn}	$\overline{Y_j}$	S_j^2
1	– 1	– 1	$x_{1\,\min}$	$x_{2\,\min}$	Y_{11}	Y_{1i}	Y_{1n}	$\overline{Y_1}$	S_1^2
2	+ 1	– 1	$x_{1\,\max}$	$x_{2\,\min}$	Y_{21}	Y_{2i}	Y_{2n}	$\overline{Y_2}$	S_2^2
3	– 1	+ 1	$x_{1\,\min}$	$x_{2\,\max}$	Y_{31}	Y_{3i}	Y_{3n}	$\overline{Y_3}$	S_3^2
4	+ 1	+ 1	$x_{1\,\max}$	$x_{2\,\max}$	Y_{41}	Y_{4i}	Y_{4n}	$\overline{Y_4}$	S_4^2
5	0	0	$x_{1\,0}$	$x_{2\,0}$	Y_{51}	Y_{5i}	Y_{5n}	$\overline{Y_5}$	S_5^2
6	– 1,000	0	$x_{1\,\min}$	$x_{2\,0}$	Y_{61}	Y_{6i}	Y_{6n}	$\overline{Y_6}$	S_6^2
7	+ 1,000	0	$x_{1\,\max}$	$x_{2\,0}$	Y_{71}	Y_{7i}	Y_{7n}	$\overline{Y_7}$	S_7^2
8	0	– 1,000	$x_{1\,0}$	$x_{2\,\min}$	Y_{81}	Y_{8i}	Y_{8n}	$\overline{Y_8}$	S_8^2
9	0	+ 1,000	$x_{1\,0}$	$x_{2\,\max}$	Y_{91}	Y_{9i}	Y_{9n}	$\overline{Y_9}$	S_9^2
$G_э$		$G_{n-1;\,9;\,p}$			$S^2_{\text{воспр}}$ $f_{\text{воспр}} = 9\cdot(n-1)$				$\sum\limits_{j=1}^{9} S_j^2$

Таблица 45

МП для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП с числом опытов $N_k = 15$.
Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N_3	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	x_{1j}	x_{2j}	x_{2j}	Y_{j1}	Y_{ji}	Y_{jn}	$\overline{Y_j}$	S_j^2
1	– 1	– 1	– 1	$x_{1\,\min}$	$x_{2\,\min}$	$x_{3\,\min}$	Y_{11}	Y_{1i}	Y_{1n}	$\overline{Y_1}$	S_1^2
2	+ 1	– 1	– 1	$x_{1\,\max}$	$x_{2\,\min}$	$x_{3\,\min}$	Y_{21}	Y_{2i}	Y_{2n}	$\overline{Y_2}$	S_2^2
3	– 1	+ 1	– 1	$x_{1\,\min}$	$x_{2\,\max}$	$x_{3\,\min}$	Y_{31}	Y_{3i}	Y_{3n}	$\overline{Y_3}$	S_3^2
4	+ 1	+ 1	– 1	$x_{1\,\max}$	$x_{2\,\max}$	$x_{3\,\min}$	Y_{41}	Y_{4i}	Y_{4n}	$\overline{Y_4}$	S_4^2
5	– 1	– 1	+ 1	$x_{1\,\min}$	$x_{2\,\min}$	$x_{3\,\max}$	Y_{51}	Y_{5i}	Y_{5n}	$\overline{Y_5}$	S_5^2
6	+ 1	– 1	+ 1	$x_{1\,\max}$	$x_{2\,\min}$	$x_{3\,\max}$	Y_{61}	Y_{6i}	Y_{6n}	$\overline{Y_6}$	S_6^2
7	– 1	+ 1	+ 1	$x_{1\,\min}$	$x_{2\,\max}$	$x_{3\,\max}$	Y_{71}	Y_{7i}	Y_{7n}	$\overline{Y_7}$	S_7^2
8	+ 1	+ 1	+ 1	$x_{1\,\max}$	$x_{2\,\max}$	$x_{3\,\max}$	Y_{81}	Y_{8i}	Y_{8n}	$\overline{Y_8}$	S_8^2
9	0	0	0	$x_{1\,0}$	$x_{2\,0}$	$x_{3\,0}$	Y_{91}	Y_{9i}	Y_{9n}	$\overline{Y_9}$	S_9^2
10	- 1,215	0	0	$x_{1\,0} - 1,215\cdot\Delta x_1$	$x_{2\,0}$	$x_{3\,0}$	$Y_{10\,1}$	$Y_{10\,i}$	$Y_{10\,n}$	$\overline{Y_{10}}$	S_{10}^2
11	+ 1,215	0	0	$x_{1\,0} + 1,215\cdot\Delta x_1$	$x_{2\,0}$	$x_{3\,0}$	$Y_{11\,1}$	$Y_{11\,i}$	$Y_{11\,n}$	$\overline{Y_{11}}$	S_{11}^2
12	0	- 1,215	0	$x_{1\,0}$	$x_{20} - 1,215\cdot\Delta x_2$	$x_{3\,0}$	$Y_{12\,1}$	$Y_{12\,i}$	$Y_{12\,n}$	$\overline{Y_{12}}$	S_{12}^2
13	0	+ 1,215	0	$x_{1\,0}$	$x_{20} + 1,215\cdot\Delta x_2$	$x_{3\,0}$	$Y_{13\,1}$	$Y_{13\,i}$	$Y_{13\,n}$	$\overline{Y_{13}}$	S_{13}^2
14	0	0	- 1,215	$x_{1\,0}$	$x_{2\,0}$	$x_{30} - 1,215\cdot\Delta x_3$	$Y_{14\,1}$	$Y_{14\,i}$	$Y_{14\,n}$	$\overline{Y_{14}}$	S_{14}^2
15	0	0	+ 1,215	$x_{1\,0}$	$x_{2\,0}$	$x_{30} - 1,215\cdot\Delta x_3$	$Y_{15\,1}$	$Y_{15\,i}$	$Y_{15\,n}$	$\overline{Y_{15}}$	S_{15}^2
$G_э$				$G_{n-1,\,15;\,p}$			$S^2_{\text{воспр}}$ $f_{\text{воспр}} = 15\cdot(n-1)$			$\sum\limits_{j=1}^{15} S_j^2$	

5. **ММ** для построения **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка состоит из N_k опытов и n дублей в каждом опыте, включает в себя следующие столбцы: $N_k, X_{0j}, X_{rj}, X_{rj}X_{sj}\ X_{rj}^2 - \lambda_k, \overline{Y_j}, X_{0j}\overline{Y_j}, X_{rj}\overline{Y_j}, X_{rj}X_{sj}\overline{Y_j},\ X_{rj}^2 - \lambda_k)\overline{Y_j},\ Y_j^p, \left(\overline{Y_j} - Y_j^p\right)^2, \quad (r, s = 1, ..., k,$ $j = 1, ..., N_k)$, значения которых позволяют провести окончательную обработку экспериментальных данных (расчет коэффициентов уравнения регрессии b_0, b_r, b_{rs}, b_{rr}, проверка их на значимость по критерию Стьюдента, проверка уравнения регрессии на адекватность по критерию Фишера, расчет

абсолютной ошибки прогнозирования параметра в случае адекватности уравнения регрессии).

Пример 3.4.4. Создать **ММ** (см. таблицу 46) для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП с числом опытов $N_2 = 2^2 + 1 + 2 \cdot 2 = 9$. Из таблицы 43 находим: $k = 2$, $\alpha_2 = 1{,}000$, $\lambda_2 = 0{,}6667$.

Пример 3.4.5. Создать **ММ** (см. таблицу 47) для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП с числом опытов $N_3 = 2^3 + 1 + 2 \cdot 3 = 15$. Из таблицы 43 находим: $k = 3$, $\alpha_2 = 1{,}215$, $\lambda_2 = 0{,}7303$.

6. Коэффициенты **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка для **ММ** на базе ОЦКП, при условии ортогональности факторов, рассчитывают по формулам:

$$b_0 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j} \overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j}^2}; \tag{166}$$

$$b_r = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj} \overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2}, \quad r = 1, ..., k; \tag{167}$$

$$b_{rs} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k} (X_{rj} X_{sj}) \overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{N_k} (X_{rj} X_{sj})^2}, \quad r < s, \quad r, s = 1, ..., k; \tag{168}$$

$$b_{rr} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k} \left(X_{rj}^2 - \lambda_k\right) \overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{N_k} \left(X_{rj}^2 - \lambda_k\right)^2}, \quad r = 1, ..., k. \tag{169}$$

6.1. Значения $\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j}^2$, $\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2$, $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ r<s}}^{N_k} (X_{rj} X_{sj})^2$, $\sum\limits_{j=1}^{N_k} (X_{rj}^2 - \lambda_k)^2$, необходимые для определения b_0, b_r, b_{rs}, b_{rr} $(r < s,\ r, s = 1, ..., k)$ по уравнениям (166) – (169), для **ММ** на базе ОЦКП рассчитывают по уравнениям, приведенным в таблице 43.

Значения $\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j} \overline{Y}_j$, $\sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj} \overline{Y}_j$, $\sum\limits_{j=1}^{N_k} (X_{rj} X_{sj}) \overline{Y}_j$, $\sum\limits_{j=1}^{N_k} \left(X_{rj}^2 - \lambda_k\right) \overline{Y}_j$, необходимые для определения b_0, b_r, b_{rs}, b_{rr} $(r < s,\ r, s = 1, ..., k)$ по уравнениям (166) – (169), рассчитывают по сумме соответствующих столбцов **ММ** (см., например, таблицы 46, 47).

Таблица 46

ММ для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП и результаты обработки данных

N_2	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	$X_{1j}X_{2j}$	$X_{1j}^2-\lambda_2$	$X_{2j}^2-\lambda_2$	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	$X_{2j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}X_{2j}\overline{Y_j}$	$(X_{1j}^2-\lambda_2)\overline{Y}_j$	$(X_{2j}^2-\lambda_2)\overline{Y}_j$	Y_j^p	$(\overline{Y_j}-Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	0,3333	0,3333	$\overline{Y_1}$	$+\overline{Y_1}$	$-\overline{Y_1}$	$-\overline{Y_1}$	$+\overline{Y_1}$	$0,3333\cdot\overline{Y_1}$	$0,3333\cdot\overline{Y_1}$	Y_1^p	$(\overline{Y_1}-Y_1^p)^2$
2	+ 1	+ 1	– 1	– 1	0,3333	0,3333	$\overline{Y_2}$	$+\overline{Y_2}$	$+\overline{Y_2}$	$-\overline{Y_2}$	$-\overline{Y_2}$	$0,3333\cdot\overline{Y_2}$	$0,3333\cdot\overline{Y_2}$	Y_2^p	$(\overline{Y_2}-Y_2^p)^2$
3	+ 1	– 1	+ 1	– 1	0,3333	0,3333	$\overline{Y_3}$	$+\overline{Y_3}$	$-\overline{Y_3}$	$+\overline{Y_3}$	$-\overline{Y_3}$	$0,3333\cdot\overline{Y_3}$	$0,3333\cdot\overline{Y_3}$	Y_3^p	$(\overline{Y_3}-Y_3^p)^2$
4	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	0,3333	0,3333	$\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$0,3333\cdot\overline{Y_4}$	$0,3333\cdot\overline{Y_4}$	Y_4^p	$(\overline{Y_4}-Y^p)^2$
5	+ 1	0	0	0	- 0,6667	- 0,6667	$\overline{Y_5}$	$+\overline{Y_5}$	$0\cdot\overline{Y_5}$	$0\cdot\overline{Y_5}$	$0\cdot\overline{Y_5}$	$-0,6667\cdot\overline{Y_5}$	$-0,6667\cdot\overline{Y_5}$	Y_5^p	$(\overline{Y_5}-Y_5^p)^2$
6	+ 1	– 1,0	0	0	0,3333	- 0,6667	$\overline{Y_6}$	$+\overline{Y_6}$	$-\overline{Y_6}$	$0\cdot\overline{Y_6}$	$0\cdot\overline{Y_6}$	$0,3333\cdot\overline{Y_6}$	$-0,6667\cdot\overline{Y_6}$	Y_6^p	$(\overline{Y_6}-Y_6^p)^2$
7	+ 1	+ 1,0	0	0	0,3333	- 0,6667	$\overline{Y_7}$	$+\overline{Y_7}$	$+\overline{Y_7}$	$0\cdot\overline{Y_7}$	$0\cdot\overline{Y_7}$	$+0,3333\cdot\overline{Y_7}$	$-0,6667\cdot\overline{Y_7}$	Y_7^p	$(\overline{Y_7}-Y_7^p)^2$
8	+ 1	0	– 1,0	0	- 0,6667	0,3333	$\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	$0\cdot\overline{Y_8}$	$-\overline{Y_8}$	$0\cdot\overline{Y_8}$	$-0,6667\cdot\overline{Y_6}$	$0,3333\cdot\overline{Y_8}$	Y_8^p	$(\overline{Y_8}-Y_8^p)^2$
9	+ 1	0	+ 1,0	0	- 0,6667	0,3333	$\overline{Y_9}$	$+\overline{Y_9}$	$0\cdot\overline{Y_9}$	$+\overline{Y_9}$	$0\cdot\overline{Y_9}$	$-0,6667\cdot\overline{Y_7}$	$0,3333\cdot\overline{Y_9}$	Y_9^p	$(\overline{Y_9}-Y_9^p)^2$
$\sum^2$	**9**	**6**	**6**	**4**	**2**	**2**		$\sum_{j=1}^{9} X_{0j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{9} X_{1j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{9} X_{2j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{9} X_{1j}X_{2j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{9}(X_{1j}^2-\lambda_2)\overline{Y}_j$	$\sum_{j=1}^{9}(X_{2j}^2-\lambda_2)\overline{Y}_j$	$\varphi=\sum_{j=1}^{9}(\overline{Y}_j-Y_j^p)^2$	

Таблица 47

ММ для построения **трехфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП и результаты обработки данных

N_3	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	$X_{1j}X_{2j}$	$X_{1j}X_{3j}$	$X_{2j}X_{3j}$	$X_{1j}^2-\lambda_2$	$X_{2j}^2-\lambda_2$	$X_{3j}^2-\lambda_2$	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	$X_{2j}\overline{Y_j}$	$X_{3j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}X_{2j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}X_{3j}\overline{Y_j}$	$X_{2j}X_{3j}\overline{Y_j}$	$(X_{1j}^2-\lambda_2)\overline{Y_j}$	$(X_{1j}^2-\lambda_2)\overline{Y_j}$	$(X_{1j}^2-\lambda_2)\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j}-Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	+ 1	0,270	0,270	0,270	$\overline{Y_1}$	$+\overline{Y_1}$	$-\overline{Y_1}$	$-\overline{Y_1}$	$-\overline{Y_1}$	$+\overline{Y_1}$	$+\overline{Y_1}$	$+\overline{Y_1}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_1}$	$0{,}27\cdot0\,\overline{Y_1}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_1}$	Y_1^p	$(\overline{Y_1}-Y_1^p)^2$
2	+ 1	+ 1	– 1	– 1	– 1	– 1	+ 1	0,270	0,270	0,270	$\overline{Y_2}$	$+\overline{Y_2}$	$+\overline{Y_2}$	$-\overline{Y_2}$	$-\overline{Y_2}$	$-\overline{Y_2}$	$-\overline{Y_2}$	$+\overline{Y_2}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_2}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_2}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_2}$	Y_2^p	$(\overline{Y_2}-Y_2^p)^2$
3	+ 1	– 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	– 1	0,270	0,270	0,270	$\overline{Y_3}$	$+\overline{Y_3}$	$-\overline{Y_3}$	$+\overline{Y_3}$	$-\overline{Y_3}$	$-\overline{Y_3}$	$+\overline{Y_3}$	$-\overline{Y_3}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_3}$	$0{,}270\,\overline{Y_3}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_3}$	Y_3^p	$(\overline{Y_3}-Y_3^p)^2$
4	+ 1	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1	– 1	0,270	0,270	0,270	$\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$-\overline{Y_4}$	$+\overline{Y_4}$	$-\overline{Y_4}$	$-\overline{Y_4}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_4}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_4}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_4}$	Y_4^p	$(\overline{Y_4}-Y_4^p)^2$
5	+ 1	– 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1	0,270	0,270	0,270	$\overline{Y_5}$	$+\overline{Y_5}$	$-\overline{Y_5}$	$-\overline{Y_5}$	$+\overline{Y_5}$	$+\overline{Y_5}$	$-\overline{Y_5}$	$-\overline{Y_5}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_5}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_5}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_5}$	Y_5^p	$(\overline{Y_5}-Y_5^p)^2$
6	+ 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1	+ 1	– 1	0,270	0,270	0,270	$\overline{Y_6}$	$+\overline{Y_6}$	$+\overline{Y_6}$	$-\overline{Y_6}$	$+\overline{Y_6}$	$-\overline{Y_6}$	$+\overline{Y_6}$	$-\overline{Y_6}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_6}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_6}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_6}$	Y_6^p	$(\overline{Y_6}-Y_6^p)^2$
7	+ 1	– 1	+ 1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	0,270	0,270	0,270	$\overline{Y_7}$	$+\overline{Y_7}$	$-\overline{Y_7}$	$+\overline{Y_7}$	$+\overline{Y_7}$	$-\overline{Y_7}$	$-\overline{Y_7}$	$+\overline{Y_7}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_7}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_7}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_7}$	Y_7^p	$(\overline{Y_7}-Y_7^p)^2$
8	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	0,270	0,270	0,270	$\overline{Y_8}$	$\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	$+\overline{Y_8}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_8}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_8}$	$0{,}270\cdot\overline{Y_8}$	Y_8^p	$(\overline{Y_8}-Y_8^p)^2$
9	+ 1	0	0	0	0	0	0	– 0,730	– 0,730	– 0,730	$\overline{Y_9}$	$\overline{Y_9}$	$0\cdot\overline{Y_9}$	$0\cdot\overline{Y_9}$	$0\cdot\overline{Y_9}$	$0\cdot\overline{Y_9}$	$0\cdot\overline{Y_9}$	$0\cdot\overline{Y_9}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_9}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_9}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_9}$	Y_9^p	$(\overline{Y_9}-Y_9^p)^2$
10	+ 1	– 1,215	0	0	0	0	0	0,747	– 0,730	– 0,730	$\overline{Y_{10}}$	$\overline{Y_{10}}$	$-\overline{Y_{10}}$	$0\cdot\overline{Y_{10}}$	$0\cdot\overline{Y_{10}}$	$0\cdot\overline{Y_{10}}$	$0\cdot\overline{Y_{10}}$	$0\cdot\overline{Y_{10}}$	$0{,}747\cdot\overline{Y_{10}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{10}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{10}}$	Y_{10}^p	$(\overline{Y_{10}}-Y_{10}^p)^2$
11	+ 1	+ 1,215	0	0	0	0	0	0,747	– 0,730	– 0,730	$\overline{Y_{11}}$	$\overline{Y_{11}}$	$+\overline{Y_{11}}$	$0\cdot\overline{Y_{11}}$	$0\cdot\overline{Y_{11}}$	$0\cdot\overline{Y_{11}}$	$0\cdot\overline{Y_{11}}$	$0\cdot\overline{Y_{11}}$	$0{,}747\cdot\overline{Y_{11}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{11}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{11}}$	Y_{11}^p	$(\overline{Y_{11}}-Y_{11}^p)^2$
12	+ 1	0	– 1,215	0	0	0	0	– 0,730	0,747	– 0,730	$\overline{Y_{12}}$	$\overline{Y_{12}}$	$0\cdot\overline{Y_{12}}$	$-\overline{Y_{12}}$	$0\cdot\overline{Y_{12}}$	$0\cdot\overline{Y_{12}}$	$0\cdot\overline{Y_{12}}$	$0\cdot\overline{Y_{12}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{12}}$	$0{,}747\cdot\overline{Y_{12}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{12}}$	Y_{12}^p	$(\overline{Y_{12}}-Y_{12}^p)^2$
13	+ 1	0	+ 1,215	0	0	0	0	– 0,730	0,747	– 0,730	$\overline{Y_{13}}$	$\overline{Y_{13}}$	$0\cdot\overline{Y_{13}}$	$+\overline{Y_{13}}$	$0\cdot\overline{Y_{13}}$	$0\cdot\overline{Y_{13}}$	$0\cdot\overline{Y_{13}}$	$0\cdot\overline{Y_{13}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{13}}$	$0{,}747\cdot\overline{Y_{13}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{13}}$	Y_{13}^p	$(\overline{Y_{13}}-Y_{13}^p)^2$
14	+ 1	0	0	– 1,215	0	0	0	– 0,730	– 0,730	0,747	$\overline{Y_{14}}$	$\overline{Y_{14}}$	$0\cdot\overline{Y_{14}}$	$0\cdot\overline{Y_{14}}$	$-\overline{Y_{14}}$	$0\cdot\overline{Y_{14}}$	$0\cdot\overline{Y_{14}}$	$0\cdot\overline{Y_{14}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{14}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{14}}$	$0{,}747\cdot\overline{Y_{14}}$	Y_{14}^p	$(\overline{Y_{14}}-Y_{14}^p)^2$
15	+ 1	0	0	+ 1.215	0	0	0	– 0,730	– 0,730	0,747	$\overline{Y_{15}}$	$\overline{Y_{15}}$	$0\cdot\overline{Y_{15}}$	$0\cdot\overline{Y_{15}}$	$+\overline{Y_{15}}$	$0\cdot\overline{Y_{15}}$	$0\cdot\overline{Y_{15}}$	$0\cdot\overline{Y_{15}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{15}}$	$-0{,}730\cdot\overline{Y_{15}}$	$0{,}747\cdot\overline{Y_{15}}$	Y_{15}^p	$(\overline{Y_{15}}-Y_{15}^p)^2$
Σ^2	**15**	**10,95**	**10,95**	**10,95**	**8**	**8**	**8**	**4,364**	**4,364**	**4,364**		$\sum_{j=1}^{15} X_{0j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{15} X_{1j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{15} X_{2j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{15} X_{3j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{15} X_{1j}X_{2j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{15} X_{1j}X_{3j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{15} X_{2j}X_{3j}\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{15} (X_{1j}^2-\lambda_2)\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{15} (X_{2j}^2-\lambda_2)\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{15} (X_{3j}^2-\lambda_2)\overline{Y_j}$	$\sum_{j=1}^{15} (\overline{Y_j}-Y_j^p)^2$	

6.2. Дисперсии значимости коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка для **ММ** на базе ОЦКП, при условии **ортогональности** факторов, рассчитывают по формулам:

$$S^2(b_0) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n \sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{0j}^2}; \tag{170}$$

$$S^2(b_r) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n \sum\limits_{j=1}^{N_k} X_{rj}^2}, \quad r = 1, ..., k.; \tag{171}$$

$$S^2(b_{rs}) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n \sum\limits_{j=1}^{N_k} (X_{rj}^2 X_{sj})^2}, \quad r < s,\ r, s = 1, ..., k; \tag{172}$$

$$S^2(b_{rr}) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n \sum\limits_{j=1}^{N_k} (X_{rj}^2 - \lambda_k)^2}, \quad r = 1, ..., k. \tag{173}$$

Важным свойством **ММ** на базе ОЦКП является равенство следующих дисперсий значимости:

$$S^2(b_1) = ... S^2(b_r) = ... = S^2(b_k), \quad r = 1, ..., k; \tag{174}$$

$$S^2(b_{12}) = ... S^2(b_{rs}) = ... = S^2(b_{(k-1)k}), \quad r < s, \quad r, s = 1, ..., k; \tag{175}$$

$$S^2(b_{11}) = ... S^2(b_{rr}) = ... = S^2(b_{kk}), \quad r = 1, ..., k. \tag{176}$$

6.3. Доверительные интервалы коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка рассчитывают по формулам:

$$\Delta b_0 = t_{f;\,p} \cdot S(b_0); \tag{177}$$

$$\Delta b_r = t_{f;\,p} \cdot S(b_r), \quad r = 1, ..., k; \tag{178}$$

$$\Delta b_{rs} = t_{f;\,p} \cdot S(b_{rs}), \quad r < s, \quad r, s = 1, ..., k; \tag{179}$$

$$\Delta b_{rr} = t_{f;\,p} \cdot S(b_{rr}), \quad r = 1, ..., k, \tag{180}$$

где $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N_k(n-1)$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выбирают из таблицы приложения 2.

Важным свойством **ММ** на базе ОЦКП является равенство следующих доверительных интервалов:

$$\Delta b_1 = ... = \Delta b_r = ... = \Delta b_k, \quad r = 1, ..., k; \tag{181}$$

$$\Delta b_{12} = ... = \Delta b_{rs} = ... = \Delta b_{(k-1)k}, \quad r < s, \quad r, s = 1, ..., k; \tag{182}$$

$$\Delta b_{11} = ... = \Delta b_{rr} = ... = \Delta b_{kk}, \quad r = 1, ..., k. \tag{183}$$

Коэффициенты **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка значимы, если

$$\Delta b_0 < |b_0|; \tag{184}$$

$$\Delta b_r < |b_r|, \quad r = 1, ..., k; \tag{185}$$

$$\Delta b_{rs} < |b_{rs}|, \quad r < s, \quad r, s = 1, ..., k; \tag{186}$$

$$\Delta b_{rr} < |b_{rr}|, \quad r = 1, ..., k. \tag{187}$$

Если для какого-либо регрессионного коэффициента указанное неравенство не выполняется, то этот коэффициент незначим, и он исключается из полученного уравнения регрессии.

7. Дисперсию адекватности $S_{\text{ад}}^2$ и ее число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка рассчитывают по формулам:

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{n\varphi}{N_k - B}; \tag{188}$$

$$f_{\text{ад}} = N_k - B; \tag{189}$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N_k} \left(\overline{Y}_j - Y_j^p\right)^2, \tag{190}$$

где φ – остаточная сумма квадратов; N_k – число опытов; n – число дублей в каждом опыте; Y_j^p – значение параметра Y, рассчитанное по **многофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **второго** порядка $Y = b_0 + \sum\limits_{r=1}^{k} b_r X_r + \sum\limits_{\substack{r=1 \\ r<s}}^{k} b_{rs} X_r X_s + \sum\limits_{r=1}^{k} b_{rr}(X_r^2 - \lambda_k)$, в котором оставлены только значимые коэффициенты уравнения регрессии; B – число значимых коэффициентов **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка.

8. Проверка **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **любого** порядка на адекватность производят по критерию Фишера. При построении уравнения регрессии определяют дисперсию воспроизводимости, дисперсию адекватности и их числа степеней свободы. Проверку уравнения регрессии **любого** порядка на адекватность сводят к проверке дисперсий $S_{\text{воспр}}^2$ ($f_{\text{воспр}} = N_k(n-1)$) и $S_{\text{ад}}^2$ ($f_{\text{ад}} = N_k - B$) на однородность по критерию Фишера по уравнениям (78) – (82).

9. Предельную абсолютную погрешность $\Delta Y(X_1, ..., X_k)$ прогнозирования параметра $Y(X_1, ..., X_k)$, рассчитанного по **многофакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **второго** порядка $Y = b_0 + \sum\limits_{r=1}^{k} b_r X_r + \sum\limits_{r=1}^{k} b_{rs} X_r X_s + \sum\limits_{r=1}^{k} b_{rr}(X_r^2 - \lambda_k)$, при условии ортогональности факторов, определяют по уравнению

$$\Delta Y(X_1, ..., X_k) = t_{f;\,p} \sqrt{S^2(b_0) + S^2(b_1)\sum_{r=1}^{k} X_r^2 + S^2(b_{12})\sum_{\substack{r=1 \\ r<s}}^{k} (X_r X_s)^2 + S^2(b_{11})\sum_{r=1}^{k} (X_r^2 - \lambda_k)^2}, \tag{191}$$

где $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N_k(n-1)$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выбирают из таблицы приложения 2.

10. Если **многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка, в котором оставлены только значимые коэффициенты уравнения регрессии $Y = b_0 + \sum\limits_{r=1}^{k} b_r X_r + \sum\limits_{r=1}^{k} b_{rs} X_r X_s + \sum\limits_{r=1}^{k} b_{rr}(X_r^2 - \lambda_k)$, **адекватно** и все коэффициенты при квадратичных членах одного знака, то при $b_{rr} < 0$ уравнение регрессии имеет абсолютный максимум, а при $b_{rr} > 0$ – минимум.

Максимальное или минимальное значения параметра оптимизации рассчитывают по адекватному уравнению регрессии $Y_{\max(\min)} = Y(X_{1\,\text{опт}}, ..., X_{k\,\text{опт}})$, где $X_{1\,\text{опт}}, ..., X_{k\,\text{опт}}$ – оптимальные значения факторов являются корнями системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial X_1} = 0; \\ \quad ... \\ \dfrac{\partial Y}{\partial X_k} = 0 \end{cases} \tag{192}$$

или

$$\begin{cases} b_1 + b_{12}X_{2\,\text{опт}} + \ldots + b_{1k}X_{k\,\text{опт}} + 2\cdot b_{11}X_{1\,\text{опт}} = 0; \\ b_2 + b_{12}X_{1\,\text{опт}} + \ldots + b_{2k}X_{k\,\text{опт}} + 2\cdot b_{22}X_{2\,\text{опт}} = 0; \\ \ldots \\ b_k + b_{1k}X_{1\,\text{опт}} + \ldots + b_{(k-1)k}X_{(k-1)\,\text{опт}} + 2\cdot b_{kk}X_{k\,\text{опт}} = 0. \end{cases} \quad (193)$$

Если все смешанные коэффициенты b_{rs} незначимы, то система уравнений (193) приобретает диагональный вид и оптимальные значения факторов рассчитывают по уравнению

$$X_{r\,\text{опт}} = -\frac{b_r}{2b_{rr}}, \quad r = 1, \ldots, k. \quad (194)$$

Натуральные значение фактора $x_{1\,\text{опт}}$ рассчитывают по уравнениям (103) – (105)

$$x_{r\,\text{опт}} = x_{r0} + X_{r\,\text{опт}} \cdot \Delta x_r, \quad r = 1, \ldots, k. \quad (195)$$

Максимум (минимум) параметра $Y(X_{1\,\text{опт}}, \ldots, X_{k\,\text{опт}})$ и его абсолютную погрешность $\Delta Y(X_{1\,\text{опт}}, \ldots, X_{k\,\text{опт}})$ прогнозирования параметра оптимизации $Y_{\max,\min}$ в случае, если b_{rs} незначимы, рассчитывают по уравнениям (170) и (191):

$$Y_{\max,\min} = b_0 + \sum_{r=1}^{k} b_r X_{r\,\text{опт}} + \sum_{r=1}^{k} b_{rr}(X_{r\,\text{опт}}^2 - \lambda_k); \quad (196)$$

$$\Delta Y(X_{1\,\text{опт}}, \ldots, X_{k\,\text{опт}}) = t_{N_k(n-1),\,p} \cdot \sqrt{S^2(b_0) + S^2(b_1)\sum_{r=1}^{k} X_{r\,\text{опт}}^2 + S^2(b_{11})\sum_{r=1}^{k}(X_{r\,\text{опт}}^2 - \lambda_k)^2}. \quad (197)$$

11. Если полученное **многофакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка неадекватно, следует перейти к построению **однофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **третьего** порядка.

Типовая задача

Цель. Освоить методы моделирования и оптимизации **многофакторных** технических систем, подчиняющихся стохастическим закономерностям.

Формулировка задачи. Продолжаем решение задачи (урожайность пшеницы), которая была начата в разделе 3.1 и продолжена в разделе 3.2. Напомним условие задачи.

На международной сельскохозяйственной ярмарке у канадской фирмы был закуплен элитный сорт пшеницы. Так как климат и качество земель Канады и Беларуси различаются, было принято решение исследовать зависимость урожайности пшеницы от количества посевного материала и неорганического удобрения, для которых интервалы варьирования факторов были следующие: $x_1 \in [x_{1\min}; x_{1\max}] = [0{,}5; 1{,}5]$ ц/га и $x_2 \in [x_{2\min}; x_{2\max}] = [0{,}25; 0{,}75]$ ц/га]. В результате моделирования (типовая задача раздела 3.1) было получено **адекватное двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = 28{,}45 + 6{,}77X_1 + 5{,}62X_2$. На основе этого уравнения в разделе 3.3 (типовая задача) была выполнена процедура крутого восхождения. Условия проведения эксперимента 12, при которых урожайность пшеницы Y достигла максимального значения, были приняты за новый центр факторного пространства: $x_{10} = 3{,}5$ ц/га , $x_{20} = 1{,}5$ ц/га .

Так как изучение технической системы, как правило, начинается с моделирования уравнением регрессии первого порядка, был проведен эксперимент по ЦПФП, результаты которого приведены в таблице 48. В этой задаче необходимо изучить зависимость урожайности пшеницы Y от количеств посевного материала x_1 и неорганического удобрения x_2 в более широком диапазоне изменения факторов: $x_1 \in [2, 5]$ ц/га ; $x_2 \in [1, 2]$ ц/га .

Таблица 48

Экспериментальные данные для ЦПФП

№	X_{1j}	X_{2j}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j3}	Y_{j4}
1	– 1	– 1	46	44	45	45
2	+ 1	– 1	35	38	36	35
3	– 1	+ 1	55	58	57	58
4	+ 1	+ 1	48	51	49	50
5	0	0	52	55	54	55

Математическая формулировка задачи. 1) Построить математическую модель, адекватно отражающую зависимость урожайности пшеницы Y, ц/га, от количества посевного материала x_1, ц/га, и количества неорганического удобрения x_2, ц/га. 2) Найти оптимальные нормированные значения факторов $X_{1\,\text{опт}}$, $X_{k\,\text{опт}}$ и натуральные $x_{1\,\text{опт}}$, $x_{2\,\text{опт}}$, при которых урожайность пшеницы $Y_{\max}$ будет максимальна, а также абсолютную погрешность $\Delta Y_{\max}$ прогнозирования параметра оптимизации $Y_{\max}$.

План решения задачи

1. Внимательно прочитать условие задачи.
2. Написать формулы взаимосвязи натуральных значений факторов x_1, x_2 с нормированными X_1, X_2.
3. Создать **МП** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. Выполнить предварительную обработку экспериментальных данных.
4. Создать **ММ** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка. Выполнить окончательную обработку экспериментальных данных.
5. Принять решение о дальнейшем изучении процесса выращивания пшеницы.
6. Если **двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка окажется неадекватным, то, рассчитав величину звездного плеча α_2, создать **МП** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка и выполнить предварительную обработку экспериментальных данных.
7. Рассчитав ортогонализирующий коэффициент λ_2, создать **ММ** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка и выполнить окончательную обработку экспериментальных данных.
8. В случае адекватности **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка провести оптимизацию изучаемой технической системы, рассчитать оптимальные значения факторов $X_{1\,\text{опт}}$, $X_{2\,\text{опт}}$ и $x_{1\,\text{опт}}, x_{2\,\text{опт}}$, при которых параметр оптимизации достигает значения $Y_{\max}$, а также его абсолютную ошибку $\Delta Y_{\max}$.
9. По результатам моделирования и оптимизации системы сделать окончательный вывод.

NB! Все предварительные расчеты проводить с точностью не менее 4-х значащих цифр.

Решение задачи по плану

1. Пункт 1 выполнить самостоятельно.
2. Уровни и интервалы варьирования факторов, а также формулы взаимосвязи нормированных X_1, X_2 с натуральными x_1, x_2 приведены в таблице 49.

Таблица 49

Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы	1-й фактор (семена)		2-й фактор (удобрение)	
	x_1, ц/га	X_1	x_2, ц/га	X_2
Нижний уровень	$x_{1\,\min} = 2$	– 1	$x_{2\,\min} = 1$	– 1
Верхний уровень	$x_{1\,\max} = 5$	+ 1	$x_{2\,\max} = 2$	+ 1
Основной уровень	$x_{10} = 3{,}5$	0	$x_{20} = 1{,}5$	0
Интервал варьирования	$\Delta x_1 = 1{,}5$		$\Delta x_2 = 0{,}5$	
Формулы взаимосвязи нормированных $X_1 X_2$ с натуральными x_1, x_2	$X_{1j} = \dfrac{x_{1j} - 3{,}5}{1{,}5}$; $x_{1j} = 3{,}5 + 1{,}5 \cdot X_{1j}$; $X_{2j} = \dfrac{x_{1j} - 1{,}5}{0{,}5}$; $x_{2j} = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot X_{2j}$			

3. Создадим **МП** (таблица 50) для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$ $(k = 2)$ на базе ЦПФП с числом опытов $N_k = N_2 = N_{20} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ и числом дублей $n = 4$ (см. таблицу 32). Экспериментальные данные взяты из таблицы 48, натуральные значения факторов x_1, x_2 рассчитаны по данным таблицы 49.

Таблица 50

МП для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N = 5$.
Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N_2	X_{1j}	X_{2j}	x_{1j}	x_{2j}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j3}	Y_{j4}	$\overline{Y}_j$	S_j^2
1	– 1	– 1	2	1	46	44	45	45	45,00	0,6667
2	+ 1	– 1	5	1	35	38	36	35	36,00	2,000
3	– 1	+ 1	2	2	55	58	57	58	57,00	2,000
4	+ 1	+ 1	5	2	48	51	49	50	49,50	1,667
5	0	0	3,5	1,5	52	55	54	55	54,00	2,000
$G_э = 0,240$			$G_{3;\,5;\,0,95} = 0,598$			$S^2_{воспр} = 1,667$; $f_{воспр} = 15$			$\sum\limits_{j=1}^{5} S_j^2 = 8,334$	

3.1. **Методика эксперимента.** Для уменьшения влияния неуправляемых факторов эксперимент проводится в теплице. Так как общее количество опытов $N_2 = 5$ и число дублей $n = 4$, организуем 20 делянок площадью 1 м^2. Посевной материал и неорганическое удобрение вносились в каждую делянку согласно **МП** (см. таблицу 50). Все остальные факторы (количество дождей, света, тепла) для имитации климатических условий Беларуси поддерживались на уровнях, характерных для апреля - августа за последние 10 лет (средние значения температуры ночью, утром, днем, вечером, количество пасмурных и солнечных дней, количество выпавшей воды в виде дождей были взяты из отчетов Гидрометцентра Беларуси) (см. методику проведения эксперимента в типовой задаче 3.1).

3.2. Выполним предварительную обработку экспериментальных данных (результаты расчета внесены в таблицу 50):

- выборочное среднее в каждом опыте рассчитаем по уравнению (108), например, для $j = 2$

$$\overline{Y_2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} Y_{2i}}{4} = \frac{35 + 38 + 36 + 35}{4} = 36,00\,;$$

- выборочную дисперсию в каждом опыте рассчитаем по уравнению (109), например, для $j = 2$

$$S_2^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} (Y_{2i} - \overline{Y_2})^2}{4 - 1} = \frac{(35 - 36,00)^2 + (38 - 36,00)^2 + (36 - 36,00)^2 + (35 - 36,00)^2}{3} = 2,000\,;$$

- проверка выборочных дисперсий на **однородность** по критерию Кохрена:
- экспериментальное значение критерия Кохрена рассчитаем по уравнению (110)

$$G_э = \frac{\max S_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{N_2} S_j^2} = \frac{\max S_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{5} S_j^2} = \frac{2,000}{8,333} = 0,240\,;$$

- табличное значение критерия Кохрена $G_{f_{числ};\,f_{знам};\,p}$, в котором на первом месте стоит число степеней свободы максимальной дисперсии $f_{числ} = n - 1 = 4 - 1 = 3$, а на втором – число степеней свободы, равное числу всех дисперсий $f_{числ} = N_2 = 5$, при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 5

$$G_{f_{числ};\,f_{знам};\,p} = G_{n-1;\,N_2;\,p} = G_{3;\,5;\,0;95} = 0,598\,.$$

Вывод. Все выборочные дисперсии S_j^2 однородны, так как согласно уравнению (111) $G_э = 0,240 < 0,598 = G_{3;\,5;\,0;95}$.

Так как число дублей в каждом опыте относительно небольшое $(n = 4)$, то проверку случайных значений каждого опыта на промах и на принадлежность их нормальному закону распределения проводить не будем (см. раздел 2.1, п. 4.3).

Так как все выборочные дисперсии однородны, дисперсию воспроизводимости $S^2_{воспр}$ и ее число степеней свободы $f_{воспр}$ рассчитаем по уравнениям (113), (114):

$$S^2_{воспр} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_k} S_j^2}{N_k} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_2} S_j^2}{N_2} = \frac{8,333}{5} = 1,667\ ;$$

$$f_{воспр} = N_k(n-1) = N_2(n-1) = 5 \cdot (4-1) = 15\ .$$

4. Создадим **ММ** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2$ на базе ЦПФП с числом опытов $N_2 = 5$, рассчитаем коэффициенты b_0, b_1, b_2 и проверим их на значимость (таблица 51) (см. аналогичные таблицы 26, 33).

4.1. Проверим факторы X_0, X_1, X_2 **ММ** на базе ЦПФП на ортогональность:

$$\sum_{j=1}^{N_2} X_{0j}X_{1j} = \sum_{j=1}^{5} X_{0j}X_{1j} = 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0\ ;$$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{0j}X_{2j} = 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0\ ;$$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{1j}X_{2j} = (-1)\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0\ .$$

Таблица 51

ММ для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП с числом опытов $N_2 = 5$.

Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	$X_{2j}\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1	– 1	45,00	+ 45,00	– 45,00	– 45,00	46,05	1,1025
2	+ 1	+ 1	– 1	36,00	+ 36,00	+ 36,00	– 36,00	37,80	3,2400
3	+ 1	– 1	+ 1	57,00	+ 57,00	– 57,00	+ 57,00	58,80	3,2400
4	+ 1	+ 1	+ 1	49,50	+ 49,50	+ 49,50	+ 49,50	50,55	1,1025
5	+ 1	0	0	54,00	+ 54,00	0·54,00	0·54,00	48,30	32,4900
Σ^2	**5**	**4**	**4**	Σ	**241,5**	**– 16,50**	**25,50**	**φ = 41,175**	
$F_э = 49{,}40;\ F_{2;15;0,95} = 3{,}682$				b_r	**48,30**	**– 4,125**	**6,375**	$S^2_{ад} = 82{,}35\ \ldots\ f_{ад} = 2$	
Уравнение неадекватно				Δb_r	**0,9**	**1,0**	**1,0**		

Все факторы X_0, X_1, X_2 **ММ** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП **ортогональны**, поэтому для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка $Y = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2$ можно использовать математический аппарат, изложенный в разделе 3.1.

4.2. Рассчитаем коэффициенты уравнения регрессии b_0, b_1, b_2 (результаты расчета внесены в таблицу 51):

- создадим столбцы $X_{0j}\overline{Y_j}$, $X_{1j}\overline{Y_j}$, $X_{2j}\overline{Y_j}$ и рассчитаем их суммы:

$$\sum_{j=1}^{5} X_{0j}\overline{Y_j} = 1\cdot 45,0 + 1\cdot 36,0 + 1\cdot 57,0 + 1\cdot 49,5 + 1\cdot 54,0 = 241,5\ ;$$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{1j}\overline{Y_j} = (-1)\cdot 45,0 + 1\cdot 36,0 + (-1)\cdot 57,0 + 1\cdot 49,5 + 0\cdot 54,0 = -16,50\ ;$$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{2j}\overline{Y_j} = (-1)\cdot 45,0 + (-1)\cdot 36,0 + 1\cdot 57,0 + 1\cdot 49,5 + 0\cdot 54,0 = 25,50\ ;$$

- из таблицы 28 находим суммы $\sum\limits_{j=1}^{N_2} X_{0j}^2 = 5, \quad \sum\limits_{j=1}^{N_2} X_{1j}^2 = \sum\limits_{j=1}^{N_2} X_{2j}^2 = 4$;

- так как факторы X_0, X_1, X_2 ортогональны, рассчитаем b_0, b_1, b_2 по уравнениям (115), (116):

$$b_0 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{5} X_{0j}\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{5} X_{0j}^2} = \frac{241{,}5}{5} = 48{,}30;$$

$$b_1 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{5} X_{1j}\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{5} X_{1j}^2} = \frac{-16{,}5}{4} = -4{,}125;$$

$$b_2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{5} X_{2j}\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{5} X_{2j}^2} = \frac{25{,}5}{4} = 6{,}375.$$

4.3. Проверим коэффициенты b_0, b_1, b_2 **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на значимость по критерию Стьюдента:

- так как факторы X_0, X_1, X_2 ортогональны, дисперсии значимости $S^2(b_0)$, $S^2(b_1)$, $S^2(b_2)$ коэффициентов b_0, b_1, b_2 рассчитаем по уравнениям (117) – (119):

$$S^2(b_0) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{5} X_{0j}^2} = \frac{1{,}667}{2 \cdot 5} = 0{,}1667; \quad S(b_0) = \sqrt{S^2(b_0)} = \sqrt{0{,}1667} = 0{,}4083;$$

$$S^2(b_1) = S^2(b_2) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{5} X_{1j}^2} = \frac{1{,}667}{2 \cdot 4} = 0{,}2084; \quad S(b_1) = S(b_2) = \sqrt{S^2(b_1)} = \sqrt{0{,}2084} = 0{,}4565;$$

- доверительные интервалы Δb_0, Δb_1, Δb_2 коэффициентов b_0, b_1, b_2 рассчитаем по уравнениям (120) – (122) и корректно оформим результаты расчета (см. раздел 1.1, п. 3):

$$\Delta b_0 = t_{f;\,p} \cdot S(b_0) = t_{15;\,0;95} \cdot S(b_0) = 2{,}131 \cdot 0{,}4083 = 0{,}8700 \approx 0{,}87 \approx 0{,}9;$$

$$\Delta b_1 = \Delta b_2 = t_{f;\,p} \cdot S(b_1) = t_{15;\,0{,}95} \cdot S(b_1) = 2{,}131 \cdot 0{,}4565 = 0{,}9728 \approx 0{,}97 \approx 1{,}0,$$

где $t_{f;\,p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N_2(n-1) = 5 \cdot (4-1) = 15$ и доверительной вероятности $p = 0{,}95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{N_2(n-1);\,p} = t_{15;\,0{,}95} = 2{,}131.$$

Вывод. Так как выполнены неравенства (123), (124), то все три регрессионных коэффициента b_0, b_1, b_2 значимы, так как

$$\Delta b_0 = 0{,}9 < |b_0| = 48{,}30,$$

$$\Delta b_1 = 1{,}0 < |b_1| = 4{,}125,$$

$$\Delta b_2 = 1{,}0 < |b_2| = 6{,}375.$$

Двухфакторное ортогонализированное уравнение регрессии **первого** порядка, в котором все три регрессионных коэффициента значимы, имеет вид

$$Y = 48{,}30 - 4{,}125 \cdot X_1 + 6{,}375 \cdot X_2.$$

5. Проверим полученное **двухфакторное** уравнение регрессии **первого** порядка на адекватность по критерию Фишера (данные внесены в таблицу 51):

- рассчитаем значение в каждом опыте по **двухфакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **первого** порядка, например, для $j=1$

$$Y_1^p = 48,30 - 4,125\cdot(-1) + 6,375\cdot(-1) = 46,05\ ;$$

- образуем столбец $(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$ и рассчитаем остаточную сумму квадратов по уравнению (127)

$$\varphi = \sum_{j=1}^{5}\left(\overline{Y}_j - Y_j^p\right)^2 = (45,00-46,05)^2 + (36,00-37,80)^2 + (57,00-58,80)^2 + (49,50-50,55)^2 +$$

$$+(54,00-48,30)^2 = 1,1025 + 3,2400 + 3,2400 + 1,1025 + 32,4900 = 41,18\ ;$$

- дисперсию адекватности $S^2_{\text{ад}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ рассчитаем по уравнениям (125) - (126):

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{n\varphi}{N-B} = \frac{4\cdot 41,18}{5-3} = 82,36\ ;$$

$$f_{\text{ад}} = N_2 - B = 5-3 = 2\ ;$$

- экспериментальное значение критерия Фишера рассчитаем по уравнению (78)

$$F_{\text{э}} = \frac{S^2_{\text{ад}}}{S^2_{\text{воспр}}} = \frac{82,35}{1,667} = 49,40\ , \quad \text{так как } S^2_{\text{ад}} > S^2_{\text{воспр}}\ ;$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (79) – (80): на первом месте стоит число степеней свободы **большей** дисперсии $f_{\text{числ}} = f_{\text{ад}} = N_k - B = 5-3 = 2$, а на втором – число степеней свободы **меньшей** дисперсии $f_{\text{зн}} = f_{\text{воспр}} = N_k(n-1) = 5\cdot(4-1) = 15$, при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p} = F_{N_2-B;\, N_2(n-1);\, p} = F_{2;\,15;\,0;95} = 3,682\ .$$

Вывод. Полученное **двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка $Y = 48,30 - 4,125\cdot X_1 + 6,375\cdot X_2$ **неадекватно**, так как согласно уравнению (82) $F_{\text{э}} = 49,41 > 3,682 = F_{2;\,15;\,0,95}$, поэтому перейдем к построению **двухфакторного ортогонализированного** уравнения **второго** порядка.

6. Создадим **МП** для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка, дополнив **МП** на базе ЦПФП (см. таблицу 50) звездными точками $(\mp\alpha_2, 0)$, $(0, \mp\alpha_2)$ (таблица 52).

По уравнению (164) или по таблице 43 для $k=2$ найдем значение звездной плеча $\alpha_2 = 1$.

Таблица 52

Экспериментальные данные для звездных опытов ОЦКП

N_2	X_{1j}	X_{2j}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j3}	Y_{j4}
6	– 1,0	0	56	58	57	57
7	+ 1,0	0	49	50	48	51
8	0	– 1,0	40	45	42	45
9	0	+ 1,0	56	57	55	58

Количество опытов **МП на базе** ОЦКП равно $N_2 = N_{k0} + 1 + 2k = 2^2 + 1 + 2\cdot 2 = 9$, количество дублей $n=4$ (таблица 53). Экспериментальные данные звездных опытов из таблицы 52 перенесены в таблицу 53. Результаты предварительной обработки экспериментальных данных опытов 1 - 5 из таблицы 50, а также экспериментальные данные звездных точек из таблицы 52 перенесены в таблицу 53.

Таблица 53

МП для построения **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП с числом опытов $N = 9$.
Результаты предварительной обработки экспериментальных данных

N_2	X_{1j}	X_{2j}	x_{1j}	x_{2j}	Y_{j1}	Y_{j2}	Y_{j3}	Y_{j4}	$\overline{Y}_j$	S_j^2
1	– 1	– 1	2,0	1,0	46	44	45	45	45,00	0,6667
2	+ 1	– 1	5,0	1,0	35	38	36	35	36,00	2,000
3	– 1	+ 1	2,0	2,0	55	58	57	58	57,00	2,000
4	+ 1	+ 1	5,0	2,0	48	51	49	50	49,50	1,667
5	0	0	3,5	1,5	52	55	54	55	54,00	2,000
6	– 1	0	2,0	1,5	56	58	57	57	57,00	0,6667
7	+ 1	0	5,0	1,5	49	50	48	51	49,50	1,6667
8	0	– 1	3,5	1,0	40	45	42	45	43,00	6,000
9	0	+ 1	3,5	2,0	56	57	55	58	56,50	1,667
$G_э = 0,327$			$G_{3,\,9,\,0.95} = 0,403$				$S^2_{\text{воспр}} = 2,037$, $f_{\text{воспр}} = 27$			$\sum\limits_{j=1}^{9} S_j^2 = 18,33$

6.1. **Методика эксперимента** полностью совпадает с методикой проведения опытов 1 – 5 при построении **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка (см. п.3.1 данной типовой задачи).

6.2. Выполним предварительную обработку экспериментальных данных опытов 6 – 9 (результаты расчета внесены в таблицу 53):

- выборочное среднее рассчитаем по уравнению (108), например, для $j = 8$

$$\overline{Y_8} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} Y_{8i}}{4} = \frac{40 + 45 + 42 + 45}{4} = 43,00;$$

- выборочную дисперсию рассчитаем по уравнению (109), например, для $j = 8$

$$S_8^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} (Y_{8i} - \overline{Y_8})^2}{4-1} = \frac{(40-43,00)^2 + (45-43,00)^2 + (42-43,00)^2 + (45-43,00)^2}{3} =$$

$$= \frac{9,000 + 4,000 + 1,000 + 4,000}{3} = \frac{18,00}{3} = 6,000\,.$$

Проверка всех выборочных дисперсий на **однородность** по критерию Кохрена:

- экспериментальное значение критерия Кохрена рассчитаем по уравнению (110)

$$G_э = \frac{\max S_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{N_2} S_j^2} = \frac{\max S_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{9} S_j^2} = \frac{6,000}{18,33} = 0,327\,;$$

- табличное значение критерия Кохрена $G_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p}$, в котором на первом месте стоит число степеней свободы максимальной дисперсии $f_{\text{числ}} = n - 1 = 4 - 1 = 3$, а на втором – число степеней свободы, равная числу всех дисперсий $f_{\text{знам}} = N_2$, при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 5

$$G_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p} = G_{n-1;\, N_k;\, p} = G_{3;\, 9;\, 0,95} = 0,403\,.$$

Вывод. Все 9 выборочных дисперсий S_j^2 однородны, так как так как согласно уравнению (111) $G_э = 0,327 < 0,403 = G_{1;\, 9;\, 0,95}$.

В опытах 6 – 9 число дублей $n = 4$, поэтому проверку случайных значений каждого опыта на промах и на принадлежность их нормальному закону распределения проводить не будем (см. раздел 2.1, п. 4.3).

Так как все выборочные дисперсии однородны, рассчитаем дисперсию воспроизводимости $S^2_{\text{воспр}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{воспр}}$ по уравнениям (113), (114)

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N_2} S_j^2}{N_2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{9} S_j^2}{9} = \frac{18,333}{9} = 2,037\,;$$

$$f_{\text{воспр}} = N_k(n-1) = N_2(n-1) = 9 \cdot (4-1) = 27\,.$$

7. Создадим **ММ** на базе **ОЦКП** с числом опытов $N_2 = 9$ для построения **ортогонализированного двухфакторного** уравнения регрессии **второго** порядка $Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2 + b_{11}(X_1^2 - \lambda_2) + b_{22}(X_2^2 - \lambda_2)$ (см. таблицу 53). Рассчитаем величину ортогонализирующего коэффициента λ_2 по уравнению (165) $\lambda_2 = \sqrt{N_{k0}/N_k} = \sqrt{4/9} = 2/3$. Создадим столбцы $N_2, X_{0j}, X_{rj}, X_{1j}X_{2j}, (X_{1j}^2 - 2/3), (X_{2j}^2 - 2/3)$ (таблица 54).

Таблица 54

ММ для построения **ортогонализированного двухфакторного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП с числом опытов $N_2 = 9$.
Результаты окончательной обработки экспериментальных данных

N	X_{0j}	X_{1j}	X_{2j}	$X_{1j}X_{2j}$	$X_{1j}^2 - \frac{2}{3}$	$X_{2j}^2 - \frac{2}{3}$	$\overline{Y_j}$	$X_{0j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}\overline{Y_j}$	$X_{2j}\overline{Y_j}$	$X_{1j}X_{2j}\overline{Y_j}$	$\left(X_{1j}^2 - \frac{2}{3}\right)\overline{Y_j}$	$\left(X_{1j}^2 - \frac{2}{3}\right)\overline{Y_j}$	Y_j^p	$(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$
1	+ 1	– 1	– 1	+ 1	1/3	1/3	45,00	+45,00	– 45,00	– 45,00	+45,00	1/3·45,00	1/3·45,00	44,61	0,1521
2	+ 1	+ 1	– 1	– 1	1/3	1/3	36,00	+36,00	+36,00	– 36,00	– 36,00	1/3·36,00	1/3·36,00	36,61	0,3721
3	+ 1	– 1	+ 1	– 1	1/3	1/3	57,00	+57,00	– 57,00	+57,00	– 57,00	1/3·57,00	1/3·57,00	57,61	0,3721
4	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	1/3	1/3	49,50	+49,50	+49,50	+49,50	+49,50	1/3·49,50	1/3·49,50	49,61	0,0121
5	+ 1	0	0	0	– 2/3	– 2/3	54,00	+54,00	0·54,00	0·54,00	0·54,00	– 2/3·54,00	– 2/3·54,00	54,94	0,8836
6	+ 1	– 1,0	0	0	1/3	– 2/3	57,00	+57,00	– 57,00	0·57,00	0·57,00	1/3·57,00	– 2/3·57,00	56,77	0,0529
7	+ 1	+ 1,0	0	0	1/3	– 2/3	49,50	+49,50	+49,50	0·49,50	0·49,50	1/3·49,50	– 2/3·49,50	48,77	0,5329
8	+ 1	0	– 1,0	0	– 2/3	1/3	43,00	+43,00	0·43,00	– 43,00	0·43,00	– 2/3·43,00	1/3·43,00	42,78	0,0484
9	+ 1	0	+ 1,0	0	– 2/3	1/3	56,50	+56,50	0·56,50	+56,50	0·56,50	– 2/3·56,50	1/3·566,50	55,78	0,5184
Σ^2	**9**	**6**	**6**	**4**	**2**	**2**	Σ	**447,5**	**– 24,00**	**39,00**	**1,500**	**– 4,333**	**– 11,33**	**φ = 2,945**	
$F_э = 1,446$; $F_{4;\,27;\,0,95} = 2,728$							b_r	**49,72**	**– 4,000**	**6,500**	**0,3750**	**– 2,167**	**– 5,665**	**$S^2_{\text{ад}} = 2,945$**	
Уравнение адекватно							Δb_r	**0,49**	**0,6**	**0,6**	**0,7**	**1,0**	**1,0**	**$f_{\text{ад}} = 4$**	

По данным таблицы 54 проверим ортогональность факторов X_0, X_1, X_2, X_1X_2 с $(X_1^2 - 2/3)$, $(X_2^2 - 2/3)$:

$$\sum_{j=1}^{9} X_{0j}(X_{1j}^2 - 2/3) = 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 - 2/3 + 1/3 + 1/3 - 2/3 - 2/3 = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{9}\left(X_{1j}^2 - \frac{2}{3}\right)\left(X_{2j}^2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = 0\,.$$

Взаимную ортогональность остальных факторов проверить самостоятельно.

7.1. Рассчитаем коэффициенты **ортогонализированного двухфакторного** уравнения регрессии **второго** порядка $b_0, b_1, b_2, b_{12}, b_{11}, b_{22}$ (значения b_0, b_1, b_2 также изменятся, так как число опытов увеличилось с 5-ти до 9-ти) (сравни данные таблиц 51 и 54).

Создадим столбцы $X_{0j}\overline{Y}_j$, $X_{1j}\overline{Y}_j$, $X_{2j}\overline{Y}_j$, $X_1X_{2j}\overline{Y}_j$, $(X_{1j}^2 - \lambda_2)\overline{Y}_j$, $(X_{2j}^2 - \lambda_2)\overline{Y}_j$ и рассчитаем суммы

$$\sum_{j=1}^{N_2} X_{0j}\overline{Y}_j\,,\ \sum_{j=1}^{N_2} X_{1j}\overline{Y}_j\,,\ \sum_{j=1}^{N_2} X_{2j}\overline{Y}_j\,,\ \sum_{j=1}^{N_2} X_1X_{2j}\overline{Y}_j\,,\ \sum_{j=1}^{N_2}(X_{1j}^2 - \lambda_2)\overline{Y}_j\,,\ \sum_{j=1}^{N_2}(X_{2j}^2 - \lambda_2)\overline{Y}_j\ :$$

$$\sum_{j=1}^{9} X_{0j}\overline{Y}_j = 1\cdot 45,00 + 1\cdot 36,00 + 1\cdot 57,00 + 1\cdot 49,50 + 1\cdot 54,00 + 1\cdot 57,00 + 1\cdot 49,50 + 1\cdot 43,00 + 1\cdot 56,50 = 447,5\,;$$

$$\sum_{j=1}^{9} X_{1j}\overline{Y}_j = (-1)\cdot 45,00+1\cdot 36,00+(-1)\cdot 57,00+1\cdot 49,50+0\cdot 54,00+(-1)\cdot 57,00+1\cdot 49,50+0\cdot 53,00+0\cdot 56,50=-24,00;$$

$$\sum_{j=1}^{9} X_{2j}\overline{Y}_j = (-1)\cdot 45,00+(-1)\cdot 36,00+1\cdot 57,00+1\cdot 49,50+0\cdot 54,00+0\cdot 57,00+0\cdot 49,50+(-1)\cdot 43,00+1\cdot 56,50=39,00;$$

$$\sum_{j=1}^{9} X_{1j}X_{2j}\overline{Y}_j = 1\cdot 45,00+(-1)\cdot 36,00+(-1)\cdot 57,00+1\cdot 49,50+0\cdot 54,00+0\cdot 57,00+0\cdot 49,50+0\cdot 43,00+0\cdot 56,50=1,500;$$

$$\sum_{j=1}^{9}(X_{1j}^2-\lambda_1)\overline{Y_j} = \frac{45,00+36,00+57,00+49,50}{3} = \frac{-2\cdot 54,00}{3}+\frac{57,00+49,50}{3}+\frac{-2\cdot(43,00+56,50)}{3}=-4,333;$$

$$\sum_{j=1}^{9}(X_{2j}^2-\lambda_1)\overline{Y_j} = \frac{45,00+36,00+57,00+49,50}{3} = \frac{-2\cdot 54,00}{3}+\frac{-2\cdot(57,00+49,50)}{3}+\frac{43,00+57,50}{3}=-11,33.$$

Из таблицы 43 найдем значения сумм:

$$\sum_{j=1}^{9} X_{0j}^2 = 9; \quad \sum_{j=1}^{9} X_{1j}^2 = \sum_{j=1}^{9} X_{2j}^2 = 6;$$

$$\sum_{j=1}^{9}(X_{1j}X_{2j})^2 = 4; \quad \sum_{j=1}^{9}\left(X_{1j}^2-\lambda_2\right)^2 = \sum_{j=1}^{9}\left(X_{2j}^2-\lambda_2\right)^2 = 2.$$

Коэффициенты **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка $b_0, b_1, b_2, b_{12}, b_{11}, b_{22}$ рассчитаем по уравнениям (166) – (169):

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{9} X_{0j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9} X_{0j}^2} == \frac{447,5}{9} = 49,72;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{9} X_{1j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9} X_{1j}^2} = \frac{-24,00}{6} = -4,000;$$

$$b_2 = \frac{\sum_{j=1}^{9} X_{2j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9} X_{2j}^2} = \frac{39,00}{6} = 6,500;$$

$$b_{12} = \frac{\sum_{j=1}^{9} X_{1j}X_{2j}\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9}(X_{1j}X_{2j})^2} = \frac{1,500}{4} = 0,3750;$$

$$b_{11} = \frac{\sum_{j=1}^{9}(X_{1j}^2-2/3)\overline{Y}_j}{\sum_{j=1}^{9}(X_{1j}^2-2/3)^2} = \frac{-4,333}{2} = -2,167;$$

$$b_{22} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{9} (X_{2j}^2 - 2/3)\overline{Y}_j}{\sum\limits_{j=1}^{9} (X_{2j}^2 - 2/3)^2} = \frac{-11,33}{2} = -5,665 .$$

7.2. Проверим полученные коэффициенты **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка $b_0, b_1, b_2, b_{12}, b_{11}, b_{22}$ на значимость:

- дисперсии значимости $S^2(b_0), S^2(b_r), S^2(b_{12}), S^2(b_{rr})$ $(r = 1,\ 2)$ коэффициентов **ортогонализированного двухфакторного** уравнения регрессии **второго** порядка рассчитаем по уравнениям (170) – (176)):

$$S^2(b_0) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{9} X_{0j}^2} = \frac{2,037}{4 \cdot 9} = 0,05658; \qquad S(b_0)\sqrt{S^2(b_0)} = \sqrt{0,05658} = 0,2379;$$

$$S^2(b_1) = S^2(b_2) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{9} X_{1j}^2} = \frac{2,037}{4 \cdot 6} = 0,08488\ ; \quad S(b_1) = S(b_2) = \sqrt{S^2(b_1)} = \sqrt{0,08488} = 0,2913;$$

$$S^2(b_{12}) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{9} (X_{1j}X_{2j})^2} = \frac{2,037}{4 \cdot 4} = 0,127\ ; \quad S(b_{12}) = \sqrt{S^2(b_{12})} = \sqrt{0,1273} = 0,3568\ ;$$

$$S^2(b_{11}) = S^2(b_{22}) = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{n\sum\limits_{j=1}^{9} (X_{1j}^2 - \lambda_1)^2} = \frac{2,037}{4 \cdot 2} = 0,2546\ ; \; S(b_{11}) = S(b_{22}) = \sqrt{S^2(b_{11})} = \sqrt{0,2546} = 0,5046\ ;$$

- доверительные интервалы коэффициентов **ортогонализированного двухфакторного** уравнения регрессии **второго** порядка $\Delta b_0, \Delta b_r, \Delta b_{12}, \Delta b_{rr}$ $(r = 1,\ 2)$ по критерию Стьюдента рассчитаем по уравнениям (177) – (183) и корректно оформим результаты расчета (см. раздел 1.1, п. 3):

$$\Delta b_0 = t_{N_2(n-1);\, p} \cdot S(b_0) = t_{27;\, 0,95} \cdot S(b_0) = 2,052 \cdot 0,2379 = 0,4882 \approx 0,49\ ;$$

$$\Delta b_1 = \Delta b_2 = t_{N_2(n-1);\, p} \cdot S(b_1) = t_{27;\, 0,95} \cdot S(b_1) = 2,052 \cdot 0,2923 = 0,5998 \approx 0,60 \approx 0,6\ ;$$

$$\Delta b_{12} = t_{N_2(n-1);\, p} \cdot S(b_{12}) = t_{27;\, 0,95} \cdot S(b_{12}) = 2,052 \cdot 0,3568 = 0,7322 \approx 0,73 \approx 0,7\ ;$$

$$\Delta b_{11} = \Delta b_{11} = t_{N_2(n-1);\, p} \cdot S(b_{11}) = t_{27;\, 0,95} \cdot S(b_{11}) = 2,052 \cdot 0,5046 = 1,035 \approx 1,0\ ,$$

где $t_{N_2(n-1);\, p}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы $f = N_2(n-1) = 9 \cdot (4-1) = 27$ и доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 2

$$t_{N_2(n-1);\, p} = t_{15;\, 0,95} = 2,052\ ;$$

- регрессионные коэффициенты $b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{22}$ значимы, так как согласно неравенствам (184) – (187)

$$\Delta b_0 = 0,49 < 49,72 = |b_0|\ ;$$

$$\Delta b_1 = 0,6 < 4,000 = |b_1|\ ; \quad \Delta b_2 = 0,6 < 6,500 = |b_2|\ ;$$

$$\Delta b_{11} = 1,0 < 2,167 = |b_{11}|, \quad \Delta b_{22} = 1,0 < 5,665 = |b_{22}|\ .$$

Регрессионный коэффициент b_{12} незначим, так как

$$\Delta b_{12} = 0,7 > 0,3750 = |b_{12}|\ .$$

Вывод. **Двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка, в котором 5 коэффициентов $b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{22}$ значимы, а коэффициент b_{12} незначим, имеет вид

$$Y = 49,72 - 4,000 \cdot X_1 + 6,500 \cdot X_2 - 2,167 \cdot (X_1^2 - 2/3) - 5,665 \cdot (X_2^2 - 2/3).$$

8. Проверим полученное **двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка на адекватность по критерию Фишера (результаты расчета внесены в таблицу 54):

- рассчитаем параметр Y в каждом опыте по **двухфакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **второго** порядка. Например, для $j = 1$

$$Y_1^p = 49,72 - 4,000 \cdot (-1) + 6,500 \cdot (-1) - 2,167 \cdot 1/3 - 5,665 \cdot 1/3 = 44,61;$$

- образуем столбец $(\overline{Y_j} - Y_j^p)^2$ и рассчитаем остаточную сумму квадратов φ (см. уравнение (190)):

$$\varphi = \sum_{j=1}^{9} \left(\overline{Y}_j - Y_j^p\right)^2 = (45,00 - 44,61)^2 + (36,00 - 36,61)^2 + (57,00 - 57,61)^2 + (49,50 - 49,61)^2 +$$

$$+(54,00 - 54,94)^2 + (57,00 - 56,77)^2 + (49,50 - 48,77)^2 + (43,00 - 42,78)^2 + (56,50 - 55,78)^2 =$$

$$= 0,1521 + 0,3721 + 0,3721 + 0,0121 + 0,8836 + 0,0529 + 0,5329 + 0,0484 + 0,5184 = 2,945;$$

- рассчитаем дисперсию адекватности $S^2_{\text{ад}}$ и ее число степеней свободы $f_{\text{ад}}$ по уравнениям (188), (189):

$$S^2_{\text{ад}} = \frac{n\varphi}{N_2 - B} = \frac{4 \cdot 2,945}{9 - 5} = 2,945;$$

$$f_{\text{ад}} = N_2 - B = 9 - 5 = 4,$$

где B – число значимых коэффициентов **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка. В данной задаче $B = 5$;

- рассчитаем экспериментальное значение критерия Фишера по уравнению (78)

$$F_{\text{э}} = \frac{S^2_{\text{ад}}}{S^2_{\text{воспр}}} = \frac{2,945}{2,037} = 1,446, \quad \text{так как } S^2_{\text{ад}} > S^2_{\text{воспр}};$$

- табличное значение критерия Фишера $F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p}$ сформируем по алгоритму, приведенному в уравнениях (79) – (80): на первом месте стоит число степеней свободы **большей** дисперсии $f_{\text{числ}} = f_{\text{ад}} = N_2 - B = 9 - 5 = 4$, а на втором – число степеней свободы **меньшей** дисперсии $f_{\text{знам}} = f_{\text{воспр}} = N_2(n-1) = 9 \cdot (4-1) = 27$, при доверительной вероятности $p = 0,95$ выберем из таблицы приложения 4

$$F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, p} = F_{N_2 - B;\, N_2(n-1);\, p} = F_{4;\, 27;\, 0,95} = 2,728.$$

Вывод. Двухфакторное ортогонализированное уравнение регрессии **второго** порядка

$$Y = 49,72 - 4,000 \cdot X_1 + 6,500 \cdot X_2 - 2,167 \cdot (X_1^2 - 2/3) - 5,665 \cdot (X_2^2 - 2/3)$$

адекватно, так как согласно по уравнению (81) $F_{\text{э}} = 1,446 < 2,728 = F_{4;\, 27;\, 0,95}$.

9. Проведем оптимизацию изучаемой технической системы.

Параметр Y имеет максимум, так как $b_{11} = -2,167 < 0$ и $b_{22} = -5,665 < 0$ (см. радела 3.4, п. 10).

Найдем оптимальные значения факторов x_1, x_2, при которых параметр оптимизации достигает $Y_{\max}$, и рассчитаем абсолютную погрешность его прогнозирования $\Delta Y_{\max}$

- оптимальные значения нормированных факторов $X_{1\,\text{опт}}, X_{2\,\text{опт}}$, так как коэффициент b_{12} незначим, рассчитаем по уравнению (194)

$$X_{1\,опт} = -\frac{b_1}{2\cdot b_{11}} = -\frac{-4,000}{2\cdot(-2,167)} = -0,9229;$$

$$X_{2\,опт} = -\frac{b_2}{2\cdot b_{22}} = -\frac{6,500}{2\cdot(-5,665)} = 0,5737;$$

- оптимальные значения натуральных факторов $x_{1\,опт}, x_{2\,опт}$ рассчитываем по уравнениям (103) – (105) и данным таблицы 49:

$$x_{1\,опт} = x_{10} + X_{1\,опт}\cdot\Delta x_1 = 3,5 + (-0,9229)\cdot 1,5 = 2,116 \approx 2,1 \text{ ц/га};$$

$$x_{2\,опт} = x_{20} + X_{2\,опт}\cdot\Delta x_2 = 1,5 + 0,5737\cdot 0,5 = 1,787 \approx 1,8 \text{ ц/га};$$

- максимальную урожайность пшеницы Y_{max} рассчитаем по **адекватному двухфакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **второго** порядка (196), подставляя в него оптимальные значения нормированных факторов $X_{1\,опт} = -0,9229$, $X_{2\,опт} = 0,5737$:

$$Y_{max} = 49,72 - 4,000\cdot X_{1\,опт} + 6,500\cdot X_{2\,опт} - 2,167\cdot(X_{1\,опт}^2 - 2/3) -$$

$$-5,665\cdot(X_{2\,опт}^2 - 2/3) = 49,72 - 4,000\cdot(-0,9229) + 6,500\cdot 0,5737 -$$

$$-2,167\cdot\left((-0,9229)^2 - 2/3\right) - 5,665\cdot\left(0,5737^2 - 2/3\right) = 58,65 \text{ ц/га};$$

- абсолютную погрешность ΔY_{max} параметра Y_{max}, рассчитанного по **адекватному двухфакторному ортогонализированному** уравнению регрессии **второго** порядка $Y = 49,72 - 4,000\cdot X_1 + 6,500\cdot X_2 - 2,167\cdot(X_1^2 - 2/3) - 5,665\cdot(X_2^2 - 2/3)$, в котором все факторы ортогональны, рассчитаем по уравнению (197) и корректного оформим результаты расчета (см. раздел 1.1, п. 3)

$$\Delta Y_{max} = t_{27;\,0,95}\sqrt{S^2(b_0) + \left[X_{1опт}^2 + X_{2опт}^2\right]S^2(b_1) + \left[(X_{1опт}^2 - 2/3)^2 + (X_{2опт}^2 - 2/3)^2\right]S^2(b_{11})} =$$

$$= 2,052\sqrt{0,05658 + \left((-0,9229)^2 + 0,5737^2\right)\cdot 0,08488 + \left(\left((-0,9229)^2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left((0,5737^2 - \frac{2}{3}\right)^2\right)\cdot 0,2546} =$$

$$= 0,9051 \approx 0,9 \text{ ц/га}.$$

С учетом доверительных интервалов коэффициенты $b_0, b_1, b_2\ b_{12}, b_{11}, b_{22}$ корректно оформим результаты расчета (см. радел 1.1, п. 3):

$$b_0 = 49,72 \pm 0,49;$$

$$b_1 = -4,000 \pm 0,6 = -4,0 \pm 0,6;$$

$$b_2 = 6,500 \pm 0,6 = 6,5 \pm 0,6;$$

$$b_{11} = -2,167 \pm 1,0 = -2,2 \pm 1,0;$$

$$b_{22} = -5,665 \pm 1,0 = -5,7 \pm 1,0.$$

Аналогично корректно оформим результаты расчета максимальной урожайности пшеницы Y_{max} с учетом абсолютной погрешности ΔY_{max}

$$Y_{max} = 58,65 \pm 0,9 \approx 58,7 \pm 0,9 \text{ ц/га}.$$

10. **Основной вывод**. Максимальная урожайность пшеницы $Y_{\max} = \mathbf{(58,7 \pm 0,9)}$ ц/га может быть достигнута при внесении в почву $x_1 = 2,1$ ц/га семян и $x_2 = 1,8$ ц/га неорганического удобрения.

Ответ.

1) **Двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **первого** порядка

$$\begin{array}{l} Y = 49,3 - 4,1 \cdot X_1 + 6,4 \cdot X_2 . \\ \quad\ \ \pm 0,9 \quad \pm 1,0 \quad\ \ \pm 1,0 \end{array}$$

Все 5 выборочных дисперсий однородны, так как $G_э = 0,240 < 0,598 = G_{3;\,5;\,0,95}$.

$$S^2_{воспр} = 1,667 ; \quad f_{воспр} = 15 ; \qquad S^2_{ад} = 82,36 ; \quad f_{ад} = 2 .$$

Двухфакторное ортогонализированное уравнение регрессии **первого** порядка **неадекватно**, так как $F_э = 49,41 > 3,682 = F_{2;\,15;\,0,95}$.

2) **Двухфакторное ортогонализированное** уравнение регрессии **второго** порядка

$$\begin{array}{l} Y = 49,72 - 4,0 \cdot X_1 + 6,7 \cdot X_2 - 2,2 \cdot (X_1^2 - 2/3) - 5,7 \cdot (X_2^2 - 2/3) . \\ \quad\ \ \pm 0,49 \quad \pm 0,6 \quad\ \ \pm 0,6 \quad\ \ \pm 1,0 \qquad\qquad\qquad \pm 1,0 . \end{array}$$

Все 9 выборочных дисперсий однородны, так как $G_э = 0,327 < 0,403 = G_{3;\,9;\,0,95}$.

$$S^2_{воспр} = 2,037 ; \quad f_{воспр} = 27 ; \quad S^2_{ад} = 2.945 ; \quad f_{ад} = 4 .$$

Двухфакторное ортогонализированное уравнение регрессии **второго** порядка **адекватно**, так как $F_э = 1,446 < 2,728 = F_{4;\,27;\,0,95}$.

3) Результаты **оптимизации:**

$$Y_{\max} = (58,7 \pm 0,9) \text{ ц/га} ;$$

$$X_{1\,опт} = -\,0,9229 ; \quad x_{1\,опт} \approx 2,1 \text{ ц/га} ;$$

$$X_{2\,опт} = 0,5737 ; \quad x_{2\,опт} \approx 1,8 \text{ ц/га} .$$

Основной вывод. Максимальная урожайность пшеницы $\mathbf{Y_{max} = (58,7 \pm 0,9)}$ **ц/га** может быть достигнута при внесении в почву $x_{1\,опт} \approx 2,1$ ц/га семян и $x_{2\,опт} \approx 1,8$ ц/га неорганического удобрения.

Контрольные вопросы

1. Принцип построения **МП** для **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП (ЦДФП).
2. Принцип построения **МП** для **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП.
3. Принцип построения **ММ** для **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **первого** порядка на базе ЦПФП (ЦДФП).
4. Принцип построения **ММ** для **многофакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на базе ОЦКП.
5. Напишите уравнения для расчета коэффициентов **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка.
6. Сформулируйте алгоритм проверки коэффициентов **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на значимость по критерию Стьюдента.
7. Сформулируйте алгоритм проверки **двухфакторного ортогонализированного** уравнения регрессии **второго** порядка на адекватность по критерию Фишера.
8. Сформулируйте алгоритм определения максимума (минимума) параметра оптимизации.

Контрольные задачи

Таблица 55

Урожайность пшеницы Y приведена в ц/га, значения параметров x_1, x_2 в ц/га

Вар.1, $n=4$, $x_1\in[1;3]$, $x_2\in[2;3]$				**Вар.2, $n=5$, $x_1\in[2;3]$, $x_2\in[1;4]$**					**Вар.3, $n=6$, $x_1\in[1;5]$, $x_2\in[2;3]$**					
45,5	45,8	46,6	44,1	45,5	45,8	46,6	44,1	46,0	45,5	45,8	46,6	44,1	46,0	45,1
35,9	37,1	37,1	37,9	35,9	37,1	37,1	37,9	36,8	35,9	37,1	37,1	37,9	36,8	36,0
57,4	57,9	55,6	55,2	57,4	57,9	55,6	55,2	56,8	57,4	57,9	55,6	55,2	56,8	57,2
47,9	49,0	49,7	50,2	47,9	49,0	49,7	50,2	48,9	47,9	49,0	49,7	50,2	48,9	48,4
56,7	58,7	57,7	57,4	58,7	58,7	57,7	57,4	58,0	57,7	58,7	57,7	58,4	59,0	58,9
57,4	59,1	57,1	58,2	57,4	59,1	57,1	58,2	58,4	57,4	59,1	57,1	58,2	58,4	57,2
47,7	52,9	50,6	51,4	47,7	52,9	50,6	51,4	51,3	47,7	51,9	50,6	51,4	51,3	50,8
44,5	46,6	45,4	48,0	44,5	46,6	45,4	48,0	45,7	44,5	46,6	45,4	48,0	45,7	46,2
60,7	58,5	57,8	58,8	60,7	58,5	57,8	58,8	58,5	59,7	58,5	57,8	58,8	59,5	58,0

Вар.4, $n=4$, $x_1\in[1;4]$, $x_2\in[1;2]$				**Вар.5, $n=5$, $x_1\in[2;4]$, $x_2\in[1;4]$**					**Вар.3, $n=6$, $x_1\in[1;5]$, $x_2\in[2;3]$**					
46,5	46,6	47,6	47,6	46,5	46,6	47,6	47,6	47,1	46,5	46,6	47,6	47,6	47,1	45,6
37,4	38,0	37,4	38,1	37,4	38,0	37,4	38,1	38,4	37,4	38,0	37,4	38,1	38,4	35,0
55,6	57,5	57,5	59,7	55,6	57,5	57,5	59,7	58,4	55,6	57,5	57,5	59,7	58,4	57,0
47,6	51,1	48,6	50,2	47,6	51,1	48,6	50,2	48,5	47,6	51,1	48,6	50,2	48,5	48,5
53,5	55,6	57,4	55,0	53,5	55,6	57,4	55,0	57,0	53,5	55,6	57,4	55,0	57,0	53,9
58,1	56,2	58,9	57,5	58,1	56,2	58,9	57,5	59,6	58,1	56,2	58,9	57,5	59,6	56,8
49,1	48,1	47,7	50,5	49,1	48,1	47,7	50,5	48,0	49,1	48,1	47,7	50,5	48,0	48,3
43,7	44,1	44,4	42,0	43,7	44,1	44,4	42,0	46,6	43,7	44,1	44,4	42,0	46,6	44,2
56,6	57,3	57,3	56,6	56,6	57,3	57,3	56,6	57,7	56,6	57,3	57,3	56,6	57,7	57,9

Вар.7, $n=4$, $x_1\in[1;4]$, $x_2\in[1;4]$				**Вар.8, $n=5$, $x_1\in[2;4]$, $x_2\in[1;2]$**					**Вар.9, $n=6$, $x_1\in[2;3]$, $x_2\in[1;2]$**					
46,4	46,0	46,8	49,3	46,4	46,0	46,8	49,3	44,6	46,4	46,0	46,8	49,3	44,6	45,7
34,2	38,4	39,5	37,2	34,2	38,4	39,5	37,2	39,2	34,2	38,4	39,5	37,2	39,2	38,1
57,7	56,6	56,8	60,0	57,7	56,6	56,8	60,0	55,9	57,7	56,6	56,8	60,0	55,9	56,9
51,4	49,7	49,5	50,5	51,4	49,7	49,5	50,5	50,9	51,4	49,7	49,5	50,5	50,9	51,6
56,1	54,0	56,1	61,1	56,1	54,0	56,1	61,1	53,5	56,1	54,0	56,1	61,1	53,5	56,0
58,6	60,0	59,7	58,7	58,6	60,0	59,7	58,7	56,6	58,6	60,0	59,7	58,7	56,6	54,6
50,4	49,3	46,6	49,3	50,4	49,3	46,6	49,3	51,0	50,4	49,3	46,6	49,3	51,0	48,7
43,6	44,4	45,8	42,7	43,6	44,4	45,8	42,7	43,6	43,6	44,4	45,8	42,7	43,6	43,1
56,4	57,4	55,9	56,9	56,4	57,4	55,9	56,9	56,0	56,4	57,4	55,9	56,9	56,0	55,7

Вар.10, $n=4$, $x_1\in[1;3]$, $x_2\in[1;2]$				**Вар.11, $n=5$, $x_1\in[1;5]$, $x_2\in[1;2]$**					**Вар.12, $n=6$, $x_1\in[2;5]$, $x_2\in[1;3]$**					
43,5	46,8	46,7	45,8	43,5	46,8	46,7	45,8	48,4	43,5	46,8	46,7	45,8	48,4	45,9
39,1	39,2	39,4	38,6	39,1	39,2	39,4	38,6	37,2	39,1	39,2	39,4	38,6	37,2	37,6
55,5	55,5	57,5	58,0	55,5	55,5	57,5	58,0	54,8	55,5	55,5	57,5	58,0	54,8	57,5
49,6	49,9	50,3	48,2	49,6	49,9	50,3	48,2	47,4	49,6	49,9	50,3	48,2	47,4	49,3
52,9	56,2	53,0	55,0	52,9	56,2	53,0	55,0	54,3	52,9	56,2	53,0	55,0	54,3	53,3
57,5	53,4	56,3	57,0	57,5	53,4	56,3	57,0	56,3	57,5	53,4	56,3	57,0	56,3	57,1
49,3	49,7	47,0	49,3	49,3	49,7	47,0	49,3	49,0	49,3	49,7	47,0	49,3	49,0	49,6
45,0	45,9	45,0	46,1	45,0	45,9	45,0	46,1	42,8	45,0	45,9	45,0	46,1	42,8	43,4
57,4	57,1	54,1	56,3	57,4	57,1	54,1	56,3	57,7	57,4	57,1	54,1	56,3	57,7	58,2

Вар.13, $n=4$, $x_1\in[1;2]$, $x_2\in[2;3]$				**Вар.14, $n=5$, $x_1\in[1;3]$, $x_2\in[2;3]$**					**Вар.15, $n=6$, $x_1\in[2;3]$, $x_2\in[2;3]$**					
43,5	47,3	45,9	46,5	43,5	47,3	45,9	46,5	45,5	43,5	47,3	45,9	46,5	45,5	45,5
38,1	36,9	39,6	38,2	38,1	36,9	39,6	38,2	37,5	38,1	36,9	39,6	38,2	37,5	37,4
57,6	57,5	59,1	57,1	57,6	57,5	59,1	57,1	59,3	57,6	57,5	59,1	57,1	59,3	55,9
50,3	49,8	51,1	51,2	50,3	49,8	51,1	51,2	51,1	50,3	49,8	51,1	51,2	51,1	49,0
54,4	57,2	54,7	54,0	54,4	57,2	54,7	54,0	55,6	54,4	57,2	54,7	54,0	55,6	56,4
54,8	57,9	59,0	57,6	54,8	57,9	59,0	57,6	58,4	54,8	57,9	59,0	57,6	58,4	56,9
50,8	47,4	48,4	47,7	50,8	47,4	48,4	47,7	47,5	50,8	47,4	48,4	47,7	47,5	49,0
45,3	43,8	43,7	43,6	45,3	43,8	43,7	43,6	45,2	45,3	43,8	43,7	43,6	45,2	43,8

Окончание таблицы 55

Вар.13, $n=4$, $x_1 \in [1; 2]$, $x_2 \in [2; 3]$				**Вар. 14, $n=5$, $x_1 \in [1; 3]$, $x_2 \in [2; 3]$**					**Вар.15, $n=6$, $x_1 \in [2; 3]$, $x_2 \in [2; 3]$**					
54,6	55,5	58,0	57,0	54,6	55,5	58,0	57,0	55,8	54,6	55,5	58,0	57,0	55,8	55,8
Вар.16, $n=4$, $x_1 \in [3; 4]$, $x_2 \in [2; 3]$				**Вар. 15, $n=5$, $x_1 \in [2; 5]$, $x_2 \in [1; 3]$**					**Вар.18, $n=6$, $x_1 \in [2; 5]$, $x_2 \in [2; 3]$**					
44,6	45,8	46,2	42,3	44,6	45,8	46,2	42,3	45,5	44,6	45,8	46,2	42,3	45,5	45,8
34,6	37,5	37,0	37,7	34,6	37,5	37,0	37,7	35,8	34,6	37,5	37,0	37,7	35,8	36,5
56,1	60,2	57,6	58,0	56,1	60,2	57,6	58,0	57,2	56,1	60,2	57,6	58,0	57,2	58,3
52,7	49,6	48,3	48,4	52,7	49,6	48,3	48,4	47,5	52,7	49,6	48,3	48,4	47,5	48,0
54,8	53,1	56,7	53,3	54,8	53,1	56,7	53,3	59,4	54,8	53,1	56,7	53,3	59,4	56,1
59,9	56,5	57,2	57,4	59,9	56,5	57,2	57,4	58,4	59,9	56,5	57,2	57,4	58,4	57,5
50,6	51,1	49,8	46,7	50,6	51,1	49,8	46,7	48,2	50,6	51,1	49,8	46,7	48,2	49,1
45,2	45,0	44,9	43,9	45,2	45,0	44,9	43,9	45,3	45,2	45,0	44,9	43,9	45,3	45,2
55,4	56,1	55,8	55,1	55,4	56,1	55,8	55,1	56,8	55,4	56,1	55,8	55,1	56,8	55,9
Вар.19, $n=4$, $x_1 \in [2; 3]$, $x_2 \in [1; 4]$				**Вар. 20, $n=5$, $x_1 \in [1; 3]$, $x_2 \in [1; 2]$**					**Вар.21, $n=6$, $x_1 \in [1; 3]$, $x_2 \in [1; 4]$**					
44,4	45,4	42,6	45,6	46,4	45,4	42,6	45,6	48,0	44,4	45,4	42,6	45,6	48,0	48,0
37,7	37,4	37,2	38,6	37,7	37,4	37,2	38,6	38,0	37,7	37,4	37,2	38,6	38,0	39,7
56,4	58,8	56,0	57,6	56,4	58,8	56,0	57,6	59,3	56,4	58,8	56,0	57,6	59,3	58,1
51,5	48,2	51,5	49,0	52,5	49,2	52,5	49,9	47,8	51,5	48,2	51,5	49,0	46,8	51,3
55,1	58,8	55,7	56,1	55,7	59,4	56,3	56,7	57,4	55,1	58,8	55,7	56,1	56,4	56,4
58,9	56,2	55,2	57,5	58,9	56,2	55,2	57,5	58,5	58,9	56,2	55,2	57,5	58,5	55,8
50,1	51,8	49,9	48,2	50,1	51,8	49,9	48,2	47,6	50,1	51,8	49,9	48,2	47,6	48,2
46,1	44,2	43,5	46,9	46,1	44,2	43,5	46,9	43,9	46,1	44,2	43,5	46,9	43,9	45,3
56,6	58,3	54,8	55,9	56,6	58,3	54,8	55,9	56,5	56,6	58,3	54,8	55,9	56,5	54,7
Вар.22, $n=4$, $x_1 \in [1; 3]$, $x_2 \in [1; 4]$				**Вар. 23, $n=5$, $x_1 \in [1; 4]$, $x_2 \in [1; 3]$**					**Вар.24, $n=6$, $x_1 \in [2; 4]$, $x_2 \in [1; 3]$**					
46,7	46,4	46,5	45,1	46,7	46,4	46,5	45,1	48,1	46,7	46,4	46,5	45,1	48,1	47,8
39,2	39,8	38,9	38,5	39,2	39,8	38,9	38,5	39,7	39,2	39,8	38,9	38,5	39,7	40,6
59,3	56,6	57,6	57,3	59,3	56,6	57,6	57,3	56,2	60,3	57,6	58,6	58,3	57,2	55,6
50,0	49,3	47,7	49,1	50,0	49,3	47,7	49,1	50,2	50,0	49,3	47,7	49,1	50,2	51,5
52,4	55,2	56,9	53,1	52,4	55,2	56,9	53,1	57,9	52,4	55,2	56,9	53,1	57,9	56,8
55,7	58,3	54,8	57,2	55,7	58,3	54,8	57,2	55,1	55,7	58,3	54,8	57,2	55,1	57,3
49,5	48,9	49,4	48,3	49,5	48,9	49,4	48,3	50,0	49,5	48,9	49,4	48,3	50,0	48,8
47,9	47,6	45,3	44,2	47,9	47,6	45,3	44,2	46,3	47,9	47,6	45,3	44,2	46,3	46,4
59,4	58,1	55,4	55,5	59,4	58,1	55,4	55,5	55,8	59,4	58,1	55,4	55,5	55,8	54,8
Вар.25, $n=4$, $x_1 \in [2; 5]$, $x_2 \in [1; 4]$				**Вар. 26, $n=5$, $x_1 \in [1; 4]$, $x_2 \in [2; 3]$**					**Вар.27, $n=6$, $x_1 \in [2; 4]$, $x_2 \in [2; 3]$**					
45,1	42,4	47,0	44,9	45,1	42,4	47,0	44,9	44,3	45,1	42,4	47,0	44,9	44,3	42,2
35,9	36,7	38,6	36,5	35,9	36,7	38,6	36,5	37,9	35,9	36,7	38,6	36,5	37,9	35,8
57,5	58,0	58,7	56,8	57,5	58,0	58,7	56,8	57,7	57,5	58,0	58,7	56,8	57,7	58,1
50,5	48,8	49,0	51,1	50,5	48,8	49,0	51,1	49,9	50,5	48,8	49,0	51,1	49,9	48,9
55,9	55,9	56,2	53,4	55,9	55,9	56,2	53,4	56,5	55,9	55,9	56,2	53,4	56,5	54,6
57,3	57,8	56,0	57,7	57,3	57,8	56,0	57,7	56,9	57,3	57,8	56,0	57,7	56,9	56,5
51,0	51,1	48,3	49,4	51,0	51,1	48,3	49,4	46,6	51,0	51,1	48,3	49,4	46,6	49,2
42,0	46,0	42,7	45,2	42,0	46,0	42,7	45,2	46,3	42,0	46,0	42,7	45,2	46,3	46,1
53,7	54,5	56,2	55,7	53,7	54,5	56,2	55,7	56,4	53,7	54,5	56,2	55,7	56,4	59,2
Вар.28, $n=4$, $x_1 \in [1; 3]$, $x_2 \in [1; 3]$				**Вар. 29, $n=5$, $x_1 \in [2; 3]$, $x_2 \in [1; 3]$**					**Вар.30, $n=6$, $x_1 \in [2; 5]$, $x_2 \in [1; 2]$**					
45,3	43,3	42,8	44,0	45,3	43,3	42,8	44,0	45,1	45,3	43,3	42,8	44,0	45,1	45,7
39,1	37,5	40,3	34,4	39,1	37,5	40,3	34,4	36,7	39,1	37,5	40,3	34,4	36,7	37,7
59,6	57,4	57,2	58,5	59,6	57,4	57,2	58,5	57,8	59,6	57,4	57,2	58,5	57,8	57,2
49,3	49,7	50,7	49,3	49,3	49,7	50,7	49,3	50,9	49,3	49,7	50,7	49,3	50,9	48,9
56,9	57,0	57,4	59,6	56,9	57,0	57,4	59,6	57,7	56,9	57,0	57,4	59,6	57,7	56,4
57,1	56,3	59,1	59,4	57,1	56,3	59,1	59,4	57,6	57,1	56,3	59,1	59,4	57,6	56,2
50,5	50,2	49,0	49,6	50,5	50,2	49,0	49,6	48,1	50,5	50,2	49,0	49,6	48,1	50,0
41,8	45,5	45,5	44,0	41,8	45,5	45,5	44,0	45,5	41,8	45,5	45,5	44,0	45,5	44,7
57,2	56,7	58,0	54,7	57,2	56,7	58,0	54,7	55,6	57,2	56,7	58,0	54,7	55,6	54,3

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Леонов, А.Н.* Основы научных исследований и моделирования: учебно-методический комплекс / А.Н. Леонов, М.М. Дечко, В.Б. Ловкис, – Минск: БГАТУ, 2010. – 267 с.
2. *Леонов, А.Н.* Основы научных исследований и моделирования: тестовые задания / А.Н.Леонов [и др.]; под ред. А.Н.Леонова – Минск: БГАТУ, 2010. - 80 с.

Дополнительная

3. *Бохан, Н.И.* Основы научных исследований и обработки экспериментальных данных / Н.И. Бохан, В.К. Бензарь. – Горки: БСХА, 1980. - 104 с.
4. *Бохан, Н.И.* Планирование экспериментов в исследованиях по механизации и автоматизации сельскохозяйственного производства / Н.И. Бохан, А.М. Дмитриев, И.С. Нагорский. – Горки: БСХА, 1986. – 80 с.
5. *Нагорский, И.С.* Методические указания для выполнения курсовой работы по дисциплине «Основы научных исследований» / И.С. Нагорский. – Минск: БГАТУ, 2004. – 28 с.
6. *Нагорский, И.С.* Основы научных исследований: пособие по изучению дисциплины, В 4-х ч. Ч. 1, 2 / И.С. Нагорский. – Минск: БГАТУ, 2006. – 132 с.
7. *Нагорский, И.С.* Основы научных исследований : пособие по изучению дисциплины, В 4-х ч. Ч. 3, 4 / И.С. Нагорский, Б.В. Ловкис, Ю.Т. Антонишин. – Минск: БГАТУ, 2008. – 108 с.
8. *Адлер, Ю.П.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – Москва: Наука, 1971. - 279 с.
9. *Саутин, С.Н.* Планирование эксперимента в химии и химической технологии / С.Н. Саутин. - Ленинград: Химия, 1975. – 48 с.

Приложение 1

Критерий Смирнова – Граббса

Табличные значения критерия Смирнова – Граббса $\tau_{f;\ 0,95}$

при числе степеней свободы f и доверительной вероятности $p = 0,95$

f	$\tau_{f;\ 0,95}$
1	1,412
2	1,689
3	1,869
4	1,996
5	2,093
6	2,172
7	2,238
8	2,294
9	2,343
10	2,387
11	2,426
12	2,461
13	2,494
14	2,523
15	2,551
16	2,577
17	2,601
18	2,623
19	2,644
20	2,664
21	2,683
22	2,701
23	2,718
24	2,734
25	2,749

f	$\tau_{f;\ 0,95}$
26	2,764
27	2,778
28	2,792
29	2,805
30	2,818
31	2,830
32	2,842
33	2,853
34	2,864
35	2,874
36	2,885
37	2,894
38	2,904
39	2,913
40	2,922
41	2,931
42	2,940
43	2,948
44	2,956
45	2,964
46	2,972
47	2,980
48	2,987
49	2,994
50	3,001

Приложение 2

Критерий Стьюдента

Табличные значения критерия Стьюдента $t_{f;\ 0,95}$

при числе степеней свободы f и доверительной вероятности $p = 0,95$

f	$t_{f;\ 0,95}$
1	12,706
2	4,303
3	3,182
4	2,776
5	2,571
6	2,447
7	2,365
8	2,306
9	2,262
10	2,228
11	2,201
12	2,179
13	2,160
14	2,145
15	2,131
16	2,120
17	2,110
18	2,101
19	2,093
20	2,086
21	2,080
22	2,074
23	2,069
24	2,064
25	2,060
26	2,056
27	2,052
28	2,048
29	2,045
30	2,042
31	2,040
32	2,037
33	2,035
34	2,032
35	2,030
36	2,028
37	2,026
38	2,024
39	2,023
40	2,021
41	2,020
42	2,018
43	2,017
44	2,015
45	2,014
46	2,013
47	2,012
48	2,011
49	2,010
50	2,009
51	2,008
52	2,007
53	2,006
54	2,005
55	2,004
56	2,003
57	2,002
58	2,002
59	2,001
60	2,000
61	2,000
62	1,999
63	1,998
64	1,998
65	1,997
66	1,997
67	1,996
68	1,995
69	1,995
∞	1,960

Приложение 3

Критерий Пирсона

Табличные значения критерия Пирсона $\chi^2_{f;\,0,975}$ и $\chi^2_{f;\,0,025}$ при числе степеней свободы f и доверительной вероятности $p = 0,95$

f	$\chi^2_{f;\,0,975}$	$\chi^2_{f;\,0,025}$	f	$\chi^2_{f;\,0,975}$	$\chi^2_{f;\,0,025}$
1	0,000982	5,024	31	17,539	48,232
2	0,0506	7,378	32	18,291	49,480
3	0,216	9,348	33	19,047	50,725
4	0,484	11,143	34	19,806	51,966
5	0,831	12,833	35	20,569	53,203
6	1,237	14,449	36	21,336	54,437
7	1,690	16,013	37	22,106	55,668
8	2,180	17,535	38	22,878	56,896
9	2,700	19,023	39	23,654	58,120
10	3,247	20,483	40	24,433	59,342
11	3,816	21,920	41	25,215	60,561
12	4,404	23,337	42	25,999	61,777
13	5,009	24,736	43	26,785	62,990
14	5,629	26,119	44	27,575	64,201
15	6,262	27,488	45	28,366	65,410
16	6,908	28,845	46	29,160	66,617
17	7,564	30,191	47	29,956	67,821
18	8,231	31,526	48	30,755	69,023
19	8,907	32,852	49	31,555	70,222
20	9,591	34,170	50	32,357	71,420
21	10,283	35,479	51	33,162	72,616
22	10,982	36,781	52	33,968	73,810
23	11,689	38,076	53	34,776	75,002
24	12,401	39,364	54	35,586	76,192
25	13,120	40,646	55	36,398	77,380
26	13,844	41,923	56	37,212	78,567
27	14,573	43,195	57	38,027	79,752
28	15,308	44,461	58	38,844	80,936
29	16,047	45,722	59	39,662	82,117
30	16,791	46,979	60	40,482	83,298

Приложение 4

Критерий Фишера

Табличные значения критерия **Фишера** $F_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, 0{,}95}$

при числах степеней свободы $f_{\text{числ}}$ и $f_{\text{знам}}$ и доверительной вероятности $p = 0{,}95$

$f_{\text{знам}}$	$f_{\text{числ}}$																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	244,7	245,4	245,9	246,5	246,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,42	19,42	19,43	19,43	19,44
3	10,13	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812	8,786	8,763	8,745	8,729	8,715	8,703	8,692	8,683
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964	5,936	5,912	5,891	5,873	5,858	5,844	5,832
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,772	4,735	4,704	4,678	4,655	4,636	4,619	4,604	4,590
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099	4,060	4,027	4,000	3,976	3,956	3,938	3,922	3,908
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677	3,637	3,603	3,575	3,550	3,529	3,511	3,494	3,480
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,687	3,581	3,500	3,438	3,388	3,347	3,313	3,284	3,259	3,237	3,218	3,202	3,187
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179	3,137	3,102	3,073	3,048	3,025	3,006	2,989	2,974
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,020	2,978	2,943	2,913	2,887	2,865	2,845	2,828	2,812
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896	2,854	2,818	2,788	2,761	2,739	2,719	2,701	2,685
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796	2,753	2,717	2,687	2,660	2,637	2,617	2,599	2,583
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714	2,671	2,635	2,604	2,577	2,554	2,533	2,515	2,499
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646	2,602	2,565	2,534	2,507	2,484	2,463	2,445	2,428
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,707	2,641	2,588	2,544	2,507	2,475	2,448	2,424	2,403	2,385	2,368
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538	2,494	2,456	2,425	2,397	2,373	2,352	2,333	2,317
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494	2,450	2,413	2,381	2,353	2,329	2,308	2,289	2,272
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456	2,412	2,374	2,342	2,314	2,290	2,269	2,250	2,233
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423	2,378	2,340	2,308	2,280	2,256	2,234	2,215	2,198
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393	2,348	2,310	2,278	2,250	2,225	2,203	2,184	2,167
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,488	2,420	2,366	2,321	2,283	2,250	2,222	2,197	2,176	2,156	2,139
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342	2,297	2,259	2,226	2,198	2,173	2,151	2,131	2,114
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,442	2,375	2,320	2,275	2,236	2,204	2,175	2,150	2,128	2,109	2,091
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300	2,255	2,216	2,183	2,155	2,130	2,108	2,088	2,070
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282	2,236	2,198	2,165	2,136	2,111	2,089	2,069	2,051
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,265	2,220	2,181	2,148	2,119	2,094	2,072	2,052	2,034
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2,250	2,204	2,166	2,132	2,103	2,078	2,056	2,036	2,018

$f_{знам}$	$f_{числ}$																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236	2,190	2,151	2,118	2,089	2,064	2,041	2,021	2,003
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223	2,177	2,138	2,104	2,075	2,050	2,027	2,007	1,989
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211	2,165	2,126	2,092	2,063	2,037	2,015	1,995	1,976
31	4,160	3,305	2,911	2,679	2,523	2,409	2,323	2,255	2,199	2,153	2,114	2,080	2,051	2,026	2,003	1,983	1,965
32	4,149	3,295	2,901	2,668	2,512	2,399	2,313	2,244	2,189	2,142	2,103	2,070	2,040	2,015	1,992	1,972	1,953
33	4,139	3,285	2,892	2,659	2,503	2,389	2,303	2,235	2,179	2,133	2,093	2,060	2,030	2,004	1,982	1,961	1,943
34	4,130	3,276	2,883	2,650	2,494	2,380	2,294	2,225	2,170	2,123	2,084	2,050	2,021	1,995	1,972	1,952	1,933
35	4,121	3,267	2,874	2,641	2,485	2,372	2,285	2,217	2,161	2,114	2,075	2,041	2,012	1,986	1,963	1,942	1,924
36	4,113	3,259	2,866	2,634	2,477	2,364	2,277	2,209	2,153	2,106	2,067	2,033	2,003	1,977	1,954	1,934	1,915
37	4,105	3,252	2,859	2,626	2,470	2,356	2,270	2,201	2,145	2,098	2,059	2,025	1,995	1,969	1,946	1,926	1,907
38	4,098	3,245	2,852	2,619	2,463	2,349	2,262	2,194	2,138	2,091	2,051	2,017	1,988	1,962	1,939	1,918	1,899
39	4,091	3,238	2,845	2,612	2,456	2,342	2,255	2,187	2,131	2,084	2,044	2,010	1,981	1,954	1,931	1,911	1,892
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,249	2,180	2,124	2,077	2,038	2,003	1,974	1,948	1,924	1,904	1,885
41	4,079	3,226	2,833	2,600	2,443	2,330	2,243	2,174	2,118	2,071	2,031	1,997	1,967	1,941	1,918	1,897	1,879
42	4,073	3,220	2,827	2,594	2,438	2,324	2,237	2,168	2,112	2,065	2,025	1,991	1,961	1,935	1,912	1,891	1,872
43	4,067	3,214	2,822	2,589	2,432	2,318	2,232	2,163	2,106	2,059	2,020	1,985	1,955	1,929	1,906	1,885	1,866
44	4,062	3,209	2,816	2,584	2,427	2,313	2,226	2,157	2,101	2,054	2,014	1,980	1,950	1,924	1,900	1,879	1,861
45	4,057	3,204	2,812	2,579	2,422	2,308	2,221	2,152	2,096	2,049	2,009	1,974	1,945	1,918	1,895	1,874	1,855
46	4,052	3,200	2,807	2,574	2,417	2,304	2,216	2,147	2,091	2,044	2,004	1,969	1,940	1,913	1,890	1,869	1,850
47	4,047	3,195	2,802	2,570	2,413	2,299	2,212	2,143	2,086	2,039	1,999	1,965	1,935	1,908	1,885	1,864	1,845
48	4,043	3,191	2,798	2,565	2,409	2,295	2,207	2,138	2,082	2,035	1,995	1,960	1,930	1,904	1,880	1,859	1,840
49	4,038	3,187	2,794	2,561	2,404	2,290	2,203	2,134	2,077	2,030	1,990	1,956	1,926	1,899	1,876	1,855	1,836
50	4,034	3,183	2,790	2,557	2,400	2,286	2,199	2,130	2,073	2,026	1,986	1,952	1,921	1,895	1,871	1,850	1,831
51	4,030	3,179	2,786	2,553	2,397	2,283	2,195	2,126	2,069	2,022	1,982	1,947	1,917	1,891	1,867	1,846	1,827
52	4,027	3,175	2,783	2,550	2,393	2,279	2,192	2,122	2,066	2,018	1,978	1,944	1,913	1,887	1,863	1,842	1,823
53	4,023	3,172	2,779	2,546	2,389	2,275	2,188	2,119	2,062	2,015	1,975	1,940	1,910	1,883	1,859	1,838	1,819
54	4,020	3,168	2,776	2,543	2,386	2,272	2,185	2,115	2,059	2,011	1,971	1,936	1,906	1,879	1,856	1,835	1,816
55	4,016	3,165	2,773	2,540	2,383	2,269	2,181	2,112	2,055	2,008	1,968	1,933	1,903	1,876	1,852	1,831	1,812
56	4,013	3,162	2,769	2,537	2,380	2,266	2,178	2,109	2,052	2,005	1,964	1,930	1,899	1,873	1,849	1,828	1,809
57	4,010	3,159	2,766	2,534	2,377	2,263	2,175	2,106	2,049	2,001	1,961	1,926	1,896	1,869	1,846	1,824	1,805
58	4,007	3,156	2,764	2,531	2,374	2,260	2,172	2,103	2,046	1,998	1,958	1,923	1,893	1,866	1,842	1,821	1,802
59	4,004	3,153	2,761	2,528	2,371	2,257	2,169	2,100	2,043	1,995	1,955	1,920	1,890	1,863	1,839	1,818	1,799
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167	2,097	2,040	1,993	1,952	1,917	1,887	1,860	1,836	1,815	1,796

Продолжение приложения 4

$f_{знам}$	$f_{числ}$																
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	247,3	247,7	248,0	248,3	248,6	248,8	249,1	249,3	249,5	249,6	249,8	250,0	250,1	250,2	250,4	250,5	250,6
2	19,44	19,44	19,45	19,45	19,45	19,45	19,45	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,47	19,47
3	8,675	8,667	8,660	8,654	8,648	8,643	8,639	8,634	8,630	8,626	8,623	8,620	8,617	8,614	8,611	8,609	8,606
4	5,821	5,811	5,803	5,795	5,787	5,781	5,774	5,769	5,763	5,759	5,754	5,750	5,746	5,742	5,739	5,735	5,732
5	,579	4,568	4,558	4,549	4,541	4,534	4,527	4,521	4,515	4,510	4,505	4,500	4,496	4,492	4,488	4,484	4,481
6	3,896	3,884	3,874	3,865	3,856	3,849	3,841	3,835	3,829	3,823	3,818	3,813	3,808	3,804	3,800	3,796	3,792
7	3,467	3,455	3,445	3,435	3,426	3,418	3,410	3,404	3,397	3,391	3,386	3,381	3,376	3,371	3,367	3,363	3,359
8	3,173	3,161	3,150	3,140	3,131	3,123	3,115	3,108	3,102	3,095	3,090	3,084	3,079	3,075	3,070	3,066	3,062
9	2,960	2,948	2,936	2,926	2,917	2,908	2,900	2,893	2,886	2,880	2,874	2,869	2,864	2,859	2,854	2,850	2,846
10	2,798	2,785	2,774	2,764	2,754	2,745	2,737	2,730	2,723	2,716	2,710	2,705	2,700	2,695	2,690	2,686	2,681
11	2,671	2,658	2,646	2,636	2,626	2,617	2,609	2,601	2,594	2,588	2,582	2,576	2,570	2,565	2,561	2,556	2,552
12	2,568	2,555	2,544	2,533	2,523	2,514	2,505	2,498	2,491	2,484	2,478	2,472	2,466	2,461	2,456	2,452	2,447
13	2,484	2,471	2,459	2,448	2,438	2,429	2,420	2,412	2,405	2,398	2,392	2,386	2,380	2,375	2,370	2,366	2,361
14	2,413	2,400	2,388	2,377	2,367	2,357	2,349	2,341	2,333	2,326	2,320	2,314	2,308	2,303	2,298	2,293	2,289
15	2,353	2,340	2,328	2,316	2,306	2,297	2,288	2,280	2,272	2,265	2,259	2,253	2,247	2,241	2,236	2,232	2,227
16	2,302	2,288	2,276	2,264	2,254	2,244	2,235	2,227	2,220	2,212	2,206	2,200	2,194	2,188	2,183	2,178	2,174
17	2,257	2,243	2,230	2,219	2,208	2,199	2,190	2,181	2,174	2,167	2,160	2,154	2,148	2,142	2,137	2,132	2,127
18	2,217	2,203	2,191	2,179	2,168	2,159	2,150	2,141	2,134	2,126	2,119	2,113	2,107	2,102	2,096	2,091	2,087
19	2,182	2,168	2,155	2,144	2,133	2,123	2,114	2,106	2,098	2,090	2,084	2,077	2,071	2,066	2,060	2,055	2,050
20	2,151	2,137	2,124	2,112	2,102	2,092	2,082	2,074	2,066	2,059	2,052	2,045	2,039	2,033	2,028	2,023	2,018
21	2,123	2,109	2,096	2,084	2,073	2,063	2,054	2,045	2,037	2,030	2,023	2,016	2,010	2,004	1,999	1,994	1,989
22	2,098	2,084	2,071	2,059	2,048	2,038	2,028	2,020	2,012	2,004	1,997	1,990	1,984	1,978	1,973	1,968	1,963
23	2,075	2,061	2,048	2,036	2,025	2,014	2,005	1,996	1,988	1,981	1,973	1,967	1,961	1,955	1,949	1,944	1,939
24	2,054	2,040	2,027	2,015	2,003	1,993	1,984	1,975	1,967	1,959	1,952	1,945	1,939	1,933	1,927	1,922	1,917
25	2,035	2,021	2,007	1,995	1,984	1,974	1,964	1,955	1,947	1,939	1,932	1,926	1,919	1,913	1,908	1,902	1,897
26	2,018	2,003	1,990	1,978	1,966	1,956	1,946	1,938	1,929	1,921	1,914	1,907	1,901	1,895	1,889	1,884	1,879
27	2,002	1,987	1,974	1,961	1,950	1,940	1,930	1,921	1,913	1,905	1,898	1,891	1,884	1,878	1,872	1,867	1,862
28	1,987	1,972	1,959	1,946	1,935	1,924	1,915	1,906	1,897	1,889	1,882	1,875	1,869	1,863	1,857	1,851	1,846
29	1,973	1,958	1,945	1,932	1,921	1,910	1,901	1,891	1,883	1,875	1,868	1,861	1,854	1,848	1,842	1,837	1,832
30	1,960	1,945	1,932	1,919	1,908	1,897	1,887	1,878	1,870	1,862	1,854	1,847	1,841	1,835	1,829	1,823	1,818

$f_{знам}$	$f_{числ}$																
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
31	1,948	1,933	1,920	1,907	1,896	1,885	1,875	1,866	1,857	1,849	1,842	1,835	1,828	1,822	1,816	1,811	1,805
32	1,937	1,922	1,908	1,896	1,884	1,873	1,864	1,854	1,846	1,838	1,830	1,823	1,817	1,810	1,804	1,799	1,794
33	1,926	1,911	1,898	1,885	1,873	1,863	1,853	1,844	1,835	1,827	1,819	1,812	1,806	1,799	1,793	1,788	1,783
34	1,917	1,902	1,888	1,875	1,863	1,853	1,843	1,833	1,825	1,817	1,809	1,802	1,795	1,789	1,783	1,777	1,772
35	1,907	1,892	1,878	1,866	1,854	1,843	1,833	1,824	1,815	1,807	1,799	1,792	1,786	1,779	1,773	1,768	1,762
36	1,899	1,883	1,870	1,857	1,845	1,834	1,824	1,815	1,806	1,798	1,790	1,783	1,776	1,770	1,764	1,758	1,753
37	1,890	1,875	1,861	1,848	1,837	1,826	1,816	1,806	1,798	1,789	1,782	1,775	1,768	1,761	1,755	1,750	1,744
38	1,883	1,867	1,853	1,841	1,829	1,818	1,808	1,798	1,790	1,781	1,774	1,766	1,760	1,753	1,747	1,741	1,736
39	1,875	1,860	1,846	1,833	1,821	1,810	1,800	1,791	1,782	1,774	1,766	1,759	1,752	1,745	1,739	1,733	1,728
40	1,868	1,853	1,839	1,826	1,814	1,803	1,793	1,783	1,775	1,766	1,759	1,751	1,744	1,738	1,732	1,726	1,721
41	1,862	1,846	1,832	1,819	1,807	1,796	1,786	1,777	1,768	1,759	1,752	1,744	1,737	1,731	1,725	1,719	1,713
42	1,855	1,840	1,826	1,813	1,801	1,790	1,780	1,770	1,761	1,753	1,745	1,738	1,731	1,724	1,718	1,712	1,707
43	1,849	1,834	1,820	1,807	1,795	1,784	1,773	1,764	1,755	1,747	1,739	1,731	1,724	1,718	1,712	1,706	1,700
44	1,844	1,828	1,814	1,801	1,789	1,778	1,767	1,758	1,749	1,741	1,733	1,725	1,718	1,712	1,706	1,700	1,694
45	1,838	1,823	1,808	1,795	1,783	1,772	1,762	1,752	1,743	1,735	1,727	1,720	1,713	1,706	1,700	1,694	1,688
46	1,833	1,817	1,803	1,790	1,778	1,767	1,756	1,747	1,738	1,729	1,721	1,714	1,707	1,700	1,694	1,688	1,683
47	1,828	1,812	1,798	1,785	1,773	1,762	1,751	1,742	1,733	1,724	1,716	1,709	1,702	1,695	1,689	1,683	1,677
48	1,823	1,807	1,793	1,780	1,768	1,757	1,746	1,737	1,728	1,719	1,711	1,704	1,697	1,690	1,684	1,678	1,672
49	1,819	1,803	1,789	1,775	1,763	1,752	1,742	1,732	1,723	1,714	1,706	1,699	1,692	1,685	1,679	1,673	1,667
50	1,814	1,798	1,784	1,771	1,759	1,748	1,737	1,727	1,718	1,710	1,702	1,694	1,687	1,680	1,674	1,668	1,662
51	1,810	1,794	1,780	1,767	1,754	1,743	1,733	1,723	1,714	1,705	1,697	1,690	1,683	1,676	1,670	1,664	1,658
52	1,806	1,790	1,776	1,763	1,750	1,739	1,729	1,719	1,710	1,701	1,693	1,685	1,678	1,672	1,665	1,659	1,654
53	1,802	1,786	1,772	1,759	1,746	1,735	1,725	1,715	1,706	1,697	1,689	1,681	1,674	1,667	1,661	1,655	1,649
54	1,798	1,782	1,768	1,755	1,743	1,731	1,721	1,711	1,702	1,693	1,685	1,677	1,670	1,663	1,657	1,651	1,645
55	1,795	1,779	1,764	1,751	1,739	1,727	1,717	1,707	1,698	1,689	1,681	1,674	1,666	1,660	1,653	1,647	1,641
56	1,791	1,775	1,761	1,748	1,735	1,724	1,713	1,703	1,694	1,686	1,678	1,670	1,663	1,656	1,650	1,643	1,638
57	1,788	1,772	1,757	1,744	1,732	1,720	1,710	1,700	1,691	1,682	1,674	1,666	1,659	1,652	1,646	1,640	1,634
58	1,785	1,769	1,754	1,741	1,729	1,717	1,706	1,697	1,687	1,679	1,671	1,663	1,656	1,649	1,642	1,636	1,631
59	1,781	1,766	1,751	1,738	1,725	1,714	1,703	1,693	1,684	1,675	1,667	1,660	1,652	1,646	1,639	1,633	1,627
60	1,778	1,763	1,748	1,735	1,722	1,711	1,700	1,690	1,681	1,672	1,664	1,656	1,649	1,642	1,636	1,630	1,624

132

Приложение 5

Критерий Кохрена

Табличные значения критерия **Кохрена** $G_{f_{\text{числ}};\, f_{\text{знам}};\, 0,95}$

при числах степеней свободы $f_{\text{числ}}$ и $f_{\text{знам}}$ и доверительной вероятности $p = 0,95$

$f_{\text{знам}}$	$f_{\text{числ}}$						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,998	0,975	0,939	0,906	0,877	0,853	0,833
3	0,967	0,871	0,798	0,746	0,707	0,677	0,653
4	0,906	0,768	0,684	0,629	0,589	0,560	0,536
5	0,841	0,684	0,598	0,544	0,506	0,478	0,456
6	0,781	0,616	0,532	0,480	0,445	0,418	0,398
7	0,727	0,561	0,480	0,431	0,397	0,373	0,354
8	0,680	0,516	0,438	0,391	0,359	0,336	0,318
9	0,638	0,477	0,403	0,358	0,328	0,307	0,290
10	0,602	0,445	0,373	0,331	0,303	0,282	0,267
11	0,570	0,417	0,348	0,308	0,281	0,262	0,247
12	0,541	0,392	0,326	0,288	0,262	0,244	0,230
13	0,515	0,371	0,307	0,271	0,246	0,229	0,215
14	0,492	0,352	0,291	0,255	0,232	0,215	0,202
15	0,471	0,335	0,276	0,242	0,220	0,203	0,191
16	0,452	0,319	0,262	0,230	0,208	0,193	0,181
17	0,434	0,305	0,250	0,219	0,198	0,183	0,172
18	0,418	0,293	0,240	0,209	0,189	0,175	0,164
19	0,403	0,281	0,230	0,200	0,181	0,167	0,157
20	0,389	0,270	0,221	0,192	0,174	0,160	0,150
21	0,377	0,261	0,212	0,185	0,167	0,154	0,144
22	0,365	0,252	0,204	0,178	0,160	0,148	0,138
23	0,354	0,243	0,197	0,171	0,155	0,142	0,133
24	0,343	0,235	0,191	0,166	0,149	0,137	0,129
25	0,334	0,228	0,185	0,160	0,144	0,133	0,124
26	0,325	0,221	0,179	0,155	0,139	0,128	0,120
28	0,308	0,209	0,168	0,146	0,131	0,121	0,113
30	0,293	0,198	0,159	0,138	0,124	0,114	0,106
32	0,279	0,188	0,151	0,130	0,117	0,108	0,100

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Леонов Андрей Николаевич, **Дечко** Михаил Михайлович,
Ловкис Виктор Болеславович

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск В. Н. Дашков
Редактор Н. А. Антипович
Компьютерная верстка Д. И. Чергейко

Подписано в печать 20.06.2013 г. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 15,81. Уч.-изд. л. 13,77. Тираж 200 экз. Заказ 536.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный
технический университет».
ЛИ № 02330/0552984 от 14.04.2010.
ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.
Пр. Независимости, 99 - 2, 220023, Минск.