вии с графиком документооборота предприятия и в порядке, оговоренном законодательством, с учетом положений закрепленных в учетной политике предприятия.

7. Осуществляя операции с наличными денежными средствами работникам предприятия необходимо принимать во внимание, что законодательством Республики Беларусь предусматривается ответственность за нарушения требований законодательства по ведению бухгалтерского учета в целом и операций с наличными денежными средствами в частности.

В современных условиях государство, ведомства, не несут ответственность за жизнеспособность предприятия, которая находится под влиянием большого количества рисков как внешних, так и внутренних. Поэтому должная организация системы внутреннего контроля на всех участках деятельности предприятия и использования ресурсов повышает возможность его стабильного и эффективного развития.

СОВМЕСТНЫЕ ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ МЕТРИКАХ

Э.И. Ковалевская, *к.ф.-м.н., доцент*

Метрическая теория диофантовых приближений, основы которой заложены в начале XX века в работах Э. Бореля и А. Я. Хинчина, в настоящее время эта теория интенсивно развивается.

В дальнейшем используем следующие обозначения: R — поле действительных чисел, C — поле комплексных чисел, Q_p — поле p-адических чисел, $|\cdot|_p$ — норма в Q_p, N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, R^+ — множество положительных действительных чисел.

В теории диофантовых приближений выделяют три различных подхода: глобальный, индивидуальный и метрический.

Глобальный подход базируется на исследовании диофантовых свойств всех чисел или всех наборов чисел из некоторого класса. В качестве примера глобального подхода можно привести *теорему Дирихле*. Она утверждает, что для любого $x \in R$ и любого $Q \in N$ существует рациональное число $p/q, 0 < q \le Q$, такое, что выполняется неравенство

$$|x - p/q| < 1/(qQ) \tag{1}$$

В частности, отсюда следует, что всякое иррациональное действительное число допускает бесконечно много приближений рациональными числами p/q с погрешностью, не превосходящей $1/q^2$. Назовем еще теорему К.Ф. Рота о приближении действительного алгебраического числа рациональными дробями, из которой следует, что показатель 2 в предыдущей погрешности является наилучшим в своем роде и не зависит от степени приближаемого алгебраического числа.

Индивидуальный подход подразумевает исследование диофантовых свойств конкретных чисел или конкретных наборов чисел. Например, трансцендентность чисел e (1878 г., Ш. Эрмит), π и ln2 (1889 г., Ф. Линдеман), $2^{\sqrt{2}}$ и α^{β}, где α — алгебраическое число, $\alpha \ne 0, \alpha \ne 1, \beta$ — иррациональное алгебраическое число (1934 г., А.О. Гельфонд и Т. Шнайдер). Отметим также, что к настоящему времени для числа *e* доказано, что его наилучший показатель в приближении рациональными числами равен 2 (1966 г., В.В. Адамс).

В *метрической теории диофантовых приближений* изучают диофантовы свойства всех действительных (комплексных или *p*-адических) чисел за исключением множеств малой меры (меры Лебега в R, меры Лебега в C, меры Хаара в Q_p соответственно). Эти исключительные множества могут далее изучаться с помощью таких метрических характеристик как мера Хаусдорфа и размерность Хаусдорфа. Последние приводят к более точным метрическим теоремам.

В работах Э. Бореля (1909 г.) и А.Я. Хинчина (1924 г.) впервые было проведено исследование приближений почти всех (в смысле меры Лебега) действительных чисел x рациональными числами. Так, Борель *показал, что если правую часть неравенства* (1) заменить на величину q^{-w}, то при $w > 1$ мера множества точек x, для которых получившееся неравенство имеет бесконечно много решений в числах $p, q \in Z$, равна нулю.

Пусть функция $\psi : N \to R^{+}$ монотонно убывает. Хинчин доказал, что для почти всех чисел $x \in R$ неравенство

$$|qx - p| < \psi(q)$$

имеет *конечное* или *бесконечное* множество решений в числах $p, q \in Z$, если соответственно *сходится* или *расходится* ряд $\sum_{h=1}^{\infty}\psi(h)$ Кроме того, он впервые рассмотрел задачу о приближениях зависимых величин, доказав, что при любом $\varepsilon > 0$ для почти всех $x \in R$ точка $(x, x^2, ..., x^n) \in R^n$ является ψ-приближаемой, если $\psi = \varepsilon q^{-n}$ т. е. неравенство $|a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + a_0| < \varepsilon H^{-n}$ где $H = \max_{1 \le i \le n}\{|a_i|\}$, имеет бесконечно много решений в векторах $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n, a_0) \in Z^{n+1}$. Изучение аппроксимационных свойств точек этой кривой сыграло главную роль в становлении *метрической теории диофантовых приближений зависимых величин*, в первую очередь в связи с решением *проблемы Малера*.

В 1932 г. К. Малер предложил классификацию действительных чисел, в которой существенную роль играли приближения нуля значениями многочленов $P \in Z[x]$ степени *n*. Он доказал, что при любом *w* > 4*n* и для почти всех (в смысле Меры Лебега) чисел $x \in R$ неравенство $|P(x)| < H^{-w}$ имеет конечное число решений в многочленах *P*, где *H* обозначает высоту многочлена *P*. Согласно этому результату почти все действительные числа имеют один и тот же тип аппроксимации. Далее он предположил, что условие на показатель *w* может быть ослаблено до $w > n$. В этом и состояла *гипотеза Малера*. Решить проблему Малера пытались многие ученые: Дж. Коксма, В. Левек, Й. Кубилюс, Ф. Каш, Б. Фолькман, В.М. Шмидт. В 1964 г. ее решил В.Г. Спринджук. Он рассмотрел эту проблему также в полях комплексных, *p*-адических чисел и формальных степенных рядов.

В современной терминологии проблему Малера можно рассматривать как диофантовы приближения зависимых величин $x, x^2, ..., x^n$. Другими словами, это диофантовы приближения на кривой Веронезе $(x, x^2, ..., x^n)$, которая является частным случаем многообразия общего вида размерности 1 в R^n. Впервые задача о диофантовых приближениях на подмногообразиях, заданных общими аналитическими условиями, была рассмотрена Шмидтом в 1964 г. Он обобщил теорему Кубилюса на произвольные достаточно гладкие кривые в R^2, у которых кривизна отлична от нуля почти в каждой точке.

Следуя терминологии Спринджука, можно сказать, что Шмидт доказал *экстремальность* невырожденных гладких кривых на плоскости. Понятие *экстремальности* означает, что почти все точки данного многообразия имеют максимально плохой порядок приближений, который в принципе достигается теоремой Дирихле. С момента доказательства теоремы Шмидта было найдено много интересных классов *экстремальных многообразий*.

В.Г. Спринджук при решении проблемы Малера рассматривал неравенство $|P(x)| < H^{-n-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. Здесь $P = P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in Z[x]$, степень $P = n$, H – высота многочлена P, $x \in R$. В 1966 г. А. Бейкер заменил функцию $H^{-n-\varepsilon}$ на $\psi^n(H)$, где функция $\psi : N \to R^{+}$ — монотонно убывающая и $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\psi(h) < \infty$. К настоящему времени для многочленов получен полный аналог теоремы Хинчина: неравенство

$$|P(x)| < H^{-n-1}\psi(H)$$

имеет *конечное* или *бесконечное* число решений для почти всех x в зависимости от *сходимости* или *расходимости* аппроксимационного ряда.

Метрическая теория диофантовых приближений хорошо развита для поля действительных чисел. В то же время в поле Q_p она развивалась не так активно до 70-х годов XX в., после которых появились работы Ю.В. Мельничука, И.Л. Мороцкой, Э.И. Ковалевской и других авторов.

В 1980 г. Спринджук сформулировал аналог проблемы Малера в поле $R^k \times C^l \times \prod_{p \in S} Q_p$, где $k \geq 0, l \geq 0$ — целые числа, S – конечное множество простых чисел и $n \geq k + 2l$. Она была решена в 1986 г. Ф.Ф. Желудевичем. После 1986 г. В.И. Берник, Д.В. Васильев, Э.И. Ковалевская получили аналоги теоремы Хинчина (в случае сходимости соответствующего ряда) для кривой $(x, x^2, \ldots, x^n)$ отдельно в поле R, поле C и Q_p соответственно. Таким образом, актуальной стала задача о совместных приближениях в различных метриках. Приведем некоторые результаты о совместных диофантовых приближениях в различных метриках, полученные сотрудниками кафедры.

Пусть $P = P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени $n, n \geq 2$. Пусть $\psi : N \to R^+$ – монотонно убывающая функция такая, что ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \psi(h) < \infty$. В поле $C \times Q_p$ определим меру μ как произведение меры Лебега μ_1 в C и меры Хаара μ_2 в Q_p, т. е. $\mu = \mu_1 \mu_2$. Рассмотрим систему неравенств

$$|P(z)| < H^{\lambda_1} \psi^{\gamma_1}(H), \qquad |P(w)|_p < H^{\lambda_2} \psi^{\gamma_2}(H) \tag{2}$$

где $(z, w) \in C \times Q_p$ и параметры удовлетворяют следующим условиям: $\lambda_1 \leq 1, \lambda_2 \leq 0$, $2\lambda_1 + \lambda_2 = -n + 2$, $\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0, 2\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.
Доказана теорема, что система неравенств (2) имеет только конечное число решений в многочленах P для почти всех (в смысле меры μ) точек $(z, w) \in C \times Q_p$.

Аналогичная теорема доказана для нормированных многочленов P третьей степени, т. е. многочленов со старшим коэффициентом, равным 1. Отметим, что также справедливы аналоги указанных теорем и для неоднородных приближений в разных метриках, т. е. когда в (2) вместо $P(z)$ и $P(w)$ рассматриваются $P(z) + d_1$ и $P(w) + d_2$, где (d_1, d_2) — любая точка из $C \times Q_p$.

В заключении укажем, что теоремы о диофантовых приближениях точек на многообразиях находят применение в математической физике. Они имеют непосредственное отношение к метрическим аспектам, возникающих там некорректных задач для дифференциальных уравнений в частных производных (так называемая проблема малых знаменателей).

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДРЕВЕСНОГО ТОПЛИВА В АГРАРНЫХ РАЙОНАХ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Н.Г. Королевич, *к.э.н., доцент*, **И.А. Оганезов**, *к.т.н., доцент*

В соответствии с Государственной комплексной программой модернизации основных производственных фондов белорусской энергетической системы в 2006-2010 годах в Беларуси построены 11 энергоисточников (мини-ТЭЦ), работающих на древесном топливе: в концерне «Беллесбумпром» — 3, Министерстве жилищно-коммунального хозяйства — 3 и Министерстве энергетики — 5. В настоящее время выполняются программы «Создание производств по изготовлению древесных топливных гранул (пеллет), древесного брикета и угля в Министерстве лесного хозяйства на 2009–2011 годы» и «Строительство энергоисточников на