

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА.  
МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением  
по аграрному техническому образованию  
в качестве учебно-методического пособия  
для студентов учреждений высшего образования  
по группе специальностей 74 06 Агроинженерия*

Минск  
БГАТУ  
2018

УДК 539.3/.6(07)  
ББК 22.251я7  
П75

Составители:

кандидат технических наук, доцент *В. Н. Основин*,  
кандидат технических наук, доцент *Е. В. Афанасенко*,  
старший преподаватель *О. В. Сокол*,  
старший преподаватель *Л. С. Жаркова*,  
старший преподаватель *П. В. Клавсуть*

Рецензенты:

кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости»  
Белорусского национального технического университета  
(кандидат технических наук, доцент,  
заведующий кафедрой *С. И. Зиневич*);  
кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой  
«Механика материалов и конструкций»  
УО «Белорусский государственный  
технологический университет» *А. В. Спиглазов*

**Прикладная механика. Механика материалов** : учебно-  
П75 методическое пособие / сост. : В. Н. Основин [и др.]. – Минск :  
БГАТУ, 2018. – 356 с.  
ISBN 978-985-519-919-0.

Представлены основные темы раздела, изложена теория расчетов на прочность – подбор сечений, выбор материалов, определение перемещений. Приведены методы определения внутренних силовых факторов и напряжений при простых и сложных видах нагружения.

Для студентов технических специальностей учреждений высшего образования и учащихся средних специальных учреждений образования технического профиля.

УДК 539.3/.6(07)  
ББК 22.251я7

ISBN 978-985-519-919-0

© БГАТУ, 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	9
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ПРИНЦИПЫ И МЕТОДЫ МЕХАНИКИ МАТЕРИАЛОВ .....	11
1.1. Основные критерии работоспособности элементов конструкций .....	12
1.2. Деформации и перемещения .....	14
1.3. Основные допущения, гипотезы и принципы .....	17
1.4. Реальный объект и расчетная схема (модель) .....	23
Контрольные вопросы .....	29
2. ВНЕШНИЕ СИЛЫ И ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ	
2.1. Внешние силы и их действие на конструкцию .....	31
2.2. Метод сечений и внутренние силовые факторы .....	36
2.3. Понятие о напряжениях в сечении элементов конструкции ...	41
2.4. Эпюры ВСФ .....	44
Контрольные вопросы .....	46
3. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ	
3.1. Статические испытания материалов на растяжение .....	47
3.2. Машинная диаграмма испытаний, характерные точки и участки на диаграмме .....	49
3.3. Понятие об особенностях деформирования и разрушения материалов в пластическом и в хрупком состояниях .....	52
3.4. Основные механические характеристики прочности материалов .....	54
3.5. Предельные и допускаемые напряжения материалов .....	56
3.6. Расчеты элементов конструкций на прочность по допускаемым напряжениям и нагрузкам. Коэффициент запаса прочности .....	59
Контрольные вопросы .....	62
4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ	
4.1. Напряженное состояние в точке деформированного тела	
4.1.1. Понятие о напряженном состоянии в точке .....	64

4.1.2. Закон парности касательных напряжений.....	67
4.1.3. Главные площадки и главные напряжения .....	68
4.1.4. Линейное напряженное состояние .....	69
4.1.5. Плоское напряженное состояние.....	71
4.1.6. Объемное напряженное состояние.....	74
4.1.7. Круг напряжений Мора .....	75
4.2. Деформированное состояние твердого тела .....	76
4.2.1. Компоненты деформированного состояния, главные оси и главные деформации.....	76
4.2.2. Линейные и угловые деформации твердого тела.....	78
4.2.3. Продольные и поперечные деформации.....	81
4.2.4. Обобщенный закон Гука .....	86
4.2.5. Объемная деформация при сложном напряженном состоянии .....	88
4.2.6. Удельная потенциальная энергия деформаций и ее составляющие .....	89
Контрольные вопросы.....	91
<b>5. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ</b>	
5.1. Эквивалентное напряженное состояние и эквивалентное напряжение.....	93
5.2. Теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности).....	95
5.3. Теория наибольших относительных удлинений (вторая теория прочности).....	96
5.4. Теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности).....	97
5.5. Теория удельной потенциальной энергии формоизменения (четвертая теория прочности) .....	98
5.6. Теория прочности Мора.....	102
Контрольные вопросы .....	105
<b>6. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ .....</b>	<b>106</b>
6.1. Продольная сила и ее зависимость от внешних сил .....	107
6.2. Напряжения при растяжении и сжатии в поперечных и наклонных сечениях.....	109
6.3. Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений.....	113
6.4. Условия прочности и жесткости при растяжении и сжатии.....	119

6.5. Статически неопределимые задачи растяжения и сжатия.....	121
6.5.1. Определение монтажных напряжений, вызванных технологическими неточностями.....	127
6.5.2. Определение температурных напряжений.....	128
6.5.3. Свойства статически неопределимых систем.....	129
Контрольные вопросы.....	130
<b>7. СДВИГ (СРЕЗ) И СМЯТИЕ .....</b>	<b>131</b>
7.1. Абсолютный и относительный сдвиги .....	133
7.2. Внутренние силовые факторы и напряжения при сдвиге. Закон Гука при сдвиге. Модуль сдвига.....	135
7.3. Связь между модулями упругости $E$ и $G$ и коэффициентом Пуассона.....	138
7.4. Расчет элементов конструкций на прочность при сдвиге.....	143
7.5. Расчет заклепочных и болтовых соединений на срез и смятие.....	145
Контрольные вопросы.....	150
<b>8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ.....</b>	<b>151</b>
8.1. Статические моменты площади сечения .....	152
8.2. Осевой, центробежный и полярный моменты инерции сечения.....	154
8.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе и повороте осей.....	155
8.4. Главные оси и главные моменты инерции. Радиусы инерции.....	159
8.5. Определение моментов инерции сечений простой формы.....	161
8.6. Определение главных центральных моментов инерции и положения главных центральных осей сложного (составного) сечения.....	165
8.7. Окружность инерции Мора.....	169
8.8. Моменты сопротивления сечений.....	173
Контрольные вопросы.....	174
<b>9. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ .....</b>	<b>175</b>
9.1. Виды изгибов балки .....	176
9.2. Внутренние силовые факторы при изгибе.....	179
9.3. Нормальные напряжения в поперечных сечениях балки при изгибе.....	182

9.4. Касательные напряжения при поперечном изгибе (формула Д. И. Журавского).....	187
9.5. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил при изгибе .....	193
9.6. Расчет балок на прочность при изгибе .....	198
9.7. Условия прочности при изгибе по нормальным и касательным напряжениям .....	201
9.8. Материалы и рациональные формы поперечного сечения балок при изгибе .....	204
9.9. Балки переменного сечения. Определение деформаций .....	206
9.10. Перемещения при изгибе, основные понятия. Дифференциальное уравнение упругой линии балки.....	212
9.11. Способы определения перемещений при изгибе.....	215
9.12. Расчет балок на жесткость при изгибе .....	224
9.13. Статически неопределимые балки при изгибе .....	224
Контрольные вопросы .....	227
10. КРУЧЕНИЕ .....	228
10.1. Внутренние силовые факторы при кручении .....	229
10.2. Напряжения в поперечных сечениях прямого круглого вала.....	231
10.3. Определение угла закручивания сечений вала при кручении.....	234
10.4. Потенциальная энергия упругой деформации при кручении.....	235
10.5. Условия прочности и жесткости при кручении. Допускаемые напряжения .....	237
10.6. Расчет валов по заданной мощности и частоте вращения .....	241
10.7. Статически неопределимые задачи при кручении	242
Контрольные вопросы .....	242
11. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ .....	243
11.1. Косой изгиб, основные понятия.....	245
11.1.1. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса. Нейтральная ось.....	246
11.1.2. Условия прочности при косом изгибе. Определение размеров и перемещений поперечного сечения бруса.....	248
11.2. Внецентренное растяжение и сжатие бруса. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса .....	251
11.2.1. Нейтральная ось, ее уравнение и свойства. Условия прочности.....	253

11.2.2. Понятие о ядре сечения при внецентренном растяжении и сжатии.....	256
11.3. Изгиб с кручением вала круглого поперечного сечения.....	257
11.3.1. Определение положения опасного сечения и диаметра вала с использованием третьей и четвертой теорий прочности.....	262
Контрольные вопросы.....	263
<b>12. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ</b>	
12.1. Устойчивость сжатых стержней прямолинейной формы.....	265
12.2. Определение критической силы. Формула Эйлера.....	267
12.3. Влияние способа закрепления концов стержня на величину критической силы.....	273
12.4. Пределы применимости формулы Эйлера.....	276
12.5. Устойчивость сжатых стержней за пределами пропорциональности. Формула Ясинского.....	278
12.6. Расчеты на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемых напряжений.....	280
12.7. Выбор материалов и рациональной формы поперечных сечений сжатых стержней.....	283
Контрольные вопросы.....	284
<b>13. ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ</b>	
13.1. Механизм усталостного разрушения деталей машин. Типы циклов напряжений и их параметры.....	286
13.2. Предел выносливости при симметричном цикле. Кривая усталости.....	291
13.3. Основные факторы, влияющие на предел выносливости материалов.....	293
13.4. Схематизация диаграммы усталостной прочности .....	297
13.5. Условия прочности и коэффициенты запаса прочности при различных циклах напряжений.....	298
13.6. Расчеты на прочность при плоском напряженном состоянии.....	301
13.7. Пути повышения сопротивления усталости конструкции.....	302
Контрольные вопросы.....	303
<b>14. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЖЕНИЯ</b> .....	305
14.1. Динамические нагрузки, вызывающие движение тела с ускорением.....	306

14.2. Критическая скорость вращения вала .....	308
14.3. Механические процессы, сопровождающие удар .....	311
14.4. Техническая теория удара. Динамический коэффициент.....	313
14.5. Анализ формулы динамического коэффициента .....	316
14.6. Удар при кручении. Определение напряжений при ударном воздействии.....	323
14.7. Условие прочности при ударе .....	325
14.8. Элементы рационального проектирования систем при ударном нагружении.....	326
Контрольные вопросы .....	327
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	328
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	329
Приложение А. Справочные данные .....	330
Приложение Б. Сортамент стандартных профилей .....	339
Приложение В. Механические характеристики материалов.....	348
Приложение Г. Геометрические характеристики плоских сечений.....	351
Приложение Д. Продольный изгиб прямых стержней .....	354



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Прикладная механика – комплексная дисциплина, являющаяся основной общетехнической подготовки инженеров немашиностроительных специальностей учреждений высшего образования. Эта дисциплина занимает особое место в системе подготовки инженеров, поскольку является завершающей в группе естественнонаучных дисциплин (математика, физика и др.) и связующей со специальными дисциплинами. Она включает в себя основные разделы курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Теория механизмов и машин» и «Детали машин и основы конструирования».

Тематический раздел дисциплины «Прикладная механика» – «*Статическое взаимодействие элементов конструкций*» представляет один из разделов теоретической механики – статику, методы которой используются для решения обширного класса инженерных задач, при механическом движении материальных тел или условиях их равновесия.

В разделе «*Механика материалов*», основанном на общих законах механики, на результатах экспериментального определения свойств материалов, изучается в простейшей постановке механика твердых деформируемых тел, то есть тел, которые при нагружении изменяют свою форму (деформируются). В механике материалов в основном при статическом нагружении определяются внутренние силы и законы их распределения, взаимные перемещения точек тела, а также устанавливаются критерии прочности, жесткости и устойчивости, которые позволяют определить безопасные размеры конструктивных элементов (проектировочный расчет) или допускаемую эксплуатационную нагрузку.

Раздел «*Основы исследования и построения механизмов*» базируется на основных положениях теории механизмов и машин – науки, изучающей общие методы структурного кинематического и динамического анализов механизмов, механику машин.

Несмотря на большое разнообразие машин и механизмов, используемых в различных областях техники, многие из них состоят из однотипных деталей и являются предметом изучения раздела «*Основы расчета и конструирования деталей машин*».

Для студентов технических специальностей важно представлять качественное и количественное влияние механических свойств материалов на работу различных элементов инженерных сооружений

и конструкций, деталей машин и приборов в сложных эксплуатационных условиях. Знание методов и способов выполнения расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций инженерных сооружений поможет специалисту с высшим образованием принимать научно-обоснованные решения.

Содержание учебного пособия по разделу 2 «Механика материалов» обеспечивает мировоззренческую направленность курса, соответствует методическим требованиям преподавания дисциплины, а также дает возможность использования его для самостоятельной работы студентов в овладении теоретическими и практическими навыками в выборе материалов и в проведении расчетов деталей машин, элементов конструкций и сооружений.

Введение в учебные программы высших технических учебных заведений новых дисциплин, отражающих современное состояние науки и техники, при ограниченных сроках обучения привело к существенному сокращению количества лекционных, практических и лабораторных часов по курсу «Механика материалов».

Восполнение появившихся в результате этого пробелов в знании студентами дисциплины «Механика материалов» может быть достигнуто в известной мере за счет самостоятельного изучения ими необходимых разделов этого важного для будущего инженера курса по соответствующим учебникам и учебным пособиям.

Учитывая, что в рекомендуемой учебной литературе приведены примеры подробного решения задач, а также задачи для самостоятельного решения по всем изучаемым темам, в настоящем учебном пособии рассматривается только теоретический материал по разделу «Механика материалов».

При подготовке учебного пособия использовались материалы, изложенные в существующих учебниках и методических пособиях по механике материалов, а также учтен опыт преподавания данной дисциплины на кафедре.

## **1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ПРИНЦИПЫ И МЕТОДЫ МЕХАНИКИ МАТЕРИАЛОВ**

Для того, чтобы элементы инженерных сооружений и деталей машин (элементы конструкций), не разрушаясь и не сильно деформируясь, могли выдерживать действующие на них нагрузки, они должны быть сделаны из подходящего материала и иметь соответствующие размеры.

Поэтому при проектировании элементов конструкций приходится выбирать материалы и размеры каждого элемента так, чтобы он надежно, без разрушения или искажения своей формы, сопротивлялся действию внешних сил. Правильное и рациональное выполнение расчетов элементов конструкций, работающих в сложных эксплуатационных условиях (под действием статических и динамических нагрузок, температуры, при длительной эксплуатации) является необходимым условием надежности и долговечности машин, механизмов и оборудования при одновременном снижении их материалоемкости.

Надежность конструкции обеспечивается, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при гарантированной долговечности. Ее экономичность в значительной мере определяется расходом материала, применением менее дефицитных конструктивных материалов, возможностью изготовления деталей по наиболее прогрессивным технологиям.

Таким образом, два важнейших требования, предъявляемых к конструкции, – надежность и экономичность (то есть прочность, жесткость, устойчивость при наименьшей затрате материала) – содержат в себе противоречие, поскольку являются по существу противоположными показателями. Ведь повышение, например, прочности достигается чаще всего увеличением поперечных размеров элементов конструкций, в то время как экономия материалов заставляет стремиться к уменьшению тех же самых размеров. В связи с этим, два этих противоречивых требования обусловили разработку методов расчета надежных и наиболее экономичных в отношении веса и размеров различных элементов конструкций.

## 1.1. Основные критерии работоспособности элементов конструкций

Совершенство элементов конструкций оценивают по их надежности и экономичности. При этом под *надежностью* понимают вероятность безотказного выполнения определенных функций в течение заданного срока службы без внеплановых ремонтов. *Экономичность* определяется стоимостью материала, затратами на производство и эксплуатацию.

Для того чтобы быть надежными, элементы прежде всего должны быть работоспособными, то есть находиться в таком состоянии, при котором они способны выполнять заданные функции с параметрами, установленными требованиями нормативно-технической документации (технические условия, стандарты и т. п.).

При конструировании элементов конструкций их работоспособность обеспечивают главным образом выбором соответствующего материала и расчетом размеров изделия по основным критериям работоспособности.

Основными критериями работоспособности элементов конструкций, с точки зрения механики материалов, являются:

- прочность;
- жесткость;
- устойчивость.

Значение того или иного критерия для данного элемента зависит от его назначения и условий работы.

*Прочность* – способность материала элемента конструкции сопротивляться внешнему воздействию, не разрушаясь. Прочность является главным критерием работоспособности, так как непрочные элементы не могут работать. Расчеты на прочность позволяют определить форму и размеры элемента при заданных нагрузках с наименьшей затратой материала. В расчетах оценка прочности производится путем сравнения наибольших рабочих нагрузок  $F_p$  с их допускаемыми значениями  $[F]$ :

$$F_p \leq [F]. \quad (1.1)$$

*Жесткость* – характеристика элемента конструкции, определяющая его способность сопротивляться деформации (растяжению, изгибу, кручению и т. д.). Расчеты на жесткость показывают, в каких пределах возможно изменение формы и размеров конструкции и ее элементов при внешнем воздействии. В расчетах оценка жесткости производится путем сопоставления расчетных деформаций (удлинений или укорочений)  $\Delta l$ , прогибов  $y$ , углов поворота  $\theta$  и углов закручивания  $\varphi$  с допускаемыми:

$$\Delta l \leq [\Delta l], \quad y \leq [y], \quad \theta \leq [\theta], \quad \varphi \leq [\varphi]. \quad (1.2)$$

*Устойчивостью* называется способность элемента конструкции, находящегося под действием сил в равновесии, после незначительного отклонения возвращаться в положение равновесия. Расчеты на устойчивость предотвращают возможность искривления и внезапной потери устойчивости длинных и тонких элементов. При расчетах на устойчивость действующая нагрузка  $F$  не должна превышать величины допускаемой критической нагрузки  $[F_{кр}]$ :

$$F \leq [F_{кр}], \quad (1.3)$$

где  $[F_{кр}] = \frac{F_{кр}}{n_y}$  – критическая нагрузка, принимаемая для элемента конструкции предельной;  
 $n_y$  – коэффициент безопасности по устойчивости.

При этом все допускаемые величины записываются в квадратных скобках, а их значения устанавливаются на основе практики эксплуатации однотипных элементов конструкций.

Таким образом, *механика материалов* – наука, разрабатывающая инженерные методы расчета на прочность, жесткость и устойчивость, на основании которых устанавливаются рациональные формы и размеры элементов конструкций, обеспечивающие их надежность и экономичность.

В свою очередь, методы расчета в механике материалов базируются на упрощенных гипотезах, и допущениях, которые, с одной

стороны, позволяют решать широкий круг инженерных задач, а с другой, получать приемлемые по точности результаты расчетов.

При выполнении указанных методов расчета необходимо стремиться к максимальной экономии материала, то есть к достаточным, но не завышенным размерам деталей машин и механизмов.

Таким образом, механика материалов имеет целью создать практически приемлемые, простые приемы расчета типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций.

При этом главной задачей курса является формирование знаний для применения математического аппарата при решении прикладных задач, осмысления полученных численных результатов и поиска выбора наиболее оптимальных конструктивных решений. Конечная цель науки механики материалов – определение размеров элементов сооружений, обеспечивающих его работоспособность при минимальном расходе материалов. То есть данная дисциплина является базовой для формирования инженерного мышления и подготовки кадров высшей квалификации по техническим специальностям.

## 1.2. Деформации и перемещения

Все существующие в природе материалы не являются абсолютно твердыми и под действием внешних сил в какой-то мере изменяют свою форму, то есть деформируются. Это существенно влияет на законы распределения внутренних сил в напряженном теле, хотя само по себе изменение формы является, как правило, незначительным и обнаруживается в большинстве случаев только при помощи чувствительных инструментов.

Например, под действием внешней силы  $F$  точки твердого тела перемещаются в пространстве. Вектор  $\vec{V}$ , имеющий начало в точке  $A$  недеформированного тела, а конец в той же точке  $A'$  деформированного тела, называется вектором *полного перемещения точки  $A$*  (рис. 1.1). Его проекции на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  называются *осевыми перемещениями* и обозначаются  $v$ ,  $u$  и  $w$  соответственно.

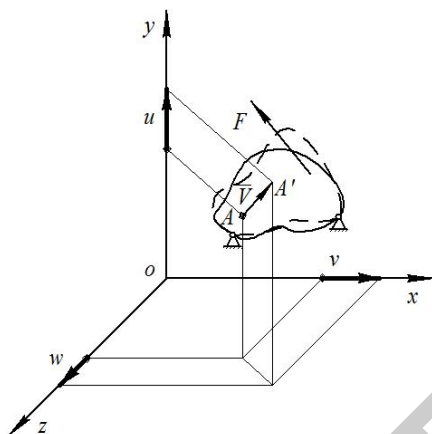


Рис. 1.1. Схема к вопросу перемещения точки при деформации тела

Для того, чтобы охарактеризовать интенсивность изменения формы и размеров тела, рассмотрим точки  $A$  и  $B$  его недеформированного состояния, расположенные на расстоянии  $l$  друг от друга (рис. 1.2).

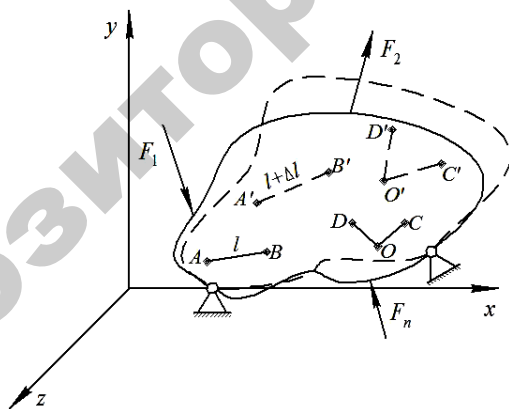


Рис. 1.2. Схема к анализу деформаций нагруженного тела

Пусть в результате изменения формы тела эти точки переместились в положения  $A'$  и  $B'$  соответственно, а расстояние между ними увеличилось на величину  $\Delta l$  и составило  $l + \Delta l$ .

Величина  $\Delta l$  (приращение длины отрезка  $AB$ ) является *абсолютной линейной деформацией* и зависит от нагрузки, жесткости материала и начальных размеров тела.

Предел отношения приращения длины отрезка  $\Delta l$  к его первоначальной длине называется *относительной линейной деформацией* в точке  $A$  по направлению  $AB$ :

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta l}{l} \right) = \varepsilon_{AB}. \quad (1.4)$$

Если рассматривать деформации по направлениям координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то в обозначения соответствующих проекций относительно линейной деформации вводятся индексы  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ .

Относительные линейные деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  характеризуют изменения объема тела в процессе деформирования, а формоизменения тела характеризуются *угловыми деформациями*. Для их определения рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном состоянии двумя отрезками  $OD$  и  $OC$  (рис. 1.2). При действии внешних сил указанный угол  $DOC$  изменится и примет новое значение  $D'O'C'$ . Величина

$$\lim_{OC \rightarrow 0; OD \rightarrow 0} (\angle DOC - \angle D'O'C') = \gamma_{DOC} \quad (1.5)$$

называется *угловой деформацией*, или *углом сдвига* в точке  $O$  в плоскости  $DOC$ . Относительно координат осей углы сдвига обозначаются  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ .

В общем случае в точке имеют место три линейных и три угловых компонента деформации. Совокупность линейных и угловых деформаций по различным плоскостям, проходящим через данную точку, характеризует *деформированное состояние тела* в этой точке, более полное рассмотрение которого будет приведено в главе 4.

После прекращения действия внешних сил вызванная ими деформация может полностью или частично исчезнуть. Способность материала устранять деформацию после прекращения действия внешних сил называется *упругостью*. Деформация, исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется *упругой*. Деформация, не исчезающая после прекращения действия внешних



сил, называется *остаточной* или *пластической*. Способность материала иметь значительные остаточные деформации, не разрушаясь при этом, носит название *пластичности*, а сами материалы называются *пластичными*. К числу таких материалов относится низкоуглеродистая сталь, алюминий, медь, латунь и др.

Материалы, обладающие весьма малой пластичностью, называются *хрупкими*. В отличие от пластичных, хрупкие материалы разрушаются без заметных остаточных деформаций. К хрупким материалам относят чугун, твердые сплавы, стекло, кирпич и др.

*Перемещения* неразрывно связаны с деформациями как линейными, так и угловыми. Перемещаться могут отдельные точки, линии, сечения, участки конструкции. Линейное перемещение характеризуется расстоянием между новым и прежним положением точек, сечений и т. д., угловое – изменением положения линий, сечений и др. Линейное перемещение, как и абсолютная линейная деформация, имеет размерность длины, угловое, как и угловая деформация, – размерность угла.

Но перемещения рассматриваемой точки зависят как от деформации всех нагруженных областей тела, так и от жесткого целого ненагруженных областей. Поэтому перемещения не могут характеризовать степень деформирования в окрестности рассматриваемой точки. В отдельных случаях их величины могут совпадать (растяжение стержня), но в общем случае – это разные вещи.

Представим себе канат, прикрепленный к потолку. По канату на некоторую высоту поднялся человек. Очевидно, что под действием веса человека (пренебрегая весом каната) деформируется (растягивается) только верхняя часть каната, заключенная между потолком и местом, где находится человек. Нижняя часть каната не деформируется, а перемещается как твердое тело. Следовательно, не всегда перемещения сечений какого-то участка стержня непосредственно связаны с его деформацией.

### **1.3. Основные допущения, гипотезы и принципы**

В процессе изготовления заготовок и получения из них готовых деталей в материале появляются различные, не поддающиеся учету поверхностные и внутренние дефекты. К ним относятся раковины, трещины и неоднородность структуры в литых деталях, волосовины

у штампованных деталей, первоначальные внутренние усилия, вызванные неравномерностью остывания литых и кованных деталей, неравномерностью высыхания и неоднородностью древесины, неравномерностью затвердевания и неоднородностью бетона и т. д.

Так как закономерности возникновения указанных явлений установить невозможно, то в механике материалов принимается ряд допущений, которые позволяют исключить из рассмотрения эти явления. В результате получают расчетные схемы, которые являются практически общими для большинства инженерных конструкций. Экспериментальная проверка выводов, полученных на основании приведенных ниже допущений и гипотез, показывает, что эти выводы вполне пригодны для применения в практике инженерных расчетов.

Основные допущения, касающиеся физико-механических свойств материалов и относящиеся к первой группе гипотез приведены ниже.

1. *Однородность и изотропность материалов.* Материал предполагается однородным и изотропным, в том случае, когда в любом объеме и в любом направлении свойства материала считаются одинаковыми. Это допущение достаточно обосновано для металлокристаллических материалов, например для стали, и менее обосновано для материалов типа чугуна. При ярко выраженной анизотропии, например для армированных материалов или древесины, свойство изотропности неприемлемо.

2. *Сплошность (непрерывность) материала.* Предполагается, что материал полностью заполняет весь объем тела без каких-либо пустот, то есть тело рассматривается как сплошная среда. Деформации точек тела считаются непрерывными функциями координат. Атомистическая теория дискретного строения вещества во внимание не принимается, так как рассматриваются объекты с размерами, существенно превышающими межатомные расстояния. Допущение о сплошности тела можно рассматривать как следствие допущения об однородности материала.

3. *Абсолютная упругость материалов.* Несмотря на то, что в природе абсолютно упругих тел нет, в расчетах допускают, что до определенных пределов нагружения материал обладает абсолютной упругостью, то есть полностью устраняется деформация, вызванная внешними силами после прекращения их действия.

Предпосылка об абсолютной упругости материала используется при решении большинства задач механики материалов.

4. *Ненапряженность без нагрузки.* Неравномерность остывания стальных деталей при сварке, закалке, литье, неравномерность высыхания деревянных и затвердевания бетонных изделий вызывает появление внутренних усилий, которые создают напряженное состояние еще до приложения внешних сил. Однако при отсутствии внешних сил материал считают ненапряженным, то есть не учитывают внутренние силы, возникающие при изготовлении деталей.

Принятые допущения, связанные с физико-механическими свойствами материалов, дают право на использование дифференциального и интегрального исчисления в расчетах элементов инженерных конструкций.

Рассмотрим теперь допущения и гипотезы, связанные с характером *линейных и угловых деформаций* и соответствующими им *перемещениями* – изменениями координат точек деталей машин и механизмов (вторая группа допущений).

1. *Допущение о малости перемещений, или принцип начальных размеров.* Согласно этому допущению, деформации тела и связанные с ними перемещения точек и сечений весьма малы по сравнению с размерами тела. На основании этого мы будем пренебрегать изменениями в расположении внешних сил, вызванными деформацией. Так, например, не будем принимать во внимание смещение  $\Delta_1$  линии действия силы  $F_1$ , показанное на рис. 1.3. Если забыть об этом принципе, то теряется право на применение правил теоретической механики (например, при определении реакций связей).

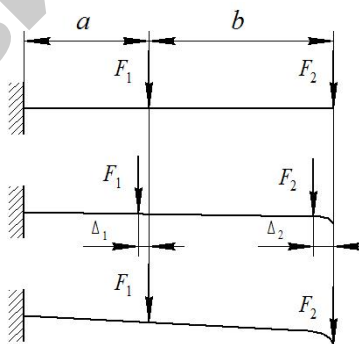


Рис. 1.3. Схема к допущению о малости перемещений

2. *Гипотеза о линейной деформируемости тел.* В 1660 г. английский ученый Роберт Гук, современник Исаака Ньютона, сформулировал закон, устанавливающий связь между нагрузкой и деформацией и имеющий исключительно важное значение для механики материалов (рис. 1.4).

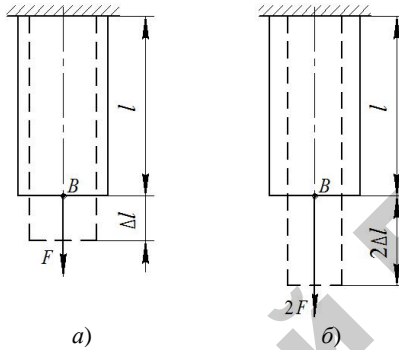


Рис. 1.4. К вопросу о связи между нагрузкой и деформацией

3. *Гипотеза об отсутствии первоначальных внутренних усилий.* Согласно этой гипотезе, предполагается, что если нет причин, вызывающих деформацию тела (нагружение, изменение температуры и т. п.), то во всех его точках *внутренние усилия равны нулю*. Таким образом, не принимаются во внимание силы взаимодействия между частицами нагруженного тела.

4. *Гипотеза плоских сечений.* Поперечные сечения, проведенные в теле, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки (рис. 1.5). Они остаются нормальными к оси стержня в процессе деформации. Эта гипотеза принадлежит Бернулли и оправдывается опытом в том случае, когда тело имеет продолговатую форму.

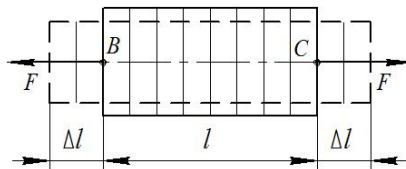


Рис. 1.5. Схема к гипотезе плоских сечений Бернулли

5. *Принцип независимости действия сил.* Эффект от суммы воздействий равен сумме эффектов от каждого воздействия. В соответствии с этим принципом перемещения и деформации нагруженного тела считаются не зависящими от порядка приложения сил. В соответствии с принципом независимости действия сил (принципом суперпозиции) результат воздействия на конструкцию нескольких сил равен алгебраической сумме воздействий каждой силы в отдельности (рис. 1.6).

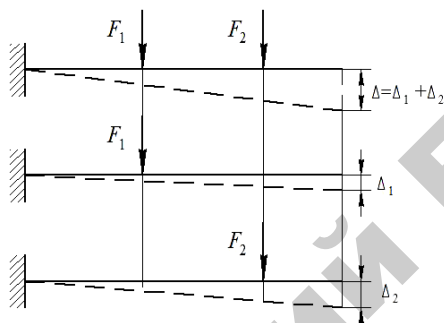


Рис. 1.6. К принципу независимости действия сил

6. *Принцип Сен-Венана.* В точках тела, достаточно удаленных от места приложения внешних нагрузок, внутренние силы весьма мало зависят от способа приложения этих нагрузок. Такой принцип позволяет заменить одну систему сил статически ей эквивалентной (перенос силы с верхней части балки на нижнюю, замена сосредоточенной силы на группу распределенных и наоборот). Принцип Сен-Венана неприменим, когда речь идет о местных напряжениях.

Перечисленные выше допущения и гипотезы позволяют решать широкий круг задач по расчету на прочность, жесткость и устойчивость. Однако некоторые положения, приемлемые в статике твердого тела при решении задач на равновесие тел, не могут применяться в механике материалов, где твердое тело рассматривается как упругое, а не абсолютно твердое.

Рассмотрим некоторые положения.

1. *Перенос силы по линии ее действия.* В механике материалов это не допускается, так как такой перенос изменяет характер и величину деформации тела. Стержень  $AB$ , растягиваемый силой  $F$ , приложенной в точке  $A$  (рис. 1.7,  $a$ ), получит большее удлинение, чем после переноса этой силы в точку  $C$  (рис. 1.7,  $b$ ).

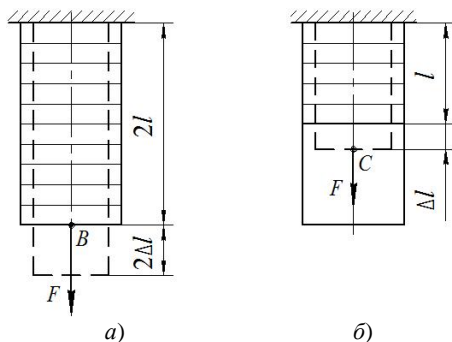


Рис. 1.7. О недопустимости переноса силы по линии ее действия

2. Замена системы сил ее равнодействующей. Это недопустимо, поскольку в корне меняет картину и величину деформации. На рис. 1.8, а изображена двухопорная балка, к концам которой приложены силы  $F$ , изгибающие ее выпуклостью вверх. Замена сил равнодействующей  $R = 2F$  (рис. 1.8, б) вызовет в балке противоположную деформацию. Это же относится и к переносу пары сил в плоскости ее действия.

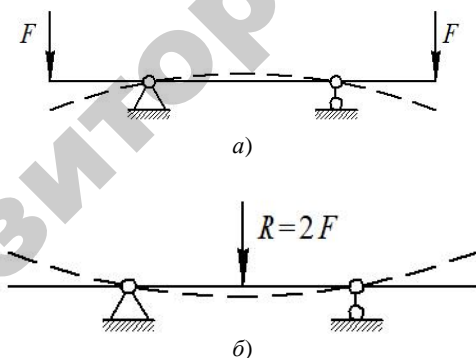


Рис. 1.8. О недопустимости замены системы сил ее равнодействующей

Таким образом, чтобы построить простую и удобную для инженерной практики теорию расчетов элементов конструкций, в механике материалов вводится ряд вышеприведенных допущений и гипотез. Они проходят красной нитью по всему курсу и лежат в основе решения большинства задач механики материалов.

## 1.4. Реальный объект и расчетная схема (модель)

В механике материалов, как и во всех естественных науках, исследование вопроса о прочности реального объекта начинается с выбора расчетной схемы. Приступая к расчету конструкции, следует прежде всего установить, что в данном случае является существенным и что несущественно, и отбросить все малозначащие факторы, которые заметным образом не влияют на расчет конструкции в целом, то есть необходимо произвести схематизацию конструкции и заменить ее расчетной схемой. Но прежде чем поставить задачу на путь математических выкладок, приходится зачастую много и серьезно думать над тем, как правильно в рассматриваемом объекте отделить существенное от несущественного.

К примеру, если необходимо произвести расчет на прочность троса лебедки (рис. 1.9, а), то в первую очередь надо учесть вес поднимаемого груза, ускорение, с которым он движется, а при большой высоте, возможно, и вес самого каната. В тоже время заведомо надо отбросить влияние таких несущественных факторов, как форма груза, аэродинамическое сопротивление, возникающее при подъеме груза, изменение температуры и барометрического давления с высотой, а также других факторов. Схема троса, нагруженного в конце силой, является весьма распространенной и встречается в большом числе практических случаев расчета на прочность (рис. 1.9, б).

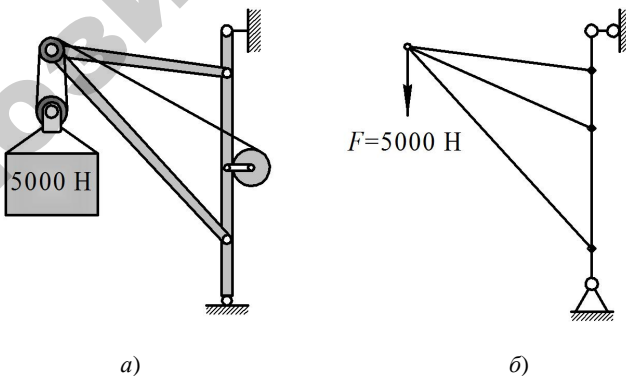


Рис. 1.9. К выбору расчетной схемы поднимаемого груза тросом лебедки

Тогда, реальный объект, освобожденный от несущественных факторов, не влияющих заметным образом на работу системы в целом, называется *расчетной схемой*. Правильный выбор расчетной схемы является главным при расчете элемента конструкции, так как с этого начинается исследование его на прочность, жесткость и устойчивость.

Переход от реального объекта к расчетной схеме осуществляется путем схематизации его, то есть освобождения от несущественных факторов, которые не могут сколько-нибудь заметным образом повлиять на работу данного объекта в целом.

Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в механике материалов прибегать к ранее приведенным упрощающим гипотезам – то есть допущениям, которые оправдывают в дальнейшем путем сопоставления расчетных данных с экспериментом.

Схематически процесс перехода от реального объекта к расчетной схеме представлен на рис. 1.10.

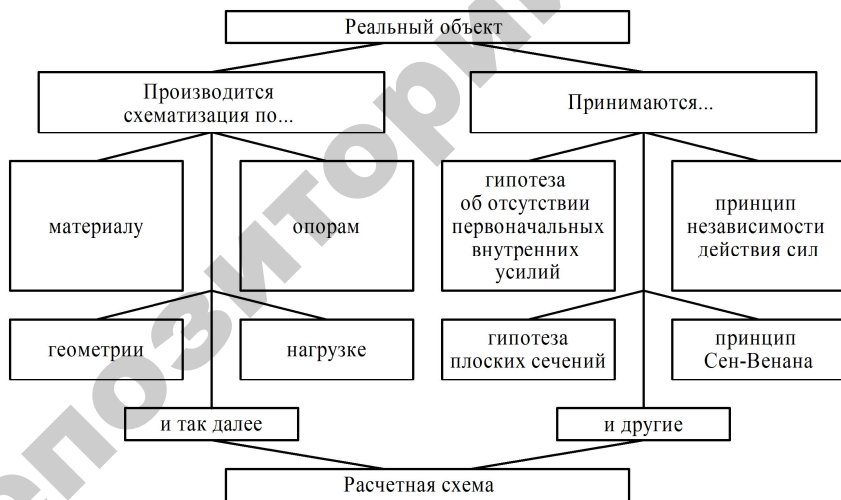


Рис. 1.10. Схематический процесс перехода от реального объекта к расчетной схеме

Такого рода упрощения задачи совершенно необходимы, так как решение с полным учетом всех свойств реального объекта является принципиально невозможным в силу их очевидной неисчерпаемости.



Остановимся подробнее на отдельных этапах процесса превращения реального объекта в расчетную схему.

*Схематизация по материалу* производится в соответствии с ранее представленными основными допущениями, касающимися физико-механических свойств материалов (однородности и изотропности, сплошности, абсолютной упругости, ненапряженности без нагрузки).

Элементы конструкций имеют разнообразную форму. Поэтому при расчете их геометрическую форму приводят к простейшей схеме *бруса, оболочки, пластины и массива*, то есть производится *схематизация геометрии* реального объекта.

*Брусом* называется тело, два измерения которого малы по сравнению с третьим. В зависимости от формы геометрической оси, брусья делятся на прямые и кривые (рис. 1.11). Примерами прямых брусьев являются болты, оси, валы, балки и стержни мостовых и козловых кранов, валы редукторов и коробок передач, оси транспортных средств. Примерами кривых брусьев служат грузоподъемные крюки, звенья сварных цепей, струбцины, коленчатые валы, станины станков. Брусья могут иметь разные поперечные сечения: в виде квадрата, круга, прямоугольника, двутавра, швеллера и т. д. Они являются основными элементами конструкций и деталей машин.



Рис. 1.11. Прямые и кривые элементы конструкций в виде бруса

Под *оболочкой* понимается тело, ограниченное криволинейной поверхностью, одно измерение которого (толщина) мало по сравнению с двумя другими. Например, стенки круглых резервуаров,

трубы, обшивки подводных лодок, кровли современных спортивных сооружений и др. Оболочки могут иметь цилиндрическую (рис. 1.12, а), коническую (рис. 1.12, б) или сферическую форму (рис. 1.12, в).

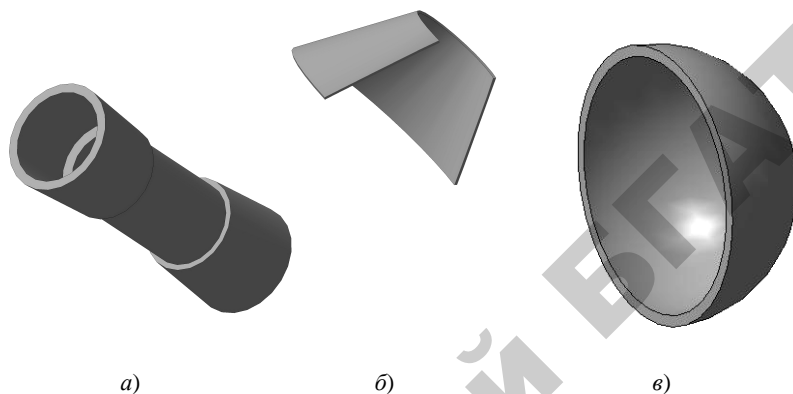


Рис. 1.12. Различные виды оболочек

*Пластина* – оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость. Встречаются пластины прямоугольные (рис. 1.13, а) и круглые (рис. 1.13, б). Примерами пластин могут служить обшивка корабля, самолета, мембраны, плоские днища и т. д.

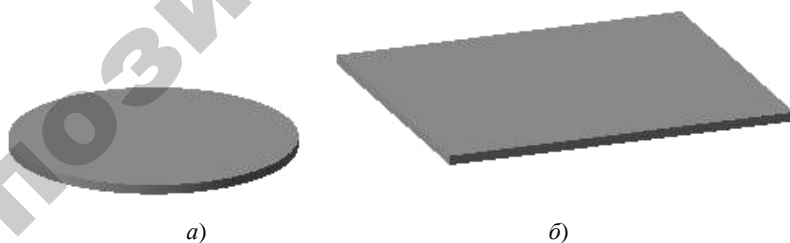


Рис. 1.13. Прямоугольные и круглые пластины

*Массивом* называется тело, все три измерения которого мало отличаются друг от друга (рис. 1.14), например, сплошная опора моста, фундамент здания, станина металлорежущего станка и т. д.

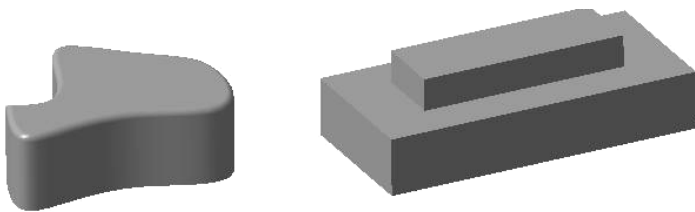


Рис. 1.14. Виды массивных элементов

*Схематизация по опорным устройствам.* Элементы конструкций должны занимать определенные положения в пространстве и располагаться на определенных расстояниях друг от друга. Для этого их положение фиксируется связями, которые могут быть упругими или жесткими. Упругие связи обладают деформациями, соизмеримыми с деформациями закрепляемого элемента. Деформациями жестких связей пренебрегают в виду их незначительности.

Точки приложения связей называют *опорными точками* или просто *опорами*. В одной и той же опорной точке может быть приложено несколько связей. На рис. 1.15, а показаны шарнирно-подвижная и шарнирно-неподвижная опоры расчетной схемы моста, а на рис. 1.15, б – жестко закрепленная опора.

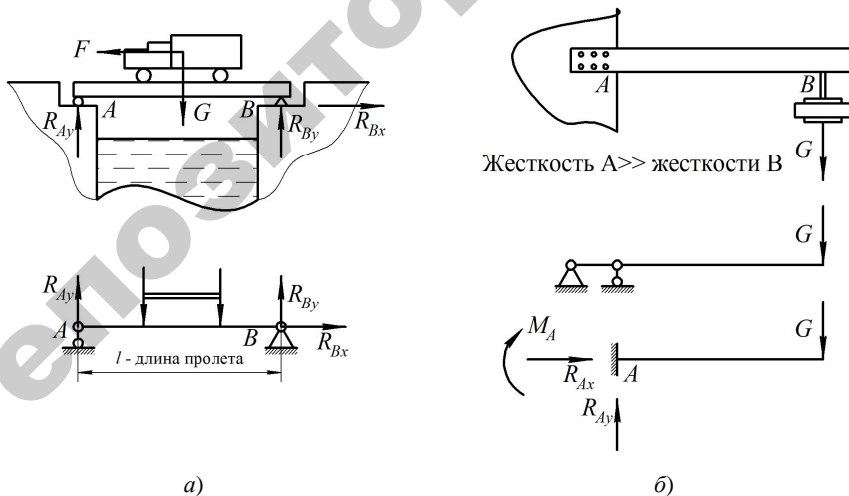


Рис. 1.15. Расчетные схемы: а – моста, б – жесткого закрепления

*Шарнирно-подвижная опора* имеет одну, *шарнирно-неподвижная* – две, а *жестко закрепленная* – три связи. Каждой связи, приложенной в опоре, соответствует опорная реакция, направленная по направлению действия связи.

Шарнирно-подвижная опора допускает вращение вокруг оси, проходящей через центр шарнира опоры  $A$  и поступательное перемещение по линии  $AB$  длиной  $l$ . В шарнирно-подвижной опоре возникает реакция  $R_{Ay}$ , нормальная к направлению перемещения катков.

Шарнирно-неподвижная опора не обеспечивает вращение шарнира опоры  $B$  и не допускает линейных перемещений. В шарнирно-неподвижной опоре возникает наклонная реакция, которая представлена горизонтальной и вертикальной составляющими  $R_{Bx}$  и  $R_{By}$ .

Жестко закрепленная опора не допускает каких-либо линейных перемещений и поворота. В защемлении возникают две составляющие  $R_{Ay}$ ,  $R_{Ax}$  и реактивный момент  $M_A$ . Жесткое защемление эквивалентно трем опорным стержням.

*Схематизация по нагрузке.* Распределенные нагрузки могут быть *поверхностными* (давление ветра, воды на стенку) или *объемными* (сила тяжести, силы инерции). Если давление  $q_1$  ( $\text{Н/м}^2$ ) передается на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента ( $a \ll l$ ), то его на основании принципа Сен-Венана (см. выше) можно привести к *сосредоточенной силе*  $F$  (рис. 1.16).

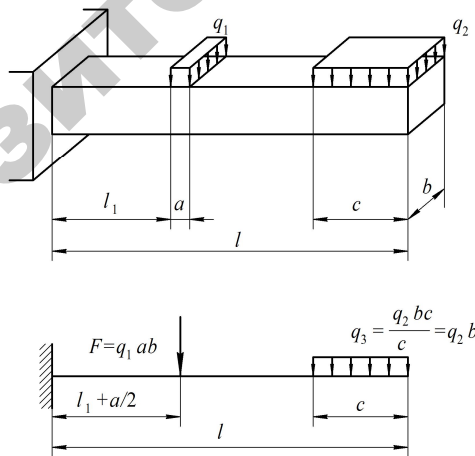


Рис. 1.16. Схематизация реального объекта по нагрузке

При переходе к расчетной схеме от реального объекта (см. рис. 1.16) принимаются допущения и гипотезы, связанные с характером линейных и угловых деформаций и соответствующими им перемещениями, изменениями координат точек элементов конструкций (гипотеза об отсутствии первоначальных внутренних усилий, гипотеза плоских сечений, принцип независимости действия сил и др.).

Указанные допущения и гипотезы подробно изложены выше (параграф 1.3).

Таким образом, расчетная схема выбирается так, чтобы существенно упростить расчет, не искажая действительной картины работы конструкции или детали. Расчетную схему же составляют в следующем порядке:

- 1) разбивают конструкцию на простые элементы;
- 2) каждый простой элемент конструкции заменяют соответствующим расчетным элементом (брусом, пластиной, оболочкой, массивным телом);
- 3) выбирают схему опорных частей элемента конструкции (подвижный и неподвижный шарнир, жесткая заделка и др.);
- 4) выбирают вариант соединения элементов конструкции между собой и с опорными частями (жесткий или шарнирный).

### **Контрольные вопросы**

1. Какие требования предъявляются к элементам инженерных сооружений и конструкций?
2. Что изучает механика материалов и какие инженерные методы расчета она разрабатывает?
3. Дайте определение прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций?
4. Что позволяют определять расчеты на прочность, жесткость и устойчивость?
5. В чем различие между недеформированным телом и деформированным?
6. Что представляет собой абсолютная линейная деформация и относительная?

7. Дайте определение упругой и пластической деформациям?
8. Охарактеризуйте основные допущения, касающиеся физико-механических свойств материалов.
9. Какие основные допущения и гипотезы, связанные с характером линейных и угловых деформаций и соответствующими им перемещениями, используются в механике материалов?
10. Что такое расчетная схема и как производится ее выбор?
11. Как производится переход от реального объекта к расчетной схеме?
12. Охарактеризуйте схематизацию геометрии реального объекта.
13. Назовите основные виды опорных закреплений.

## 2. ВНЕШНИЕ СИЛЫ И ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

Каждый элемент конструкции (сооружения или машины) должен работать без угрозы поломки или опасного изменения размеров и формы под действием внешних сил. Размеры элементов конструкции в большинстве случаев определяет расчет на прочность, который исходит из условия, что при действии заданных нагрузок должна быть исключена опасность разрушения.

В любой работающей конструкции все элементы ее испытывают действие нагрузок и в процессе эксплуатации (конечно, в разной степени) изменяют свою форму и размеры.

Элементов в конструкции много, и на каждые из них действуют разнообразныe нагрузки. Одни нагрузки растягивают или сжимают детали, другие изгибают, третьи скручивают. Многие элементы подвергаются сложному воздействию нагрузок, которые одновременно растягивают и изгибают, скручивают и сжимают детали. Не все нагрузки, действующие на элементы, постоянны по величине и направлению. Поэтому действие всех сил должно быть учтено при конструировании. Ведь от того, насколько правильно будут рассчитаны элементы конструкции на прочность, зависит не только целостность ее, но и безопасность людей, обслуживающих и эксплуатирующих данную конструкцию.

Чем точнее будут установлены величины внешних сил, действующих на элементы конструкции, тем рациональнее можно предусмотреть запас ее прочности и, следовательно, тем полнее будет использован материал для ее изготовления.

### 2.1. Внешние силы и их действие на конструкцию

В процессе эксплуатации конструкции их элементы воспринимают и передают друг другу различные *нагрузки*, то есть силовые воздействия, вызывающие изменение внутренних сил и деформации элементов и называемые *внешними силами*. Если они известны в начальной стадии расчета, то их называют *активными силами*, если не известны – *реактивными силами* или просто *реакциями*.

Активные внешние силы представляют собой различные виды нагрузок (включая собственный вес), действующих на тело. Эти силы различаются по способу приложения, времени и характеру действия. По способу приложения активные силы подразделяют на сосредоточенные и распределенные.

*Сосредоточенные* силы передаются на тело через очень малую площадь действия (рис. 2.1, а и б). Такую силу обычно считают приложенной в точке и обозначают стрелкой и буквой  $F$ .

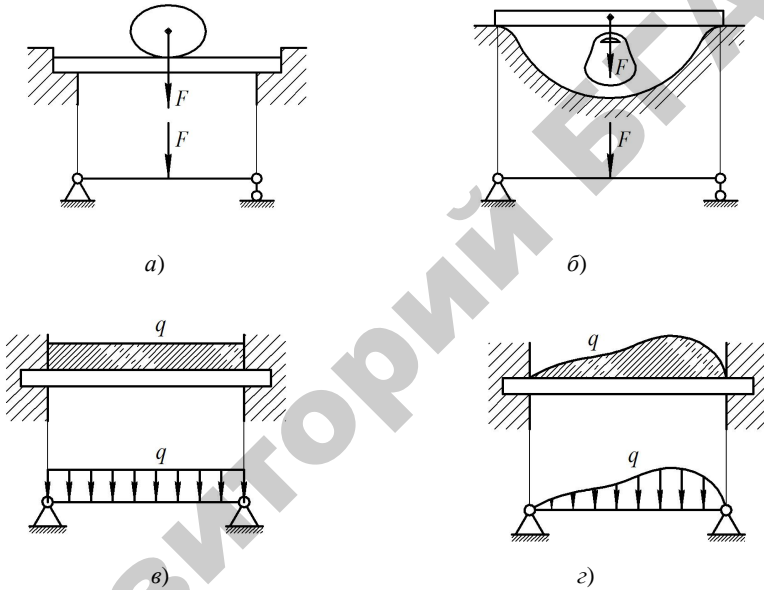


Рис. 2.1. Сосредоточенные и распределенные силы, действующие на конструкцию

*Распределенные* силы или нагрузки приложены к телу непрерывно по всей его площади или длине. Такие нагрузки могут быть распределенными, как равномерно (рис. 2.1, в), так и неравномерно (рис.2.1, г). Если полную величину нагрузки  $F$ , Н, разделить на площадь  $A$ ,  $m^2$ , на которую она действует, то получится нагрузка, приходящаяся на единицу площади действия (рис. 2.2, а). Эту нагрузку называют *интенсивностью распределения* и обозначают через  $p$ ,  $H/m^2$ :



$$p = \frac{F}{A}. \quad (2.1)$$

При расчете балок часто приходится пользоваться понятием так называемой *погонной интенсивности* нагрузки  $q$ , распределенной на 1 погонный метр длины балки. Если полная распределенная нагрузка равна  $F$ , Н, а расстояние между осями соседних опор балки  $l$ , м, то погонная интенсивность  $q = F / l$ , Н/м (рис. 2.2, б).

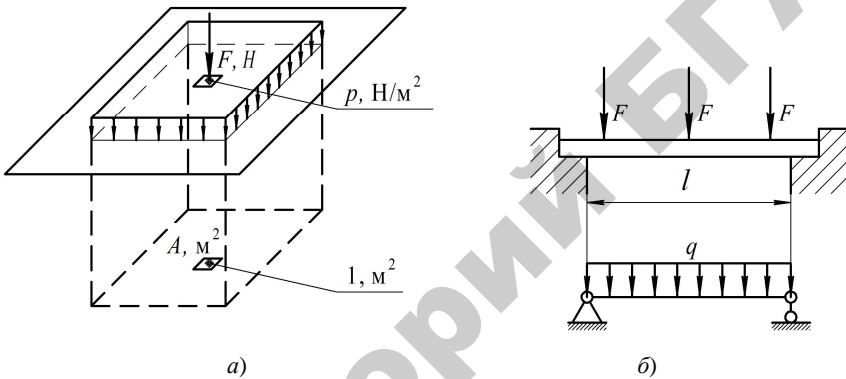


Рис. 2.2. Интенсивность распределения сил и погонная интенсивность нагрузки

При расчетах реальных деформируемых тел в механике материалов заменять распределенную нагрузку сосредоточенной не следует.

По времени действия активные силы делятся на два вида: *постоянные*, к которым относят собственный вес сооружения, стационарное оборудование и т. д., и *временные* – снег, ветер, переносное оборудование, подвижные нагрузки (толпа людей, поезд, автотранспорт и т. п.).

По характеру действия активные силы делят на *статические*, спокойно приложенные и возрастающие постепенно от нуля до своего конечного значения (снег, собственный вес и т. д.), и *динамические*, действующие мгновенно, в виде удара или толчка.

При действии статических нагрузок на конструкцию все ее элементы (части) находятся в равновесии и их расчет проводится на прочность. При динамическом действии нагрузки возникают значительные вибрации или ускорения элементов конструкции, которые постепенно затухают после снятия динамических нагрузок.

К динамическим относятся ударные, внезапно приложенные и циклически изменяющиеся нагрузки. Ударные нагрузки возникают, например, при ковке металла или забивке свай; примером внезапно прилагаемой нагрузки является давление колеса, катящегося по рельсу; циклически изменяющиеся нагрузки испытывают, например, детали кривошипно-ползунного механизма и др. К динамическим относятся также инерционные нагрузки, например, силы инерции в ободу вращающегося маховика.

Динамические нагрузки меняют свое значение в короткий промежуток времени, они вызывают большие ускорения и силы инерции и могут привести к внезапному разрушению конструкции.

Под действием внешних активных и вызываемых ими реактивных сил на брус в нем могут возникнуть *растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб, кручение*. На рис. 2.3. показаны четыре основных вида простого нагружения бруса.

*Растяжение или сжатие* возникает тогда, когда растягивающие (сжимающие) внешние силы направлены по оси прямого бруса (рис. 2.3, а и б). При растяжении брус удлиняется, а при сжатии – укорачивается, но ось его остается прямой.

*Сдвигом* называется такой вид нагружения, когда под действием сил, приложенных к брусу, одна его часть сдвигается относительно другой. При сдвиге частей деревянного бруса в нем может произойти *скалывание* (рис. 2.3, в). Если сдвигаются стальные элементы, скрепленные заклепкой, то может произойти *срез* заклепки (рис. 2.3, г). Скалывание и срез представляют собой два частных случая сдвига.

*Изгиб* происходит под действием внешних сил, расположенных в плоскости, проходящей через ось бруса, и направленных перпендикулярно к его оси. При этом ось бруса искривляется (рис. 2.3, д).

*Кручение* возникает в том случае, если к брусу приложен момент пары сил  $m$ , расположенный в плоскости, перпендикулярной к его оси (рис. 2.3, е).

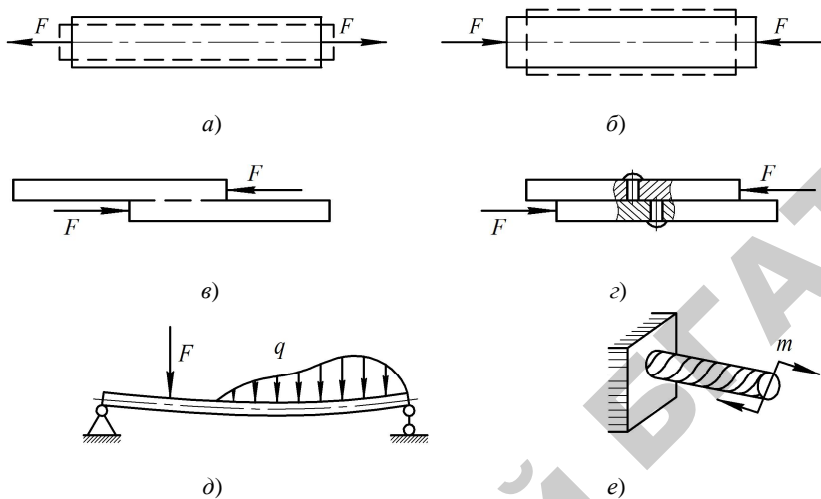


Рис. 2.3. Виды простого нагружения под действием внешних сил

Кроме действия основных видов внешних сил, возможны и другие комбинированные случаи одновременного действия нескольких сил на брус, вызывающие в нем *сложное нагружение* (рис. 2.4).

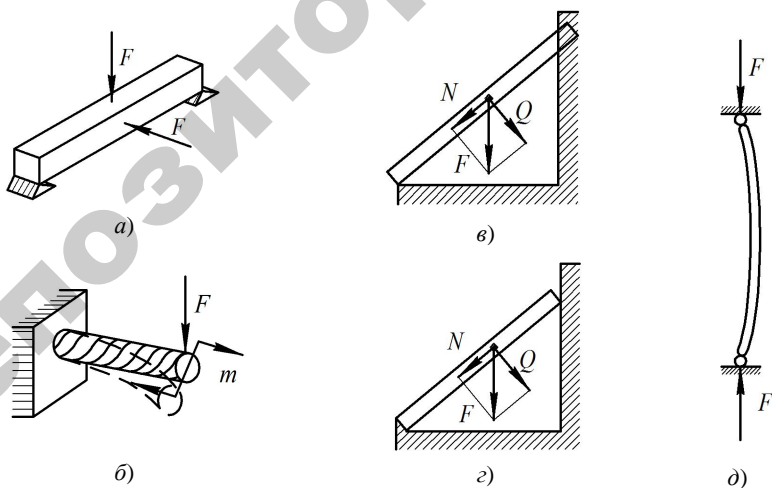


Рис. 2.4. Виды сложного нагружения под действием внешних сил

Под действием двух сил  $F$ , расположенных по осям симметрии прямоугольного сечения балки, в ней возникает *косой изгиб* (рис. 2.4, а).

Когда на брус, подверженный кручению под действием момента пары сил  $m$ , действует еще поперечная нагрузка  $F$ , то в нем возникает *кручение с изгибом* (рис. 2.4, б).

Если к наклонно поставленной балке, защемленной верхним концом, приложить вертикальную нагрузку  $F$ , то в ней возникнет *растяжение с изгибом* (рис. 2.4, в). При опертом нижнем и свободном верхнем концах наклонно поставленной балки под действием вертикальной нагрузки в ней возникает *сжатие с изгибом* (рис. 2.4, г).

Раскладывая в этих случаях вертикальную нагрузку  $F$  на две составляющие: силу  $N$ , расположенную вдоль оси балки, и силу  $Q$ , действующую перпендикулярно к оси балки, легко убедиться в том, что сила  $N$  вызывает растяжение или сжатие, а сила  $Q$  – изгиб.

В длинном тонком стержне, подверженном действию сжимающей силы, направленной вдоль оси, может произойти выпучивание, иначе называемое *продольным изгибом* (рис. 2.4, д).

## 2.2. Метод сечений и внутренние силовые факторы

Целостность твердого тела и его форма обуславливаются наличием сил взаимодействия между его частицами. Когда внешние силы на тело не действуют, то его частицы находятся в состоянии *внутреннего равновесия*, при котором средние расстояния между этими частицами как раз таковы, что действующие между ними силы притяжения и отталкивания взаимно уравновешиваются.

При деформации тела под действием внешних нагрузок и других внешних воздействий происходит изменение сил взаимодействия между частицами тела, вследствие чего нарушается имеющееся до приложения внешних сил равновесие между внутренними силами притяжения и отталкивания. При этом возникают внутренние силы сопротивления, которые стремятся сохранить тело как единое целое и противодействуют всякой попытке изменить расположение частиц, то есть его деформировать. Таким образом, под *внутренними силами сопротивления* (ВСС) необходимо понимать силы

взаимодействия между частицами тела, возникающие только в результате деформации тела. При отсутствии деформации ВСС в теле считаются равными нулю.

В существовании ВСС убеждает нас, например, то обстоятельство, что при растяжении брус удлиняется, но если убрать внешние растягивающие силы, то он вновь возвращается в свое первоначальное положение, если не превзойден предел упругости. Величина ВСС у разных материалов различна. Внешние силы могут оказаться столь велики, что ВСС тела при данных его геометрических размерах не смогут их уравновесить. Тогда происходит разрушение материала. Очевидно, прочность материала характеризуется предельным значением ВСС.

Для того чтобы численно определить величину ВСС, возникающих в результате деформации, вызванной внешними силами, пользуются *методом сечений* (методом разреза). Метод сечений сводится к четырем действиям:

- через сечение тела, в котором необходимо определить внутренние силы, мысленно проводят секущую плоскость;
- одну из частей тела (желательно наиболее сложную), отбрасывают;
- действие отброшенной части заменяют ВСС таким образом, чтобы оставшаяся исследуемая часть могла находиться в равновесии;
- составляют условия равновесия для рассматриваемой части, используя для этого шесть уравнений статики.

Пусть свободное тело под действием системы сосредоточенных сил  $F_1-F_6$ , моментов пар сил  $m_1$  и  $m_2$ , а также равномерно распределенных сил  $q_1$  и  $q_2$  находится в равновесии (рис. 2.5, а). Требуется определить внутренние силы сопротивления в сечении I-I.

Мысленно разрежем тело на две части по данному сечению и рассмотрим условия равновесия одной (любой) части тела. Обе части после разреза, вообще говоря, не будут находиться в равновесии, так как нарушены внутренние связи. Заменяем действие левой части тела на правую и правой на левую, некоторой системой сил в сечении I-I, то есть внутренними силами сопротивления (рис. 2.5, б).

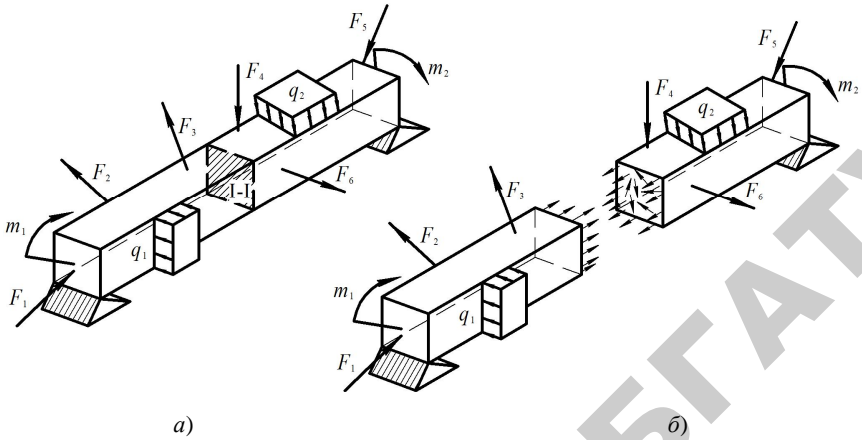


Рис. 2.5. Равновесие свободного тела и обеих его частей разреза под действием системы сил

Характер распределения внутренних сил сопротивления в сечении неизвестен, но они должны обеспечить равновесие каждой части тела. Для составления условия равновесия отсеченной части приведем внутренние силы сопротивления в виде главного вектора  $F_{\text{гр}}^C$  и главного момента  $M_{\text{гр}}^C$  к центру тяжести сечения в точке  $C$  (рис. 2.6, а) и спроецируем их на оси координат.

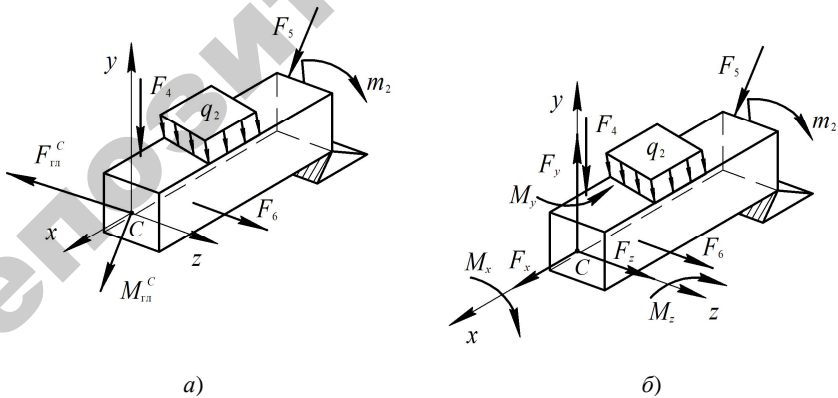


Рис. 2.6. Распределение внутренних сил в сечении правой части при условии ее равновесия

Разложив главный вектор и главный момент по осям координат, получим три силы и три момента  $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$  (рис. 2.6, б). Эти составляющие, которые представляют собой скалярные *проекции векторов*, обозначаются специальными буквами и являются *внутренними силовыми факторами* (ВСФ):

- $F_x = N$  называется *продольной или нормальной силой*;
- $F_y = Q_y$  и  $F_z = Q_z$  являются *поперечными силами*;
- $M_x = T$  – *крутящий момент*;
- $M_y$  и  $M_z$  – *изгибающие моменты* относительно осей  $y$  и  $z$ .

Так как оставшаяся часть находится в равновесии, то для нее в общем случае можно составить шесть уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} - N = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} - Q_y = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} - Q_z = 0; \\ \sum_{i=1}^n m_x(F_i) - T = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_y(F_i) - M_y = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_z(F_i) - M_z = 0. \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Из уравнений (2.2.) следует, что

$$\left. \begin{aligned} N = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad Q_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad Q_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}; \\ T = \sum_{i=1}^n m_x(F_i); \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_y(F_i); \quad M_z = \sum_{i=1}^n m_z(F_i). \end{aligned} \right\} (2.3)$$

Таким образом:

– продольная сила  $N$  в поперечном сечении равна алгебраической сумме проекций на ось  $x$  всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела;

– поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$  в сечении соответственно равны алгебраической сумме проекций на оси  $y$  и  $z$ , расположенные в рассматриваемом сечении, всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела;

– крутящий момент  $T$  в поперечном сечении равен алгебраической сумме моментов относительно оси  $x$  всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела;

– изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  в сечении соответственно равны алгебраической сумме моментов относительно осей  $y$  и  $z$  рассматриваемого сечения всех внешних сил, действующих на оставшуюся часть тела.

Результаты будут одинаковыми независимо от того, какая часть рассеченного тела рассматривается.

Знаки ВСФ принято определять направлением данных факторов относительно поперечного сечения, к которому они приложены.

*Продольная сила*, направленная от сечения, вызывает в нем растяжение материала и считается положительной, а направленная к сечению – вызывает сжатие материала и считается отрицательной.

*Поперечная сила* считается положительной, если внешние силы стремятся вращать отсеченную часть бруса относительно проведенного сечения по часовой стрелке; если внешние силы стремятся вращать отсеченную часть против часовой стрелки, то поперечная сила считается отрицательной.

*Крутящий момент  $T$*  положительный, когда скручивающие моменты от внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса, направлены по часовой стрелке, если смотреть на сечение со стороны внешней нормали; если скручивающие моменты направлены против часовой стрелки, то крутящий момент в сечении считается отрицательным.

*Изгибающий момент*, возникающий в сечении от действия внешних сил, вызывающих сжатие верхних волокон балки или сжатие наружных волокон рамы, считается положительным, а возникающий от сил, вызывающих растяжение, – отрицательным. Для стержней, расположенных внутри рамы, знаки изгибающим моментам не присваиваются и эпюры строятся на сжатых волокнах стержней.

Из правила знаков следует, что значения внутренних силовых факторов *положительны* в случаях, когда:

- *продольная сила* вызывает *растяжение* элемента;
- *поперечная сила* вращает элемент *по часовой стрелке*;



– *изгибающий момент* вызывает *сжатие* верхних волокон элемента.

В соответствии с наименованием ВСФ производится классификация видов нагружения. Нагружение называется *простым*, если в поперечных сечениях элемента конструкции возникает только один ВСФ. Простыми видами нагружения являются (см. рис. 2.3):

– *растяжение (сжатие)* – в поперечных сечениях элемента возникает только продольная (нормальная) сила;

– *сдвиг* – в поперечных сечениях элемента возникает только поперечная сила.

– *кручение* – в поперечных сечениях возникает только крутящий момент;

– *чистый изгиб* – в поперечных сечениях возникает только изгибающий момент.

Нагружение называется *сложным (комбинированным)*, если в поперечных сечениях элемента одновременно возникают несколько силовых факторов. Сложными видами нагружения бывают (см. рис. 2.4):

– *поперечный изгиб* – в поперечных сечениях одновременно с изгибающим моментом возникает еще поперечная сила;

– *изгиб с кручением* – в поперечных сечениях наряду с изгибающим моментом возникает крутящий момент и т. д.

### 2.3. Понятие о напряжениях в сечении элементов конструкции

Метод сечения позволяет определить величину ВСФ в целом, но не дает возможности установить распределение их по площади сечения. Для оценки прочности элементов конструкции, необходимо определить величину ВСФ, которые распределяются по сечению непрерывно и характеризуются *интенсивностью*.

*Мера интенсивности ВСФ, распределенных по площади сечения элемента конструкции*, называется *напряжением*. Таким образом, под напряжением понимается усилие, приходящееся на единицу площади сечения.

Выделим в окрестности точки *B* бесконечно малую площадку  $\Delta A$  (рис. 2.7, *a*). Пусть  $\Delta F$  будет равнодействующая ВСФ, приходящихся на эту площадку. Тогда величина напряжения, определяемая отношением равнодействующей  $\Delta F$ , приходящейся на единицу площади  $\Delta A$ , будет равна

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (2.4)$$

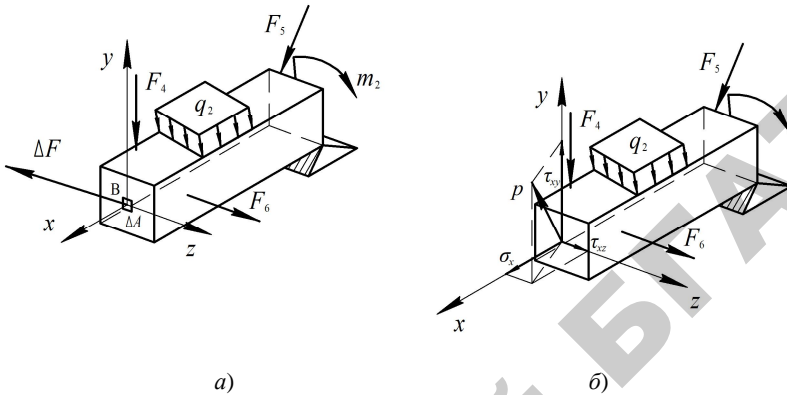


Рис. 2.7. Схема к определению напряжения в точке площади сечения

Величина  $p$  называется *полным напряжением* или просто *напряжением* в данной точке рассматриваемого сечения.

Напряжения, как и силы, являются векторными величинами. В каждой точке сечения тела полное напряжение  $p$  можно разложить на 3 составляющие по осям координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  (рис.2.7, б):

- нормальную составляющую к плоскости сечения, которая направлена вдоль оси  $x$ , называется *нормальным напряжением* и обозначается  $\sigma_x$ ;
- составляющую, лежащую в плоскости сечения, она обозначается  $\tau$  и называется *касательным напряжением*.

Нормальное напряжение  $\sigma_x$  характеризует сопротивление материала элемента конструкции в конкретном сечении растяжению или сжатию в направлении оси  $x$ , а касательное напряжение  $\tau$  – сопротивление материала сдвигу его частиц по плоскости сечения.

Касательное напряжение может иметь любое направление в зависимости от действующих внутренних сил. Однако для удобства  $\tau$  представляют в виде двух составляющих по направлению координатных осей  $y$  и  $z$  – соответственно  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ . В обозначении касательного напряжения первый индекс показывает какой оси координат перпендикулярна площадка действия этого напряжения, а второй – какой оси параллелен вектор напряжения.

В пределе при бесконечно большом числе площадок и при стремлении площадки  $\Delta A$  к точке  $B$  имеем нормальное напряжение в точке:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA}, \quad (2.5)$$

касательное напряжение в точке:

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}. \quad (2.6)$$

Нормальные и касательные напряжения связаны с ВСФ следующими соотношениями. Продольная сила  $N$  вызывает появление в сечении элемента нормального напряжения  $\sigma_x$  и равна

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA. \quad (2.7)$$

Поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$  вызывают появление касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  и определяются как

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} \cdot dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} \cdot dA. \quad (2.8)$$

Изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  вызывают появление нормальных напряжений  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  и определяются как

$$M_y = \int_A \sigma_y \cdot z dA, \quad M_z = \int_A \sigma_z \cdot y dA. \quad (2.9)$$

Крутящий момент  $T$  вызывает сдвиг сечения вокруг продольной оси  $x$ , поэтому появляются касательные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  и тогда

$$T = \int_A (\tau_{xy} z dA - \tau_{xz} y dA) = \int_A (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dA. \quad (2.10)$$

Понятие *напряжения в точке* связано как с самой точкой, так и с положением площадки, проведенной через данную точку. Нормальные и касательные напряжения в смысле точки и площадки взаимосвязаны и не могут рассматриваться отдельно друг от друга. Это составляющие одного физического понятия, характеризующиеся физическими величинами, преобразующимися по определенному закону при переходе от одной системы координат к другой.

Совокупность нормальных и касательных напряжений для множества элементарных площадок, проходящих через точку, характеризует *напряженное состояние в точке*, подробное изложение которого будет рассмотрено в главе 4.

## 2.4 Эпюры ВСФ

ВСФ при переходе от сечения к сечению, как правило, изменяют свою величину. Для проведения расчетов на прочность, жесткость или устойчивость необходимо знать сечения, в которых ВСФ достигают максимального значения. Такие сечения называются *опасными*. Отыскать опасные сечения и установить максимальные значения ВСФ помогает построение *эпюр*. *Эпюрами* называются графики распределения ВСФ по длине, либо сечению, рассматриваемого бруса. Эпюры строятся для более полной и точной оценки фактического состояния бруса и позволяют проследить законы изменения ВСФ вдоль оси бруса при переходе от одного сечения к другому.

Они наглядно показывают нагруженность сечений бруса, положение опасных, с точки зрения прочности, точек сечения, а также направление и величину перемещений сечений.

Рекомендуемая методика построения эпюр ВСФ ( $N$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $T$ ) следующая:

1. Изобразить заданную расчетную схему элемента конструкции – бруса, балки.
2. Выбрать расположение координатных осей, совмещая ось  $x$  с осью элемента конструкции, а оси  $y$  и  $z$  направить перпендикулярно оси  $x$ .
3. Приложить к элементу конструкции все действующие активные силы и произвести их необходимые преобразования: силу, наклоненную к оси элемента под углом  $\alpha$ , заменить двумя взаимно

перпендикулярными составляющими, а равномерно распределенную нагрузку – ее равнодействующей, приложенной в середине участка распределенной нагрузки.

4. Освободить элемент конструкции от опор, заменив их действие неизвестными опорными реакциями, направленными вдоль выбранных осей координат.

5. Составить уравнения равновесия для плоской системы произвольно расположенных сил таким образом и в такой последовательности, чтобы решением каждого из этих уравнений было определение одной из неизвестных опорных реакций. Если в результате решения составляющая опорной реакции окажется отрицательной, это значит, что сила (реакция опоры) в действительности направлена в другую сторону и ее направление необходимо заменить на обратное.

6. Проверить правильность найденных опорных реакций с использованием проекций сил на вертикальную ось.

7. Разбить расчетную схему элемента конструкции на участки. Границами участков являются сечения, в которых меняется характер нагрузки, размеры поперечного сечения, а также узлы рам.

8. Используя метод сечения, найти аналитические выражения ВСФ ( $N$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $T$ ) на каждом участке рассматриваемого элемента и определить их величины в наиболее характерных точках – начало и конец участка, экстремальные точки.

9. Параллельно геометрической оси элемента провести базу эпюры (прямую линию, параллельную оси элемента конструкции) и в соответствующих местах восстановить к ней перпендикуляры, численно равные соответствующим значениям ВСФ –  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $T$ .

10. Построить эпюры ВСФ ( $N$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $T$ ), соединяя концы этих перпендикуляров в соответствии с законом изменения определяемых факторов на данном участке.

11. Ордината эпюр продольных сил  $N$  откладывается симметрично по обе стороны от базы эпюры с указанием знака.

12. Положительные ординаты эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  откладываются вверх от базы эпюры, а отрицательные – вниз. Таким образом, эпюра изгибающих моментов  $M$  всегда строится со стороны сжатых волокон.

13. Положительные ординаты крутящих моментов  $T$  откладываются вверх от базы эпюры, а отрицательные – вниз.

14. Эпюры ВСФ ( $N$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $T$ ) принято штриховать вертикальными штрихами, причем каждый такой штрих представляет ординату, соответствующую величине рассматриваемого ВСФ в соответствующем сечении.

### Контрольные вопросы

1. Какие силы в механике материалов считают внешними? Какие силы являются внутренними?
2. По какому принципу классифицируют нагрузки в механике материалов? К какому виду разрушений приводят повторно-переменные нагрузки?
3. Какие нагрузки относятся к динамическим?
4. Как классифицируются нагрузки, действующие на элементы конструкций и детали машин?
5. Когда возникают в элементе конструкции внутренние силы сопротивления и когда они отсутствуют?
6. Назовите простые и сложные виды нагружения.
7. В чем суть метода сечений?
8. Какая особая точка в сечении принимается за центр приведения внутренних сил?
9. Какую из отсеченных частей более целесообразно рассматривать в равновесии? Почему?
10. Как вычисляются продольная и поперечная силы в сечении?
11. Что в механике материалов называют ВСФ? Перечислите их.
12. Запишите систему уравнений, используемую при определении ВСФ в сечении.
13. Как обозначаются и определяются изгибающие и крутящие моменты?
14. Дайте определение понятию «напряжение». Какие виды напряжения Вы знаете?
15. Чем отличаются нормальные напряжения от касательных?
16. Как связаны напряжения в сечении с ВСФ?
17. Как по отношению к площадке направлены нормальные и касательные напряжения? Как они обозначаются?
18. Как определяются опасные сечения при проведении расчетов на прочность и жесткость?
19. Что называется эпюрами и для чего они строятся?
20. Какова методика построения эпюр ВСФ?

### 3. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Многообразие материалов, используемых при изготовлении элементов конструкций, объясняется тем, что различные материалы имеют неодинаковые механические свойства, которые используются инженерами для решения тех или иных технологических задач.

*Механические свойства* материалов – это способность материала сопротивляться деформирующему и разрушающему воздействию внешних сил в сочетании со способностью при этом упруго и пластически деформироваться. Чтобы установить какими механическими свойствами обладает тот или иной материал, его подвергают механическим испытаниям с помощью специальных машин и приборов, которые позволяют действовать на материал статическими и динамическими нагрузками на растяжение, сжатие, изгиб, кручение и т. п.

Свойства материалов, характеризующие их прочность и способность сопротивляться деформациям и выраженные количественной оценкой называются *механическими характеристиками* материалов.

Расчеты на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций невозможно осуществить, если неизвестны числовые характеристики механических свойств применяемых материалов, которые могут быть определены только экспериментальным путем. Важность экспериментальных исследований объясняется еще и тем, что все решения механики материалов являются приближенными. Поэтому их достоверность и пределы применимости могут быть установлены лишь экспериментально.

#### 3.1. Статические испытания материалов на растяжение

Механические свойства материалов изучаются путем испытания на специальных машинах брусков простейшей формы, называемых *образцами*. В последнее время большое внимание уделяется исследованию свойств материалов при повышенных температурах.

Испытания проводятся при статических или динамических нагрузках при различных видах деформаций: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб.

При статических нагрузках достоверные механические характеристики материала получаются при его испытаниях на растяжение, которые выполняются на стандартных круглых или плоских образцах, изготовленных из испытуемого материала.

Для этих целей используют десятикратные образцы, у которых отношение  $\frac{d_0}{l_0} = 10$ . Размеры нормального десятикратного круглого образца приведены ниже (рис. 3.1).

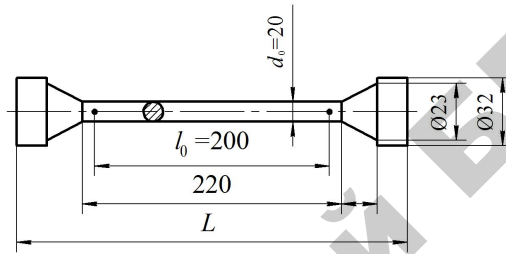


Рис. 3.1. Схема стандартного круглого образца для испытания на растяжение

Для плоского десятикратного образца длина рабочей части определяется по формуле  $l_0 = 11,3\sqrt{A_0}$ , отношение  $\frac{b_0}{h_0}$  рекомендуется принимать равным 3. Плоский образец изображен на рис. 3.2.

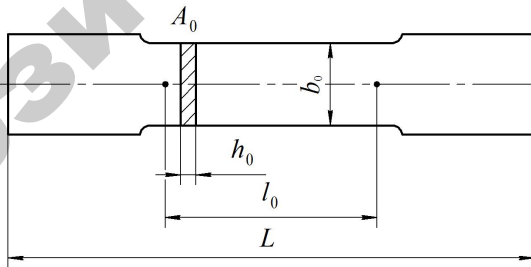


Рис. 3.2. Схема плоского образца для испытания на растяжение

С целью экономии материала применяются пятикратные и пропорциональные образцы, размеры которых в 2, 3, 4 и т. д. раза меньше размеров нормального десятикратного образца.



### 3.2. Машинная диаграмма испытаний, характерные точки и участки на диаграмме

В процессе испытания образец вставляется в захваты испытательной машины (УММ-50) и растягивается статически до разрушения (рис. 3.3, а). В процессе испытаний машина вычерчивает на миллиметровой бумаге диаграмму растяжения ( $F-\Delta l$ ), очертания которой зависят от свойств испытываемого материала. Для малоуглеродистой стали диаграмма ( $F-\Delta l$ ) изображена на рис. 3.3, б.

На диаграмме ( $F-\Delta l$ ) можно выделить следующие характерные участки:

- $OA$  – участок пропорциональности, на котором абсолютное удлинение образца пропорционально приложенной нагрузке;
- $OAB$  – участок упругости, на котором деформации образца являются упругими и будут полностью исчезать после снятия нагрузки;
- $BCD$  – участок текучести с площадкой текучести  $CD$ , на которой происходит удлинение образца при постоянной нагрузке. Такой процесс деформирования материала называется текучестью;
- $DE$  – участок упрочнения;
- $EF$  – участок, на котором образец удлиняется и незначительно уменьшается в поперечных размерах по всей длине до некоторого значения  $A_y$ .

При дальнейшем растяжении в слабом месте образца происходит интенсивный рост деформаций, что приводит к локальному его сужению в виде шейки с площадью  $A_{ш}$ . Согласно диаграмме в момент разрыва образца  $F_p < F_{max}$ .

Если нагрузку довести до некоторого значения  $F > F_y$  (точка  $M$  на диаграмме), а затем разгрузить образец, то процесс деформирования образца изобразится на диаграмме линией  $MNOA$  (рис. 3.3, б).

При повторном нагружении образца диаграмма растяжения изобразится линией  $NMEF$ . Произойдет повышение упругих свойств материала за счет предварительного пластического деформирования. Такое явление в технике называется *наклепом*, который часто используется для упрочнения материалов.

В машиностроении наклепом часто пользуются для упрочнения рабочих поверхностей деталей путем дробеструйной обработки, а также обкаткой роликами под давлением.

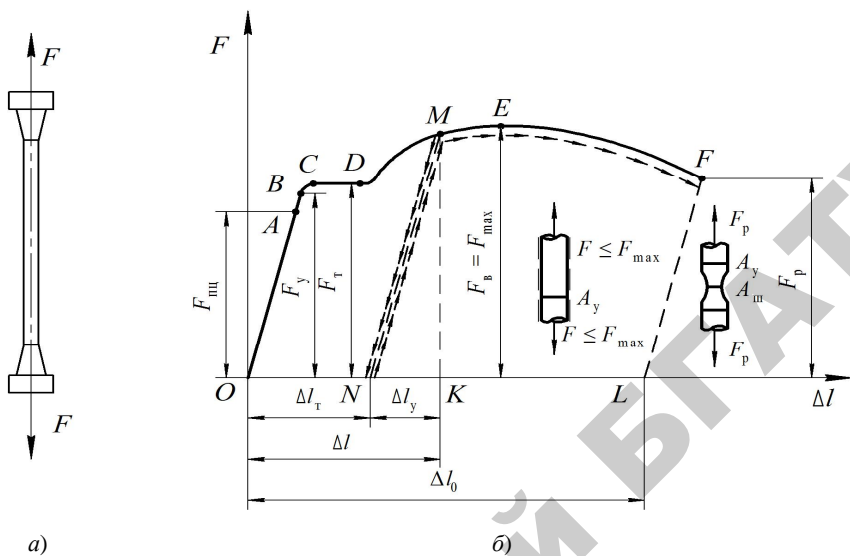


Рис. 3.3. К вопросу о растяжении образца:  
 а – схема статического растяжения образца в испытательной машине;  
 б – диаграмма ( $F-\Delta l$ ) при испытании образца на растяжение

Несмотря на то, что новые свойства стали в результате наклепа оказываются не такими стабильными во времени, как основные ее свойства, наклеп в этих случаях полезен и его создают специально. Но в практике во многих технологических процессах приходится встречаться с отрицательной стороной наклепа.

Например, при разрезании ножницами стальных листов их края, получая наклеп, становятся более хрупкими. При изгибе таких листов, например, для изготовления днищ котла, образуются трещины, так как потерявшие свою пластичность края листа уже не могут получать значительных удлинений. То же можно наблюдать при выдавливании отверстий в листах для заклепочных соединений. Края отверстий, получая наклеп, становятся более хрупкими, чем весь остальной лист, в результате чего появляются трещины. Поэтому выдавливание отверстий заменяют сверлением или рассверливанием выдавленных отверстий, удаляя хрупкую часть металла.

Явление наклепа оказывается нежелательным и в процессе штамповки многих тонкостенных деталей. В этом случае для того, чтобы избежать разрыва листа, вытяжку производят в несколько ступеней.

Поскольку при наклепе ухудшается важнейшая характеристика пластичности – относительное остаточное удлинение, вытяжка стали специально для повышения расчетного напряжения может применяться лишь в тех случаях, когда материал в дальнейшем не будет использоваться при динамических (ударных) или переменных нагрузках.

Наклеп, когда он нежелателен в изделии, устраняют *отжигом*. Металл после отжига, одновременно с устранением наклепа, приобретает несколько лучшие пластичные свойства.

Таким образом, анализ диаграммы испытаний показывает, что полная деформация за пределом упругости состоит из двух частей: упругой  $\Delta l_v$  и пластической  $\Delta l_T$ :

$$\Delta l = \Delta l_v + \Delta l_T. \quad (3.1)$$

После разрыва образца упругая деформация исчезает (*FLOA*), а пластическая деформация в момент разрыва изобразится отрезком  $OL = \Delta l_0$ .

Если в диаграмме растяжения ( $F-\Delta l$ ) разделить все ординаты на первоначальную площадь поперечного сечения образца  $A_0$ , а абсциссы – на расчетную длину  $l_0$ , то получим диаграмму условных напряжений  $\sigma-\epsilon$  (рис. 3.4), которая будет подобна диаграмме растяжения, так как  $F_0 = \text{const}$  и  $l_0 = \text{const}$ .

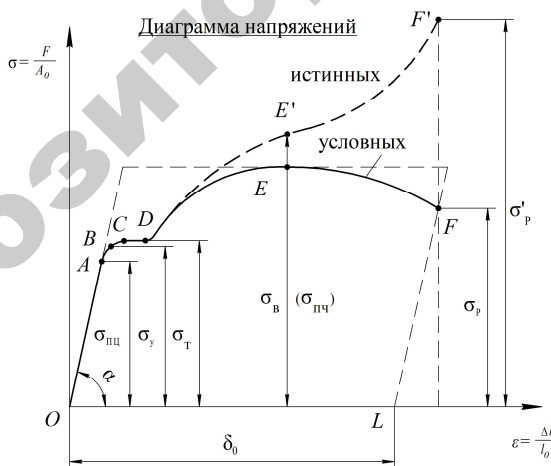


Рис. 3.4. Диаграммы условных и истинных напряжений при испытании образца на растяжение

### 3.3. Понятие об особенностях деформирования и разрушения материалов в пластическом и в хрупком состояниях

Различают пластическое и хрупкое разрушение материалов. Пластическое разрушение материала подробно рассмотрено выше на примере растяжения образца из малоуглеродистой стали. Хрупкое разрушение (чугун, высокоуглеродистая сталь, стекло, кирпич, бетон, природные камни и т. д.) – способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций. Хрупкому разрушению способствуют циклические нагрузки (вибрация, частые удары и др.), при которых развивается усталость материалов, связанная с накоплением повреждений, возникновением микро- и макротрещин. Повышению хрупкости материалов способствуют также понижение температуры, увеличение скорости деформирования, наличие поверхностно-активной среды. Хрупкие материалы плохо работают на растяжение. Диаграммы сжатия пластического (малоуглеродистая сталь) и хрупкого (чугун) материалов изображены на рис. 3.5 и 3.6 соответственно.

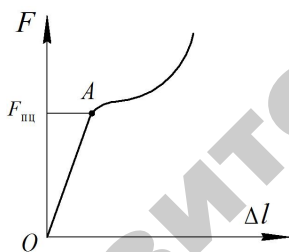


Рис. 3.5. Диаграмма сжатия образца из малоуглеродистой стали

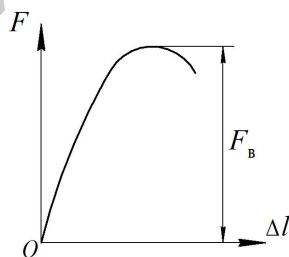


Рис. 3.6. Диаграмма сжатия образца из чугуна

На диаграмме сжатия пластического материала (рис. 3.5) прямолинейный участок  $OA$  заканчивается нагрузкой, соответствующей пределу пропорциональности  $F_{пц}$  (точка  $A$ ). На следующем участке диаграммы наблюдается замедление роста нагрузки при постоянном росте деформаций. При этом площадка текучести, как при растяжении, отсутствует из-за значительного уменьшения высоты испытуемого образца. За этим участком диаграмма идет по кривой круто вверх, что связано с увеличением площади поперечного

сечения образца и ростом его способности выдерживать все большую нагрузку при небольшом увеличении нормальных напряжений. Разрушить образец из пластичного материала проблематично, испытание прекращают при достижении нагрузки, близкой к предельной нагрузке для испытательной машины. Таким образом, определить величину предела прочности при сжатии образца из пластичного материала практически невозможно.

От начала координат диаграмма сжатия хрупкого материала (рис. 3.6) не имеет отчетливо выраженного прямолинейного участка. С ростом нагрузки кривизна диаграммы сначала постепенно, а затем более интенсивно увеличивается.

При достижении нагрузки  $F_B$  начинается разрушение чугунного образца с последующим падением нагрузки. При этом цилиндрический чугунный образец, уменьшаясь по высоте под действием сжимающих сил, принимает слегка бочкообразную форму, что свидетельствует о наличии небольших пластических деформаций. Далее разрушение образца происходит по плоскостям, наклоненным примерно под углом  $45^\circ$  к его оси (линии Людерса-Чернова). Причиной этому является то, что на этих площадках возникают максимальные касательные напряжения, которые приводят к разрушению образцов из хрупких материалов при их испытании на сжатие.

Таким образом, хрупкие материалы не имеют площадки текучести, а в справочниках отсутствует характеристика «предел текучести». По этой особенности их можно узнать.

Пластично-хрупкие материалы значительно деформируются, чего нельзя допустить в работающей конструкции. Поэтому их деформацию обычно ограничивают максимально возможной относительной деформацией  $\varepsilon = 0,2\%$ . По величине максимальной возможной деформации определяется соответствующее нормальное напряжение  $\sigma_{0,2}$ , которое принимают за предельное.

*Предельное состояние* – состояние материала конструкции (сооружения), при котором она перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям, то есть либо теряет способность сопротивляться внешним воздействиям, либо получает недопустимую деформацию или местное повреждение. При этом дальнейшая эксплуатация такой конструкции недопустима или нецелесообразна.

*Критерии предельного состояния конструкций (сооружений)* по степени возможных последствий подразделяют на группы следующим образом:

– первая группа – состояния, при которых происходит полная потеря несущей способности (прочность, жесткость, устойчивость) конструкций (сооружений) при соответствующих комбинациях нагрузок. При этом могут происходить разрушения любого вида (вязкое, усталостное, хрупкое) с превращением системы в механизм, образованием трещин, цепи пластических шарниров и др.;

– вторая группа – состояния, при которых нарушается нормальная эксплуатация конструкций (сооружений) или исчерпывается ресурс их долговечности вследствие появления недопустимых деформаций, колебаний и иных воздействий, требующих временной приостановки эксплуатации конструкции (сооружения) и выполнения ее ремонта;

– третья группа – состояния, соответствующие разрушению конструкций (сооружений) при аварийных воздействиях и ситуациях с катастрофическими последствиями;

– четвертая группа – состояния, устанавливаемые в нормах или заданиях на проектирование других предельных состояний, затрудняющих нормальную эксплуатацию конструкций (сооружений).

### 3.4. Основные механические характеристики прочности материалов

Наибольшие условные напряжения на характерных участках диаграммы называются *механическими характеристиками* прочности материалов:

$$\left. \begin{aligned} - \sigma_{\text{пц}} &= \frac{F_{\text{пц}}}{A_0} \text{ – предел пропорциональности;} \\ - \sigma_y &= \frac{F_y}{A_0} \text{ – предел упругости;} \\ - \sigma_{\text{т}} &= \frac{F_{\text{т}}}{A_0} \text{ – предел текучести;} \\ - \sigma_{\text{в}} &= \frac{F_{\text{max}}}{A_0} \text{ – временное сопротивление} \\ &\text{или предел прочности } (\sigma_{\text{пч}}). \end{aligned} \right\} (3.2)$$

Механические характеристики основных видов сталей и чугуна приведены в приложении В (табл. В.1–В.3).

Основные напряжения:

$\sigma_T$  – условное напряжение, при котором происходит деформация материала без увеличения нагрузки;

$\sigma_B$  – наибольшее условное напряжение за время испытаний.

Согласно диаграммам (рис. 3.4)  $\sigma_p < \sigma_B$  потому, что на участке  $EF$  истинная площадь образца  $A_{ш}$  значительно меньше первоначальной площади  $A_0$ . Таким образом, для нахождения истинных напряжений в момент испытания необходимо силы делить на фактическую площадь поперечного сечения образца. При этом

$$\sigma_B^и = \frac{F_{\max}}{A_y} > \sigma_B \quad \text{и} \quad \sigma_p^и = \frac{F_p}{A_{ш}} > \sigma_p. \quad (3.3)$$

Если отложить эти напряжения на диаграмме, то получим исправленную диаграмму *истинных напряжений*, из которой следует, что напряжения в материале непрерывно возрастают вплоть до разрушения.

Важными механическими свойствами материалов также являются *пластичность* и *вязкость*.

*Пластичность* – способность материала выдерживать большие остаточные деформации без разрушения.

*Вязкость* – свойство материала оказывать сопротивление в процессе деформации за счет сил трения, возникающих при перемещении элементарных частиц относительно друг друга.

Основные характеристики пластичности и вязкости:

$\delta_0 = \frac{\Delta l_0}{l_0} 100 \%$  – относительное остаточное удлинение образца в

момент разрыва;

$\psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} 100 \%$  – относительное сужение образца в процессе

испытания;

$a = S_{OADEF} = \eta \cdot \sigma_B \cdot \delta_0$  – удельная работа деформации, затраченная на разрушение образца;

$\eta = \frac{S_{OADEF}}{S_{OAF'L}}$  – коэффициент полноты диаграммы, для малоуглеродистых сталей ( $\eta = 0,82 \dots 0,85$ ).

Все материалы можно условно разделить:

- на пластические, если  $\delta_0 > 5 \%$ ;
- на хрупкие, если  $\delta_0 < 5 \%$ .

### 3.5. Предельные и допускаемые напряжения материалов

Фактические нагрузки, действующие на элементы конструкций, и свойства материалов, из которых они изготовлены, могут значительно отличаться от тех, которые принимаются для расчета.

При этом факторы, снижающие прочность элемента (перегрузки, неоднородность материалов и т. д.), носят чаще всего случайный характер и предварительно не могут быть учтены.

Так как элементы и конструкции в целом должны безопасно работать и при этих неблагоприятных условиях, то необходимо принять определенные меры предосторожности. С этой целью напряжения, обеспечивающие безотказную работу (эксплуатации) конструкции или любого другого сооружения, должны быть ниже тех предельных напряжений, при которых может произойти разрушение или возникнуть пластические деформации.

Напряжения, при которых образец из данного материала разрушается или при которых развиваются значительные пластические деформации, называются *предельными*. Эти напряжения зависят от свойств материала и вида деформации.

Для *пластичных* материалов предельным напряжением считают предел текучести, так как возникающие пластические деформации не исчезают после снятия нагрузки

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{T}}. \quad (3.4)$$

Для *хрупких* материалов, где пластические деформации отсутствуют, а разрушение возникает по хрупкому типу (шейки не образуется), за предельное напряжение принимают *предел прочности*



$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}} \quad (3.5)$$

Для *пластично-хрупких* материалов предельным напряжением считают напряжение, соответствующее максимальной деформации 0,2 % ( $\sigma_{0,2}$ )

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{0,2} \quad (3.6)$$

В таблице 3.1 приведены пределы прочности некоторых материалов при испытании их на растяжение и сжатие.

Таблица 3.1  
Предельные напряжения (предел прочности) некоторых материалов

Материал	Предел прочности $\sigma_{\text{в}}$ , МПа		Предел текучести $\sigma_{\text{т}}$ , МПа	Относительное удлинение $\delta_0$ , %
	растяжение	сжатие		
Сталь 10	340	340	210	31
40Х	1000	1000	800	10
Чугун серый	140–180	600–1000	–	–
Латунь Л 68	320–660	–	91–660	55,3
Бронза БрОФ10	–	250	–	11
Дюралюминий Д1	210–420	210–420	110–240	15–18
Текстолит	60–110	130–150	–	–
Капрон	35–700	60–80	–	–
Сосна вдоль волокон	–	40	–	–
Сосна поперек волокон	–	5	–	–
Бетон	–	7–50	–	–
Кирпич	–	8–30	–	–
ДСП	210	360	–	–
СВАМ 1:1	480	420	–	–
Полиэтилен высокого давления	12–18	12–13	–	150–600
Резина	4,5–14,0	–	–	450–500

Максимальное напряжение, при котором материал должен нормально работать, и величина которого регламентируется техническими условиями, называется *допускаемым*.

Допускаемые напряжения получают по предельным с учетом запаса прочности

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}, \quad (3.7)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение МПа;

$\sigma_{\text{пред}}$  – предельное напряжение (предел прочности), МПа,

$[n]$  – допускаемый коэффициент запаса прочности (в квадратных скобках принято обозначать допускаемое значение величины).

*Допускаемый коэффициент запаса прочности* зависит от качества материала, условий работы детали, назначения детали, точности обработки и расчета и т. д.

Он может колебаться от 1,25 для простых деталей до 15,0 для сложных деталей, работающих при переменных нагрузках в условиях ударов и вибраций.

В таблице 3.2 приведены значения коэффициента запаса прочности по отношению к пределу прочности для различных состояний материала и различной нагрузки.

Таблица 3.2

Коэффициенты запаса прочности  $n$

Характер действия нагрузок	Свойства материала	Значение коэффициента $n$
Статическая	Пластичный	2,4–2,6
Статическая	Хрупкий	3,0–9,0
Ударная	Пластичный	2,8–5,0
Переменная	Пластичный	5,0–15,0

Допускаемые напряжения – величины нормируемые и их используют в расчетах конструкций. В табл. 3.3 приведены ориентировочные значения основных допускаемых напряжений для материалов, испытывающих растяжение и сжатие при статическом нагружении.

Таблица 3.3

Ориентировочные значения основных допускаемых напряжений на растяжение и сжатие

Материал	Допускаемое напряжение, МПа, на	
	растяжение	сжатие
Чугун серый в отливках	28–80	120–150
Сталь Ст2	140	
Сталь Ст3	160	
Сталь Ст3 в мостах	60–250	
Сталь машиностроительная (конструкционная) легированная	100–400 и выше	
Медь	30–120	
Латунь	70–140	
Бронза	60–120	
Алюминий	30–80	
Алюминиевая бронза	80–120	
Текстолит	30–40	
Бакелизованная фанера	40–50	
Сосна вдоль волокон	7–10	10–12
Сосна поперек волокон	–	1,5–2,0
Дуб вдоль волокон	9–13	13–15
Дуб поперек волокон	–	2,0–3,5
Каменная кладка	до 0,3	0,4–4,0
Кирпичная кладка	до 0,2	0,6–2,5
Бетон	0,1–0,7	1–9

### 3.6. Расчеты элементов конструкций на прочность по допускаемым напряжениям и нагрузкам. Коэффициент запаса прочности

Методы расчета деталей машин и элементов конструкций на прочность выбираются в зависимости от условий их работы и требований, которые к ним предъявляются.

Наиболее распространенным методом такого расчета является *расчет по допускаемым напряжениям*. При этом критерием прочности является напряженное состояние (напряжение) в опасной точке.

Суть метода заключается в следующем. На основании анализа напряженного состояния детали или конструкции выявляется опасная точка, в которой возникают наибольшие напряжения от приложенной внешней нагрузки. Затем определяется расчетная величина напряжений в опасной точке, которая сопоставляется с предельно допустимой величиной напряжений для данного материала, полученной на основе предварительных лабораторных испытаний. Путем сопоставления величин расчетных и предельно допустимых напряжений делается заключение о прочности детали или конструкции.

Условие прочности по допускаемым напряжениям записывается в виде

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (3.8)$$

где  $\sigma_{\max}$  – расчетное значение напряжения в опасной точке;  
 $[\sigma]$  – допускаемое напряжение.

Величина  $[\sigma]$  определяется по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{n}, \quad (3.9)$$

где  $\sigma_{\text{оп}}$  – опасные напряжения, при этом:

$\sigma_{\text{оп}} = \sigma_{\text{T}}$  – для пластичных материалов;

$\sigma_{\text{оп}} = \sigma_{\text{в}}$  – для хрупких материалов;

$n$  – коэффициент запаса прочности, нормируемая величина, которая больше единицы.

При назначении коэффициента запаса прочности необходимо учитывать следующие факторы:

- характер возможного разрушения (пластический или хрупкий);
- неоднородность материала;
- неточность определения внешних сил;
- приближенность методов расчета;
- характер изменения приложенной нагрузки во времени;

- концентрацию напряжений;
- условия работы машин или конструкций (сооружений).

Первые четыре фактора называются основными и учитываются всегда.

Для пластичных материалов коэффициент запаса прочности равен коэффициенту безопасности по текучести материала, то есть  $n = n_T$ , для хрупких – равен коэффициенту безопасности при временном сопротивлении (пределе прочности), то есть  $n = n_B$ .

При статических нагрузках, отсутствии концентрации напряжений и нормальных условиях работы рекомендуется в расчетах принимать

$$n_T = 1,4 \dots 1,6; n_B = 2,5 \dots 3,0.$$

Так, например, для малоуглеродистой стали  $\sigma_T = 240$  МПа,  $n_T = 1,5$ , тогда допускаемое напряжение будет равно

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа.}$$

Условия прочности для пластичных и хрупких материалов:

- пластичные материалы

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma];$$

- хрупкие материалы

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_{\text{сж}}] \text{ и } |\sigma_{\min}| \leq [\sigma_{\text{сж}}],$$

где  $[\sigma] = [\sigma_{\text{сж}}] = [\sigma_p]$ ;

$[\sigma_p]$  – допускаемое напряжение на растяжение;

$[\sigma_{\text{сж}}]$  – допускаемое напряжение на сжатие;

Условие прочности по допускаемым нагрузкам

$$F_{\max} \leq [F], \quad (3.10)$$

где  $F_{\max}$  – расчетное значение предельной нагрузки в опасной точке;  
 $[F]$  – допускаемая нагрузка.

Величина  $[F]$  определяется по формуле

$$[F] = \frac{F_{\text{оп}}}{n_1}, \quad (3.11)$$

где  $F_{\text{оп}}$  – предельная нагрузка, при этом:

$F_{\text{оп}} = F_T$  – для пластичных материалов;

$F_{\text{оп}} = F_B$  – для хрупких материалов;

$n_1$  – коэффициент запаса прочности, определяется экспериментальным путем.

Используя условие прочности, можно выполнить три типа расчетов:

– проверочный:  $\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$ ;

– проектировочный:  $A \geq \frac{N}{[\sigma]}$ ;

– определение допускаемой нагрузки (грузоподъемности):  
 $F \leq A \cdot [\sigma]$ ,

где  $N$  – равнодействующая нормальных усилий в опасном сечении;

$A$  – площадь поперечного сечения;

$F$  – предельная нагрузка.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение механическим свойствам материалов.
2. Что называется механическими характеристиками материалов?
3. Где и как осуществляется испытание различных материалов на растяжение (сжатие)? Какое оборудование при этом используется?
4. Какие виды образцов используются при испытании материалов на растяжение (сжатие)?

5. Что такое истинная и условная диаграммы напряжений при растяжении, в чем их различие?

6. Приведите формулы, определяющие механические характеристики прочности материалов.

7. Что называется пластичностью и вязкостью материала? Какие существуют основные характеристики пластичности и вязкости?

8. Что такое наклеп и как его используют в машиностроении?

9. В чем заключается различие между пластическим и хрупким разрушением материала?

10. Какой максимально возможной относительной деформацией характеризуются пластично-хрупкие материалы?

11. В чем заключается предельное состояние сооружения (конструкции)? Какие критерии предельных состояний существуют?

12. Что называется предельным напряжением и как определяются пределы прочности для пластичных, хрупких и пластично-хрупких материалов?

13. Что называется допускаемым напряжением и как оно определяется?

14. Что такое коэффициент запаса прочности для пластичных и хрупких материалов?

15. Как производится расчет элементов конструкций по допускаемым напряжениям и предельным нагрузкам?

16. Приведите формулы, определяющие условия прочности материалов.

17. Какие виды расчетов можно выполнить, используя условия прочности?

## 4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ

Напряжения являются результатом взаимодействия частиц тела при его нагружении. Внешние силы стремятся изменить взаимное расположение частиц, а возникающие при этом напряжения препятствуют их смещению. Расположенная в данной точке частица по-разному взаимодействует с каждой из соседних частиц. Поэтому в общем случае в одной и той же точке напряжения различны по различным направлениям.

В сложных случаях действия сил на брус (в отличие от растяжения или сжатия) вопрос об определении наибольших напряжений, а также положения площадок, на которых они действуют, усложняется. Для решения этого вопроса приходится специально исследовать законы изменения напряжений при изменении положения площадок, проходящих через данную точку. Возникает проблема исследования *напряженного состояния* в точке деформируемого тела.

### 4.1. Напряженное состояние в точке деформированного тела

#### 4.1.1. Понятие о напряженном состоянии в точке

Напряжение в каждой точке нагруженного тела зависит не только от размеров тела и величины внешних сил, но и от ориентации секущей плоскости-площадки. Очевидно, что таких площадок в точке можно провести бесконечное множество. Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, проходящим через данную точку, называется *напряженным состоянием* в точке. Сущность методов расчета на прочность по допускаемым напряжениям состоит в количественном определении напряженного состояния в точках по экстремальным значениям напряжений – их наибольших и наименьших величин.

Рассмотрим тело, находящееся в равновесии под действием пространственной системы сил  $F_1-F_6$  (рис. 4.1). Внешние силы стремятся изменить взаимное расположение частиц тела, то есть деформировать его. Внутренние силы (напряжения) стремятся воспрепятствовать этому.



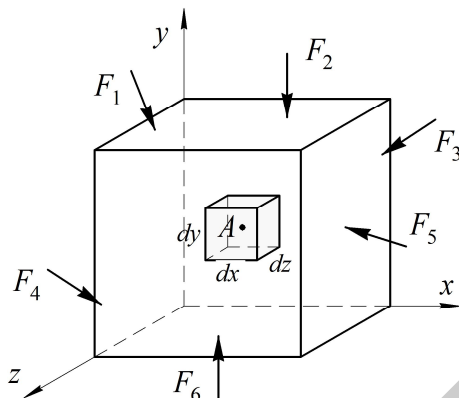


Рис. 4.1. Схема выделенного элемента напряженного тела

Для исследования напряженного состояния тела выберем произвольную точку  $A$  и, используя метод сечений, выделим в ее окрестности элемент в виде параллелепипеда с гранями длиной  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , направленными вдоль координатных осей.

Примем, что в малом объеме в окрестности выбранной точки  $A$  напряженное состояние тела однородное, поэтому напряжения, перпендикулярные к граням, и напряжения, расположенные на гранях выделенного элемента, будут одинаковыми на шести взаимно противоположных гранях элемента.

Напряжения, перпендикулярные к граням выделенного элемента, обозначаются символом  $\sigma$  с индексом, соответствующим координатной осью, вдоль которой они действуют, и называются *нормальными*. Два напряжения, расположенные на гранях выделенного элемента, обозначаются символом  $\tau$  с двумя индексами, первый из которых соответствует координатной оси, перпендикулярной к площадке, второй – координатной осью, вдоль которой действует напряжение. Эти напряжения называются *касательными*. Обозначим нормальные и касательные напряжения, действующие на трех видимых гранях элемента, через  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  (рис. 4.2).

Таким образом, на каждой грани выделенного элемента действуют три составляющие полного напряжения, называемые *компонентами напряжений*.

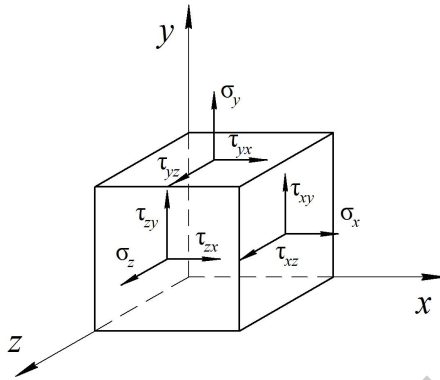


Рис. 4.2. Схема распределения напряжений на гранях параллелепипеда

Совокупность указанных напряжений, действующих на трех взаимно перпендикулярных гранях, полностью характеризует напряженное состояние точки (частицы) тела. Эту совокупность записывают в виде квадратной матрицы и называют *тензором напряжений* Коши.

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yx} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (4.1)$$

*Правило знаков.* Нормальное напряжение считается положительным, если оно совпадает с направлением координатной оси, перпендикулярной к площадке, на которой это напряжение действует (растяжение), и отрицательным, если оно не совпадает с направлением этой координатной оси (сжатие).

Знак касательных напряжений связан с направлением координатных осей.

Если внешняя нормаль к площадке совпадает с направлением координатной оси, то на этой площадке касательное напряжение положительное, когда оно действует в направлении соответствующей оси.

Если же внешняя нормаль противоположна направлению оси, то касательное напряжение отрицательное, если оно действует в направлении, противоположном соответствующей координатной оси.

#### 4.1.2. Закон парности касательных напряжений

Таким образом, параллелепипед под действием приложенных к нему сил (см. рис. 4.2) находится в равновесии, следовательно, должны соблюдаться уравнения статики. Составим сумму моментов всех сил, приложенных к граням параллелепипеда, относительно координатной оси  $z$ .

Из теоретической механики известно, что силы, пересекающие ось и параллельные ей, не создают момента относительно этой оси. Напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$ , действующие на взаимно перпендикулярных гранях, создают моменты относительно оси  $z$ , равные по величине и противоположные по направлению. Поэтому соответствующее уравнение равновесия можно представить в следующем виде:

$$\tau_{xy} d_y d_z d_x - \tau_{yx} d_x d_z d_y = 0. \quad (4.2)$$

Откуда следует:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (4.3)$$

Аналогично составляя уравнения равновесия относительно других координатных осей

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0.$$

Получим

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Эти равенства называют *законом парности касательных напряжений*. Он гласит: на любых взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и направлены так, что стремятся вращать выделенный элемент в противоположные стороны. На основании этого закона тензор-матрица  $T_\sigma$  является симметричной относительно главной диагонали, состоящей из нормальных напряжений.

### 4.1.3. Главные площадки и главные напряжения

Определение напряжений по граням выделенного параллелепипеда – только первый шаг в решении задач, связанных с проверкой прочности элемента конструкции при его сложном напряженном состоянии, и называется *определением напряженного состояния* элемента конструкции.

При повороте выделенного элемента напряжения, действующие на его гранях, изменяются. При этом существуют такие площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Они называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие на этих площадках – *главными напряжениями*. Главные напряжения обозначают  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , при этом индексы выбираются так, чтобы выполнялись алгебраические неравенства  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

На главных площадках нормальные напряжения (главные напряжения) принимают свои *экстремальные значения* – максимум  $\sigma_1$ , минимум  $\sigma_3$ , и минимакс  $\sigma_2$ . Тензор напряжений, записанный через главные напряжения, принимает наиболее простой вид:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Например, если из напряженного тела вырезан элементарный кубик, грани которого параллельны главным площадкам и в этих площадках действуют напряжения + 50,0 МПа; –30,0 МПа; –20,0 МПа, то нумерация главных напряжений будет такой: + 50,0 МПа; –20,0 МПа; –30,0 МПа.

Таким образом, в любой точке тела можно выделить элементарный параллелепипед, на гранях которого будут действовать только главные напряжения. В зависимости от наличия главных напряжений на гранях элемента различают *три вида напряженного состояния* (рис. 4. 3).

1. Если одно главное напряжение не равно нулю, а два других равны нулю, то напряженное состояние называется одноосным или линейным (рис. 4.3, а).

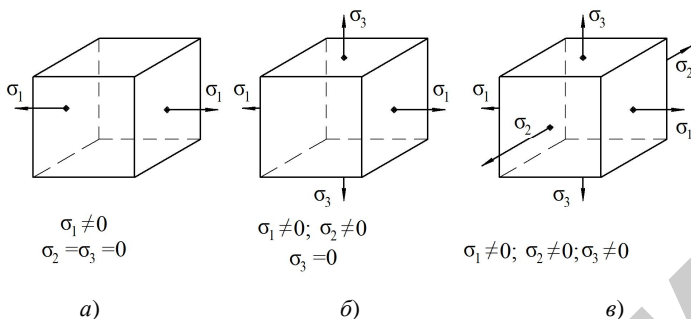


Рис. 4.3. Виды напряженного состояния в точке тела

2. Если два главных напряжения не равны нулю, а третье равно нулю, то, напряженное состояние называется *двухосным* или *плоским* (рис. 4.3, б). Частным случаем двухосного напряженного состояния является *чистый сдвиг*, когда на гранях элемента действуют одинаковые касательные напряжения.

3. Если все три главных напряжения не равны нулю, то такое напряженное состояние называется *трехосным* или *объемным* (рис. 4.3, в). В представленных на рис. 4.3 схемах напряженных состояний напряжения могут быть растягивающими, сжимающими или иметь разные знаки. Например, если все три равные между собой главные напряжения растягивающие, то напряженное состояние называется чистым трехосным растяжением, если сжимающие – чистым трехосным сжатием.

Главные напряжения определяются через нормальные и касательные напряжения, действующие на гранях параллелепипеда, выделенного в опасной точке так, чтобы его грани для упрощения вычислений главных напряжений располагались перпендикулярно оси, а одна грань была главной.

#### 4.1.4. Линейное напряженное состояние

Как уже отмечалось ранее, если из трех главных напряжений только одно отлично от нуля, то такое напряженное состояние является линейным (одноосным). Оно имеет место обычно в элементах, работающих на осевое растяжение или сжатие (рис. 4.4, а). При растяжении стержня силой  $F$  в его поперечных сечениях возникает нормальное напряжение (рис. 4.4, б), определяемое по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{N}{A}, \quad (4.5)$$

где продольная сила  $N$  равна внешней силе  $F$ ,  $N = F$ .

Касательное напряжение на этой же площадке равно нулю.

В любой площадке  $A_\alpha$ , внешняя нормаль к которой образует с направлением  $N$  угол  $\alpha$  (рис. 4.4, в), нормальные и касательные напряжения равны

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N \cos \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{N}{A} \cos \alpha \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \quad (4.6)$$

$$\tau_\alpha = \frac{Q_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N \sin \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{N}{A} \sin \alpha \cos \alpha = \sigma \frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (4.7)$$

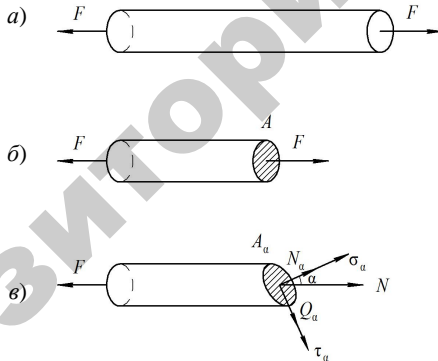


Рис.4.4. Нормальные напряжения в поперечном сечении и наклонной площадке при линейном напряженном состоянии

Нормальное напряжение  $\sigma_\alpha$  считается положительным, если оно совпадает с направлением внешней нормали, то есть является растягивающим; сжимающее напряжение принимается отрицательным. Касательное напряжение принимается положительным, если внешнюю нормаль для совмещения с направлением  $\tau_\alpha$  необходимо повернуть на  $90^\circ$  по ходу часовой стрелки.

Обратное направление касательного напряжения считается отрицательным.

При  $\alpha = 0$  (рис. 4.4, *в*) площадка  $A_\alpha = A$  является главной, так как согласно формулам (4.5) и (4.6) на ней  $\sigma_\alpha = \sigma$ ,  $\tau_\alpha = 0$ . Если  $\alpha = 90^\circ$ , то  $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$  и главной является площадка, параллельная оси стержня. Следовательно, при линейном напряженном состоянии главные напряжения  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ .

Наибольшее значение касательного напряжения получается при  $\alpha = 45^\circ$

$$t_{\max} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2}. \quad (4.8)$$

#### 4.1.5. Плоское напряженное состояние

Многие элементы конструкций находятся в условиях плоского напряженного состояния, примером которого будут такие виды нагружения, как плоский поперечный изгиб, кручение, изгиб с кручением и др. В этом случае отличными от нуля являются четыре из девяти компонент тензора напряжений

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Для определения напряжений на наклонных площадках рассмотрим призматический элемент (рис. 4.5, *а*). Спроецируем все силы, действующие на него, последовательно на направление нормали и касательной к наклонной площадке (рис. 4.5, *б*), получим

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha dA_\alpha - \sigma_x dA_x \cos \alpha - \sigma_y dA_y \sin \alpha - \\ - \tau_{xy} dA_x \sin \alpha - \tau_{yx} dA_y \cos \alpha = 0; \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha dA_\alpha - \sigma_x dA_x \sin \alpha + \sigma_y dA_y \cos \alpha + \\ + \tau_{xy} dA_x \cos \alpha - \tau_{yx} dA_y \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

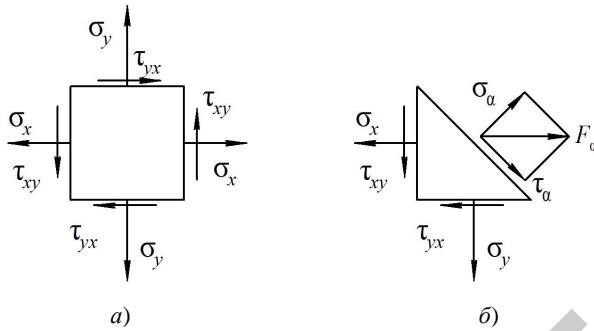


Рис. 4.5. Схема плоского напряженного состояния

Учитывая, что

$$dA_x = dA_\alpha \cos \alpha; \quad dA_y = dA_\alpha \sin \alpha,$$

найдем

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

Для определения положения главных площадок следует принять, что  $\tau_\alpha = 0$ . В результате получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4.12)$$

*Формулы для главных напряжений.* Найдем формулы для определения главных напряжений через напряжения, действующие на произвольных площадках. Для этого предположим, что площадка  $dA_\alpha$  – главная и на ней действует главное напряжение  $\sigma_\alpha = \sigma$ , а  $\tau_\alpha = 0$ . Спроектируем все силы, действующие на выделенный элемент, на оси  $x$  и  $y$  соответственно. В результате получим



$$\sigma dA_a \cos \alpha - \sigma_x dA_x - \tau_{xy} dA_y = 0;$$

$$\sigma dA_a \sin \alpha - \sigma_y dA_y - \tau_{yx} dA_x = 0.$$

Учитывая зависимость между  $dA_a$ ,  $dA_x$  и  $dA_y$  получим

$$(\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = 0; \quad (4.13)$$

$$\tau_{yx} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \sin \alpha = 0.$$

Полученные зависимости представляют собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , а так как  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , то будем иметь

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно  $\sigma$ , корни которого имеют вид

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (4.14)$$

Исследуем, при каком значении угла наклона площадок  $\alpha$  действующие на них нормальные напряжения достигают экстремальных значений. Для этого продифференцируем  $\tau_\alpha$  по  $\alpha$  и приравняем производную к нулю. В результате получим

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 2 \left( -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha \right) = 2\tau_\alpha.$$

Следовательно, нормальные напряжения достигают экстремума на тех площадках, где касательные напряжения равны нулю, то есть на главных площадках.

Если известны главные напряжения, то напряжения на наклонных площадках определяются следующим образом:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (4.15)$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (4.16)$$

#### 4.1.6. Объемное напряженное состояние

В общем случае объемного напряженного состояния на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности точки нагруженного тела, действует девять компонентов тензора напряжений. В силу закона парности касательных напряжений независимыми являются только шесть из них.

Примером объемного напряженного состояния может служить работа материала при передаче давления в шариковом подшипнике (от шарика на обойму) или работа материала в толстостенных цилиндрах.

При наличии трех главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (рис. 4.3, в) нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью  $N$ , составляющей углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  с направлениями соответствующих главных напряжений, определяются по формулам

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \quad (4.17)$$

$$\tau_{\alpha} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_{\alpha}^2}, \quad (4.18)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – углы между нормалью  $N$  к площадке и направлением главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Если рассматривается площадка, равнонаклонная к трем главным напряжениям ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ ), то напряжения, действующие по ней, находятся из выражений

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \quad (4.19)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}, \quad (4.20)$$

и называются октаэдрическими напряжениями.

Максимальное касательное напряжение действует в площадке, параллельной главному напряжению  $\sigma_2$  и наклоненной к напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  под углом  $\alpha = 45^\circ$ .

Тогда

$$\tau_{\max} = \tau_{1,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (4.21)$$

#### 4.1.7. Круг напряжений Мора

Исследование напряженного состояния в точке и определение напряжений в различных секущих площадках можно проводить не с помощью аналитических формул, рассмотренных выше, а графическим способом – путем построения *круга напряжений* или *круга Мора*. Круг напряжений строится в масштабе в координатах  $\sigma$ - $\tau$  и обладает тем свойством, что каждая его точка дает значение нормальных и касательных напряжений в секущей площадке, расположенной под углом  $\alpha$  к исходной системе координат.

Можно показать, что площадкам общего положения соответствуют точки на плоскости, лежащие в заштрихованной области между тремя кругами Мора (рис. 4.6). Точки, являющиеся вершинами этих кругов, соответствуют площадкам, наклоненным под углом  $45^\circ$  к соответствующим главным площадкам.

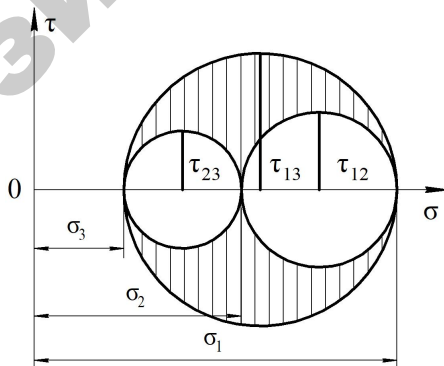


Рис. 4.6. Круги Мора для определения касательных напряжений

Касательные напряжения на этих площадках равны радиусам кругов Мора и определяются формулами

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.22)$$

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max} = \tau_{13}$ .

## 4.2. Деформированное состояние твердого тела

Под действием внешних сил элементы конструкций изменяют свою первоначальную форму и размеры. Как правило, такие изменения невелики, но в ряде случаев могут препятствовать нормальной работе. Умение определять деформации, устанавливать их допустимые величины имеет важное значение при проектировании и расчете элементов конструкций. Рассмотрение деформаций необходимо также для выяснения закона распределения напряжений в элементах конструкций, при решении статически неопределимых задач, для оценки работоспособности по условиям прочности.

Особенности деформирования твердого тела в окрестности некоторой точки рассмотрены в разделе 1.2. В процессе деформации тела его точки будут перемещаться, при этом изменяются расстояния между точками и углы между отрезками, соединяющими эти точки. Следовательно, *деформированное состояние в точке тела* характеризуется совокупностью относительных линейных  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  и угловых сдвиговых деформаций  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$  по всем декартовым направлениям  $Ox, Oy, Oz$  и соответствующим им плоскостям или плоскостям, проходящим через данную точку тела.

### 4.2.1. Компоненты деформированного состояния, главные оси и главные деформации

Как и в случае напряженного состояния в рассматриваемой точке три линейных и шесть угловых деформаций образуют *тензор деформаций* или *компоненты деформированного состояния*.

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Аналогично напряженному состоянию можно указать три оригинальных направления (с индексами 1, 2, 3), называемых *главными осями деформации*, для которых угловые деформации равны нулю, при этом линейные деформации принимают свои экстремальные значения ( $\varepsilon_1$  – максимум,  $\varepsilon_3$  – минимум,  $\varepsilon_2$  – минимакс), причем по алгебраической величине

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3.$$

Деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  в направлениях, для которых отсутствуют углы сдвига, называются *главными деформациями* в точке.

Для главных направлений тензор деформаций получит наиболее удобный вид

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Компоненты тензора деформаций при повороте осей изменяются совершенно аналогично компонентам тензора напряжений (по законам тензорного преобразования). Так, при плоском напряженном состоянии деформации в некоторой плоскости на произвольной наклонной площадке можно выразить через главные деформации и угол наклона  $\alpha$  следующим образом:

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha;$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{\alpha} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin^2 \alpha. \quad (4.25)$$

## 4.2.2. Линейные и угловые деформации твердого тела

Для исследования деформированного состояния рассмотрим элемент  $ABCD$  (рис. 4.7), который после деформации тела перешел в состояние  $A'B'C'D'$ . Переход от начального состояния в конечное может быть осуществлен за счет изменения длины сторон (без изменения углов между ними) и за счет изменения углов (без изменения длин).

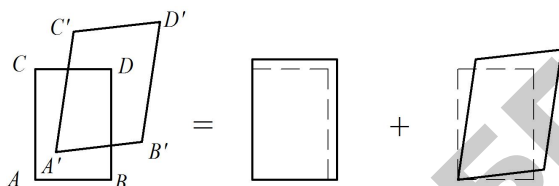


Рис. 4.7. Схема деформации элемента твердого тела

Пусть до деформации длина элемента  $AB$  была равна  $dx$ , а  $AC$  –  $dy$ , угол между ними равен  $90^\circ$  и ориентированы они в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно (рис. 4.8). Пусть после деформации точки  $A, B$  и  $C$  заняли положение  $A', B', C'$ . Перемещения точки  $A$  в направлении оси  $Ox$  равно  $u$ , оси  $Oy$  –  $v$ , а перемещения точек  $B$  и  $C$  соответственно

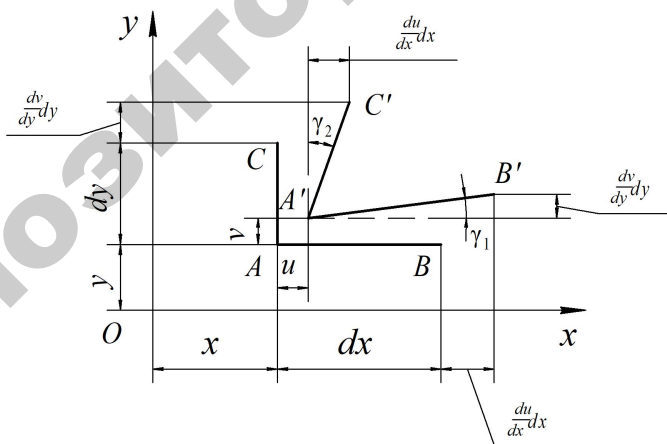


Рис. 4.8. Схема для определения линейных и угловых деформаций элемента

$$B': u' = u + \frac{du}{dx} dx, \quad v' = v + \frac{dv}{dy} dy;$$

$$C': u' = u + \frac{du}{dx} dx, \quad v' = v + \frac{dv}{dy} dy.$$

Тогда линейные деформации элементов  $AB$  и  $AC$  определяются в виде

$$\varepsilon_x = \frac{u' - u}{dx} = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{v' - v}{2} = \frac{dv}{dy}. \quad (4.26)$$

Угловые деформации, то есть изменение углов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (рис. 4.8), равны

$$\gamma_1 = \frac{\frac{dv}{dy} dy}{dx + \frac{du}{dx} dx} \approx \frac{dv}{dx};$$

$$\gamma_2 = \frac{\frac{du}{dx} dx}{dy + \frac{dv}{dy} dy} \approx \frac{du}{dy}.$$

Угол сдвига между элементами  $AB$  и  $AC$

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}.$$

При выводе этих соотношений учитывалось, что перемещения и углы поворота малы, то есть

$$\frac{dv}{dx} = 1; \quad \frac{du}{dy} \ll 1; \quad \operatorname{tg} \gamma_1 \approx \gamma_1; \quad \operatorname{tg} \gamma_2 \approx \gamma_2.$$

Аналогично линейные деформации в направлении оси  $z$  и углы сдвига в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  определяются по формулам

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz}; \quad \gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}; \quad \gamma_{yz} = \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}. \quad (4.27)$$

Таким образом, деформированное состояние характеризуется величинами  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ , а выражения, связывающие их с компонентами вектора перемещений  $u, v, w$ , называются *соотношениями Коши*.

Часто при исследовании деформаций необходимо определить линейную деформацию в направлении, составляющем угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ . Рассмотрим отрезок  $AB$ , который деформируется в плоскости  $xOy$  и занимает положение  $A'B'$  (рис. 4.9). Компоненты вектора перемещения точки  $A$  в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  равны  $u, v$  и точки  $B$

$$u + \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy; \quad v + \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy.$$

Длина отрезка  $AB$  до деформации равна  $ds$ , а после деформации

$$ds' = ds + \left( \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right) \cos \alpha + \left( \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy \right) \sin \alpha.$$

Тогда деформация отрезка  $AB$  в направлении, определяемом углом  $\alpha$ , равна

$$\varepsilon_\alpha = \frac{ds' - ds}{ds} = \left( \frac{du}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{ds} \right) \cos \alpha + \left( \frac{dv}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dv}{dy} \frac{dy}{ds} \right) \sin \alpha. \quad (4.28)$$

Учитывая, что

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha,$$

из соотношения Коши получим

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (4.29)$$



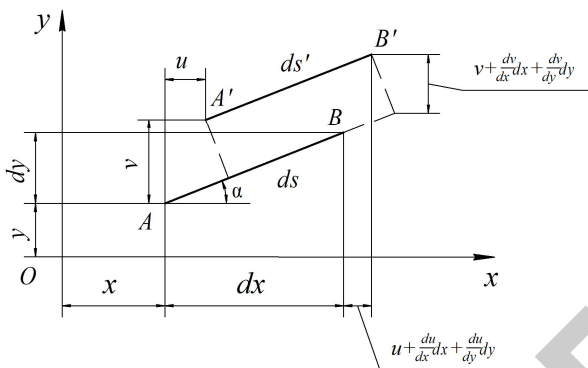


Рис. 4.9. Схема для определения деформации элемента в направлении угла  $\alpha$

Если заменить  $\gamma_{xy}$  на  $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$ , то эта формула будет полностью совпадать с выражением для  $\sigma_{\alpha}$ . Таким образом, деформация в точке характеризуется тензором деформаций

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y \end{vmatrix}.$$

Как и тензор напряжений, его можно привести к диагональному виду

$$\begin{vmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{vmatrix},$$

где  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  – главные деформации.

### 4.2.3. Продольные и поперечные деформации

Наблюдения над растяжением и сжатием твердых тел показывают, что их удлинения или укорочения до определенного предела пропорциональны действующим силам. Эта закономерность впервые была высказана в 1679 г. Робертом Гуком в статье «Сила сопротивления

или упругость» в формулировке «каково растяжение, такова и сила» и с тех пор носит название *закона Гука*.

Роберт Гук проводил свои эксперименты практически с законченными конструкциями, пружинами, кусками проволоки, балками, деревянными стержнями и так далее, подвешивая к ним грузы и измеряя возникающие удлинения. Позже более точными исследованиями была подтверждена справедливость закона Гука, что до определенных пределов нагружения удлинение стержней из разных материалов, различной формы поперечного сечения пропорционально нагрузке.

Схематически такое утверждение может быть представлено следующим образом (рис. 4.10).

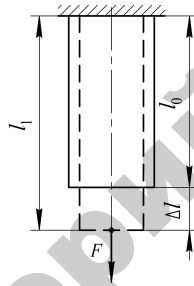


Рис. 4.10. Схема к подтверждению закона Гука

Введем следующие обозначения:  $F$  – приложенная сила;  $l_0$  – начальная длина стержня;  $l_1$  – длина стержня после деформации;  $A$  – площадь поперечного сечения стержня;  $\Delta l$  – абсолютное удлинение;  $E$  – константа, характеризующая упругие свойства материала. Тогда закон Гука можно выразить уравнением, описывающим прямую линию, проведенную из начала координат (см. рис. 3.3, участок  $OA$ ).

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot A}. \quad (4.30)$$

Следовательно, закон Гука выполняется в зоне упругих деформаций, которая определяется по диаграмме ( $F$ - $\Delta l$ ) при испытании образцов на растяжение (рис. 3.3, б). На данной диаграмме закон Гука действует от точки  $O$  до точки  $A$ .

Коэффициент пропорциональности  $E$  характеризует жесткость материала, то есть его способность сопротивляться упругим деформациям растяжения или сжатия и называется *модулем продольной упругости первого рода* или *модулем Юнга*.

Название – модуль продольной упругости – может спровоцировать на неверное истолкование его физического смысла. Упругость – это способность восстанавливать первоначальные размеры и форму после снятия внешней нагрузки. Следовательно, к упругости, в этом смысле слова, модуль Юнга не имеет никакого отношения. Закон Гука, в котором фигурирует модуль продольной упругости  $E$ , говорит нам о том, что напряжение пропорционально деформации только в пределах упругих деформаций. И именно в том смысле следует понимать слово «упругость» в упомянутом термине.

Произведение  $EA$ , стоящее в знаменателе, называется *жесткостью сечения* при растяжении и сжатии; оно характеризует одновременно физико-механические свойства материала и геометрические размеры поперечного сечения стержня. Формула (4.30) читается так: абсолютное удлинение или укорочение прямо пропорционально продольной силе, длине и обратно пропорционально жесткости сечения.

Из выражения (4.30) следует, что удлинение определяется тремя факторами: длиной, размерами поперечного сечения стержня, а также свойствами материала, которые характеризуются модулем продольной упругости  $E$  – модулем Юнга. Чтобы исключить влияние геометрического фактора и выделить свойства материала, преобразуем выражение (4.30) следующим образом

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F}{EA}, \quad (4.31)$$

где  $\frac{\Delta l}{l_0} = \epsilon$  – относительная продольная деформация стержня при растяжении.

Жесткость сечения каждого материала  $EA$  характеризуется его способностью сопротивляться деформированию в упругой стадии. Чем выше модуль продольной упругости, тем труднее деформировать материал и больше его жесткость.

Но величина  $\frac{F}{A}$  представляет собой напряжение  $\sigma$ , возникающее в поперечном сечении стержня при растяжении. Учитывая, что  $\frac{F}{A} = \sigma$ , из формулы (4.31) получим (диаграмма условных напряжений  $\sigma$ - $\varepsilon$  приведена на рис. 3.4)

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (4.32)$$

Полученное уравнение представляет линейную зависимость между напряжением и деформацией и называется *законом Гука при растяжении и сжатии*. В виде формулы (4.32) закон выражает свойства самого материала. Модуль Юнга является фундаментальным понятием. Для конкретного материала он является величиной постоянной, определяемой экспериментально. Так как относительное удлинение  $\varepsilon$  величина безразмерная, то из формулы (4.32) следует, что напряжение  $\sigma$  и модуль Юнга  $E$  выражаются в одних единицах Па или МПа.

Модуль продольной упругости для всех марок сталей  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, для алюминиевых сплавов  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа, для пленки скорлупы яйца  $E = 0,8$  МПа, а для алмаза  $E = 12 \cdot 10^5$  МПа.

При растяжении стержня его удлинение всегда сопровождается уменьшением поперечных размеров; при сжатии, наоборот, – увеличением поперечных размеров. Другими словами, продольная деформация всегда сопровождается поперечной деформацией.

На рис. 4.11. изображен элемент растягиваемого стержня до и после приложения нагрузки.

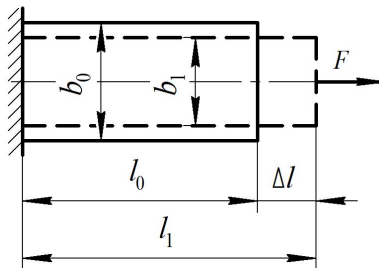


Рис. 4.11. Схема элемента растягиваемого стержня

Величину  $\Delta l$ , на которую увеличилась первоначальная длина  $l_0$  стержня, будем называть *абсолютным удлинением*. Тогда

$$\Delta l = l_1 - l_0,$$

где  $l_1$  – длина стержня в деформированном состоянии.

Отношение абсолютного удлинения к первоначальной длине  $l_0$  стержня называется *относительным удлинением* и определяется как

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} 100\%. \quad (4.33)$$

Аналогичным образом для поперечных деформаций будем иметь: *абсолютное сужение*

$$\Delta b = b_1 - b_0;$$

*относительное сужение*

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b_0} = \frac{\Delta b}{b_0} 100\%, \quad (4.34)$$

где  $b_0$  – какой-либо поперечный размер стержня.

Опытным путем установлено, что при одноосном растяжении или сжатии отношение относительных поперечной и продольной деформаций есть для данного материала величина постоянная. Впервые зависимость между относительной поперечной  $\varepsilon'$  и относительной продольной  $\varepsilon$  деформациями была установлена французским ученым Пуассоном (1781–1840 гг.). Эта зависимость имеет следующий вид:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|, \quad (4.35)$$

где  $\nu$  – коэффициент относительных поперечной и продольной деформаций, называемый коэффициентом поперечной деформации или *коэффициентом Пуассона*.

Коэффициент Пуассона, как и модуль продольной упругости первого рода (модуль Юнга), зависит только от материала и характеризует его упругие свойства.

Для различных материалов коэффициент Пуассона изменяется в следующих пределах:  $0 \leq \nu \leq 0,5$ . Например, для пробки  $\nu = 0$ , для каучука  $\nu = 0,5$ , для стали  $\nu = 0,3$ , а для золота  $\nu = 0,42$ .

#### 4.2.4. Обобщенный закон Гука

Приведенные выше формулы теории напряженного и деформированного состояния применимы как для упругих, так и неупругих тел. Для решения задач необходимо знать количественные зависимости между напряжениями и деформациями.

Рассмотрим деформацию элемента, по граням которого действуют главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  (рис. 4.12, а). Примем размеры ребер куба равными единице и найдем относительные деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  по направлению действия главных напряжений.

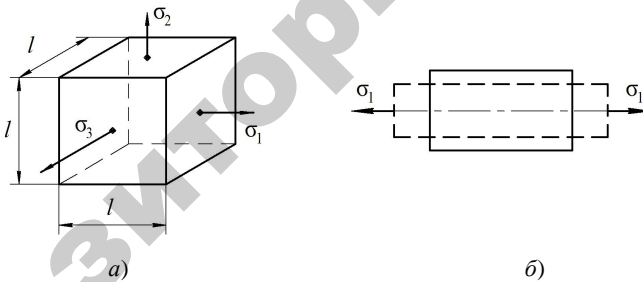


Рис. 4.12. Объемное напряженное состояние элемента

Изобразим элемент, испытывающий действие только одного главного напряжения, например,  $\sigma_1$  (рис. 4.12, б). Продольную деформацию растяжения от главного напряжения  $\sigma_1$  по его направлению найдем на основании закона Гука:  $\varepsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E}$ .

По отношению к напряжениям  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  первое ребро является поперечным, поэтому под действием напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  элемент в направлении первого ребра будет иметь относительные укорочения

$$\varepsilon_1'' = \frac{\nu\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1''' = \frac{\nu\sigma_3}{E}. \quad (4.36)$$

Пользуясь принципом независимости действия сил, представим трехосное напряженное состояние как результат наложения трех линейных напряженных состояний (рис. 4.13).

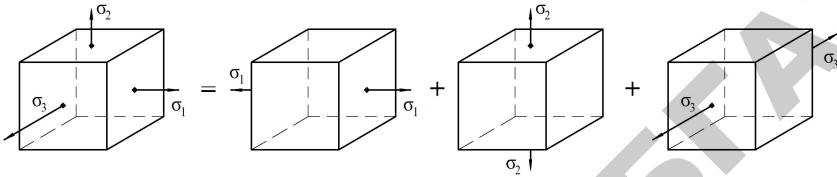


Рис. 4.13. Схема трехосного напряженного состояния

Из рис. 4.13 видно, что полная относительная деформация  $\varepsilon_1$  по направлению главного напряжения  $\sigma_1$  будет равна

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (4.37)$$

Определив аналогично  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ , получим обобщенный закон Гука для объемного напряженного состояния, выражающий линейную зависимость между компонентами деформаций и компонентами напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  по направлениям главных напряжений называют *главными деформациями*.

Предположив, что в формуле в (4.38)  $\sigma_3 = 0$ , получим выражение обобщенного закона Гука для плоского напряженного состояния:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[-\nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Если известны главные деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ , то решая уравнения (4.39) относительно главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  получим

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \quad (4.40)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x). \quad (4.41)$$

Формулы (4.40) и (4.41) широко используются на практике для вычисления главных напряжений по известным главным деформациям, что имеет большое значение в тензометрии – науке об измерении малых деформаций.

#### **4.2.5. Объемная деформация при сложном напряженном состоянии**

Установим связь между относительным изменением объема  $\varepsilon_v$  и главными напряжениями. До деформации элемент занимал объем  $V_0 = abc$ . В деформированном состоянии его объем

$$\begin{aligned} V &= (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc \left( 1 + \frac{\Delta a}{a} \right) \left( 1 + \frac{\Delta b}{b} \right) \left( 1 + \frac{\Delta c}{c} \right) = \\ &= V_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = \\ &= V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3). \end{aligned}$$

Учитывая незначительную величину относительных деформаций по сравнению с единицей, последними четырьмя слагаемыми



можем пренебречь как величинами более высокого порядка малости. Тогда относительное изменение объема

$$\varepsilon_v = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_0,$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$  – средняя деформация в точке.

Выразив главные деформации через главные напряжения при помощи обобщенного закона Гука, получим

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (4.42)$$

Если ввести среднее напряжение в точке

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

то последнее равенство можно преобразовать до вида закона Гука для объемной деформации

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_0}{K}, \quad (4.43)$$

где  $K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$  – модуль объемной упругости.

#### **4.2.6. Удельная потенциальная энергия деформаций и ее составляющие**

Удельной потенциальной энергией деформации называется такая энергия, которая накапливается в единичном объеме материала при его упругой деформации и впоследствии, при удалении внешних

сил, расходуется на восстановление первоначальной, то есть недеформированной, формы тела.

Для элемента единичного объема, по граням которого действуют главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , на основании принципа независимости действия сил удельная потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии определяется по зависимости

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (4.44)$$

В соответствии с обобщенным законом Гука

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (4.45)$$

Так как в общем случае изменяются объем и форма элемента, полную удельную потенциальную энергию деформации принято представлять в виде суммы удельной энергии объема  $u_{об}$  и удельной энергии формоизменения  $u_{\phi}$ .

$$u = u_{об} + u_{\phi}. \quad (4.46)$$

Удельная энергия изменения объема  $u_{об}$  – часть потенциальной энергии, которая накапливается в материале при изменении объема, если форма не меняется. Это возможно тогда, когда вначале напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  будут равны условной средней величине  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3}.$$

Тогда, подставив в (4.46) вместо  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  среднее значение  $\sigma_0$ , получим

$$u_{об} = \frac{1}{2E} (3\sigma_0^2 - 2\nu 3\sigma_0^2) = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (4.47)$$

Удельная потенциальная энергия формоизменения  $u_\phi$  согласно (4.45) и (4.47) –  $u_\phi = u - u_{об}$ :

$$u_\phi = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (4.48)$$

Преобразовав выражение (4.48) получим

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \quad (4.49)$$

В случае плоского напряженного состояния

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2), \quad (4.50)$$

а при одноосном растяжении

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_1^2. \quad (4.51)$$

### Контрольные вопросы

1. Как понимать выражение «напряженное состояние в точке»?
2. Сформулируйте правило знаков для нормальных и касательных напряжений.
3. В чем заключается закон парности касательных напряжений?
4. Чему равна сумма нормальных напряжений по любым двум взаимно перпендикулярным площадкам?
5. Что представляют собой главные напряжения и главные площадки?
6. Назовите виды напряженного состояния в точке тела.
7. Охарактеризуйте линейное напряженное состояние.
8. Как определяются нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке при линейном напряженном состоянии?

9. Дайте определение плоского напряженного состояния и поясните, как определяются положения главных площадок.

10. Приведите примеры объемного напряженного состояния и формулы, определяющие нормальные и касательные напряжения на площадке с нормалью  $N$  и составляющими  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

11. Как понимать выражение «деформированное состояние в точке»?

12. Проведите анализ линейных и угловых деформаций твердого тела.

13. Дать определение продольных и поперечных деформаций, сформулируйте закон Гука. Что такое модуль Юнга и коэффициент Пуассона?

14. Сформулируйте обобщенный закон Гука.

15. Что называется полной удельной потенциальной энергией деформации и из каких частей она состоит?

## 5. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Инженерный расчет предусматривает оценку прочности готового элемента или должен указать его безопасные размеры в процессе проектирования с учетом свойств и напряженного состояния материала. Принципиальная трудность решения этой задачи состоит в том, что физическое состояние материала меняется в зависимости от его напряженного состояния. Так, наблюдения показывают, что при равномерном трехосном сжатии, разрушение как пластичных, так и хрупких материалов не происходит, а при одноосном сжатии хрупкие материалы разрушаются при сравнительно малых напряжениях. Чугун, являющийся типичным хрупким материалом, при действии значительного трехосного сжатия приобретает пластические свойства; образец с кольцевой выточкой из пластичного материала при растяжении проявляет хрупкие свойства и т. д. Таким образом, напряженное состояние в точке является главным фактором, изменяющим свойства материала в этой точке, следовательно, необходимо установить меру, числовую величину напряженного состояния, при достижении которой наступит опасное состояние материала, характеризующееся появлением остаточных деформаций или образованием местных трещин, свидетельствующих о начале разрушения.

В поисках решения проблемы инженерная мысль предложила: используя результаты испытаний материала на одноосное растяжение, теоретически оценить прочность детали при любом сложном напряженном состоянии. То есть напряжение при одноосном растяжении принять в качестве эталона прочности, с помощью которого затем оценивать прочность при любом напряженном состоянии.

### 5.1. Эквивалентное напряженное состояние и эквивалентное напряжение

Механическое состояние материала в точке зависит от многих факторов: напряженного состояния, температуры и других физических воздействий, длительности и характера действия внешней нагрузки и т. д. Действия всех этих факторов на механическое состояние и прочность материалов еще недостаточно изучены и не существует общей теории, учитывающей их. Поэтому в механике

материалов предполагается, что механическое состояние и прочность материалов в первую очередь определяется напряженным состоянием тела в точке.

Напряженное состояние тела в точке полностью определяется: при линейном напряженном состоянии – одним главным напряжением, при плоском – двумя главными напряжениями, при объемном – тремя главными напряжениями.

Чтобы оценить, насколько опасно то или иное напряженное состояние, следует сравнить его с предельным состоянием для данного материала, которое рассматривается как характеристика свойств материала. При этом возникает задача определения предельного напряженного состояния. Очевидно, что эта задача может быть решена экспериментально, путем механических испытаний соответствующих материалов.

В случае одноосного напряженного состояния производится испытание материала на растяжение или сжатие. В качестве предельного значения единственного главного напряжения  $\sigma_1$  или  $\sigma_3$  берется предел текучести  $\sigma_T$  для пластического или предел прочности  $\sigma_B$  для хрупкого материала. Коэффициенты запаса в этих случаях равны

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma}; \quad n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma}. \quad (5.1)$$

Испытания материалов на одноосное растяжение и сжатие производились в течение длительного периода, и для различных материалов имеются достоверные значения  $\sigma_T$  и  $\sigma_B$ . Это позволяет достаточно точно определять коэффициенты запаса и судить о прочности материалов конструкций при одноосном напряженном состоянии.

Имеющаяся в настоящее время экспериментальная база позволяет исследовать только некоторые, наиболее простые типы сложных напряженных состояний.

Поэтому возникает необходимость создания общего метода оценки меры опасности любого напряженного состояния, основываясь на результатах опытов на простое растяжение или сжатие, которое будем считать *эквивалентным напряженным состоянием*. Решение этой задачи осуществляется с помощью теорий предельного состояния, или теорий прочности.

Эти теории основываются на предположении о том, что два напряженных состояния считаются равнопрочными, если они при пропорциональном увеличении главных напряжений одновременно становятся предельными. Тогда коэффициент запаса прочности для обоих напряженных состояний будет одинаковым. Сравнение напряженных состояний для заданного материала можно производить по эквивалентным напряжениям  $\sigma_{\text{эКВ}}$ . *Эквивалентное напряжение*  $\sigma_{\text{эКВ}}$  – это такое напряжение, которое следует создать в одноосно растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равнопрочным заданному (рис. 5.1).

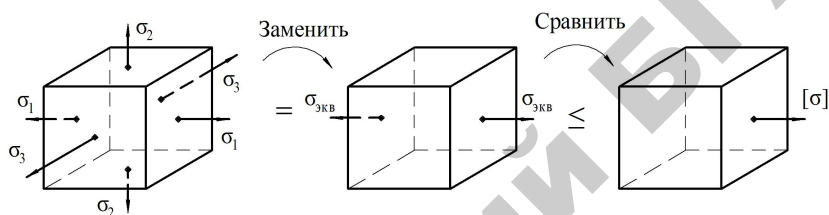


Рис. 5.1. Схема к определению эквивалентного напряжения  $\sigma_{\text{эКВ}}$

Для успешного использования указанного подхода необходимо связать эквивалентные напряжения в двух равнопрочных состояниях определенной зависимостью, основанной на анализе причин разрушения или перехода в предельное состояние материала. Однако физической теории, раскрывающей истинные причины разрушения материала, еще не создано. Это повлекло за собой появление многих теорий, основанных на различных гипотезах о причинах наступления предельного состояния и разрушения материала. Рассмотрим основные, наиболее известные теории.

## 5.2. Теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности)

Согласно первой теории прочности, наиболее существенное влияние на прочность и наступление предельного состояния оказывает величина наибольшего главного напряжения. В соответствии с этой теорией предельное состояние не наступает и разрушение материала не происходит, если выполняются условия прочности

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{экв}}^I &= \sigma_1 \leq [\sigma_p]; \\ \sigma_{\text{экв}}^I &= \sigma_3 \leq [\sigma_{\text{сж}}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_{\text{сж}}]$  – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие материала при одноосном напряженном состоянии.

При плоском напряженном состоянии

$$\sigma'_{\text{экв}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (5.3)$$

На основании проведенных опытов установлено, что данная теория дает удовлетворительные результаты только при разрушении материала путем отрыва одной его части от другой и весьма хрупких материалов, таких как камень, кирпич, бетон, керамика, чугун, инструментальная сталь и др. Для пластичных материалов она дает неудовлетворительные результаты и в расчетах не применяется, поскольку не учитывает два других главных напряжения:  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , которые оказывают большое влияние на прочность материала.

В настоящее время эта теория применяется очень редко.

### 5.3. Теория наибольших относительных удлинений (вторая теория прочности)

Причиной наступления предельного состояния и разрушения в соответствии со второй теорией прочности являются наибольшие удлинения. Для объемного напряженного состояния условия прочности запишутся в следующем виде

$$\varepsilon_{\text{экв}} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon], \quad (5.4)$$

где  $\varepsilon_1$  – величина наибольшей линейной деформации для исследуемого напряженного состояния;

$[\varepsilon]$  – допускаемое значение линейной деформации, полученное из опытов при одноосном растяжении.



Выразим условие прочности через напряжения. Для этого используем закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad \text{и} \quad [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Решая совместно эти три равенства, получим уравнение для объемного напряженного состояния

$$\sigma_{\text{экр}}^{\text{II}} = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\sigma]. \quad (5.5)$$

При плоском напряженном состоянии

$$\sigma_{\text{экр}}^{\text{II}} = \frac{1-\nu}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma]. \quad (5.6)$$

Как и первая, вторая теория прочности находится в согласии с опытами только для хрупких материалов и дает сравнительно удовлетворительные результаты для материалов типа серого литейного и легированного чугунов, но имеет то преимущество, что учитывает все три главных напряжения.

В настоящее время в инженерных расчетах эта теория прочности почти не применяется.

#### **5.4. Теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности)**

Причиной наступления предельного состояния и разрушения по третьей теории прочности принимаются наибольшие касательные напряжения. Условие прочности имеет вид,

$$\tau_{\text{max}} \leq [\tau], \quad (5.7)$$

где  $\tau_{\text{max}}$  – расчетная величина наибольшего касательного напряжения для рассматриваемого напряженного состояния;

$[\tau]$  – допускаемая величина касательного напряжения на простое растяжение, полученная из опыта.

В случае объемного напряженного состояния наибольшее касательное напряжение определяется формулой

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (5.8)$$

Допускаемое касательное напряжение определяется равенством

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}. \quad (5.9)$$

Тогда условие прочности при объемном напряженном состоянии можно представить в виде

$$\sigma_{\text{эkv}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (5.10)$$

При плоском напряженном состоянии

$$\sigma_{\text{эkv}}^{\text{III}} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq [\sigma]. \quad (5.11)$$

Третья теория прочности хорошо подтверждается опытами для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Недостатком ее является то, что не учитывается главное напряжение, которое также оказывает некоторое влияние на прочность. Таким образом, третья теория предполагает разрушение материала путем сдвига и скольжения его частей относительно друг друга.

Критерий наибольших касательных напряжений рассматривается так же, как условие пластичности.

### **5.5. Теория удельной потенциальной энергии формоизменения (четвертая теория прочности)**

При построении этой теории первоначально была предложена гипотеза, согласно которой причиной наступления предельного состояния и разрушения считалась полная удельная потенциальная

энергия, достигающая предельного значения. Условие прочности представляется в виде

$$u \leq [u], \quad (5.12)$$

где  $u$  – полная удельная энергия деформации, которая для объемного напряженного состояния имеет вид

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (5.13)$$

$[u]$  – простое предельное значение энергии, определяемое из опытов на напряжение.

Формула для вычисления  $[u]$  получается, если в предыдущем выражении положить  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  и  $\sigma_1 = [\sigma]$ , то есть

$$[u] = \frac{[\sigma]^2}{2E}. \quad (5.14)$$

Тогда условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{2E} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq [\sigma]. \quad (5.15)$$

Однако эта гипотеза не прошла экспериментальную проверку и не нашла применения на практике, так как полученные на ее основе результаты не согласуются с экспериментом.

Поэтому была предложена новая теория, которая основана на гипотезе, согласно которой причиной наступления предельного состояния и разрушения считается часть удельной потенциальной энергии деформации, которая накапливается вследствие изменения формы элемента.

Поводом для этой гипотезы послужил тот экспериментальный факт, что при всестороннем сжатии разрушение практически не наступает. Таким образом, энергия, соответствующая изменению объема при всестороннем сжатии, не может служить критерием прочности.

Новая энергетическая теория связывается только с энергией формоизменения. Критерий прочности, согласно этой теории, представляется в виде

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}], \quad (5.16)$$

где  $u_{\phi}$  – удельная энергия формоизменения для рассматриваемого напряженного состояния;

$[u_{\phi}]$  – допустимая энергия формоизменения, полученная из опытов на простое растяжение.

Для вычисления удельной энергии формоизменения используем соотношение

$$u = u_{об} + u_{\phi},$$

или

$$u_{\phi} = u - u_{об}.$$

где  $u_{об}$  – удельная энергия, затрачиваемая на изменение объема.

Представим заданное напряженное состояние (рис. 5.2, а), определяемое главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , в виде суммы двух напряженных состояний (рис. 5.2, б, в).

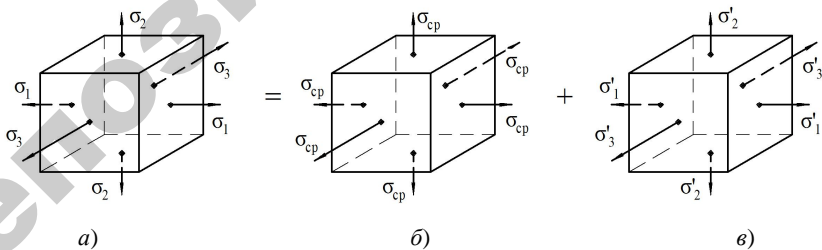


Рис. 5.2. Структурная схема объемного напряженного состояния

Первое соответствует статическому растяжению (сжатию), когда по всем граням кубика действуют одинаковые напряжения

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (5.17)$$

Второе напряженное состояние характеризуется напряжениями

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_{\text{ср}}; \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_{\text{ср}}; \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_{\text{ср}}. \quad (5.18)$$

Изменение объема кубика от действия этих напряжений равно нулю. Действительно, подставляя их значение в формулу для объемной деформации, получим

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1-2\nu}{E}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = \\ &= \frac{1-2\nu}{E} \left( \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3 \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Тогда удельная энергия формоизменения определяется как разность между  $u$  и  $u_{\text{об}}$ . После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} u_{\phi} &= \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)) = \\ &= \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Для случая простого растяжения  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  и  $\sigma_1 = [\sigma]$  получим

$$[u_{\phi}] = \frac{1+\nu}{6E} 2[\sigma]^2. \quad (5.21)$$

Учитывая последнее равенство, согласно четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{экр}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (5.22)$$

Четвертая теория прочности хорошо подтверждается экспериментально для пластических материалов, одинаково работающих на

растяжение и сжатие. Появление малых пластических деформаций в материале четвертой теорией прочности определяется более точно, чем третьей. Поэтому ее часто называют условием пластичности.

## 5.6. Теория прочности Мора

В отличие от изложенных выше теорий, теория Мора основывается не на гипотезах, а на экспериментальных данных. Зависимость между прочностными свойствами материала и видом напряженного состояния выводится и обосновывается с использованием кругов напряжений Мора. Для этого выбирается некоторое напряженное состояние и одновременно увеличиваются его составляющие. Когда напряженное состояние станет предельным, на напряжениях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  строится соответствующий им круг Мора. Среднее напряжение  $\sigma_{cp}$  не учитывается. Опыт показывает, что ошибка при этом не превышает 10–15 %. Строится ряд таких кругов, соответствующих различным напряженным состояниям (рис. 5.3). Огибающая этих кругов, форма которой зависит от свойств материала, является его механической характеристикой.

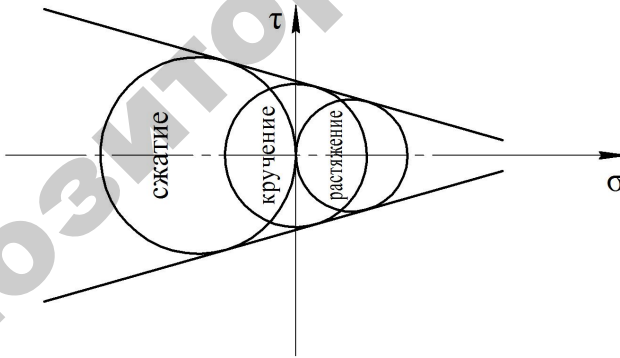


Рис. 5.3. Огибающая кругов Мора для различных напряженных состояний материала

Если огибающая предельных кругов Мора построена, то для ответа на вопрос, является ли напряженное состояние, характеризующееся главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , предельным, и для

оценки прочности материала следует построить для  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  круг напряжений в опасной точке материала. Прочность будет обеспечена, если он целиком лежит внутри огибающей. Для нахождения коэффициента запаса следует определить, во сколько раз необходимо увеличить  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , чтобы круг касался огибающей.

Для построения действительной огибающей предельных кругов Мора потребовалось бы опытным путем исследовать всевозможные напряженные состояния. Это неосуществимая задача, поэтому на практике действительную огибающую заменяют прямыми касательными лишь к двум предельным кругам, соответствующим опытам на одноосное растяжение и сжатие.

Условие прочности для промежуточного напряженного состояния с главными напряжениями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  и предельным кругом Мора с центром в точке  $O_3$  (рис. 5.4) получим из следующих геометрических соотношений.

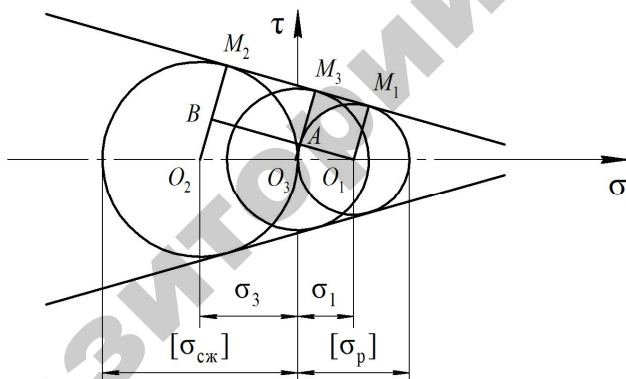


Рис. 5.4. Схема для получения условия прочности Мора

Проведем прямые  $O_1M_1$ ,  $O_2M_2$  и  $O_3M_3$ , соединяющие центры предельных кругов Мора и точки их касания с предельной прямой, а также отрезок  $BO_1$  параллельный  $M_1M_2$ . Из подобия  $\Delta O_1O_2B$  и  $\Delta O_1O_3A$  получим следующую зависимость

$$\frac{O_3A}{O_1O_3} = \frac{O_2B}{O_1O_2},$$

где

$$O_3A = O_3M_3 - O_1M_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{[\sigma_p]}{2},$$

$$O_1O_3 = O_2O_1 - O_2O_3 = \frac{[\sigma_p]}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

$$O_2B = O_2M_2 - O_1M_1 = \frac{[\sigma_{сж}]}{2} - \frac{[\sigma_p]}{2},$$

$$O_1O_2 = O_3O_1 + O_3O_2 = \frac{[\sigma_p]}{2} + \frac{[\sigma_{сж}]}{2}.$$

Учитывая эти обозначения, преобразуем последнее равенство к виду

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{сж}]} \sigma_3 \leq [\sigma_p]. \quad (5.23)$$

Тогда получим условие прочности по теории Мора

$$\sigma_{экр}^v = \sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{сж}]} \sigma_3 \leq [\sigma_p]. \quad (5.24)$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то есть  $[\sigma_p] = [\sigma_{сж}]$ , теория прочности Мора совпадает с третьей теорией.

Из всех вышеперечисленных теорий прочности наиболее полной, точной и всеобъемлющей является теория Мора. Все ее положения были проверены экспериментально. Она подходит как для проверки прочности хрупких материалов (чугун, бетон, кирпич), так и для проверки на прочность пластичных материалов (низкоуглеродистая сталь). Теория наибольших нормальных напряжений



и теория наибольших деформаций подходит только для прочностного анализа хрупких материалов, причем только для каких-то определенных условий нагружения, если требовать повышенную точность расчета. Поэтому первые две теории прочности сегодня применять не рекомендуется. Результаты теории наибольших касательных напряжений и теории наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения можно получить в некоторых частных случаях нагружения при применении теории Мора.

### **Контрольные вопросы**

1. Какая точка тела называется опасной?
2. Что называется допускаримым напряженным состоянием?
3. Почему причина опасного состояния не имеет значения при расчетах на прочность при одноосном напряженном состоянии?
4. Объясните смысл теории прочности?
5. В чем сущность первой теории прочности?
6. В чем сущность второй теории прочности?
7. В чем сущность третьей теории прочности?
8. В чем сущность четвертой теории прочности?
9. Объясните сущность теории Мора. В чем заключаются ее недостатки?
10. Какова область применения единой теории прочности?

## 6. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Центральным растяжением или центральным сжатием называется такой вид напряженно-деформированного состояния, при котором в поперечном сечении бруса возникает только продольная сила (растягивающая или сжимающая), а все остальные ВСФ равны нулю. Центральное растяжение или центральное сжатие кратко называют *растяжением* или *сжатием*.

Растяжение и сжатие весьма часто встречаются в элементах конструкций и узлах машин. Например, растяжение возникает в тросе подъемника, в буксировочном тросе, в проводах линий электропередач, в звеньях цепи велосипеда и т. д.; сжатие возникает в колоннах, поддерживающих перекрытия зданий; в заводской трубе от собственного веса и т. п.

Растяжение и сжатие – одно из наиболее простых видов нагружения. Брус с прямолинейной осью, работающий на растяжение или сжатие, принято называть *стержнем*. В поперечном сечении стержня обнаруживается продольная сила  $N$ , вектор которой перпендикулярен к поперечному сечению и направлен вдоль продольной оси стержня. Конструктивно приложение нагрузки к стержню может осуществляться различными способами, как это показано на рис. 6.1.

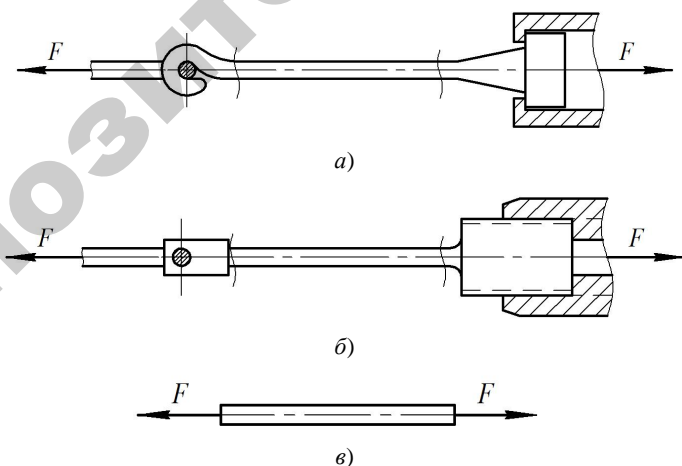


Рис. 6.1. Способы приложения нагрузки к стержню

Во всех случаях, однако, система внешних сил образует равнодействующую  $F$ , направленную вдоль оси стержня. Поэтому независимо от условий крепления растянутого стержня, расчетная схема в рассматриваемых случаях (рис. 6.1, *а*, *б*) оказывается единой (рис. 6.1, *в*) согласно принципу Сен-Венана.

При растяжении и сжатии изменяется площадь поперечного сечения тела. Это можно обнаружить, растягивая резиновую трубку, на которую предварительно надето металлическое кольцо. При достаточно сильном растяжении кольцо упадет. При сжатии, наоборот, площадь поперечного сечения тела увеличивается. Впрочем, для большинства твердых тел эти эффекты малы.

### 6.1. Продольная сила и ее зависимость от внешних сил

Рассмотрим невесомый, заземленный левым концом стержень, вдоль оси которого действуют активные силы  $F$  и  $2F$  (рис. 6.2). Части стержня постоянного сечения, заключенные между поперечными плоскостями, в которых приложены активные или реактивные силы, назовем *участками*. Стержень состоит из 2-х участков.

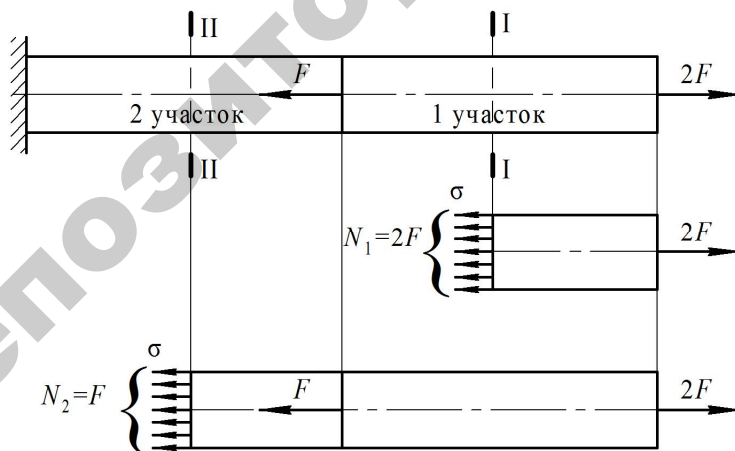


Рис. 6.2. Стержень, закрепленный левым концом в стене, нагруженный внешними силами

Если воспользоваться методом сечений, то становится очевидным, что во всех поперечных сечениях стержня возникают нормальные силы  $N$ , равные силе  $F$ .

Сжатие отличается от растяжения, формально говоря, только знаком силы  $N$ . При растяжении нормальная сила  $N$  направлена от сечения, а при сжатии – к сечению.

Методом сечений определим продольные силы  $N_1$  и  $N_2$  на участках. Рассечем стержень на 1-м участке поперечным сечением I-I. Отбросим левую часть стержня и действие отброшенной части (правой от сечения) заменим силой  $N_1$ , которая будет являться равнодействующей внутренних сил оставшейся части стержня. Спроектируем на ось  $x$  все силы, действующие на отсеченную часть стержня и из условия равновесия данной части стержня, определим продольную силу  $N_1$

$$\Sigma F_{ix} = 2F - N_1 = 0.$$

Откуда

$$N_1 = 2F.$$

Следовательно, для равновесия оставленной части бруса в сечении I-I необходимо приложить только силу  $N_1$ , направленную вдоль оси, то есть продольную силу, которая является равнодействующей внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении бруса. Аналогично нетрудно установить, что в сечении II-II на правом участке продольная сила будет иметь другое значение

$$\Sigma F_{ix} = 2F - F - N_2 = 0.$$

Откуда

$$N_2 = 2F - F = F.$$

Таким образом, продольная сила в произвольном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций на продольную ось всех внешних активных и реактивных сил, приложенных к отсеченной части:

$$N_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}. \quad (6.1)$$

Очевидно, что в пределах одного участка продольная сила будет иметь постоянное значение. Следует иметь в виду что, рассматривая равновесие части стержня, расположенной не справа, а слева от сечения, мы должны были ввести в уравнение равновесия реакцию защемленного конца, определенную путем рассмотрения равновесия всего стержня.

Продольная сила положительна, если она растягивающая и направлена от сечения (рис. 6.3, а), и отрицательна, если она сжимающая и направлена к сечению (рис. 6.3, б). Измеряется продольная сила в Н или кН (1 Н = 0,1 кг, 1 кН = 10<sup>3</sup> Н).



Рис. 6.3. Правило знаков при растяжении

## 6.2. Напряжения при растяжении и сжатии в поперечных и наклонных сечениях

Для оценки прочности элементов конструкции при растяжении и сжатии знания продольной силы недостаточно, необходимо знать распределение продольных сил по сечению. Они распределяются по сечению непрерывно и характеризуются интенсивностью (см. параграф 2.3). Мера интенсивности распределения продольных сил в точке при растяжении и сжатии называется *нормальным напряжением*.

Если на поверхность призматического стержня нанести сетку линий, параллельных и перпендикулярных оси стержня (рис. 6.4, а, б), и приложить к нему растягивающую силу, то можно убедиться в том, что линии сетки и после деформации останутся взаимно перпендикулярными, но расстояния между ними изменятся. Исключение составляет небольшой участок стержня вблизи точки приложения силы, который из рассмотрения пока исключаем (рис. 6.4, в).

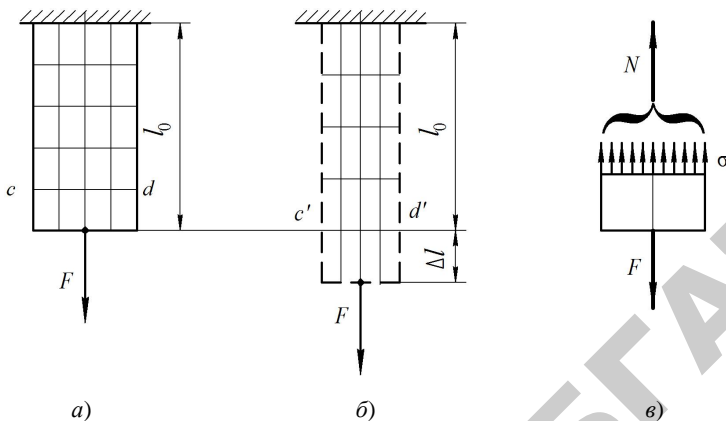


Рис. 6.4. Схема о гипотезе плоских сечений при растяжении

Все горизонтальные линии, например,  $cd$ , переместятся вниз, оставаясь горизонтальными и прямыми. Внутри стержня будет такая же картина, то есть поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его оси до деформации, останутся плоскими и нормальными к оси и после деформации. Эту важную гипотезу называют *гипотезой плоских сечений* или *гипотезой Бернулли*. Формулы, полученные на основе этой гипотезы, подтверждаются результатами опытов.

Так как в соответствии с гипотезой Бернулли каждое волокно образца удлинится на одну и ту же величину, то нормальные напряжения  $\sigma$  всех волокон в поперечном сечении равны между собой (рис. 6.4, в).

На произвольном участке стержня длиной  $l$  (рис. 6.5, а) проведем поперечное сечение  $n-n$ . Отбросим верхнюю часть стержня и рассмотрим равновесие его нижней части (рис. 6.5, б). Внутренние силы, действующие в сечении  $n-n$ , уравнивают продольную силу  $N$  и должны быть параллельны ей. Так как  $p \perp n-n$  (рис. 6.5, б), то в сечении  $n-n$  касательные напряжения  $\tau = 0$ , а нормальные напряжения  $\sigma = p$ , где  $p$  – полное напряжение в данном сечении. Из условия равновесия имеем

$$\sum F_{ix} = N - \int_A \sigma dA = 0, \quad \text{отсюда } N = \int_A \sigma dA.$$

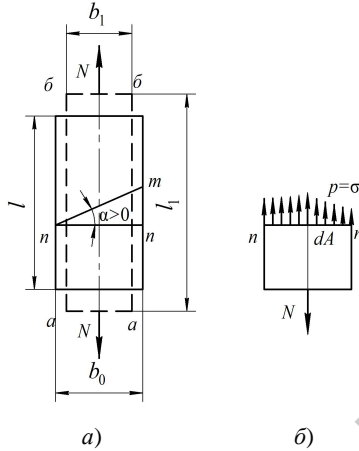


Рис. 6.5. а – схема произвольного участка стержня, сечение  $n-n$ ;  
 б – схема нижней отсеченной части стержня по сечению  $n-n$

Определить внутренние силы из данного выражения невозможно, так как не известен закон их распределения по сечению стержня. При растяжении резинового стержня с нанесенными на его поверхности поперечными параллельными линиями экспериментально доказано, что в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки (сосредоточенных сил), напряжения по сечению распределяются равномерно (принцип Сен-Венана).

Рассмотрим случай, когда по длине стержня площадь поперечного сечения  $A = \text{const}$ . Тогда из выражения

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (6.2)$$

получим формулу для определения напряжений при растяжении и сжатии

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (6.3)$$

где  $N$  – продольная сила;

$A$  – площадь поперечного сечения.

Формулы (6.2) и (6.3) справедливы и для сжатия, с той только разницей, что сжимающие напряжения считаются отрицательными. Кроме того, сжатые стержни помимо расчета на прочность необходимо рассчитывать на устойчивость. В частном случае, когда на стержень действует одна внешняя сила  $F$ , из уравнения равновесия (6.1) получим  $N = F$ . Таким образом, мерой интенсивности продольной силы, распределенной по сечению, служит нормальное напряжение – продольная сила  $N$ , приходящаяся на единицу площади сечения  $A$ . Единица измерения нормального напряжения

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{\text{сила}}{\text{площадь}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{1 \cdot 10^6 \text{мм}^2} = \text{Па (паскаль)}.$$

Поскольку эта единица напряжения очень мала, то применяется более крупная кратная единица, а именно мегапаскаль (МПа):

$$1 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2,$$

то есть числовые значения напряжения, выраженного в МПа и Н/мм<sup>2</sup>, совпадают.

Правило знаков для  $\sigma$  такое же, как для  $N$ : растяжение – «+»; сжатие – «-».

В любых наклонных сечениях стержня (наклонных площадках) методика определения нормальных и касательных напряжений приведена в подпункте 4.1.4.

Как показывают расчетные данные по нормальным сечениям, очень часто причиной разрушения хрупких материалов (чугуна, бетона, кирпича и др.) являются не нормальные, а касательные напряжения, действующие под углом  $\alpha = 45^\circ$  к линии действия сил. Даже деревянные образцы нередко разрушаются от касательных напряжений. И только пластичным материалам, например, мягкой стали не свойственны разрушения от касательных напряжений – стальные цилиндрические образцы при сжатии принимают бочкообразный вид. Характер разрушения образцов из различных материалов показан на рис. 6.6.



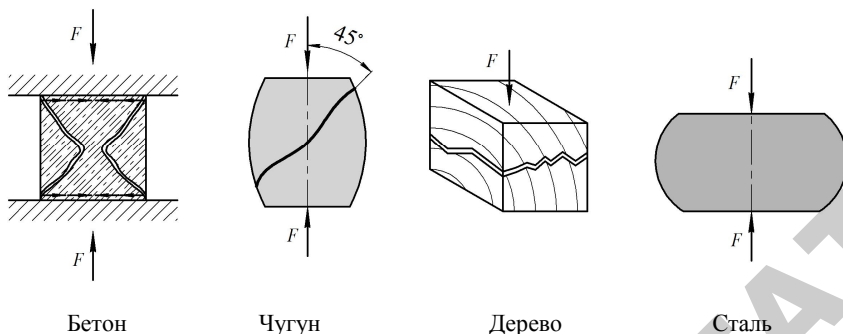


Рис. 6.6. Характер разрушения образцов из различных материалов

Разрушение от среза образцов из хрупких материалов объясняется зернистой структурой материала, для которого предел прочности при сдвиге значительно меньше предела прочности при сжатии.

### 6.3. Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений

Рассмотрим расчетную схему стального ступенчатого стержня квадратного поперечного сечения, сжатого силой  $F$  с учетом его собственного веса (рис. 6.7, а), для которого требуется:

- 1) определить количество расчетных участков;
- 2) составить аналитические выражения для продольных сил  $N$ , нормальных напряжений  $\sigma$  и вычислить их значения для каждого из участков стержня;
- 3) вычислить перемещение нижнего конца стержня  $\Delta l$  от действия силы  $F$  и собственного веса  $G^c$ ;
- 4) построить эпюры  $N$ ,  $\sigma$  и  $\Delta l$ .

*Исходные данные:* сила  $F = 20$  кН; длины  $l_1 = l_2 = l_3 = 0,7$  м; модуль упругости стали  $E = 2,0 \cdot 10^5$  МПа; площади сечений:  $A_1 = 0,09$  м<sup>2</sup>;  $A_2 = 0,16$  м<sup>2</sup>;  $A_3 = 0,36$  м<sup>2</sup>; плотность материала (стали)  $\rho_c = 78$  кН/м<sup>3</sup>.

*Решение.*

1. *Определение количества участков.* При определении продольных сил  $N$  границами участков принимаются те сечения,

в которых приложены внешние сосредоточенные силы или происходит изменение площади поперечного сечения либо плотности материала ступенчатого стержня.

Учитывая, что  $\rho_c = \text{const}$ , стержень будет иметь три участка (рис. 6.7, а):

I участок – от 0 до сечения  $b-b$  (где приложена сила  $F$ );

II участок – от сечения  $b-b$  до сечения  $c-c$ ;

III участок – от сечения  $c-c$  до сечения  $d-d$ .

При определении нормальных напряжений используем те же участки.

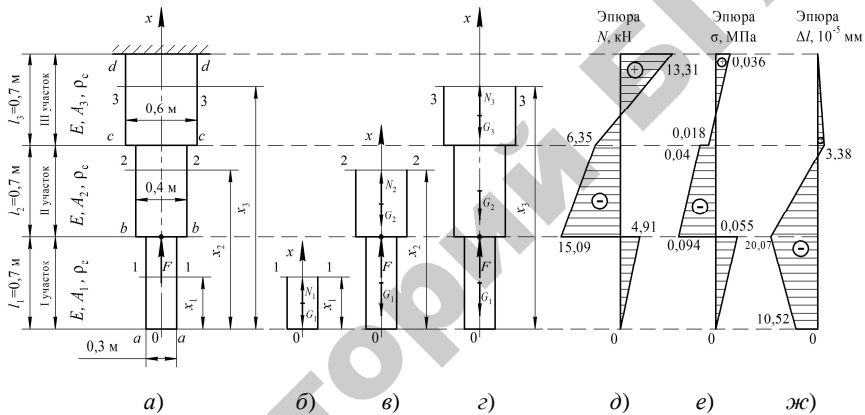


Рис. 6.7. К построению эпюр: а – расчетная схема ступенчатого стержня; б – схема отсеченной части, сечение 1-1; в – схема отсеченной части, сечение 2-2; г – схема отсеченной части, сечение 3-3; д – эпюра нормальных сил; е – эпюра нормальных напряжений; ж – эпюра перемещений характерных сечений

2. Аналитические выражения для продольных сил  $N$ , нормальных напряжений  $\sigma$ . Определение их значений для каждого из участков. Воспользуемся методом сечений.

I участок (0 –  $b-b$ ). Проведем сечение 1-1 на расстоянии  $x_1$  от начала координат (точки 0).

Тогда  $0 \leq x_1 \leq 0,7$  м. Рассмотрим равновесие нижней отсеченной части (рис. 6.7, б), для чего составим уравнение равновесия

$$\sum F_{ix} = N_1 - G_1^c = 0.$$

Собственный вес нижней отсеченной части стержня, кН:

$$G_1^c = \rho_c A_1 x_1 = 78 \cdot 0,09 x_1 = 7,02 x_1,$$

где  $x_1$  – длина отсеченного участка, м.

Тогда выражение для продольной силы будет иметь следующий вид, кН:

$$N_1 = G_1^c = 7,02 x_1,$$

а для нормальных напряжений, МПа ( $\text{Н}/\text{мм}^2$ ):

$$\sigma_1 = \frac{N_1 \cdot 10^3}{A_1 \cdot 10^6} = \frac{N_1}{A_1 \cdot 10^3} = \frac{7,02}{0,09 \cdot 10^3} x_1 = 0,078 x_1.$$

Так как между  $N_1$ ,  $\sigma_1$  и  $x_1$  существует линейная зависимость, то для построения эпюр продольных сил и нормальных напряжений достаточно определить значения этих величин на границах *I участка*, а именно:

$$\text{при } x_1 = 0 \rightarrow N_1(0) = 0; \quad \sigma_1(0) = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 0,7 \text{ м} \rightarrow N_1(0,7) = 7,02 \cdot 0,7 = 4,91 \text{ кН};$$

$$\sigma_1(0,7) = 0,078 \cdot 0,7 = 0,055 \text{ МПа}.$$

*II участок (b-b – c-c)*. Проведем сечение 2-2 на расстоянии  $x_2$  от начала координат. Тогда  $0,7 \text{ м} \leq x_2 \leq 1,4 \text{ м}$ .

Уравнение равновесия для отсеченной части примет вид

$$\sum F_{ix} = N_2 - G_1^c - G_2^c + F = 0.$$

$$\text{Тогда } N_2 = G_1^c + G_2^c - F.$$

Собственный вес *I участка* стержня  $G_1^c = \rho_c A_1 l_1 = 78 \cdot 0,09 \cdot 0,7 = 4,91 \text{ кН}$ .

Собственный вес *II участка* стержня длиной  $l_2$ , кН:

$$G_2^c = \rho_c A_2 (x_2 - 0,7) = 78 \cdot 0,16 (x_2 - 0,7) = 12,48 (x_2 - 0,7).$$

Откуда

$$N_2 = G_1 + G_2 - F = 4,91 + 12,48(x_2 - 0,7) - 20 = -15,09 + 12,48(x_2 - 0,7);$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2 \cdot 10^3}{A_2 \cdot 10^6} = \frac{(-15,09 + 12,48(x_2 - 0,7))10^3}{0,16 \cdot 10^6} = \frac{-15,09 + 12,48(x_2 - 0,7)}{0,16 \cdot 10^3}.$$

Определяем значения этих величин на границах *II участка*:

при  $x_2 = 0,7$  м  $\rightarrow N_2(0,7) = -15,09 + 12,48(0,7 - 0,7) = -15,09$  кН;

$$\sigma_2(0,7) = \frac{-15,09 + 12,48(0,7 - 0,7)}{0,16 \cdot 10^3} = -0,094 \text{ МПа};$$

при  $x_2 = 1,4$  м  $\rightarrow N_2(1,4) = -15,09 + 12,48(1,4 - 0,7) = -6,35$  кН;

$$\sigma_2(1,4) = \frac{-15,09 + 12,48(1,4 - 0,7)}{0,16 \cdot 10^3} = -0,04 \text{ МПа}.$$

*III участок (с-с - d-d)*. Проведем сечение 3-3 на расстоянии  $x_3$  от начала координат. Тогда  $1,4$  м  $\leq x_3 \leq 2,1$  м.

Уравнение равновесия для отсеченной части примет вид

$$\sum F_{ix} = N_3 - G_1^c - G_2^c - G_3^c + F = 0.$$

Тогда  $N_3 = G_1^c + G_2^c + G_3^c - F$ .

Собственный вес I участка стержня  $G_1^c = \rho_c A_1 l_1 = 78 \cdot 0,09 \cdot 0,7 = 4,91$  кН.

Собственный вес II участка стержня  $G_2^c = \rho_c A_2 l_2 = 78 \cdot 0,16 \cdot 0,7 = 8,74$  кН.

Собственный вес III участка стержня длиной  $l_3$ , кН:

$$G_3^c = \rho_c A_3 (x_3 - 1,4) = 78 \cdot 0,36 (x_3 - 1,4) = 28,08 (x_3 - 1,4).$$

Откуда

$$\begin{aligned} N_3 &= G_1^c + G_2^c + G_3^c - F = 4,91 + 8,74 + 28,08(x_3 - 1,4) - 20 = \\ &= -6,35 + 28,08(x_3 - 1,4); \end{aligned}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3 \cdot 10^3}{A_3 \cdot 10^6} = \frac{(-6,35 + 28,08(x_3 - 1,4))10^3}{0,36 \cdot 10^6} = \frac{-6,35 + 28,08(x_3 - 1,4)}{0,36 \cdot 10^3}.$$

Определяем значения этих величин на границах III участка:  
при  $x_3 = 1,4$  м  $\rightarrow N_3(1,4) = -6,35 + 28,08(1,4 - 1,4) = -6,35$  кН;

$$\sigma_3(1,4) = \frac{-6,35 + 28,08(1,4 - 1,4)}{0,36 \cdot 10^3} = -0,018 \text{ МПа};$$

при  $x_3 = 2,1$  м  $\rightarrow N_3(2,1) = -6,35 + 28,08(2,1 - 1,4) = 13,31$  кН;

$$\sigma_3(2,1) = \frac{-6,35 + 28,08(2,1 - 1,4)}{0,36 \cdot 10^3} = -0,036 \text{ МПа}.$$

3. Вычисление перемещения нижнего сечения стержня а-а от действия силы  $F$  и собственного веса. Согласно закону Гука, определим абсолютные деформации каждого участка стержня по формуле

$$\Delta l_i = \int_0^{l_i} \frac{N_i dx}{E_i A_i} = \frac{1}{E_i A_i} \int_0^{l_i} N_i dx, \quad (6.4)$$

где  $\int_0^{l_i} N_i dx$  – площадь эпюры  $N_i$  на  $i$ -м участке стержня.

Таким образом,

$$\Delta l_1 = \frac{1}{E_1 A_1} \int_0^{l_1} N_1 dx = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,09 \cdot 10^6} \left( \frac{1}{2} \cdot 4,91 \cdot 10^3 \cdot 700 \right) = 9,55 \cdot 10^{-5} \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{1}{E_2 A_2} \int_0^{l_2} N_2 dx = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,16 \cdot 10^6} \left( \frac{1}{2} (-15,09 - 6,35) \cdot 10^3 \cdot 700 \right) =$$

$$= -23,45 \cdot 10^{-5} \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{1}{E_3 A_3} \int_0^{l_3} N_3 dx = \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,36 \cdot 10^6} \left( \frac{1}{2} (-6,35 + 13,31) \cdot 10^3 \cdot 700 \right) =$$

$$= 3,38 \cdot 10^{-5} \text{ мм.}$$

Определим перемещения характерных сечений стержня:

$$\Delta l_{d-d} = 0 - \text{заделка};$$

$$\Delta l_{c-c} = \Delta l_{d-d} + \Delta l_3 = 0 + 3,38 \cdot 10^{-5} = 3,38 \cdot 10^{-5} \text{ мм};$$

$$\Delta l_{b-b} = \Delta l_{c-c} + \Delta l_2 = (3,38 - 23,45) \cdot 10^{-5} = -20,07 \cdot 10^{-5} \text{ мм};$$

$$\Delta l_{a-a} = \Delta l_{b-b} + \Delta l_1 = (-20,07 + 9,55) \cdot 10^{-5} = -10,52 \cdot 10^{-5} \text{ мм.}$$

4. *Построение эпюр  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta l$ .* На основе полученных данных строятся эпюры в виде графиков распределения продольных сил, нормальных напряжений и перемещений по длине стержня. Так как между  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta l$  и координатами  $x$  существует линейная зависимость, то для построения эпюр продольных сил, нормальных напряжений и перемещений достаточно определить значения этих величин в граничных сечениях каждого из участков ступенчатого стержня (рис. 6.7, *д, е, ж*).

Необходимыми условиями правильности построения эпюр  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta l$  являются:

- скачок на эпюре  $N$  должен находиться в точке приложения сосредоточенной силы и быть равным по величине значению этой силы;

- скачки на эпюре  $\sigma$  должны совпадать с точками приложения внешней нагрузки  $F$  и изменения площади поперечного сечения стержня.

Анализ эпюр  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta l$  (рис. 6.7, *д, е, ж*) показывает, что они построены правильно.

#### 6.4. Условия прочности и жесткости при растяжении и сжатии

Определив напряжение в опасном сечении растянутого (сжатого) стержня по формуле (6.3) и установив допустимое напряжение в соответствии с соображениями, изложенными выше, можно произвести оценку прочности стержня.

Условие прочности выражает требование, чтобы максимальное расчетное напряжение в стержне  $\sigma_{\max}$  не превышало значения допустимого напряжения  $[\sigma]$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A_{\min}} \leq [\sigma]. \quad (6.5)$$

Допускаемые напряжения – величины нормируемые и их используют в расчетах элементов конструкций из материалов, испытывающих растяжение или сжатие. При выборе материала следует учитывать его способность к растяжению или сжатию, чтобы избежать преждевременного разрушения конструкции.

В некоторых случаях для обеспечения нормальной работы деталей машин и элементов конструкций требуется проектировать их размеры таким образом, чтобы обеспечивалось условие жесткости.

Условие жесткости выражает требование, чтобы расчетное удлинение стержня  $\Delta l_{\max}$  не превышало допустимого удлинения  $[\Delta l]$ , и записывается в виде неравенства

$$\Delta l_{\max} \leq [\Delta l]. \quad (6.6)$$

Удлинение ступенчатых стержней, а также когда продольные силы  $N_i$  приложены в разных точках продольной оси стержня, определяется суммированием удлинений отдельных участков:

$$\Delta l_{\max} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i} \leq [\Delta l], \quad (6.7)$$

где  $N_i$ ,  $l_i$ ,  $E$ ,  $A_i$  – продольная сила, длина, модуль продольной упругости и площадь поперечного сечения  $i$ -го участка соответственно.

По условиям прочности и жесткости выполняются три вида расчетов.

1) *Конструкторский или проектировочный расчет.*

В этом случае требуется по известным значениям продольной силы  $N$ , длине стержня  $l$ , механическим характеристикам материала  $E$ ,  $[\sigma]$ ,  $[\Delta l]$  подобрать размеры поперечного сечения  $A$ .

Из условия прочности площадь поперечного сечения определяется по формуле

$$A = \frac{N_{\max}}{[\sigma]}. \quad (6.8)$$

Для круглого сечения  $A = \frac{\pi d^2}{4}$ , тогда

$$d = \sqrt{\frac{4N_{\max}}{\pi[\sigma]}}.$$

Из условия жесткости площадь поперечного сечения определяется по формуле

$$A = \frac{N_{\max} l}{E[\Delta l]}. \quad (6.9)$$

Тогда для круглого сечения

$$d = \sqrt{\frac{4N_{\max} l}{\pi E[\Delta l]}}. \quad (6.10)$$

Для прямоугольного сечения соответственно

$$b = \sqrt{\frac{N_{\max}}{c[\sigma]}}; \quad b = \sqrt{\frac{N_{\max} l}{cE[\Delta l]}}. \quad (6.11)$$

где  $b$  – ширина прямоугольного сечения;

$c = h/b$  – принимаемое отношение высоты сечения  $h$  к ширине  $b$ .



Из двух значений площади поперечного сечения стержня, полученных по формулам (6.8) и (6.9), выбирается большее.

### 2) Проверочный расчет.

Этот расчет проводится в том случае, если нагрузка (в нашем случае ее представляет  $N_x$ ), площадь поперечного сечения стержня  $A$  и его длина  $l$ , а также механические характеристики материала  $E$ ,  $[\sigma]$ ,  $[\Delta l]$  заданы и требуется проверить, выполняются ли условия прочности (6.5) и жесткости (6.7).

### 3) Расчет грузоподъемности или несущей способности.

В этом случае известны геометрические размеры стержня, характеристики материала и требуется определить предельную или допускаемую нагрузку  $F_{\max}$ , которая не может превзойти внутренние усилия, возникающие в наиболее опасных сечениях конструкции в процессе ее эксплуатации

$$F_{\max} \leq A[\sigma], \quad (6.12)$$

$$F_{\max} \leq \frac{EA[\Delta l]}{l}. \quad (6.13)$$

Из двух значений предельной или допускаемой нагрузки  $F_{\max}$ , найденных по формулам (6.12) и (6.13), принимается меньшее.

На практике, в зависимости от решаемой задачи, расчеты могут проводиться только по условию прочности или по условию жесткости.

Следует иметь в виду, что сжатые стержни кроме расчета на прочность в наиболее ослабленном сечении должны также рассчитываться на устойчивость, так как при определенном значении сжимающей силы может произойти выпучивание (продольный изгиб) сжатого стержня.

## 6.5. Статически неопределимые задачи растяжения и сжатия

Если при рассмотрении конкретной системы, находящейся в равновесном состоянии от действия заданных внешних нагрузок, все реакции в связях закрепления, а также внутренние усилия в ее

элементах, можно определить только по методу сечений, без использования дополнительных условий, то такая система называется *статически определимой*.

В реальной практике встречаются такие конструкции, при расчете которых одних лишь уравнений равновесия оказывается недостаточно, в связи с чем требуется формулирование дополнительных уравнений, связанных с условиями деформирования элемента конструкции.

Системы, в которых количество наложенных связей больше, нежели число независимых уравнений равновесия, называются *статически неопределимыми*.

По сравнению со статически определимыми системами, в статически неопределимых системах имеются дополнительные связи, которые называются *лишними*.

Термин «лишние связи» является условным. Эти связи являются лишними с точки зрения расчетных предпосылок. В действительности эти связи создают дополнительные резервы для элементов конструкций как в плане обеспечения их жесткости, так и прочности.

На рис. 6.8, *a* изображен кронштейн, состоящий из двух стержней, шарнирно скрепленных между собой. В связи с тем, что на конструкцию действует лишь вертикальное усилие  $F$ , а система является плоской (то есть все элементы конструкции и вектор внешних сил лежат в одной плоскости), получается, что усилия в стержнях можно легко определить исходя из условий равновесия узла  $A$ , составив два уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0. \quad (6.14)$$

Раскрывая эти уравнения, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных усилий  $N_1$  и  $N_2$ , в которой количество уравнений равно количеству неизвестных (рис. 6.8, *a*):

$$-N_1 - N_2 \sin \alpha = 0; \quad -N_2 \cos \alpha - F = 0.$$

Если конструкцию кронштейна усложнить, добавив еще один стержень (рис. 6.8, *б*), то усилия в стержнях  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  прежним

способом определить уже не удастся, так как при тех же двух уравнениях равновесия (6.14) имеются уже три неизвестных усилия в стержнях. В таких случаях говорят, что система один раз статически неопределима. Разность между числом неизвестных усилий и количеством независимых (значащих) уравнений равновесия, связывающих эти усилия, называется *степенью статической неопределимости* рассматриваемой системы.

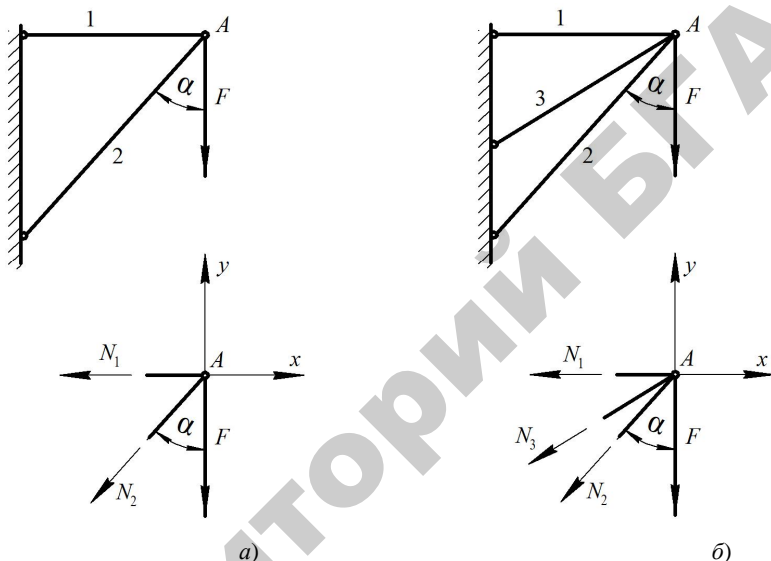


Рис. 6.8. Схема статически определимой системы (а) и статически неопределимой системы (б)

В общем случае под  $n$  раз статически неопределимой системой понимается система, в которой число неизвестных внешних опорных реакций и внутренних усилий превышает число независимых и значащих уравнений равновесия на  $n$  единиц.

Статически неопределимые системы приведены на рис. 6.9, б, в. Степень статической неопределимости  $n$  определяется по формуле

$$n = k - 3, \quad (6.15)$$

где  $k$  – число неизвестных;

3 – число уравнений статики (два уравнения – сумма проекций всех сил на оси  $x$ ,  $y$  и третье уравнение – сумма моментов всех сил относительно точки).

Для раскрытия статической неопределимости необходимо составить дополнительные уравнения, учитывающие деформации элементов системы и перемещения узлов. Такие уравнения называются *уравнениями совместности деформаций*.

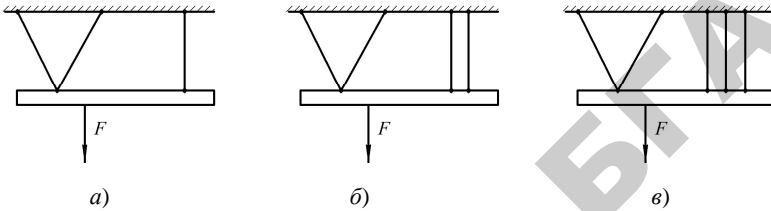


Рис. 6.9. Расчетные схемы:

- $a$  – статически определимая система;
- $b$  – 1 раз статически неопределимая система;
- $v$  – 2 раза статически неопределимая система

Рассмотрим общие рекомендации и приемы для решения статически неопределимых задач при растяжении (сжатии).

1. Статическая сторона задачи:

- для отсеченных элементов конструкции, содержащих неизвестные усилия, составляем уравнения статики;
- определяем степень статической неопределимости системы.

2. Геометрическая сторона задачи:

- рассматриваем систему в деформированном состоянии и устанавливаем связи между деформациями и перемещениями отдельных элементов конструкции;
- составляем уравнения совместности деформаций.

3. Физическая сторона задачи:

- на основании закона Гука определяем перемещения (деформации) элементов конструкции через действующие в них неизвестные усилия. При изменении температуры к деформациям, вызванным усилиями, добавляются температурные деформации;
- при решении системы уравнений (статических и физических) определяем неизвестные усилия.

Рассмотрим рис. 6.10, а. Так как система симметрична, то  $N_1 = N_2$ . Составим уравнение равновесия

$$\sum F_{iy} = 0, \quad 2N_1 \cos \alpha - F = 0, \quad \text{отсюда } N_1 = \frac{F}{2 \cos \alpha}.$$

Рассмотрим рис. 6.10, б. Пусть площади сечений  $A_1 = A_2$ , откуда  $N_1 = N_2$ .

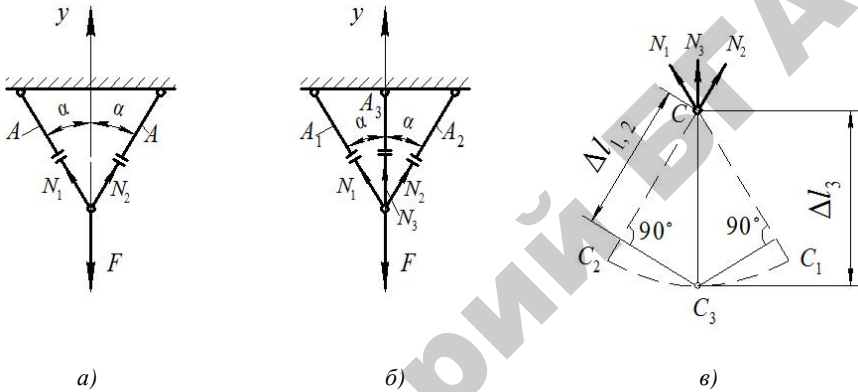


Рис. 6.10. Расчетные схемы:

а – статически определяемая система;

б, в – 1 раз статически неопределимая система

Составим уравнение равновесия

$$\sum F_{iy} = 0, \quad 2N_1 \cos \alpha + N_3 - F = 0, \quad \text{откуда } N_1 = \frac{F - N_3}{2 \cos \alpha}.$$

Для определения лишнего неизвестного составим уравнение совместности деформаций. Для этого рассмотрим перемещение узла С в результате деформации стержней (рис. 6.10, в).

$CC_3 = \Delta l_3$  – перемещение узла С и удлинение стержня 3;

$CC_1 = \Delta l_{1,2}$  – удлинение стержней 1 и 2.

В силу малости деформаций считаем, что угол между стержнями до и после деформации не изменяется, и пренебрегаем величинами второго порядка малости. Используя закон Гука, имеем

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3}.$$

Приравняем эти два выражения, получим

$$\frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_3 l_3}{EA_3} \cos \alpha.$$

Далее из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2N_1 \cos \alpha + N_3 - F &= 0; \\ \frac{N_1 l_1}{EA_1} &= \frac{N_3 l_3}{EA_3} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

находим  $N_1, N_2, N_3$ .

Рассмотрим пример деформации стержня, защемленного между двумя заделками (рис. 6.11, а).

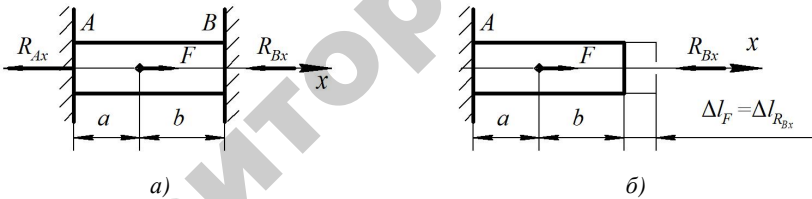


Рис. 6.11. Расчетные схемы:

- а – деформация стержня, защемленного между двумя заделками;
- б – стержень для составления уравнения совместности деформаций

1. Составим уравнение равновесия

$$\sum F_{ix} = 0, \quad F - R_{Ax} - R_{Bx} = 0.$$

2. Отбросим правую заделку и составим уравнение совместности деформаций. При этом перемещения, вызванные внешней силой  $F$  и опорной реакцией  $R_{Bx}$ , будут одинаковы, то есть  $\Delta l_F = \Delta l_{R_{Bx}}$ , или

$$\frac{Fa}{EA} = \frac{R_{Bx}(a+b)}{EA}, \quad (6.17)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

3. Решая систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} F - R_{Ax} - R_{Bx} &= 0; \\ \frac{Fa}{EA} &= \frac{R_{Bx}(a+b)}{EA}, \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

находим опорные реакции  $R_{Ax}$  и  $R_{Bx}$ .

### ***6.5.1. Определение монтажных напряжений, вызванных технологическими неточностями***

В статически неопределимых системах возможно возникновение напряжений при сборке из-за неточности изготовления деталей.

Такие напряжения называются начальными или монтажными и обозначаются  $\sigma_{нач}$ .

В некоторых случаях эти напряжения создаются специально для того, чтобы повысить прочностные характеристики детали из материала, по-разному работающего на растяжение. При этом условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_{пол} = \sigma_{нач} + \sigma_p \leq [\sigma]. \quad (6.19)$$

Если начальное  $\sigma_{нач}$  и рабочее  $\sigma_p$  напряжения имеют разные знаки, то  $\sigma_p$  можно увеличить при одном и том же значении  $[\sigma]$ .

Например, в строительстве применяется армированный, предварительно напряженный бетон. Стальная арматура растягивается с определенным усилием и в таком состоянии заливается бетоном. После затвердевания бетона арматура разгружается и в бетоне возникают напряжения сжатия. При этом несущая способность железобетонных конструкций, работающих на растяжение, увеличивается до 30 %.

Начальные напряжения в стержневых системах при монтаже зависят от жесткости стержней и величины неточностей при их изготовлении.

### 6.5.2. Определение температурных напряжений

В статически неопределимых системах при изменении температуры возникают температурные напряжения (рис. 6.12).

1. Составим уравнение равновесия  $\sum F_{ix} = 0$ ,  $R_{Ax} - R_{Bx} = 0$ .
2. Отбросим правую заделку, составим уравнение совместности деформаций:

$$\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_{R_{Bx}} = 0. \quad (6.20)$$

Отсюда по абсолютной величине

$$\Delta l_t = \Delta l_{R_{Bx}}.$$

Но в то же время известно, что

$$\Delta l_t = \alpha \Delta t,$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения;  
 $\Delta t$  – разность температур.

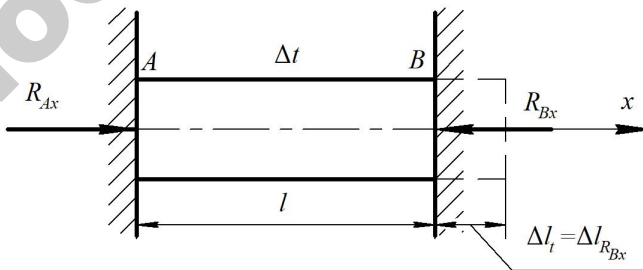


Рис. 6.12. Расчетная схема стержня при температурном воздействии



3. Согласно закону Гука имеем

$$\alpha l \Delta t = \frac{R_B l}{EA}. \quad (6.21)$$

Таким образом,

$$R_A = R_B = \alpha \Delta t EA.$$

4. Определим температурные напряжения:

$$\sigma_t = \frac{R_B}{A} = \alpha \Delta t E. \quad (6.22)$$

Полученная формула справедлива лишь для определения напряжений в стержнях постоянного сечения с жесткой заделкой обоих концов.

Из формулы (6.22) следует, что в статически неопределимых системах изменение температуры вызывает дополнительные напряжения. Они будут сжимающими при повышении температуры и растягивающими при понижении температуры. *В статически определимых системах температурные напряжения не возникают.* Для снятия температурных напряжений в практике широко применяются температурные швы и зазоры.

### 6.5.3. Свойства статически неопределимых систем

Статически неопределимые системы являются более прочными, жесткими и устойчивыми. Однако обладают рядом особенностей, которые принято представлять в виде трех основных свойств статически неопределимых систем, а именно:

1) свойство жесткости – усилия в элементах статически неопределимых систем распределяются пропорционально их жесткости независимо от абсолютных размеров этих элементов;

2) свойство о монтажных напряжениях – при неточном изготовлении или сборке элементов статически неопределимых систем в них возникают дополнительные напряжения, называемые монтажными напряжениями;

3) свойство о температурных напряжениях – при изменении температуры окружающей среды в элементах статически неопределимых систем возникают температурные напряжения, определяемые по формуле (6.22).

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое растяжение и сжатие бруса (стержня) при осевом действии внешней нагрузки?
2. Какие ВСФ возникают при центральном растяжении и сжатии?
3. Как определить продольную силу методом сечений?
4. Что такое напряжения и деформации при осевом растяжении и сжатии? Как они определяются?
5. Как определяются напряжения (нормальные и касательные) в наклонных сечениях?
6. Как построить эпюры нормальных усилий, напряжений и перемещений характерных сечений бруса при одноосном растяжении и сжатии?
7. Как формулируются условия прочности и жесткости при растяжении-сжатии стержня?
8. Какие виды расчетов вытекают из условий прочности и жесткости одностержневых систем при растяжении и сжатии?
9. Что такое потенциальная энергия упругой деформации? Как она определяется при одноосном растяжении и сжатии стержня?
10. В чем заключается особенность расчета напряжений и деформаций при учете собственного веса системы?
11. Какие системы называются статически неопределимыми при растяжении и сжатии? Перечислите виды этих систем.
12. Как осуществляется расчет статически неопределимых одностержневых и многостержневых систем при действии на них температурных нагрузок и технологических неточностей?

## 7. СДВИГ (СРЕЗ) И СМЯТИЕ

Уже в процессе растяжения образца в области пластических деформаций наблюдаем явление, причиной которого является сдвиг – скольжение одних частей материала по другим (линии Чернова-Людерса).

В чистом виде осуществить сдвиг внешними воздействиями затруднительно, так как он часто сопровождается изгибом и другими деформациями.

Возьмем резиновый брусок с начерченными на его поверхности горизонтальными и вертикальными линиями и закрепим на столе (рис. 7.1, а). Сверху к бруску прикрепим рейку и приложим к ней горизонтальную силу  $F$  (рис. 7.1, б). Горизонтальные слои бруска сдвинутся, оставаясь параллельными, а вертикальные грани, оставаясь плоскими, наклонятся на угол  $\gamma$ .

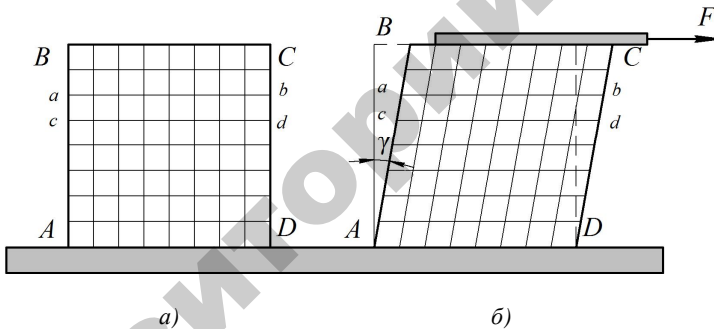


Рис. 7.1. Схема деформации сдвига резинового бруска

Такого рода деформацию, при которой происходит смещение слоев тела друг относительно друга, называют *деформацией сдвига*.

Таким образом, *сдвиг* – простой вид деформации, характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материалов тела под действием сил, приложенных касательно к его поверхности, при неизменном расстоянии между слоями.

Если силу  $F$  увеличить в два раза, то и угол  $\gamma$  увеличится в два раза. Опыты показывают, что при упругих деформациях угол сдвига  $\gamma$  прямо пропорционален модулю приложенной силы.

Деформацию сдвига можно наглядно продемонстрировать на модели твердого тела, представляющей собой ряд параллельных пластин, соединенных между собой пружинами (рис. 7.2, а). Горизонтальная сила сдвигает пластины друг относительно друга без изменения объема тела (рис. 7.2, б). При деформации сдвига у реальных твердых тел объем их также не меняется.

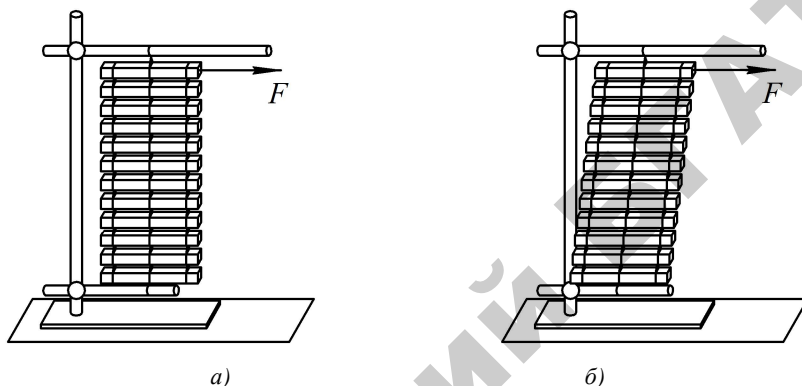


Рис. 7.2. Схема деформации сдвига твердого тела

Деформации сдвига подвержены все балки в местах опор, заклепки и болты, скрепляющие детали и т. д.

Явление сдвига можно наблюдать при перерезании полосы ножницами (рис. 7.3). Из рисунка следует, что сдвиг одной части относительно другой возникает в том случае, когда плечо  $h$  мало.

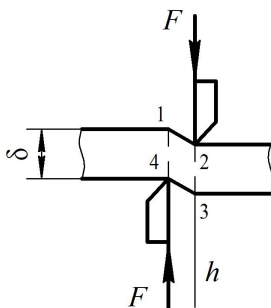


Рис. 7.3. Схема к пониманию явления сдвига

При большом плече  $h$  сдвиг сопровождается изгибом. При увеличении сил  $F$  деформация сдвига завершается перерезыванием полосы.

Сдвиг предшествует срезу и заключается в искажении прямых углов в элементе конструкции. *Срез* – это сдвиг, доведенный до разрушения. Особенно характерно проявляется последовательность деформации (сначала сдвиг, а затем срез) если ножницы тупые и разболтанные. Срез в таком случае будет не перпендикулярен плоскости листа, а слегка наклонен, кроме того по направлению среза тянется заусенец.

При работе конструкций (особенно в динамическом режиме) в элементах соединений (болтовых, шпоночных и др.) возникает *деформация смятия*. Сечение элемента искажается: например, круглое сечение становится овальным, боковая поверхность шпонки увеличивается в размерах, при этом уменьшается ширина шпонки, и т. д. В результате в соединении появляются недопустимые зазоры и люфты. Поэтому заклепки, болты, шпонки и другие элементы кроме расчета на сдвиг, проверяют на смятие.

### 7.1. Абсолютный и относительный сдвиги

Если на брус, как уже отмечалось ранее, действуют две равные и противоположно направленные силы, перпендикулярные оси бруса и расположенные на очень малом расстоянии друг от друга, то происходит *срез*.

Деформация, предшествующая срезу, которая заключается в искажении прямых углов на участке приложения противоположно направленной и равной по величине нагрузки, называется *сдвигом* (рис. 7.4, а).

В результате сдвига одно поперечное сечение бруса сдвигается относительно другого на величину  $\Delta S$  (рис. 7.4, б, в), которая называется *абсолютной величиной сдвига* и имеет размерность длины.

Отношение абсолютной величины сдвига к расстоянию между приложенными силами называется *относительной деформацией сдвига*, или *углом сдвига*, то есть

$$\frac{\Delta S}{h} = \operatorname{tg} \gamma. \quad (7.1)$$

Так как при малых деформациях  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ , то

$$\frac{\Delta S}{h} \approx \gamma, \quad (7.2)$$

где  $\gamma$  – относительный сдвиг, или угол сдвига.

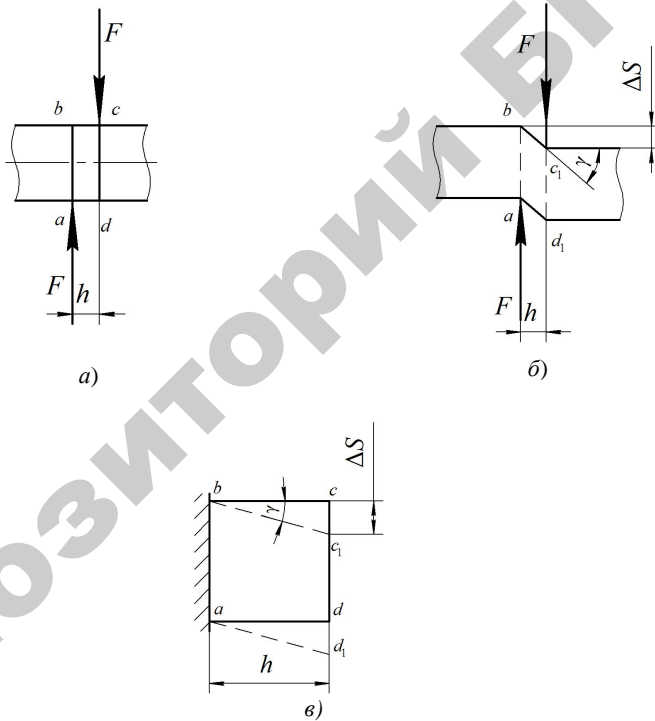


Рис. 7.4. Схема бруса при деформации сдвигом

Угол сдвига показывает искажение прямых углов, прямоугольник  $abcd$  превращается в параллелограмм  $abc'd'$ , выражается в радианах.

## 7.2. Внутренние силовые факторы и напряжения при сдвиге. Закон Гука при сдвиге. Модуль сдвига

Рассмотрим брус площадью поперечного сечения  $A$ , перпендикулярно оси которого приложены две равные и противоположно направленные силы  $F$ . Линии действия их параллельны и находятся на относительно небольшом расстоянии друг от друга (рис. 7.5, *а*).

При сдвиге в любом поперечном сечении бруса возникает только один силовой фактор – *поперечная сила*  $Q$ . Для определения поперечной силы  $Q$  при сдвиге применим метод сечений.

Рассматривая равновесие левой отсеченной части бруса (рис. 7.5, *б*), можно предположить, что во всех точках поперечного сечения действуют распределенные силы, равнодействующую которых определим из условия равновесия оставленной части бруса:

$$\sum F_{iy} = 0. \quad (7.1)$$

Тогда  $F - Q = 0$ , откуда определим поперечную силу

$$Q = F. \quad (7.2)$$

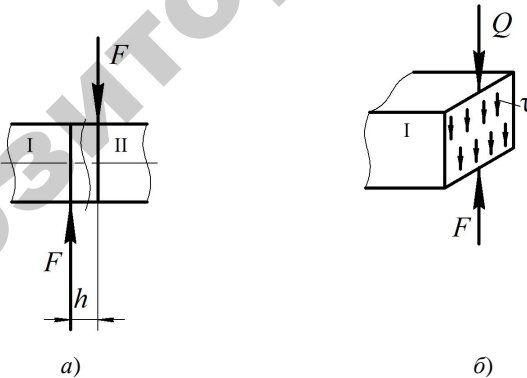


Рис. 7.5. Схема бруса для определения ВСФ при сдвиге

Поперечная сила есть равнодействующая внутренних касательных сил в поперечном сечении при сдвиге.

Естественно считать, что при сдвиге в поперечном сечении бруса действует только касательная напряжения  $\tau$ .

Предполагаем, что эти напряжения распределены по сечению равномерно и, следовательно, их можно вычислить по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (7.3)$$

Очевидно, что при сдвиге форма сечения на значение напряжения не влияет.

Изложенный в этом параграфе расчет касательных напряжений при сдвиге приближенный, так как линии действия сил  $F$  и  $Q$  (рис. 7.5, б) не направлены по одной прямой и, строго говоря, эти силы не являются уравновешенной системой, а представляют собой пару сил. Однако момент этой пары (ввиду малого плеча  $h$ ) невелик и соответствующими ей напряжениями можно пренебречь.

Напряжения и деформации при сдвиге связаны между собой зависимостью, которая называется *законом Гука* при сдвиге.

Закон Гука при сдвиге справедлив лишь в определенных пределах нагружения и формулируется так: *касательные напряжения в пределах упругих деформаций прямо пропорциональны относительной деформации сдвига*.

Математически закон Гука можно записать в виде равенства

$$\tau = G\gamma. \quad (7.4)$$

Коэффициент пропорциональности  $G$  характеризует жесткость материала (то есть способность сопротивляться упругим деформациям) при сдвиге и называется *модулем упругости второго рода* или *модулем сдвига*. Модуль сдвига  $G$  и напряжение  $\tau$  выражаются в одинаковых единицах  $[G] = \frac{[\tau]}{[\gamma]} = \text{МПа}$ .

Величина модуля сдвига определяется экспериментально и для каждого материала имеет свое значение. Модуль продольной упругости (модуль Юнга), модуль сдвига, а также коэффициент Пуассона для отдельных материалов приведены в приложении (табл. В. 4).



Вид диаграммы  $\tau$ - $\gamma$  при сдвиге для пластичной стали показан на рис. 7.6. Она напоминает аналогичную диаграмму  $\sigma$ - $\varepsilon$  при растяжении (см. рис. 3.4).

Напряжение  $\tau_{\text{пц}}$  (предел пропорциональности при сдвиге) является границей, до которой выполняется закон Гука.

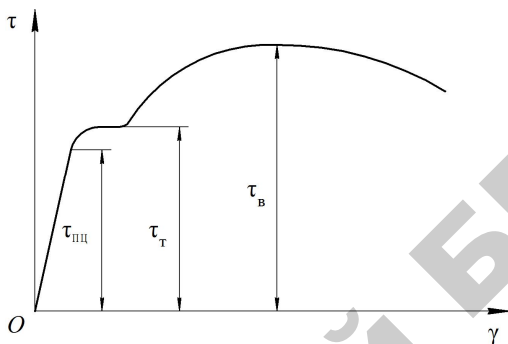


Рис. 7.6. Диаграмма напряженного состояния при сдвиге

Учитывая, что

$$\tau = \frac{Q}{A} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\Delta S}{A},$$

находим абсолютную величину сдвига

$$\frac{Q}{A} = G \frac{\Delta S}{h},$$

откуда

$$\Delta S = \frac{Qh}{GA}. \quad (7.5)$$

Полученная формула аналогична зависимости для определения абсолютной деформации при растяжении:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (7.6)$$

### 7.3. Связь между модулями упругости $E$ и $G$ и коэффициентом Пуассона

Установим зависимость между модулями упругости  $E$  и  $G$ . Для этого на участке балки между приложенными внешними силами выделим элемент в виде параллелограмма и рассмотрим его равновесие в процессе деформации (рис. 7.7).

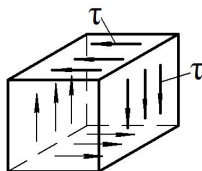


Рис. 7.7. Схема элементарного параллелепипеда

На боковых вертикальных и горизонтальных гранях параллелепипеда действуют касательные напряжения. На гранях, параллельных плоскости чертежа, напряжения отсутствуют.

Деформация, при которой на гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения, называется *чистым сдвигом*.

Наиболее просто однородный чистый сдвиг может быть осуществлен непосредственным нагружением пластины, захваченной в жесткие контурные шарнирно соединенные накладки (рис. 7.8). Для всех точек пластины касательные напряжения  $\tau$  будут следующими:

$$\tau = \frac{F}{l\delta}, \quad (7.7)$$

где  $\delta$  – толщина пластины.

Исключение составляет узкая краевая зона, где пластина сопрягается с накладками. Здесь напряженное состояние будет отличным от чистого сдвига. Однако в соответствии с принципом Сен-Венана, эти отклонения носят чисто местный характер и область их распространения мала по сравнению с общими размерами напряженной пластины.

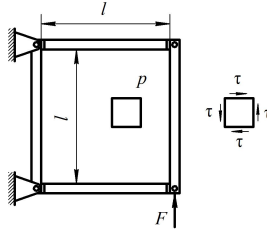


Рис. 7.8. Схема пластины, подвергаемой чистому сдвигу

В качестве второго примера, иллюстрирующего состояние однородного чистого сдвига, можно рассмотреть тонкостенную цилиндрическую трубку, нагруженную моментами, приложенными в торцовых плоскостях (рис. 7.9). Здесь и далее внешний момент в отличие от внутреннего обозначается через  $M$ .

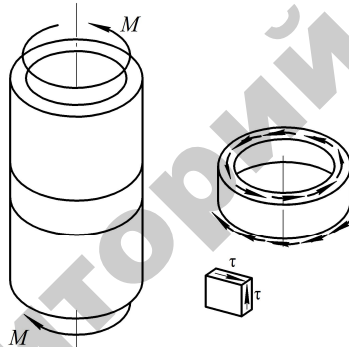


Рис. 7.9. Схема цилиндрической трубы, которая подвергается чистому сдвигу

Величина напряжения  $\tau$  определяется из условий равенства момента равномерно распределенных по поперечному сечению внутренних сил моменту  $M$ .

$$\tau = \frac{M}{2\pi R^2 \delta}. \quad (7.8)$$

При чистом сдвиге материал находится в плоском напряженном состоянии. При этом  $\tau_\alpha = \tau$ ,  $\tau_\beta = -\tau$ ,  $\tau_\alpha = \tau_\beta = 0$ .

Определим главные напряжения при чистом сдвиге и положения главных площадок.

Величины главных напряжений определяются по формулам

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}; \quad (7.9)$$

$$\sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \quad (7.10)$$

Учитывая данные зависимости, получаем

$$\sigma_1 = \tau;$$

$$\sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_3 = -\tau.$$

Положение главных площадок определяется углом  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta} = \frac{\tau}{\tau} = 1. \quad (7.11)$$

Таким образом, при чистом сдвиге главные площадки наклонены к граням выделенного элемента под углом  $45^\circ$  (рис. 7.10, а).

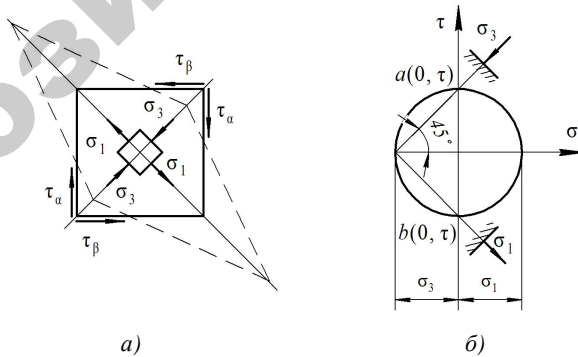


Рис. 7.10. Схема для определения положения главных площадок при чистом сдвиге

Графическое определение направления главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  может быть получено с помощью круга Мора (рис. 7.10, б).

При деформации сдвигом прямые углы выделенного элемента бруса искажаются. При этом изменяются длины диагоналей.

Найдем удлинение диагонали квадратного элемента (рис. 7.11).

С одной стороны, его можно объяснить деформацией сдвига. С другой – диагональ  $BD$  можно представить как волокно материала, растягиваемое напряжением  $\sigma_1$  и сжимаемое в поперечном направлении напряжением  $\sigma_3$ .

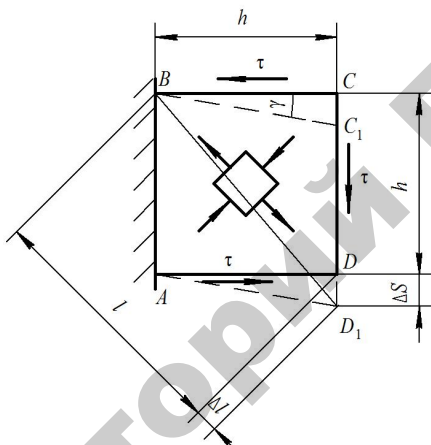


Рис. 7.11. Схема для определения связи между  $E$  и  $G$

Сказанное позволяет сделать вывод о том, что модули упругости  $E$  и  $G$  не являются независимыми друг от друга величинами. Определим абсолютное удлинение диагонали  $BD$  в процессе деформации:

$$\Delta l = DD_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}.$$

Относительное удлинение диагонали  $BD$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}h\sqrt{2}} = \frac{\Delta S}{2h} = \frac{\gamma}{2}.$$

По закону Гука для чистого сдвига

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G}.$$

Воспользуемся обобщенным законом Гука. Главное напряжение  $\sigma_1$  действует в направлении диагонали  $BD_1$ . Таким образом, полученное значение есть удлинение

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{E} (\tau + \nu\tau) = \frac{1+\nu}{E} \tau. \quad (7.12)$$

Приравняв правые части выражений для определения, получим

$$\frac{\tau}{2G} = \frac{1+\nu}{E} \tau,$$

или

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (7.13)$$

Данная формула устанавливает зависимость между тремя постоянными материала, характеризующими его упругие свойства, – модулями упругости первого и второго рода и коэффициентом Пуассона.

Например, для стали, при  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа и коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,25$ , находим

$$G = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,25)} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Чистый сдвиг имеет место в пластинках, нагруженных растягивающими нормальными напряжениями в одном направлении и сжимающими напряжениями в другом (рис. 7.12, а). По площадкам, расположенным под углом  $\alpha = 45^\circ$ , действуют только касательные напряжения.

Приложение равномерно распределенных напряжений, как показано на рис. 7.12, *a*, трудно осуществить, поэтому состояние чистого сдвига обычно получают путем кручения цилиндрической трубы (рис. 7.12, *б*).

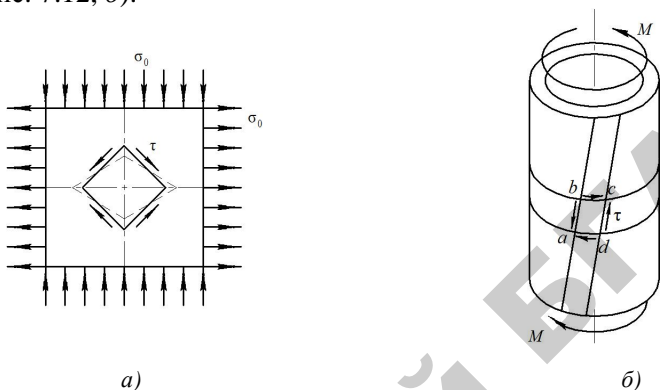


Рис. 7.12. Схема пластины и цилиндрической трубы, которые подвергаются чистому сдвигу

Вследствие малого поворота одного конца трубы относительно другого, элемент  $abcd$ , образованный двумя образующими и двумя смежными круговыми поперечными сечениями, подвергается чистому сдвигу.

#### 7.4. Расчет элементов конструкций на прочность при сдвиге

Так как материал бруса при сдвиге находится в сложном напряженном состоянии, то для оценки его прочности необходимо использовать теории прочности.

Для хрупких материалов применяют первую и вторую теории прочности. При чистом сдвиге

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau.$$

Согласно первой теории прочности получаем условие

$$\sigma_1 = \tau \leq [\sigma], \quad (7.14)$$

то есть касательное напряжение при сдвиге должно быть не больше допустимого напряжения на растяжение.

По второй теории прочности будем иметь

$$\sigma_1 - \nu\sigma_3 = (\tau + \nu\tau) \leq [\sigma]. \quad (7.15)$$

Если для стали принять  $\mu = 0,3$ , то допустимое касательное напряжение должно быть следующим:

$$\tau \leq 0,7 [\sigma]. \quad (7.16)$$

Для пластичных материалов обычно используют третью и четвертую теории прочности. Согласно третьей теории прочности

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\tau - (-\tau)) \leq [\sigma], \text{ то есть } [\tau] = 0,5 [\sigma]. \quad (7.17)$$

Наконец, по четвертой теории прочности

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} = \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} = \tau\sqrt{3} \leq [\sigma]. \quad (7.18)$$

Следовательно,

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0,58[\sigma]. \quad (7.19)$$

В практике обычно принимают для хрупких материалов

$$[\tau] = (0,58 \dots 1,0)[\sigma]; \quad (7.20)$$

для пластичных

$$[\tau] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma]. \quad (7.21)$$

Условие прочности при сдвиге имеет такой же вид, как и условие прочности на растяжение (сжатие). Оно позволяет выполнять три вида расчета на прочность при сдвиге: проектировочный, проверочный и определение максимальной допускаемой нагрузки.



## 7.5 Расчет заклепочных и болтовых соединений на срез и смятие

Конечная стадия деформации или сдвига заканчивающаяся разрушением называется *срезом*.

Срез происходит под действием двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны и вызывающих в определенном сечении смещение одной части тела относительно другой, при неизменном расстоянии между ними.

Методика расчета элементов конструкций, работающих на срез, в значительной мере опирается на теорию чистого сдвига.

Известно, что между пределом прочности на растяжение  $\sigma_{пч}$  и пределом прочности на срез  $\tau_{пч}$  существует довольно устойчивое соотношение (например, для стали  $\tau_{пч} = 0,6 \dots 0,8 \sigma_{пч}$ ).

Обычные элементы, работающие в конструкциях на срез (болты, заклепки, шпонки), одновременно подвергаются действию и нормальных напряжений, возникающих по сечениям, и испытывающим срез. Следовательно, материал таких элементов находится в более сложных условиях работы, чем чистый сдвиг.

С теоретической точки зрения расчеты на срез являются несовершенными, так как основываются на ряде упрощающих расчет допущений.

К числу таких допущений при расчете заклепочных соединений относится предположение, что в сечении, по которому может произойти разрушение от среза, касательные напряжения распределены равномерно. Предполагается также, что все заклепки (рис. 7.13) работают в одинаковых условиях и передаваемое усилие распределяется между заклепками равномерно, что при работе в упругой стадии материала практически невозможно.

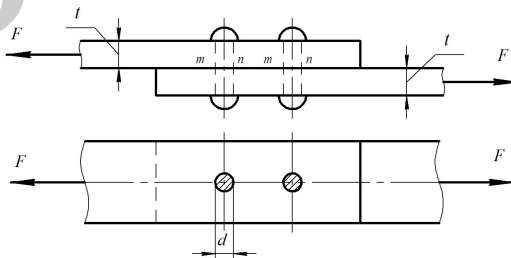


Рис. 7.13. Схема заклепочного соединения

Однако многолетняя служба различных сооружений показывает, что подобный расчет, несмотря на свой условный характер, вполне обеспечивает прочность конструкций.

В настоящее время заклепки применяются в основном в тяжелых конструкциях или при достаточно резких динамических нагрузках, которые испытывают соединяемые элементы конструкций.

Заклепки в соединении внахлестку, изображенном на рис. 7.13, испытывают напряжения среза по одному поперечному сечению и называются *односрезными заклепками*. Разрушение от среза может произойти по сечениям  $m-n$  (рис. 7.14).

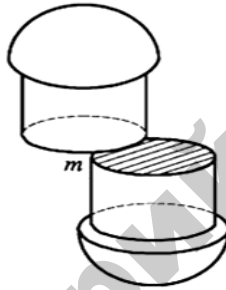


Рис. 7.14. Схема заклепки, работающей на срез

Площадь среза одной заклепки определяется по формуле

$$A_{\text{ср}} = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (7.22)$$

Если число заклепок в соединении равно  $n$ , то

$$A_{\text{ср}} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot n. \quad (7.23)$$

Соединение внахлестку имеет недостаток в том, что листы располагаются не в одной плоскости, вследствие чего силы  $F$  образуют пару сил, вызывающих изгиб листов и перекашивание соединения. Более рационально соединение листов впритык с накладками (рис. 7.15).

В таком соединении каждая заклепка испытывает напряжения среза по двум плоскостям. Такие заклепки называется *двухсрезными заклепками*.

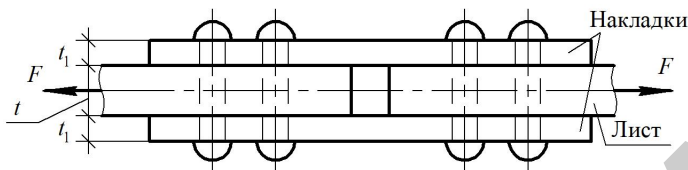


Рис. 7.15. Схема соединения листов впритык с помощью накладок

Встречаются конструкции, в которых склепываются целые пакеты листов (рис. 7.16). В таких случаях заклепки являются *многосрезными*.

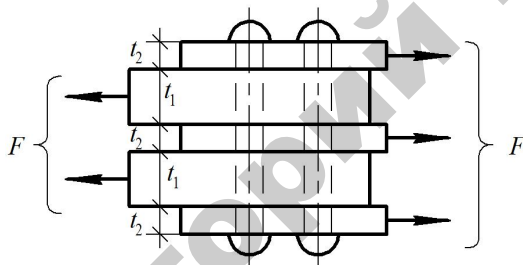


Рис. 7.16. Схема многосрезных заклепок при соединении пакета листов

Если число плоскостей среза обозначить через  $m$ , то площадь среза соединения определяется по формуле

$$A_{\text{ср}} = \frac{\pi d^2}{4} nm, \quad (7.24)$$

где  $n$  – число заклепок, расположенных по одну сторону стыка.

Условие прочности соединения на срез имеет вид

$$\tau = \frac{F}{A_{\text{ср}}} \Rightarrow A_{\text{ср}} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} nm} \leq [\tau]. \quad (7.25)$$

Данное условие позволяет выполнять три вида расчетов на прочность – проверочный, проектировочный и определение максимально допустимой нагрузки на соединение.

Проектировочный расчет обычно заключается в определении диаметра  $d$  заклепок, если их количество  $n$  задано конструктивно. Таким образом

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi n m [\tau]}}. \quad (7.26)$$

Если конструктивно назначается диаметр заклепок  $d$ , то определяют их общее количество по формуле

$$n \geq \frac{4P}{\pi d^2 m [\tau]}. \quad (7.27)$$

Количество срезов заклепки  $m$  определяется конструкцией соединения.

Деформация сдвига часто сопровождается смятием.

*Смятием* называется местная деформация сжатия, когда действие сжимающей силы передается на сравнительно небольшом участке. Если, например, соединить два деревянных бруса болтом, то при навинчивании гайки поверхность дерева под гайкой и головкой болта будет сжиматься, вдавливаясь внутрь древесины. В этих местах появится местное смятие, напряжение от которого быстро уменьшается по мере удаления от очага деформации. Для того чтобы уменьшить напряжение смятия дерева, увеличивают опорную поверхность в месте смятия, подкладывая под гайку и головку болта металлические шайбы, имеющие большую опорную поверхность с деревом.

В заклепочных и болтовых соединениях напряжения смятия распределяются неравномерно по полуцилиндрической поверхности отверстия листа и заклепки и имеют наибольшую величину в точке  $K$  (рис. 7.17,  $a$ ).

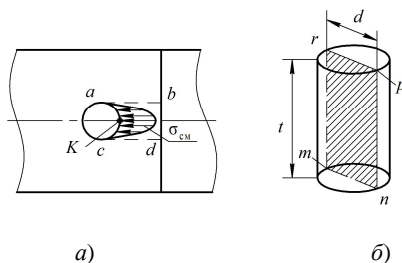


Рис. 7.17. Схема для расчета заклепки на смятие

Для упрощения расчетов условно принимают, что смятие происходит по площади  $mnpr$  (рис. 7.17, б).

$$A_{\text{см}} = td, \quad (7.28)$$

где  $d$  – диаметр заклепочного отверстия;  
 $t$  – толщина листа.

Если заклепка соединяет два листа неодинаковой толщины, то в формулу следует подставить меньшую из них.

Для двухсрезных заклепок условной площадью смятия является

$$A_{\text{см}} = td, \text{ или } A_{\text{см}} = 2t_1d. \quad (7.29)$$

В расчете принимают меньшую из этих двух величин.

Аналогично определяется площадь смятия и для многосрезных соединений. Так как предполагается, что напряжения смятия по условной площади распределяются равномерно, то условие прочности соединения на смятие принимает вид

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{nA_{\text{см}}^{\text{мин}}} \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (7.30)$$

где  $n$  – число заклепок;

$[\sigma_{\text{см}}]$  – допускаемое напряжение на смятие, для стали оно принимается  $[\sigma_{\text{см}}] = (2 \dots 2,5)[\sigma]$ .

Расчет болтовых и заклепочных соединений на смятие проводится как проверочный.

## Контрольные вопросы

1. Как понимать деформацию сдвига?
2. Какие элементы конструкций подвержены деформации сдвига?
3. Какой случай плоского напряженного состояния называется чистым сдвигом?
4. Что называется абсолютным сдвигом, относительным сдвигом и углом сдвига?
5. Что такое внутренние усилия и напряжения при деформации сдвига?
6. Сформулируйте закон Гука при сдвиге.
7. Что характеризует модуль сдвига и его размерность?
8. Опишите зависимость между модулем продольной упругости  $E$  и модулем сдвига  $G$ .
9. Приведите формулу, которая устанавливает зависимость между модулями упругости первого и второго рода и коэффициентом Пуассона.
10. Каковы условия прочности и допускаемые напряжения при сдвиге?
11. Чему равна потенциальная энергия изменения объема при сдвиге?
12. Приведите расчет заклепочных соединений на срез и смятие.

## 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Известно, что несущая способность деталей машин и элементов конструкций, работающих на растяжение или сжатие, сдвиг (срез) или смятие прямо пропорциональна площади поперечного сечения  $A$ . Нормальные напряжения  $\sigma$ , а также касательные напряжения  $\tau$  в таких элементах в любой точке сечения одинаковы и величина их определяется по простым формулам:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \tau = \frac{Q}{A}, \quad (8.1)$$

где  $N$  и  $Q$  – соответственно продольная и поперечная силы в сечении элемента конструкции.

Геометрическая форма поперечного сечения здесь безразлична, будь то круг, прямоугольник, треугольник или какая-либо другая произвольная фигура, лишь бы растягивающие или сжимающие, а также перерезывающие силы были приложены в центре тяжести сечения.

Таким образом, при центральном растяжении или сжатии, сдвиге (срезе) или смятии необходимо знать величину площади сечения и действующую силу, чтобы определить напряжение.

При изгибе площадь поперечного сечения не может характеризовать сопротивляемость балки. Без расчета видно, что балка одного и того же прямоугольного сечения, поставленная на ребро, значительно лучше сопротивляется изгибу, чем та же балка, поставленная плашмя (рис. 8.1).

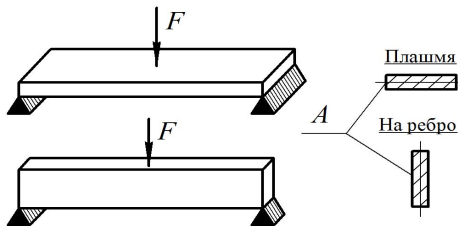


Рис. 8.1. Сопротивление изгибу балки при различных условиях эксплуатации

Из этого примера следует, что для выявления несущей способности различных форм поперечного сечения балки требуются иные геометрические характеристики сечений. Поэтому при расчетах на изгиб, кручение и сложное сопротивление вводятся более сложные геометрические характеристики сечений: статические моменты площади, моменты инерции и моменты сопротивления.

### 8.1. Статические моменты площади сечения

При решении практических задач по механике материалов необходимо знать численные значения различных геометрических характеристик поперечных сечений бруса. Рассмотрим методы их определения.

Выделим в плоском сечении элементарную площадку  $dA$  с координатами  $x, y$  (рис. 8.2). Сумма таких площадок – площадь  $A$  всего сечения, которая выражается интегралом

$$A = \int_A dA.$$

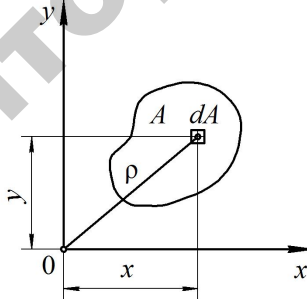


Рис. 8.2. Схема для определения статического момента площади плоского сечения

Статическим моментом площади сечения относительно оси  $x$  или  $y$  называется взятая по всей площади  $A$  сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояние до выбранной оси.



Он определяется по формулам

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA. \quad (8.2)$$

Из данной формулы (8.2) следует:

1) статический момент площади имеет размерность  $[S] = (A) \cdot x$ ;  $[S] = (A) \cdot y$ ;  $\text{мм}^2 \cdot \text{мм} = \text{мм}^3$ ;  $\text{см}^2 \cdot \text{см} = \text{см}^3$ ;  $\text{м}^2 \cdot \text{м} = \text{м}^3$ .

2) в зависимости от положения осей, относительно которых вычисляется *статический момент площади*, он может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Если известны площадь сечения  $A$  и положение его центра тяжести  $C(x_c; y_c)$ , то статические моменты определяются по формулам

$$S_x = y_c A, \quad S_y = x_c A, \quad (8.3)$$

из которых следует, что статический момент площади сечения относительно любой центральной (проходящей через центр тяжести) оси равен нулю.

Координаты центра тяжести сечения  $x_c$  и  $y_c$  определяем по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (8.4)$$

Если сложное сечение разделить на  $n$  частей, то его статический момент площади относительно любой оси равен сумме статических моментов его частей относительно этой оси:

$$S_x = A_1 y_{c1} + \dots + A_2 y_{c2} + \dots + A_n y_{cn} = \sum_{i=1}^n A_i y_{ci} = \sum_{i=1}^n (S_x)_i,$$

$$S_y = A_1 x_{c1} + \dots + A_2 x_{c2} + \dots + A_n x_{cn} = \sum_{i=1}^n A_i x_{ci} = \sum_{i=1}^n (S_y)_i.$$

Тогда положение центра тяжести сложного сечения определяется по формулам

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (8.5)$$

где  $A_i$  – площадь  $i$ -й части сечения;

$x_{ci}$  и  $y_{ci}$  – координаты центра тяжести  $i$ -й части сечения;

$(S_x)_i$  и  $(S_y)_i$  – статические моменты площади  $i$ -й части сечения относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно.

## 8.2. Осевой, центробежный и полярный моменты инерции сечения

*Осевым моментом инерции сечения* относительно какой-либо оси называется взятая по всей площади  $A$  сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до взятой оси (см. рис. 8.2), что выражается следующими интегралами:

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (8.6)$$

Геометрическая характеристика, которая представляет собой взятую по всей площади  $A$  сечения сумму произведений площадей элементарных площадок на произведение их расстояний до двух данных взаимно перпендикулярных осей (см. рис. 8.2), называется *центробежным моментом инерции сечения* относительно осей  $x$  и  $y$  и определяется по формуле

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (8.7)$$

*Полярным моментом инерции сечения* относительно начала системы координат  $xOy$  называется геометрическая характеристика, величина которой определяется равенством

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (8.8)$$

где  $\rho$  – расстояние от начала координат до элементарной площадки  $dA$ .

Согласно рис. 8.2 имеем

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

Тогда

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA;$$

$$I_p = I_x + I_y. \quad (8.9)$$

Таким образом, сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции сечения относительно точки пересечения этих осей.

*Общие свойства моментов инерции:*

- 1) размерность моментов инерции  $[L^4]$ ;
  - 2) осевые и полярный моменты инерции всегда положительны.
- Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным или равняться нулю.

### 8.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе и повороте осей

Пусть моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_{xy}$  для заданного сечения относительно старых осей  $x$  и  $y$  известны. Возьмем новую систему координат  $x_1O_1y_1$  (рис. 8.3), оси которой параллельны старым осям. Обозначим через  $a$  и  $b$  координаты точки  $O_1$ . Рассмотрим элементарную площадку  $dA$ , координаты которой в старой системе координат  $xOy$  равны  $x$  и  $y$ . В новой системе координат  $x_1O_1y_1$  они равны  $x_1 = x - b$  и  $y_1 = y - a$ .

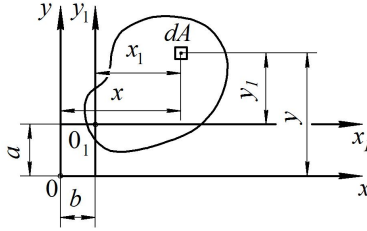


Рис. 8.3. Схема для определения моментов инерции сечения при параллельном переносе осей

Подставим значение  $y_1 = y - a$  в выражение осевого момента инерции относительно оси  $x_1$ , получим

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y - a)^2 dA = \int_A (y^2 - 2ay + a^2) dA = \\ &= \int_A y^2 dA - 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA, \end{aligned}$$

окончательно получим

$$I_{x_1} = I_x - 2aS_x + a^2 A. \quad (8.10)$$

Аналогично найдем

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A x_1^2 dA = \int_A (x - b)^2 dA = \int_A (x^2 - 2bx + b^2) dA = \\ &= \int_A x^2 dA - 2b \int_A x dA + b^2 \int_A dA, \end{aligned}$$

$$I_{y_1} = I_y - 2bS_y + b^2 A. \quad (8.11)$$

Подставляя значения  $x_1 = x - b$  и  $y_1 = y - a$  в выражение

$$I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA,$$

получим формулу для определения центробежного момента инерции сечения относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ :

$$I_{x_1y_1} = \int_A (y-a)(x-b) dA = \int_A xy dA - b \int_A y dA - a \int_A x dA + ab \int_A dA =$$

$$= I_{xy} - bS_x - aS_y + abA. \quad (8.12)$$

Если оси  $x$  и  $y$  проходят через центр тяжести сечения и совпадают с центральными осями  $x_c$  и  $y_c$ , то статический момент  $S_x = S_y = 0$ . Формулы для определения моментов инерции относительно осей  $x_1$  и  $y_1$  принимают вид

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= I_{x_c} + a^2 A, \\ I_{y_1} &= I_{y_c} + b^2 A, \\ I_{x_1y_1} &= I_{x_cy_c} + abA. \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Моменты инерции *сечения сложной формы* относительно любых осей определяются как сумма моментов инерции составляющих (простых) частей сечения относительно этих осей.

Относительно оси  $x$

$$I_x = I_{x_{c1}} + y_{c1}^2 A_1 + I_{x_{c2}} + y_{c2}^2 A_2 + \dots + I_{x_{cn}} + y_{cn}^2 A_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n (I_{x_c})_i + \sum_{i=1}^n (y_{c_i}^2 A_i); \quad (8.14)$$

относительно оси  $y$

$$I_y = I_{y_{c1}} + x_{c1}^2 A_1 + I_{y_{c2}} + x_{c2}^2 A_2 + \dots + I_{y_{cn}} + x_{cn}^2 A_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n (I_{y_c})_i + \sum_{i=1}^n (x_{c_i}^2 A_i), \quad (8.15)$$

где  $I_{x_{ci}}$ ,  $I_{y_{ci}}$  – центробежные моменты инерции  $i$ -й части сечения относительно осей  $x_{ci}$  и  $y_{ci}$ , проходящих через ее центр тяжести параллельно осям  $x$  и  $y$ ;

$y_{ci}$  – расстояние между осями  $x_{ci}$  и  $x$ ;

$x_{ci}$  – расстояние между осями  $y_{ci}$  и  $y$ .

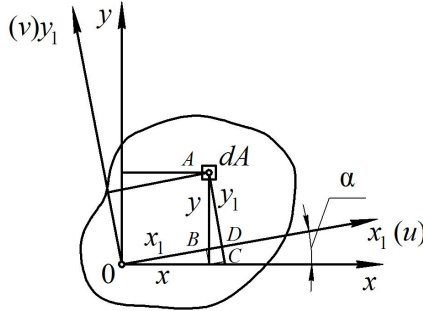


Рис. 8.4. Схема для определения моментов инерции сечения при повороте осей

Возьмем новую систему координат  $x_1Oy_1$  с началом в той же точке  $O$ , но повернутую относительно старой системы  $xOy$  на угол  $\alpha$  (рис. 8.4). Угол  $\alpha$  считаем положительным, если поворот на этот угол оси  $x$  до совмещения с осью  $x_1$  выполнен против часовой стрелки.

Рассмотрим элементарную площадку  $dA$  с координатами  $x$  и  $y$  в старой системе координат. Определим координаты  $x_1$  и  $y_1$  этой площадки в системе координат  $x_1Oy_1$ . Из рис. 8.4. имеем:  $x_1 = OB + BD$ ,  $OB = x \cos \alpha$ ,  $BD = y \sin \alpha$ , аналогично  $y_1 = AC - DC$ ,  $AC = y \cos \alpha$ ,  $DC = x \sin \alpha$ , окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Подставим эти значения в формулы

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA, \quad I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA, \quad I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA : \\ I_{x_1} &= \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \int_A (y^2 \cos^2 \alpha - 2xy \cos \alpha \sin \alpha + x^2 \sin^2 \alpha) dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA = \\ &= I_x \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha + I_y \sin^2 \alpha; \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned}
 I_{y_1} &= \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \int_A (x^2 \cos^2 \alpha + 2xy \cos \alpha \sin \alpha + y^2 \sin^2 \alpha) dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A x^2 dA + 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA = \\
 &= I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha + I_x \sin^2 \alpha.
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

Если сложить моменты инерции относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ , то получим

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = \text{const.}$$

Следовательно, сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей сохраняет постоянную величину при их повороте на любой угол

$$\begin{aligned}
 I_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \\
 &= \sin \alpha \cos \alpha \left( \int_A y^2 dA - \int_A x^2 dA \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A xy dA = \\
 &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

При определении моментов инерции использовались следующие формулы

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha; \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha; \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

## 8.4. Главные оси и главные моменты инерции.

### Радиусы инерции

Оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называются *главными осями инерции*. Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

Если осевой момент инерции относительно некоторой оси является максимальным, то осевой момент инерции относительно перпендикулярной ей оси является минимальным, так как сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей не зависит от угла  $\alpha$ .

Для нахождения угла  $\alpha_0$ , определяющего положение главных осей, возьмем от момента инерции  $I_{x_1}$  ( $I_{y_1}$ ) первую производную по углу  $\alpha$  и приравняем ее нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{x_1}}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} (I_x \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha + I_y \sin^2 \alpha) = \\ &= -I_x 2 \sin \alpha \cos \alpha - I_{xy} 2 \cos 2\alpha + I_y 2 \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

далее

$$\left( \frac{dI_{x_1}}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -2I_x \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 + 2I_y \sin \alpha_0 \cos \alpha_0,$$

или

$$-(I_x - I_y) \sin 2\alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

окончательно

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}, \quad (8.20)$$

где  $\alpha_0$  – угол, на который требуется повернуть координатные оси  $x$  и  $y$ , чтобы они совпадали с главными осями.

При определении положения главных осей использовались следующие производные:

$$(\cos^2 \alpha)' = 2 \cos \alpha (\cos \alpha)' = 2 \cos \alpha (-\sin \alpha) = -\sin 2\alpha;$$



$$(\sin^2\alpha)' = 2\sin\alpha(\sin\alpha)' = 2\sin\alpha\cos\alpha; (\sin 2\alpha)' = 2\cos 2\alpha.$$

Подставив значение  $\alpha_0$  в формулу  $I_{x_1}$  ( $I_{y_1}$ ) после преобразований получим формулу для определения главных моментов инерции

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (8.21)$$

Главные оси, проходящие *через центр тяжести* сечения, называются главными центральными осями. Одна из главных осей инерции (ось максимум) обозначается  $u$ , а другая (ось минимум) –  $v$  (рис. 8.4).

Например, положение главной центральной оси  $u$ , относительно которой момент инерции максимален, то есть  $I_u = I_{\max}$ , можно определить двумя способами:

1) при  $I_{xy} < 0$  главная ось  $u$  проходит через 1-й и 3-й, а при  $I_{xy} > 0$  – через 2-й и 4-й квадранты;

2) если  $I_x > I_y$ , то главная ось  $u$  находится под углом  $\alpha_0$  к оси  $x$ . При  $I_x < I_y$  ось  $u$  находится под углом  $\alpha_0$  к оси  $y$ .

*Радиусы инерции* сечения относительно координатных осей  $x$ ,  $y$  обозначаются  $i_x$ ,  $i_y$  соответственно и определяются по формулам

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad (8.22)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения бруса.

### 8.5. Определение моментов инерции сечений простой формы

Определим осевые моменты инерции  $I_x$  и  $I_y$  прямоугольника относительно осей  $x$  и  $y$ , проходящих через его центр тяжести. Выделим в плоскости прямоугольника элементарную площадку  $dA$  шириной  $b$  и высотой  $dy_1$  (рис. 8.5).

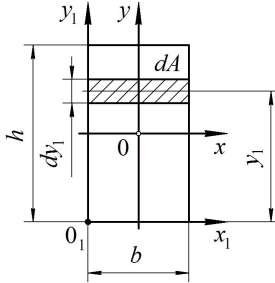


Рис. 8.5. Схема прямоугольника для определения главных осевых моментов инерции

Осевой момент инерции  $I_{x_1}$  относительно оси  $x_1$ , проходящей через основание прямоугольника, определяется по формуле

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_0^h y_1^2 b dy_1 = \frac{bh^3}{3}, \quad (8.23)$$

аналогично

$$I_{y_1} = \frac{hb^3}{3}. \quad (8.24)$$

Найдем осевой момент инерции  $I_x$  относительно оси  $x$ , проходящей через центр тяжести прямоугольника. Используем формулы для определения осевого момента инерции при параллельном переносе осей:

$$I_x = I_{x_1} - b^2 A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}, \quad (8.25)$$

аналогично

$$I_y = \frac{hb^3}{12}, \quad (8.26)$$

где  $h = \frac{b}{2}$  – расстояние между осями  $y_1$  и  $y$ ;

$b = \frac{h}{2}$  – расстояние между осями  $x_1$  и  $x$ ;

$A = bh$  – площадь прямоугольника.

Определим осевые моменты инерции треугольника. В плоскости треугольника (рис. 8.6) выделим элементарную площадку, параллельную оси  $x$ , площадью  $dA = b(y_i)dy_i$ .

Из подобия треугольников имеем

$$\frac{b(y_i)}{h - y_i} = \frac{b}{h}.$$

Из этого соотношения находим  $b(y_i) = b\left(1 - \frac{y_i}{h}\right)$ , тогда

$dA = b\left(1 - \frac{y_i}{h}\right)dy_i$ , подставим  $dA$  в формулу для определения  $I_x$ , получим

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y_i^2 dA = b \int_0^h \left(1 - \frac{y_i}{h}\right) y_i^2 dy_i = \\ &= \left(\frac{by_i^3}{3} - \frac{by_i^4}{4h}\right) \Big|_0^h = \left(\frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4}\right) = \frac{bh^3}{12}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

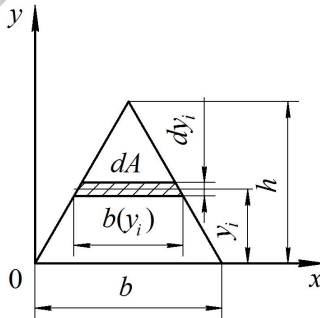


Рис. 8.6. Схема треугольника для определения главных осевых моментов инерции

Аналогично

$$I_y = \frac{hb^3}{12}; \quad (8.28)$$

Определим осевой момент инерции треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию (рис. 8.7).

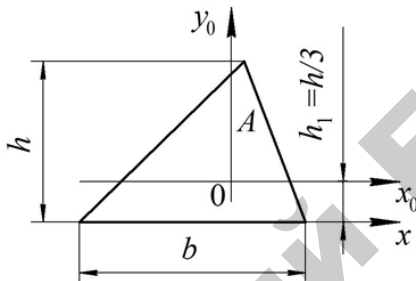


Рис. 8.7. Схема треугольника для определения момента инерции относительно центральной оси  $x_c$

Воспользуемся формулой  $I_x = I_{x_c} + b^2 A$ , откуда  $I_{x_c} = I_x - b^2 A$ .

Учитывая, что  $b = \frac{h}{3}$ ,  $I_x = \frac{bh^3}{12}$  окончательно получим

$$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{3} \right)^2 bh = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{32}. \quad (8.29)$$

Определим *полярный* и *осевые* моменты инерции круга. В плоскости круга (рис. 8.8) выделим элементарную площадку в виде тонкого кольца с внутренним диаметром  $\rho$  и толщиной  $d\rho$ . Тогда площадь кольца  $dA = 2\pi\rho d\rho$  и полярный момент инерции круга

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r = 2\pi \frac{r^4}{4} = 2\pi \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^4}{4} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (8.30)$$

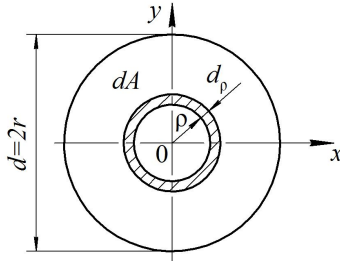


Рис. 8.8. Схема круга для определения полярного и осевых моментов инерции

Согласно зависимости  $I_p = I_x + I_y$  имеем  $I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{32}$  – осевой момент инерции круга.

### 8.6. Определение главных центральных моментов инерции и положения главных центральных осей сложного (составного) сечения

Определить главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей инерции сложного (составного) сечения (рис. 8.9).

Прежде всего определяем центр тяжести сечения, состоящего из прямоугольника и треугольника, по методу разбиения составного сечения на совокупность простых фигур по формуле (8.5):

- площадь прямоугольника  $A_1 = 20 \cdot 60 = 1200 \text{ мм}^2 = 12 \text{ см}^2$ ;
- расстояние от центра тяжести прямоугольника  $O_1$  до осей  $y_{c_1}$  и  $x_{c_1}$  равно

$$x_{c_1} = y_{c_1} = 0;$$

- площадь треугольника  $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 60 = 1800 \text{ мм}^2 = 18 \text{ см}^2$ ;

- расстояние от центра тяжести треугольника  $O_2$  до осей  $y_{c_2}$  и  $x_{c_2}$

$$x_{c_2} = 30 \text{ мм} = 3 \text{ см}, \quad y_{c_2} = -10 \text{ мм} = -1,0 \text{ см}.$$

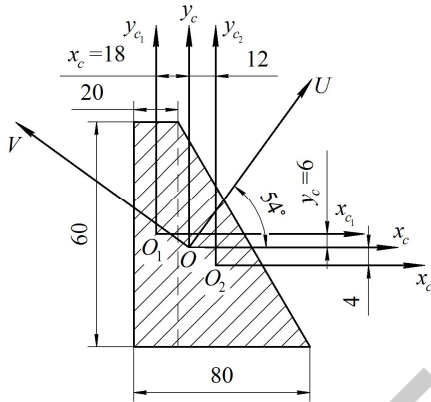


Рис. 8.9. Схема составного сечения

Центр тяжести сечения

$$x_c = \frac{A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{12 \cdot 0 + 18 \cdot 3}{12 + 18} = 1,8 \text{ см} = 18 \text{ мм};$$

$$y_c = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{12 \cdot 0 + 18 \cdot (-1)}{12 + 18} = -0,6 \text{ см} = -6 \text{ мм}.$$

Определяем моменты инерции составного сечения относительно центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ :

$$I_{x_c} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 A_1 + \frac{b_2 h_2^3}{36} + a_2^2 A_2 = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + 0,6^2 \cdot 12 + \frac{6 \cdot 6^3}{36} + (-0,4)^2 \cdot 18 = 79,2 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = \frac{hb^3}{12} + b_1^2 A_1 + \frac{hb^3}{36} + b_2^2 A_2 = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + (-1,8)^2 \cdot 12 + \frac{6 \cdot 6^3}{36} + 1,2^2 \cdot 18 = 104,8 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2 = 0 + 0,6 \cdot (-1,8) \cdot 12 - \frac{6^2 \cdot 6^2}{72} +$$

$$+ (-0,4) \cdot 1,2 \cdot 18 = -39,6 \text{ см}^4,$$

где  $b_1 = 2$  см,  $h_1 = 6$  см – ширина и высота прямоугольника соответственно;

$a_1 = 0,6$  см,  $b_1 = -1,8$  см – расстояния от собственных осей прямоугольника до осей  $x_c$  и  $y_c$  соответственно;

$b_2 = 6$  см,  $h_2 = 6$  см – стороны прямоугольного треугольника;

$a_2 = -0,4$  см,  $b_2 = 1,2$  см – расстояния от собственных осей треугольника до осей  $x_c$  и  $y_c$  соответственно;

$I_{x_1 y_1} = 0$  – центробежный момент инерции прямоугольника относительно собственных осей;

$I_{x_2 y_2} = \frac{b_2^2 h_2^2}{72}$  – центробежный момент инерции прямоугольного треугольника относительно собственных осей.

Главные центральные моменты инерции составного сечения:

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{79,2 + 104,8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{79,2 - 104,8}{2}\right)^2 + 39,6^2} = 92 \pm 41,6 \text{ см}^2,$$

откуда

$$I_{\max} = I_u = 92 + 41,6 = 133,6 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_v = 92 - 41,6 = 50,4 \text{ см}^4.$$

Тогда положение главных центральных осей определяется как

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = \frac{2 \cdot 39,6}{79,2 - 104,8} = -3,094; \quad \alpha = -36^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = \frac{39,6}{79,2 - 50,4} = 1,375; \quad \alpha_u = 54^\circ.$$

Определим главные центральные моменты инерции сечения, изображенного на рис. 8.10.

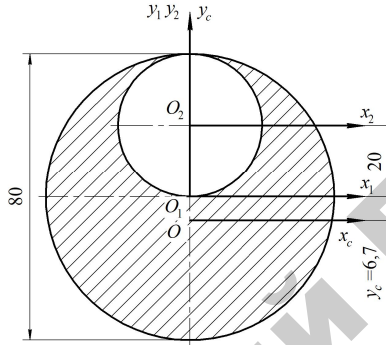


Рис. 8.10. Схема составного сечения

Определяем положение центра тяжести составного сечения относительно осей  $x_1$  и  $y_1$

$$x_c = 0;$$

$$y_c = \frac{(-A_2 y_{c2})}{A_1 - A_2} = \frac{(-\frac{\pi d_2^2}{4} y_{c2})}{\frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{-\frac{\pi 4^2}{4} \cdot 2}{\frac{\pi 8^2}{4} - \frac{\pi 4^2}{4}} = -0,67 \text{ см.}$$

Моменты инерции составного сечения относительно центральных осей определяются по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= I_{x_{c1}} + a_1^2 A_1 - I_{x_{c2}} - a_2^2 A_2 = \frac{\pi d_1^4}{64} + a_1^2 \frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^4}{64} - a_2^2 \frac{\pi d_2^2}{4} = \\ &= \frac{3,14 \cdot 8^4}{64} + 0,67^2 \frac{3,14 \cdot 8^2}{4} - \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} - 2,67^2 \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 121,4 \text{ см}^4; \end{aligned}$$



$$I_{y_c} = I_{y_{c1}} - I_{y_{c2}} = \frac{pd_1^4}{64} - \frac{pd_2^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{64} - \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 188,4 \text{ см}^4.$$

$$I_{\min} = I_{x_c} = 121,4 \text{ см}^4;$$

$$I_{\max} = I_{y_c} = 188,4 \text{ см}^4.$$

## 8.7. Окружность инерции Мора

Практические задачи на вычисление моментов инерции относительно повернутых осей удобно решать графическим способом при помощи окружности инерции Мора.

Зависимости, полученные при повороте осей

$$I_u = \frac{I_{x_1} + I_{y_1}}{2} + \frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2} \cos 2\alpha - I_{x_1 y_1} \sin 2\alpha,$$

$$I_{uv} = \frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_1 y_1} \cos 2\alpha$$

возведем в квадрат:

$$\left( I_u - \frac{I_{x_1} + I_{y_1}}{2} \right)^2 = \left( \frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2} \cos 2\alpha - I_{x_1 y_1} \sin 2\alpha \right)^2;$$

$$I_u^2 = \left( \frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_1 y_1} \cos 2\alpha \right)^2.$$

Сложим и получим

$$\left( I_u - \frac{I_{x_1} + I_{y_1}}{2} \right)^2 + I_{uv}^2 = \left( \frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2} \right)^2 + I_{x_1 y_1}^2. \quad (8.31)$$

Обозначим  $a = \frac{I_{x_1} + I_{y_1}}{2}$ ;  $R = \sqrt{\left(\frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2}\right)^2 + I_{x_1 y_1}^2}$ ;  $I_u = x$ ;  $I_{xy} = y$ ,

тогда полученное в результате сложения уравнение имеет вид

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2 \quad (8.32)$$

– уравнение окружности, центр которой лежит на оси и смещен вправо от начала координат на величину  $a$ .

Таким образом, моменты инерции относительно повернутых осей определяются координатами точек некоторой окружности, которая называется *окружностью инерции Мора*.

Пусть требуется определить моменты инерции для некоторого произвольного сечения (рис. 8.11) относительно повернутых осей  $u$  и  $v$ , если известны моменты инерции относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ .

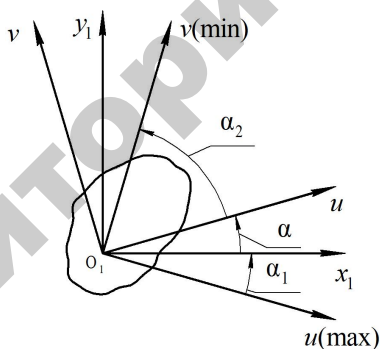


Рис. 8.11. Схема для определения моментов инерции сечения относительно повернутых осей  $u$  и  $v$

Предположим, что  $I_{x_1} > I_{y_1}$ ,  $I_{x_1 y_1} > 0$ . Откладывая осевые моменты инерции по оси абсцисс, а центробежные – по оси ординат, выполним следующие графические построения (рис. 8.12):

1) отложим в масштабе отрезки  $OD = I_{x_1}$ ,  $DA = I_{x_1 y_1}$ ;  $OE = I_{y_1}$ ,  $EB = -I_{x_1 y_1}$ , получим точки  $A$  и  $B$ ;



Полус обладает следующим свойством. Если из полюса провести отрезок параллельно некоторой оси  $U$ , то он пересечет *окружность инерции Мора* в точке  $K$ , координаты которой равны моментам инерции:  $I_u = OL$ ,  $I_{uv} = KL$ .

Осевой момент инерции  $I_y$  определяется абсциссой точки  $M$  пересечения луча  $CM \perp CK$  с *окружностью инерции Мора*, то есть  $I_v = ON$ ,  $I_{xy} = -MN$ .

*Окружность инерции Мора* можно использовать для определения главных моментов инерции и положения главных осей. Главные моменты инерции на окружности изображаются точками 1 и 2, у которых ординаты равны нулю. Тогда имеем

$$I_{\max} = O_1 = OO_1 + R, \quad I_{\min} = O_2 = OO_1 - R.$$

Так как  $OO_1 = \frac{I_{x_1} + I_{y_1}}{2}$ ,  $R = \sqrt{\left(\frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2}\right)^2 + I_{x_1 y_1}^2}$ , то окончательные формулы для определения главных моментов инерции имеют вид

$$I_{\max/\min} = \frac{I_{x_1} + I_{y_1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2}\right)^2 + I_{x_1 y_1}^2}. \quad (8.33)$$

Главные оси инерции определяются углами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  или  $\alpha_0$  (рис. 8.12):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= -\frac{AD}{O_1 D} = -\frac{I_{x_1 y_1}}{I_{x_1} - I_{y_1}}; \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= -\frac{CE}{E_1} = -\frac{I_{x_1 y_1}}{I_{x_1} - I_{\min}} = \frac{I_{x_1 y_1}}{I_{\min} - I_{x_1}}; \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{CE}{E_2} = \frac{I_{x_1 y_1}}{I_{y_1} - I_{\min}} = -\frac{I_{x_1 y_1}}{I_{\min} - I_{y_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  – углы, образованные осями  $u_{\max}$  и  $v_{\min}$  с осью  $x_1(I_{oc})$  соответственно.

## 8.8. Моменты сопротивления сечений

Моментом сопротивления сечения называется геометрическая характеристика, величина которой определяется по формулам

$$W_x = \frac{\int y^2 dA}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{\int x^2 dA}{x_{\max}}, \quad W_p = \frac{\int \rho^2 dA}{\rho_{\max}}, \quad (8.35)$$

где  $W_z$ ,  $W_y$ ,  $W_p$  – осевые и полярный моменты сопротивления сечения соответственно;

$y_{\max}$ ,  $z_{\max}$ ,  $\rho_{\max}$  – расстояние от наиболее удаленной точки сечения до соответствующей оси.

Определим моменты сопротивления простых сечений относительно центральных осей.

1. Для прямоугольника

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12h} = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{hb^3 \cdot 2}{12b} = \frac{hb^2}{6}.$$

2. Момент сопротивления для треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию (см. рис. 8.6)

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3 \cdot 3}{36 \cdot 2h} = \frac{bh^2}{24}.$$

3. Для круга

$$W_z = W_y = \frac{2I_z}{d} = \frac{2\pi d^4}{64d} = \frac{\pi d^3}{32}, \quad W_p = \frac{2I_p}{d} = \frac{2\pi d^4}{32d} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Размерность моментов сопротивления  $[L^3]$ .

В приложении Г (табл. Г.1) приведены геометрические характеристики плоских сечений.

## Контрольные вопросы

1. Что называется статическим моментом площади сечения относительно оси, в каких единицах он выражается?
2. Что такое осевой, центробежный и полярный моменты инерции? В каких единицах выражаются моменты инерции сечения?
3. Чему равен статический момент площади относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?
4. Как определяются координаты центра тяжести простых (прямоугольник, треугольник, круг) и сложных сечений?
5. Чему равен осевой момент инерции прямоугольника относительно центральной оси, параллельной одной из его сторон?
6. Как изменяются осевые моменты инерции при параллельном переносе и повороте осей?
7. Какие оси называются главными осями инерции?
8. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
9. Чему равен центробежный момент инерции относительно главных осей инерции?
10. В каких случаях можно без вычисления установить положение главных осей?
11. Как определить положение главных центральных осей инерции?
12. Сколько в сечении можно провести центральных и главных центральных осей инерции?
13. Как определяются моменты сопротивления простых сечений (прямоугольник, треугольник, круг)?

## 9. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

При центральном растяжении, центральном сжатии прямых стержней их оси остаются прямыми и после деформации. В отличие от этих видов деформаций при изгибе происходит искривление осей прямых стержней или изменение кривизны осей кривых стержней под действием внешних сил или температуры. Деформации изгиба подвергаются стержни, закрепленные на одном конце и нагруженные на другом (рис. 9.1, а) или опирающиеся концами на опоры и нагруженные посередине (рис. 9.1, б).

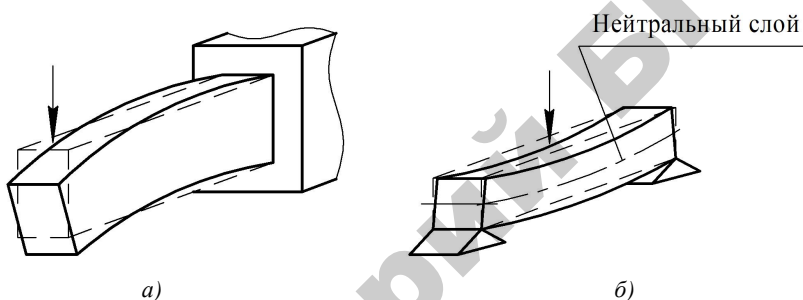


Рис. 9.1. Схема деформации при изгибе прямых стержней

При изгибе прямых стержней одна сторона выпуклая – подвергается растяжению, а другая – вогнутая, которая испытывает деформацию сжатия. Внутри изгибаемого стержня расположен слой, не испытывающий ни растяжения, ни сжатия и называемый *нейтральным* (рис. 9.1, б).

Вблизи нейтрального слоя стержень почти не испытывает деформаций. Следовательно, в этом слое малы и возникающие при деформации силы. Значит, площадь поперечного сечения изгибаемой детали в окрестности нейтрального слоя можно значительно уменьшить. В современной технике и в строительстве вместо стержней и сплошных брусьев повсеместно применяют трубы (рис.9.2, а), двутавровые балки (рис. 9.2, б), рельсы (рис. 9.2, в), швеллеры (рис. 9.2, г), чем добиваются облегчения конструкций и экономии материала.

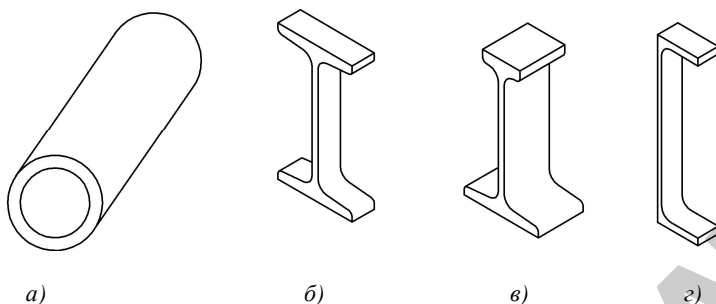


Рис. 9.2. Схемы поперечных сечений изгибаемых стержней

Таким образом, *изгиб* – деформация, сводящаяся к растяжению и сжатию продольных волокон стержня в разных его частях, при которой изменяется кривизна продольной оси, а поперечные сечения взаимно поворачиваются. Прямой стержень, работающий преимущественно на изгиб, принято называть *балкой*.

Изгиб вызывается внешними силами, действующими перпендикулярно продольной оси балки, а также парами сил, плоскость действия которых (силовая плоскость) проходит через эту ось.

### 9.1. Виды изгибов балки

Если силы, вызывающие изгиб, находятся в одной силовой плоскости и эта плоскость совпадает с одной из главных плоскостей инерции (то есть проходит по одной из главных центральных осей сечения), такой изгиб называется *плоским изгибом*.

При плоском изгибе балки ее ось располагается в силовой плоскости, продольные волокна, находящиеся на выпуклой части балки, растягиваются, а на вогнутой сжимаются. Слой промежуточных волокон, не изменяющий своей длины, как уже отмечено ранее, называется *нейтральным*.

Для систематизации и упрощения анализа элементов конструкций, испытывающих изгиб, вводится следующая классификация:

- чистый изгиб, если в поперечных сечениях действует единственный силовой фактор – изгибающий момент (рис. 9.3, а);



- поперечный изгиб, если в поперечных сечениях наряду с изгибающим моментом действует также поперечная сила (рис.9.3, б);
- продольный и продольно-поперечный, когда в поперечных сечениях одновременно с нормальной  $N$  и поперечной  $Q$  силами действует изгибающий момент  $M$ , крутящий момент отсутствует.

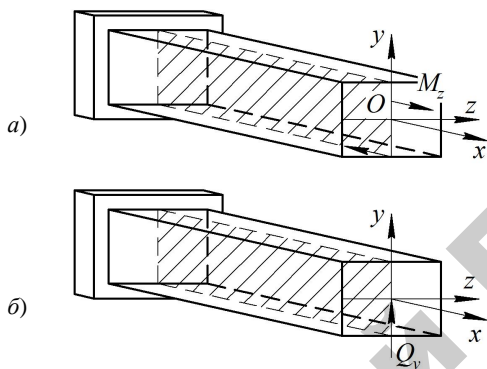


Рис 9.3. Чистый изгиб – а; поперечный изгиб – б; пунктиром отмечено положение силовой плоскости при плоском изгибе

Каждый вид изгиба, в свою очередь, может быть прямым или косым, при этом косой изгиб бывает плоским и пространственным.

Для изгиба характерны два вида перемещений (рис. 9.4):

- искривление продольной оси бруса  $O_x$ , соответствующее перемещениям точек оси бруса в направлении  $O_y$ ;
- поворот в пространстве одного поперечного сечения относительно другого, то есть поворот сечения относительно оси  $z$  в плоскости  $xOy$ .

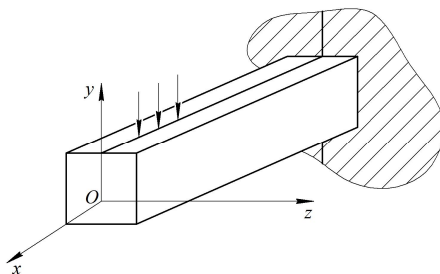


Рис. 9.4. Виды перемещений балки при изгибе

Рассмотрим плоский чистый изгиб прямой балки. Если на ее боковую поверхность нанести сетку в виде продольных и поперечных прямых (рис. 9.5, *а*), то при изгибе можно заметить следующее (рис. 9.5, *б*):

- продольные линии искривляются по дуге окружности;
- поперечные линии остаются прямыми и только поворачиваются относительно друг друга на некоторый угол;
- поперечные сечения стержня остаются плоскими и после деформации, то есть справедлива *гипотеза плоских сечений*;
- верхние волокна укорачиваются ( $a_1 < a$ ), а нижние удлиняются ( $a_2 > a$ ). Между ними расположены волокна, не изменяющие свою длину. Они образуют *нейтральный слой*.

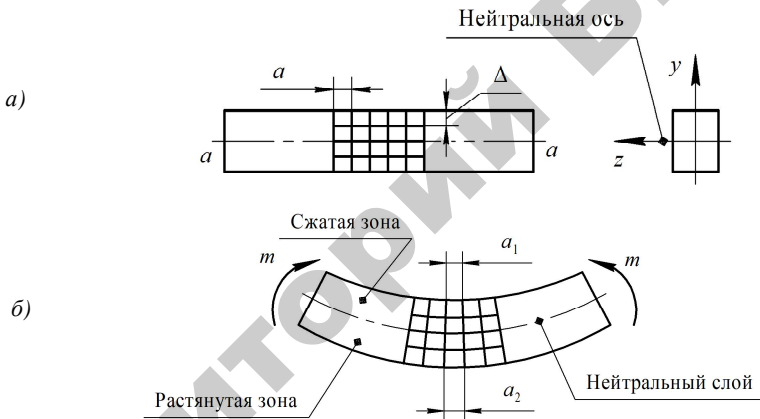


Рис. 9.5. Схема изгиба балки с нанесенной сеткой

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения стержня называется нейтральной осью.

При плоском изгибе нейтральная ось перпендикулярна к силовой плоскости.

Допущения при изгибе:

- ось  $z$ , проведенная в сечении стержня, совпадает с нейтральной осью;
- расстояния между продольными линиями не изменяются;
- продольные волокна не деформируют друг друга, то есть каждое волокно испытывает простое растяжение или сжатие.

## 9.2. Внутренние силовые факторы при изгибе

Деформация плоского поперечного изгиба возникает в том случае, когда на балку действует поперечная нагрузка, расположенная в одной плоскости (силовой плоскости), проходящей через ось симметрии сечения (рис. 9.6, а). В этой же плоскости располагается изогнутая ось (упругая линия) – рис. 9.6, б.

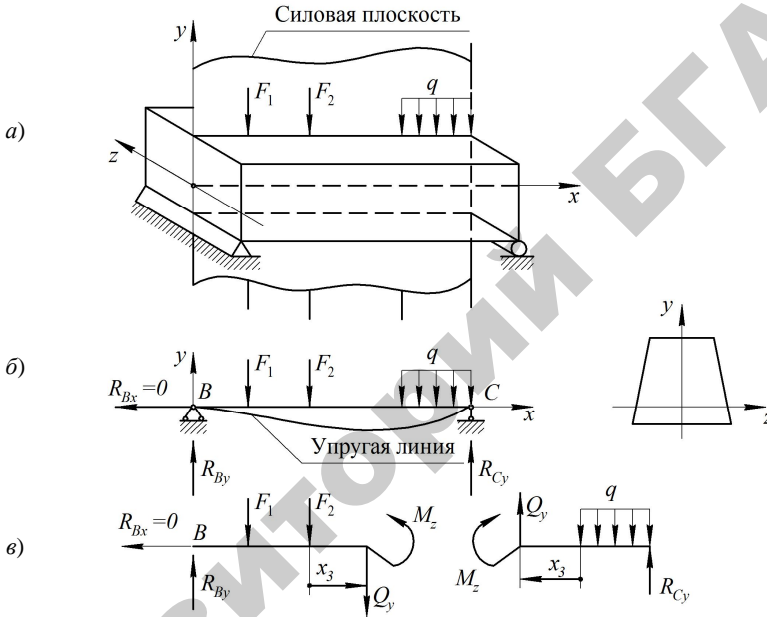


Рис. 9.6. Схема деформации при плоском поперечном изгибе под действием внешних сил

При деформации поперечного изгиба в поперечном сечении балки возникают два ВСФ (рис. 9.6, в): поперечная сила  $Q_y$ , где  $y$  – ось симметрии (главная центральная ось), и действующий в силовой плоскости изгибающий момент  $M_z$ , где  $z$  – другая главная центральная ось сечения, нормальная к оси симметрии.

Для определения ВСФ применим метод сечений, причем изображать балку будем только одной линией – осью, к которой приложены активные и реактивные силы.

Рассмотрим 2 случая.

1. К балке приложены две равные и противоположные по знаку пары сил (рис. 9.7).

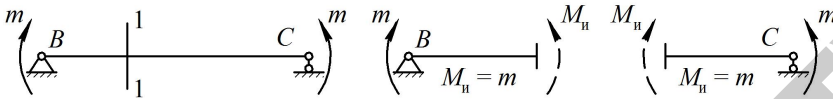


Рис. 9.7. Равновесие части балки в сечении от приложенных пары сил

Рассматривая равновесие части балки, расположенной слева или справа от сечения 1-1, видим, что во всех поперечных сечениях возникает только изгибающий момент  $M_n$ , равный внешнему моменту. Таким образом, рассматриваемый случай есть случай чистого изгиба.

2. К балке приложены активные и реактивные силы, перпендикулярные оси (рис. 9.8).

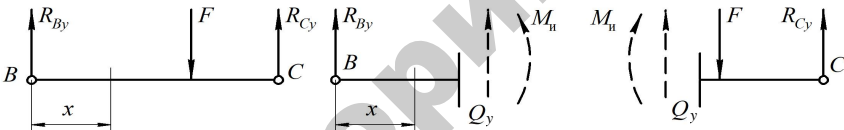


Рис. 9.8. Равновесие части балки в сечении от приложенных активных и реактивных сил

Рассматривая равновесие частей балки, расположенных слева или справа, видим, что в поперечных сечениях должны действовать изгибающий момент  $M_n$  от действия активных и реактивных сил  $F$ ,  $R_{By}$  и  $R_{Cy}$ , а также поперечная сила  $Q_y$ . Из этого следует, что в рассматриваемом случае в точках поперечных сечений действуют не только нормальные напряжения, соответствующие изгибающему моменту, но и касательные, соответствующие поперечной силе. В этом случае имеет место поперечный изгиб.

Таким образом, *изгибающий момент в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести сечения всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения, то есть*

$$M_{\text{и}} = \sum_{\text{лев}} M_{\text{вн}} = \sum_{\text{прав}} M_{\text{вн}} \cdot \quad (9.1)$$

*Поперечная сила в сечении балки численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения, то есть*

$$Q_y = \sum_{\text{лев}} F_y^{\text{вн}} = \sum_{\text{прав}} F_y^{\text{вн}} \cdot \quad (9.2)$$

Для наглядного представления характера деформаций балок при изгибе, а также для установления упрощающих предпосылок проведем следующий опыт.

На боковые поверхности модели балки из низкомодульного материала наносится сетка продольных и поперечных линий на равных расстояниях друг от друга (рис. 9.9, а).

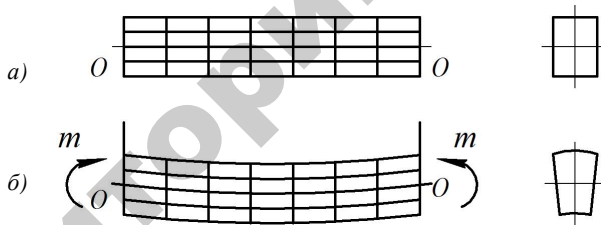


Рис. 9.9. Характер деформаций балок

При изгибе такой балки двумя парами сил ( $m$ ), приложенными по концам (рис. 9.9, б), можно увидеть, что продольные линии искривляются по дуге окружности, причем расстояние между ними не меняется (справедлива гипотеза о ненадавливании продольных волокон –  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ).

У выпуклой стороны балки (снизу) эти волокна удлиняются, тогда как у вогнутой (сверху) – укорачиваются. Так как переход от удлинения к укорочению происходит непрерывно, то внутри бруса существует слой волокон, которые искривляются, но не меняют своей длины.

### 9.3. Нормальные напряжения в поперечных сечениях балки при изгибе

Деформации удлинения и укорочения обусловлены нормальными растягивающими напряжениями на выпуклой части балки, и сжимающими – на вогнутой. В нейтральном слое нормальные напряжения равны нулю ( $\sigma_x = 0$ ).

Таким образом, в сечении балки, взятом на участке чистого изгиба, возникает только один изгибающий момент, равный

$$M_z = \int_A \sigma y dA. \quad (9.3)$$

Следовательно, в сечении балки действуют нормальные напряжения  $\sigma$  (рис. 9.10).

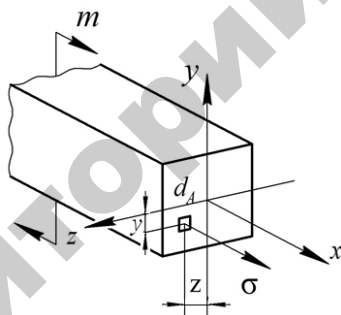


Рис. 9.10. Схема внутренних сил при чистом изгибе

Из формулы (9.3) для определения изгибающего момента  $M_z$  нельзя определить величину нормальных напряжений  $\sigma$ , так как неизвестно, как они распределены по сечению. Задача определения напряжений  $\sigma$  в сечении балки является статически неопределимой. Пусть отдельное волокно при изгибе испытывает простое растяжение или сжатие. Тогда для него можно записать закон Гука как при растяжении

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (9.4)$$

Чтобы найти относительную деформацию  $\varepsilon$  на участке чистого изгиба, выделим элемент балки длиной  $dx$  и рассмотрим его деформацию (рис. 9.11).

Сечения  $mn$  и  $m_1n_1$  остаются плоскими и поворачиваются на угол  $d\varphi/2$ . Волокна нейтрального слоя искривляются, но их длина не изменяется. Радиус кривизны нейтрального слоя обозначим  $\rho$ . Тогда имеем

$$dx = OO_1 = \rho d\varphi.$$

Волокно  $AB$ , расположенное на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя, удлиняется, радиус его кривизны составляет  $\rho + y$ .

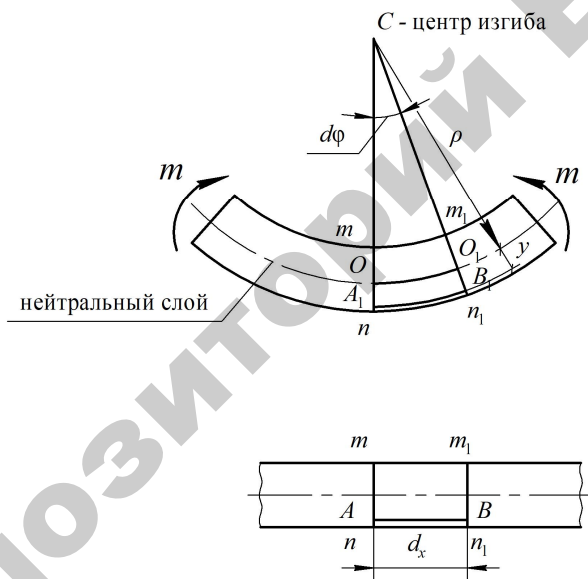


Рис. 9.11. Схема деформации элемента балки длиной  $dx$

Относительное удлинение волокна:

$$\varepsilon = \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = \frac{(\rho + y)d\varphi - dx}{dx} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Тогда

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}. \quad (9.5)$$

Подставим данное выражение в формулу для  $M_z$

$$M_z = \int_A \sigma y dA = \int_A E \frac{y}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA.$$

Учитывая, что  $\int_A y^2 dA = I_z$  представляет момент инерции сечения относительно оси  $z$ , можно записать

$$M_z = \frac{1}{\rho} EI_z. \quad (9.6)$$

Откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (9.7)$$

Величина  $EI_z$  называется *жесткостью поперечного сечения* при изгибе.

Из формулы (9.7) видно, что если балка изготовлена из однородного материала ( $E = \text{const}$ ) и имеет постоянное сечение ( $I_z = \text{const}$ ), то при чистом изгибе ( $m = \text{const}$ ) ее ось искривляется по дуге окружности ( $\rho = \text{const}$ ). Подставив в формулу для определения  $\sigma$  значение кривизны, получим

$$\sigma = E y \frac{1}{\rho} = E y \frac{M_z}{EI_z} = \frac{M_z y}{I_z}. \quad (9.8)$$

Из формулы (9.8) видно, что нормальные напряжения распределяются по сечению неравномерно и достигают наибольшего значения в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. При положительном изгибающем моменте нижние волокна будут растянуты ( $\rho > 0$ ), а верхние волокна сжаты ( $\rho < 0$ ).



Определим положение нейтральной оси сечения  $x$ . Для этого приравняем к нулю  $N$  и  $M_y$

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{M_z y}{I_z} dA = \frac{M_z}{I_z} \int_A y dA = 0;$$

$$M_y = \int_A \sigma z dA = \int_A \frac{M_z y}{I_z} z dA = \frac{M_z}{I_z} \int_A zy dA = 0.$$

Так как

$$\frac{M_z}{I_z} \neq 0, \text{ то } \int_A y dA = S_z = 0, \int_A zy dA = I_{zy} = 0, \quad (9.9)$$

то на основании этого делаем заключение, что нейтральная ось  $x$  проходит через центр тяжести сечения, а оси  $z$  и  $y$  являются главными центральными осями сечения. Эпюра напряжений для сечений, имеющих горизонтальную ось симметрии, всегда будет иметь вид, представленный на рис. 9.12.

При положительном изгибающем моменте все волокна, расположенные выше нейтральной линии, являются сжатыми, а ниже ее – растянутыми.

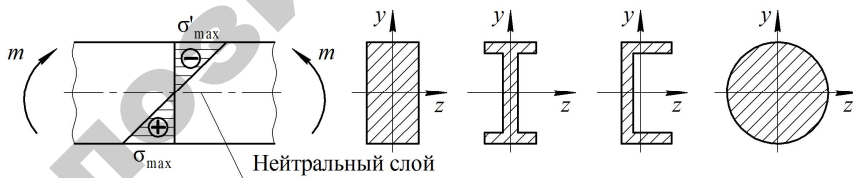


Рис. 9.12. Эпюра распределения нормальных напряжений в сечениях с горизонтальной осью симметрии

Максимальные нормальные напряжения возникают при  $y = y_{\max}$ . Таким образом,

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{\frac{I_z}{y_{\max}}}. \quad (9.10)$$

Отношение осевого момента инерции к расстоянию от наиболее удаленной точки сечения до нейтральной оси называется *осевым моментом сопротивления*, то есть

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}. \quad (9.11)$$

Момент сопротивления измеряется в сантиметрах кубических ( $\text{см}^3$ ) и зависит от формы и размеров поперечного сечения, тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}. \quad (9.12)$$

Если сечение не имеет горизонтальной оси симметрии (рис. 9.13), то расстояния от нейтральной оси до крайних нижних и крайних верхних волокон различны.

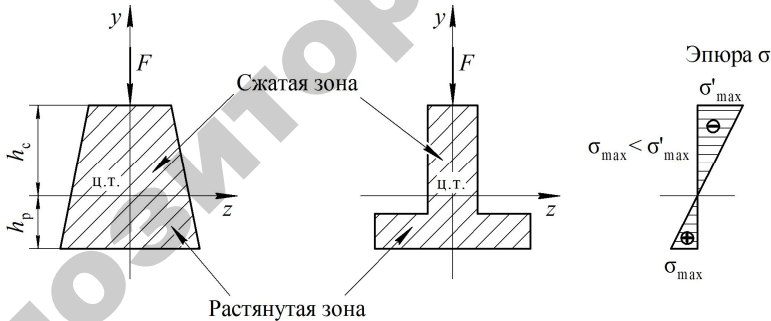


Рис. 9.13. Эпюра распределения нормальных напряжений в сечениях без горизонтальной оси симметрии

Обозначим их через  $h_p$  и  $h_c$  соответственно. Тогда напряжения в крайних волокнах выразятся формулами

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh_p}{I_z}; \quad \sigma'_{\max} = \frac{Mh_c}{I_z}. \quad (9.13)$$

## 9.4. Касательные напряжения при поперечном изгибе (формула Д.И. Журавского)

При поперечном изгибе в сечениях балки кроме изгибающего момента  $M$  возникает и поперечная сила  $Q$ . Поэтому кроме нормальных напряжений в сечениях балки возникают и касательные напряжения. Определим касательные напряжения, возникающие в балке прямоугольного поперечного сечения.

Возьмем два произвольных сечения по длине балки I-I и II-II, расположенных на расстоянии  $dx$  друг от друга (рис. 9.14, а). Согласно эпюрам, в сечении I-I действуют поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_z$ , а в сечении II-II – поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_z + dM_z$ .

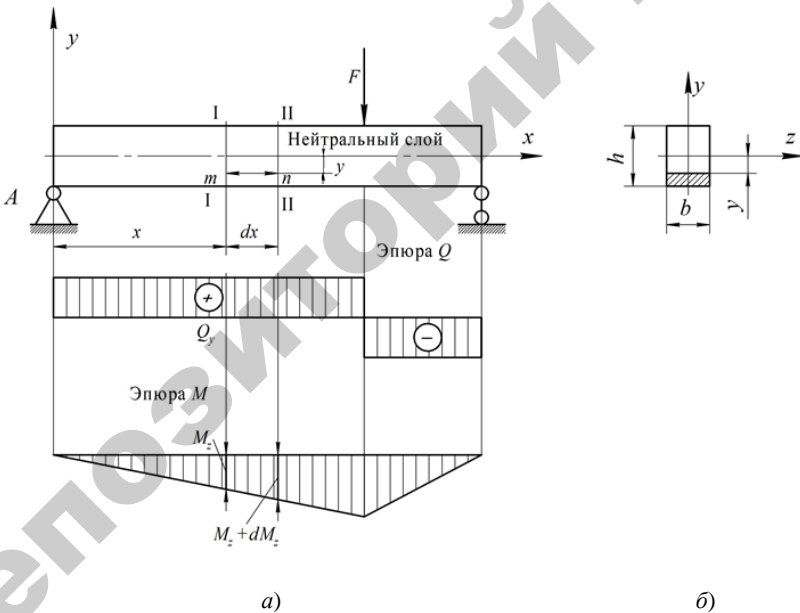


Рис. 9.14. Схема балки к расчету касательных напряжений

Нормальные напряжения, вызванные изгибающими моментами в сечениях I-I и II-II, соответственно определяются по формулам

$$\sigma' = \frac{My}{I_z}; \quad \sigma'' = \frac{(M + dM)y}{I_z}. \quad (9.14)$$

Проведем горизонтальное сечение  $m-n$  на расстоянии  $y$  от нейтральной оси балки и рассмотрим равновесие выделенного элемента (рис. 9.14, б).

Равнодействующие нормальных напряжений, которые действуют на левую и правую боковые грани параллелепипеда, обозначим  $N_1$  и  $N_2$ . Площадь граней обозначим  $A_{\text{отс}}$  (часть отсеченной площади поперечного сечения, расположенная между горизонтальным сечением  $m-n$  и нижним основанием сечения балки).

$$N_1 = \int_{A_{\text{отс}}} \sigma' dA = \int_{A_{\text{отс}}} \frac{My}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} \int_{A_{\text{отс}}} y dA, \quad (9.15)$$

где  $\int_{A_{\text{отс}}} y dA = S_z^{\text{отс}}$ ,

тогда

$$N_1 = \frac{M}{I_z} S_z^{\text{отс}};$$

$$N_2 = \int_{A_{\text{отс}}} \sigma' dA = \int_{A_{\text{отс}}} \frac{(M + dM)y}{I_z} dA = \frac{(M + dM)y}{I_z} S_z^{\text{отс}}. \quad (9.16)$$

Выделенный элемент (рис. 9.15) находится в равновесии и для него справедливо условие равновесия  $\Sigma F_{iz} = 0$ .

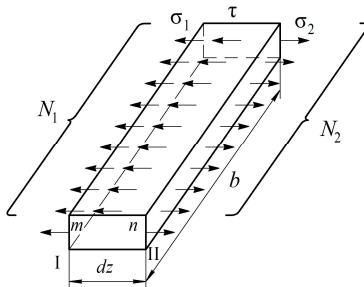


Рис. 9.15. Схема распределения внутренних сил

Предположим, что в горизонтальном сечении параллелепипеда действуют касательные напряжения  $\tau$ , которые равномерно распределены по ширине сечения.

Площадь горизонтального сечения равна  $bdz$ .

Из уравнения равновесия получим

$$\Sigma F_{iz} = N_2 - N_1 - \tau bdz = 0,$$

Откуда

$$\tau = \frac{N_2 - N_1}{bdz} = \frac{dM_z^{omc}}{bdzI_z}. \quad (9.17)$$

Используя зависимость

$$\frac{dM}{dz} = 0,$$

окончательно получим (формула Д. И. Журавского)

$$\tau = \frac{QS_z^{omc}}{bI_z}, \quad (9.18)$$

где  $Q$  – величина поперечной силы в сечении;

$S_z^{отс}$  – статический момент отсеченной части площади поперечного сечения, расположенной между рассматриваемым волокном и краем сечения балки относительно нейтральной оси;

$b$  – ширина сечения в той точке, где определяются касательные напряжения;

$I_z$  – осевой момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Согласно закону парности касательных напряжений, они возникают и в поперечных сечениях балки.

Знак касательных напряжений определяется знаком поперечной силы  $Q$ .

Рассмотрим, как распределяются касательные напряжения в балках различного поперечного сечения.

1. Прямоугольное сечение.

Для данного сечения

$$\frac{Q}{bI_z} = \text{const}$$

и меняется только величина статического момента  $S_z^{\text{отс}}$ . Возьмем произвольную точку  $C$ , отстоящую от центральной оси сечения на расстоянии  $y$  (рис. 9.16, а). Проведем через эту точку сечение параллельно оси  $z$ . Площадь отсеченной части сечения

$$A_{\text{отс}} = b \left( \frac{h}{2} - y \right).$$

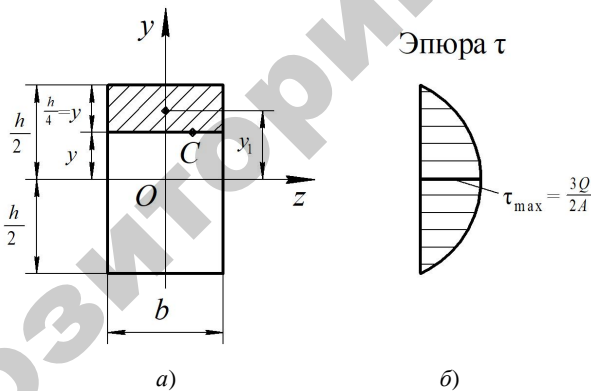


Рис. 9.16. Эпюра касательных напряжений для прямоугольного сечения

Статический момент этой площади:

$$S_z^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} y_1 = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right]. \quad (9.19)$$

Подставим в формулу Журавского найденное значение  $S_z^{\text{отс}}$ .

С учетом того что

$$I_z = \frac{bh^3}{12},$$

Получим

$$\tau = Q \frac{\frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}{b \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \quad (9.20)$$

Так как  $y$  входит в формулу во второй степени, следовательно, эпюра  $\tau$  будет параболической. В наиболее удаленных от нейтральной оси точках при  $y = \pm h/2$   $\tau = 0$ .

В нейтральном слое при  $y = 0$  касательные напряжения будут иметь максимальное значение, то есть

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A}. \quad (9.21)$$

Эпюра касательных напряжений для прямоугольного сечения изображена на рис. 9.16, б.

## 2. Круглое сечение.

Для круглого сечения (рис. 9.17) формула Журавского для вертикальной составляющей касательного напряжения может быть записана в следующем виде:

$$t = \frac{4}{3} \frac{Q}{A} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right). \quad (9.22)$$

Согласно полученной формуле, эпюра  $\tau$  будет параболической. В наиболее удаленных от нейтральной оси точках при  $y = R$   $\tau = 0$ . Наибольшие касательные напряжения будут в нейтральном слое при  $y = 0$ . Эпюра касательных напряжений представлена на рис. 9.17, б.

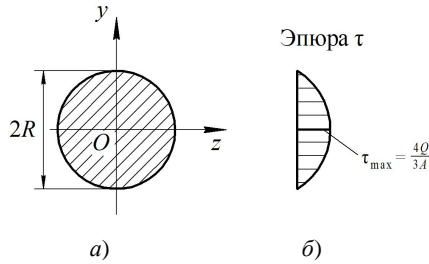


Рис. 9.17. Эпюра касательных напряжений для круглого сечения

### 3. Двутавровое сечение.

При построении эпюры касательных напряжений для двутаврового сечения необходимо учитывать, что изменяются не только статический момент площади, но и ширина сечения. Поэтому эпюра касательных напряжений строится по характерным точкам (рис. 9.18).

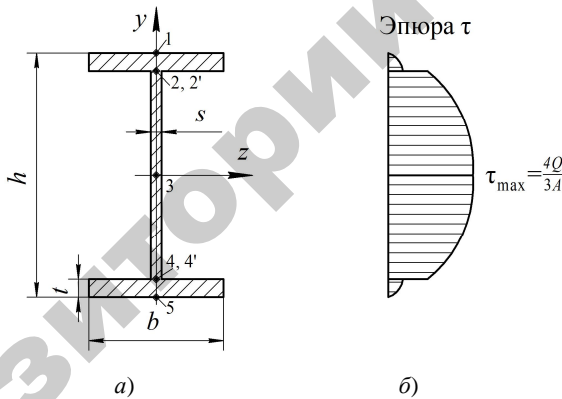


Рис. 9.18. Эпюра касательных напряжений для двутаврового сечения

В точке 1,  $S_z^{\text{отс}} = 0$ , поэтому  $\tau = 0$ . В месте примыкания полки к стенке (точки 2 и 2') будем считать, что эти точки расположены бесконечно близко одна от другой, причем точка 2 принадлежит полке, а точка 2' – стенке.

В точке 2 ширина сечения равна  $b$ , а статический момент определяется как статический момент полки с размерами  $bt$ . Для точки 2' статический момент такой же, как для точки 2, но ширина сечения



равна  $d$  (рис. 9.18, *a*), и касательные напряжения резко возрастают. Наибольшие касательные напряжения возникают на нейтральной оси и определяются по формуле

$$t_{\max} = \frac{4Q}{3A}. \quad (9.23)$$

Касательные напряжения в остальных точках определяются из условия симметрии сечения. Эпюра распределения касательных напряжений изображена на рис. 9.18, *б*.

На рис. 9.19 показан вид эпюр для некоторых других сечений (крестообразного – рис. 9.19, *a*; таврового – рис. 9.19, *б*).

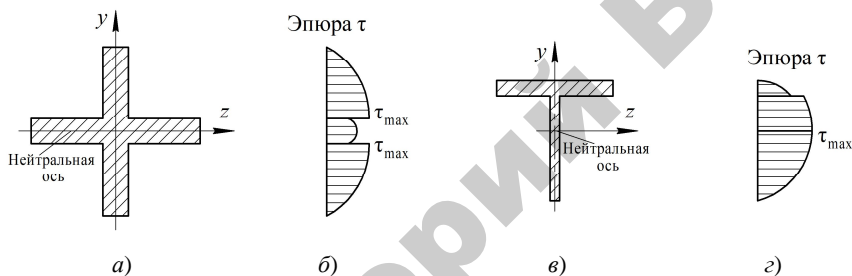


Рис. 9.19. Эпюры касательных напряжений для различных сечений

Анализируя эпюры касательных напряжений, можно сделать следующие выводы.

1. Вид эпюры  $\tau$  зависит от формы поперечного сечения.
2. Касательные напряжения по сечению распределяются неравномерно и обычно достигают максимального значения на нейтральной оси сечения.

## 9.5. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил при изгибе

При расчете балок на изгиб необходимо знать законы распределения внутренних усилий в поперечных сечениях балки и уметь строить эпюры ВСФ.

Рассмотрим три основных типа опорных связей балки.

1. Шарнирно-неподвижная опора (рис. 9.20, *a* – левая опора балки), ограничивающая горизонтальное и вертикальное перемещение опорной связи и лишаящая систему двух степеней свободы.

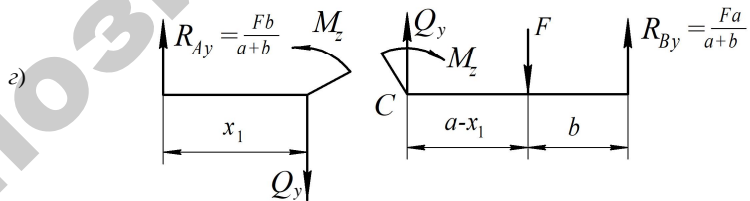
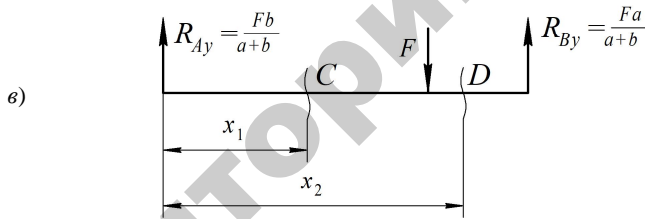
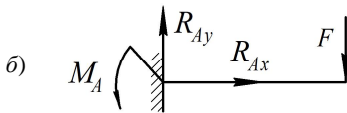
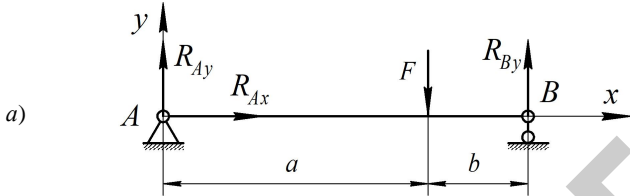


Рис. 9.20. Расчетная схема однопролетной балки

2. Шарнирно-подвижная опора (рис. 9.20, *a* – правая опора балки), ограничивающая вертикальное перемещение опорной связи и лишаящая систему одной степени свободы.

3. Жесткая заделка (рис. 9.20, б), не допускающая поворота и перемещений по вертикали и горизонтали сечения балки, примыкающего к опоре и лишающая систему трех степеней свободы.

Рассмотрим построение эпюр  $M$  и  $Q$  на конкретном примере (рис. 9.20, а). Решение задачи начинаем с вычерчивания расчетной схемы, приложив к балке внешние активные и реактивные силы. Заданная система является статически определимой, следовательно, из условий равенства нулю суммы моментов всех сил относительно шарнирных закреплений определяем вертикальные реакции в опорах:

$$\sum m_B(F_i) = 0, \quad Fb - R_{Ay}(a+b) = 0, \quad R_{Ay} = \frac{Fb}{a+b};$$

$$\sum m_A(F_i) = 0, \quad R_{By}(a+b) - Fa = 0, \quad R_{By} = \frac{Fa}{a+b}.$$

Для определения реакции  $R_{Ax}$  имеем:  $\sum F_{ix} = 0$  откуда  $R_{Ax} = 0$ .

Для проверки правильности вычислений воспользуемся условием равенства нулю суммы всех вертикальных сил  $\sum F_{iy} = 0$ , откуда получим

$$R_{Ay} + R_{By} - F = \frac{Fb}{(a+b)} + \frac{Fa}{(a+b)} - F = 0.$$

Реакции найдены верно.

Для определения ВСФ (изгибающего момента  $M_z$  и поперечной силы  $Q_y$ , как функций от продольной координаты  $x$ , воспользуемся *методом сечений*. Для получения этих зависимостей разбиваем балку на *участки*, границами которых являются следующие сечения: начало и конец балки; точки приложения сосредоточенных усилий; начало и конец действия распределенной нагрузки; сечения, в которых скачкообразно изменяется жесткость балки; точки, где происходит изменение положения элементов стержневой системы со сложной структурой.

Заданная балка (рис. 9.20, в) состоит из двух участков – первого ( $0 \leq x_1 \leq a$ ) и второго ( $a \leq x_2 \leq a + b$ ). Рассматривая последовательно сечения, принадлежащие к первому и второму участкам, и равновесие отсеченных частей балки при действии на них всех внешних сил и внутренних усилий, составим общие уравнения для ВСФ.

В системе координат  $yOx$ , изображенной на рис. 9.21, а, положительный момент вызывает сжатие верхних или растяжение нижних волокон балки, а если наоборот, то отрицательный. Правило знаков для изгибающих моментов иногда называют «правилом дождя» (имея ввиду, что в случае выпуклости вниз образуется воронка, в которой задерживается дождевая вода, и наоборот). При построении эпюры  $M_z$  положительные ординаты откладываются вверх от нулевой линии, отрицательные – вниз.

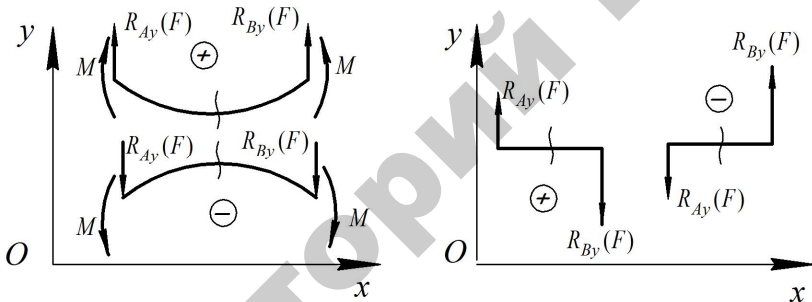


Рис. 9.21. Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил

Для поперечных сил, независимо от направления координатных осей, устанавливается следующее правило знаков: если равнодействующая внешних сил стремится вращать рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, то она считается положительной, в противном случае – отрицательной (рис. 9.21, б). При построении эпюры  $Q_y$  положительные ординаты откладываются вверх от нулевой линии, отрицательные – вниз.

Из условия равновесия  $\sum M_z(F_i) = 0$ ;  $\sum F_{iy} = 0$  отсеченной части балки (рис. 9.20, з), расположенной левее от сечения  $x_1$  (первый участок), имеем

$$M_z(x_1) = R_{Ay}x_1; Q_y = R_{Ay}.$$

Для определения  $M_z$  и  $Q_y$  на втором участке рассмотрим равновесие отсеченной части балки, расположенной правее от сечения  $x_2$  (рис. 9.22,  $z$ ), то есть  $\Sigma M_z(F_i) = 0$ ;  $\Sigma F_{iy} = 0$ , откуда

$$M_z(x_2) = R_{By} (a + b - x_2); \quad Q_y = -R_{By}.$$

Эпюры  $M_z$  и  $Q_y$  построены на сжатых волокнах и изображены на рис. 9.22.

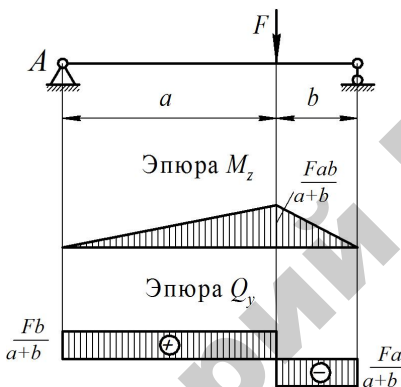


Рис. 9.22. Построение эпюр  $M_z$  и  $Q_y$  при изгибе

*Проверка правильности построения эпюр ВСФ при поперечном изгибе.*

1. Эпюра  $M_z$  на участках балки между сосредоточенными силами, между сосредоточенной силой и моментом, между началом или концом действия равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенной силой или моментом всегда изменяется по линейному закону (прямая под углом к нулевой линии). Если эпюра  $M_z$  строится на растянутых волокнах, то в пределах действия равномерно распределенной нагрузки она изменяется по закону квадратичной параболы с выпуклостью в сторону действия нагрузки.

2. Под точкой приложения сосредоточенной силы эпюра  $M_z$  имеет перегиб с направлением в сторону действия силы.

3. На эпюре  $M_z$  в сечении, где действует сосредоточенный момент  $m$ , будет скачок, равный его величине.

4. Над шарнирными опорами однопролетной балки изгибающий момент может быть только в тех случаях, когда в опорных сечениях приложены сосредоточенные моменты или, когда на консолях, расположенных за опорами, приложены нагрузки. Во всех других случаях изгибающие моменты в шарнирных опорах равны нулю.

5. В сечениях, где поперечная сила  $Q_y$  принимает нулевое значение и меняет знак, изгибающий момент  $M_z$  достигает экстремальных значений.

6. Поперечная сила  $Q_y$  на участке равна нулю, если во всех сечениях по длине этого участка  $M_z = \text{const}$ .

7. Эпюра  $Q_y$  постоянна на участках балки между сосредоточенными нагрузками и изменяется по линейному закону лишь на участках, где действует равномерно распределенная нагрузка.

8. Эпюра  $Q_y$  в точках приложения сосредоточенных вертикальных сил ( $F$ ,  $R_A$ ,  $R_B$ ) имеет скачки, равные по величине приложенным в этих сечениях сосредоточенным силам, причем их направление всегда совпадает с направлением этих сил.

## 9.6. Расчет балок на прочность при изгибе

Используя уравнения (9.12) и (9.18), можно вычислить нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения, возникающие в любой точке сечения, если известны изгибающий момент  $M_z$  и поперечная сила  $Q_y$  для этого сечения. Как было показано, нормальные напряжения максимальны в крайних точках сечения и равны нулю на нейтральной оси; касательные напряжения равны нулю в крайних точках сечения и имеют максимальное значение на нейтральной оси.

Так как при поперечном изгибе материал находится в плоском напряженном состоянии, то для более полного анализа напряжений рассмотрим напряженное состояние в характерных точках сечения (рис. 9.23).

В точках  $B$  и  $M$ , выделенных на верхней и нижней поверхностях балки, материал находится в линейном напряженном состоянии, в точке  $B$  он испытывает простое сжатие, в точке  $M$  – растяжение. В точке  $D$ , выделенной у нейтрального слоя, материал испытывает чистый сдвиг  $\sigma_z = 0$ ;  $\tau = \tau_{\text{max}}$ . В точках  $C$  и  $E$ , выделенных произ-

вольно, материал испытывает плоское напряженное состояние. Величины и направления  $\sigma_z$  и  $\tau$  на гранях выделенных элементов определяются величинами и направлением  $M$  и  $Q$ , принимаемых из эпюр в рассматриваемом сечении, и расстоянием элемента от нейтральной оси. Подбор поперечных сечений балок, а также их проверка на прочность должны проводиться по точке, в которой материал находится в наиболее опасном состоянии.

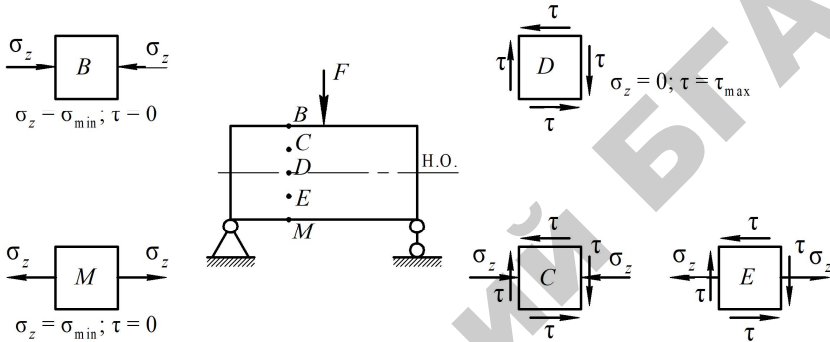


Рис. 9.23. Напряженное состояние в характерных точках сечения

В общем случае опасной может быть точка:

- а) расположенная в крайних волокнах сечения, где действует наибольший изгибающий момент (например, точка  $B$  и  $M$ );
- б) расположенная на нейтральной оси сечения, где действует наибольшая поперечная сила (например, точка  $D$ );
- в) в которой напряжение  $\sigma_z$  и  $\tau$  создают наибольшее эквивалентное напряжение по принятой для расчета теории прочности (например, точка  $C$  и  $E$ ).

В первом случае, так как напряженное состояние материала в точке линейное, то нормальное напряжение  $\sigma_z$  является главным, а условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (9.24)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение.

Если материал неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности при растяжении и сжатии должны удовлетворяться отдельно:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_p \text{ и } \sigma_{\min} \leq [\sigma]_c, \quad (9.25)$$

где  $[\sigma]_p$  и  $[\sigma]_c$  – соответственно допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

Во *втором случае* материал в точке испытывает чистый сдвиг и условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}^*}{bI_z} \leq [\tau], \quad (9.26)$$

где  $[\tau]$  – допускаемое напряжение на сдвиг.

В *третьем случае* материал в точке испытывает плоское напряженное состояние, при котором главные напряжения определяются по уравнениям (4.15) и (4.16), описывающим данное состояние.

Расчет балок из пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, рекомендуется проводить по III и IV теориям прочности, для которых условия прочности, следующие

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (9.27)$$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (9.28)$$

Для таких материалов, как чугун или бетон, оказывающих различное сопротивление растяжению и сжатию, рекомендуется пользоваться теорией прочности Мора. Условие прочности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{1-k}{2}\sigma_x + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (9.29)$$

где  $k = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}}$ .



Практика показывает, что в балках, имеющих сплошные поперечные сечения, такие, как *прямоугольник, круг, квадрат*, а также сечения с достаточно толстыми стенками, опасными являются *крайние точки в опасном сечении*, в котором изгибающий момент имеет максимальное значение. Поэтому *практический расчет балок на прочность производят по условию прочности (9.14) без учета касательных напряжений*.

Для балок, изготовленных из *швеллера, двутавра*, рекомендуется дополнительно производить проверку прочности по соответствующей теории прочности в точках соединения стенки и полок. Для *деревянных балок* следует дополнительно производить проверку прочности по максимальным касательным напряжениям, действующим в нейтральном слое.

### 9.7. Условия прочности при изгибе по нормальным и касательным напряжениям

Для обеспечения прочности балки необходимо, чтобы максимальные нормальные напряжения в опасном сечении, где изгибающий момент достигает наибольшего по абсолютной величине значения, не превосходили допускаемой величины.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям для симметричных сечений имеет вид

$$\frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (9.30)$$

Для балок с несимметричным поперечным сечением относительно оси  $x$  необходимо составить два условия прочности – для сжатой и растянутой зоны отдельно

$$\frac{|M_{\max}|}{I_z} h_c \leq [\sigma_c] \quad \text{и} \quad \frac{|M_{\max}|}{I_z} h_p \leq [\sigma_p], \quad (9.31)$$

где  $[\sigma_c]$  и  $[\sigma_p]$  – допускаемые напряжения на сжатие и на растяжение соответственно.

Из условия прочности по нормальным напряжениям вытекает три вида расчетов:

- 1) проверочный расчет, при котором определяются максимальные нормальные напряжения и сравниваются с допускаемыми напряжениями;
- 2) проектировочный расчет для определения размеров поперечного сечения;
- 3) определение величины допускаемой нагрузки (несущей способности балки).

При подборе сечений прокатного профиля необходимо определить из условия прочности требуемый момент сопротивления  $W_z$  и затем из таблиц сортамента найти соответствующий номер профиля.

Определим моменты сопротивления для простых сечений.

1. Прямоугольное сечение (квадрат) (рис.9.24):

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}. \quad (9.32)$$

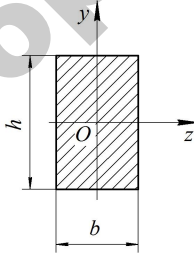


Рис. 9.24. Схема прямоугольного сечения

При проектировочном расчете задаемся соотношением размеров поперечного сечения, например,  $h = 2b$ , тогда

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^2}{3}. \quad (9.33)$$

Из условия прочности имеем

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_{\max}}{2[\sigma]}}. \quad (9.34)$$

## 2. Круглое сечение.

Для круглого сечения (рис. 9.25) осевой момент сопротивления определяется аналогично.

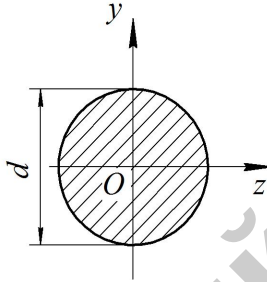


Рис. 9.25. Схема круглого сечения

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}, \quad (9.35)$$

тогда из условия прочности

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi[\sigma]}}. \quad (9.36)$$

Допускаемая нагрузка на балку определяется величиной максимального изгибающего момента.

При изгибе балок кроме расчета на прочность по нормальным напряжениям производится расчет на прочность по касательным напряжениям.

Расчет выполняется для сечения, где действует поперечная сила  $Q_{\max}$ .

Условие прочности имеет следующий вид:

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad (9.37)$$

где  $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

Для стальных балок имеем

$$[\tau] \approx 0,6[\sigma], \quad (9.38)$$

Для балок прямоугольного сечения

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{|Q_{\max}|}{A} \leq [\tau]; \quad (9.39)$$

для балок круглого сечения

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{|Q_{\max}|}{A} \leq [\tau]; \quad (9.40)$$

для балок двутаврового сечения

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}| S_{z \max}}{d I_z} \leq [\tau]. \quad (9.41)$$

В длинных балках постоянного сечения касательные напряжения значительно меньше нормальных напряжений. Для таких балок расчет на прочность по касательным напряжениям выполняется как проверочный.

## 9.8. Материалы и рациональные формы поперечного сечения балок при изгибе

В общем случае выбор поперечного сечения балки определяется материалом, характером внешней нагрузки и условиями работы конструкции.

Будем считать сечение балки рациональным, если оно обеспечивает необходимую прочность при минимальном весе, то есть при минимальной площади поперечного сечения.

Согласно условию прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (9.42)$$

Предположим, что площадь поперечного сечения балки  $A = \text{const}$ , тогда наиболее рациональной формой поперечного сечения будет такая, для которой  $W_z$  имеет максимальное значение. Для этого следует располагать большую часть площади сечения дальше от нейтральной оси (рис. 9.26).

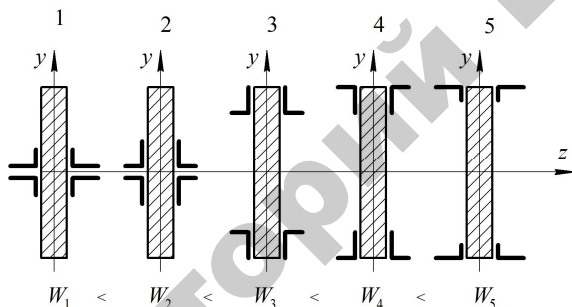


Рис. 9.26. Моменты сопротивления для различных сечений балки

Согласно рис. 9.26 наиболее рациональной будет форма сечения 5. Таким образом, при изгибе балки из пластичного материала сечение тем рациональнее с точки зрения расхода материала, чем оно ближе к форме идеального двутавра (рис. 9.27).

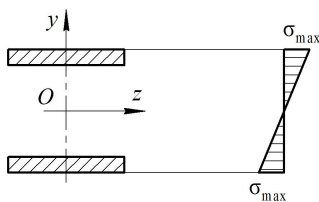


Рис. 9.27. Схема идеального двутавра

Если материал конструкции одинаково работает на растяжение и сжатие (сталь), то рациональными будут сечения, симметричные относительно нейтральной оси. Близким к идеальному сечению является двутавровое сечение. Деревянные балки, как правило, имеют прямоугольное или круглое сечение, так как изготовление деревянных двутавровых балок требует больших трудозатрат. Следует отметить, что при одинаковой прочности вес двутавровой балки значительно меньше, почти в 4 раза, по сравнению с балкой круглого сечения.

Для балок из хрупких материалов (чугун, бетон) целесообразно использовать несимметричные сечения относительно нейтральной оси. Хрупкие материалы хорошо работают на сжатие и значительно хуже на растяжение. Поэтому, выбирая форму сечения балки, можно добиться того, чтобы нейтральная линия была смещена в сторону растянутой зоны и  $\sigma_{\max}$  в растянутой зоне было значительно меньше, чем в сжатой зоне.

### **9.9. Балки переменного сечения. Определение деформаций**

Размеры балок с постоянным поперечным сечением определяются по максимальному изгибающему моменту в опасном сечении, в остальных же сечениях балка имеет лишний запас прочности. Поэтому на практике широко распространены балки, поперечное сечение которых изменяется по длине. Кроме того, по конструктивным соображениям балки, работающие на изгиб, часто имеют отверстия, выточки, ступени, конусность и т. д.

С точки зрения расчета на прочность и жесткость все такие балки можно разделить на три основные группы:

- балки, имеющие местные изменения формы и размеров сечений (рис. 9.28, *а*);
- балки ступенчато-переменного сечения (рис. 9.28, *б*);
- балки, имеющие непрерывно изменяющиеся по длине размеры сечений (рис. 9.28, *в*).

Отверстия, выточки и прочие нарушения формы и размеров сечений вызывают резкое и значительное изменение закона распределения напряжений и деформаций. Однако это изменение носит

местный характер и на прочность стержня в большинстве случаев влияет незначительно. Поэтому условие прочности записывают для опасной точки, расположенной в одном из ослабленных сечений, так как здесь может иметь место концентрация напряжений. В зависимости от чувствительности материала к концентрации напряжений условия прочности будут иметь различный вид.

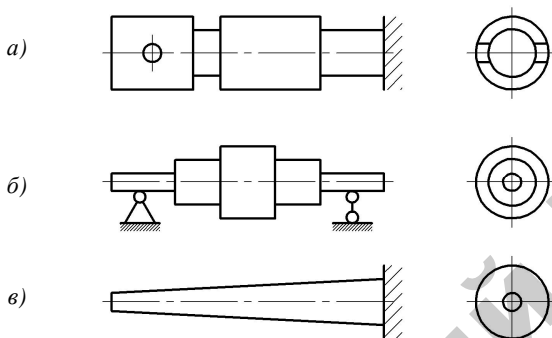


Рис. 9.28. Схемы балок с переменным сечением по длине

Для пластичных материалов (малоуглеродистая сталь, медь, алюминий) и хрупких неоднородных материалов (чугун) концентрация напряжений не учитывается и условие прочности записывается в обычном виде:

$$\frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (9.43)$$

Для однородных хрупких материалов (высокопрочная закаленная сталь) концентрацию напряжений необходимо учитывать. Для таких материалов условие прочности имеет вид

$$\alpha \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma], \quad (9.44)$$

где  $\alpha$  – теоретический коэффициент концентрации напряжений, определяемый по справочным таблицам.

При определении прогибов и углов поворота сечений отверстия и прочие нарушения формы и размеров сечения не учитывают.

В местах сопряжения участков с различными размерами поперечных сечений возникает концентрация напряжений. Если материал чувствителен к ней, то необходимо применять второе условие прочности ко всем сечениям на границах участков балки. Если же материал нечувствителен к концентрации напряжений, то следует применить первое условие прочности к нескольким вероятным опасным сечениям.

Для определения перемещений в ступенчатом стержне можно пользоваться методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки или энергетическими методами, которые будут рассмотрены ниже, или применять видоизмененный метод начальных параметров. Суть последнего заключается в замене ступенчатого стержня эквивалентным ему по деформациям стержнем постоянной жесткости.

Частным случаем балок с непрерывно меняющимися по длине размерами сечений являются балки равного сопротивления изгибу. В таких балках во всех сечениях максимальные нормальные напряжения одинаковы и равны допускаемым напряжениям, то есть

$$\sigma_{\max}(z) = \frac{M(z)}{W_{x(z)}} = \frac{M_{\max}}{W_z} = [\sigma],$$

отсюда

$$\frac{M_{x(z)}}{W_z} = \frac{M(z)}{W_{\max}}. \quad (9.45)$$

Рассмотрим балку равного сопротивления изгибу на примере.

Балка прямоугольного сечения одним концом зашкреплена в заделку, на ее свободном конце приложена сосредоточенная сила  $F$  (рис. 9.29,  $a$ ).

Изгибающий момент в произвольном сечении, расположенном на расстоянии  $z$  от свободного конца балки

$$M(z) = -Fz.$$



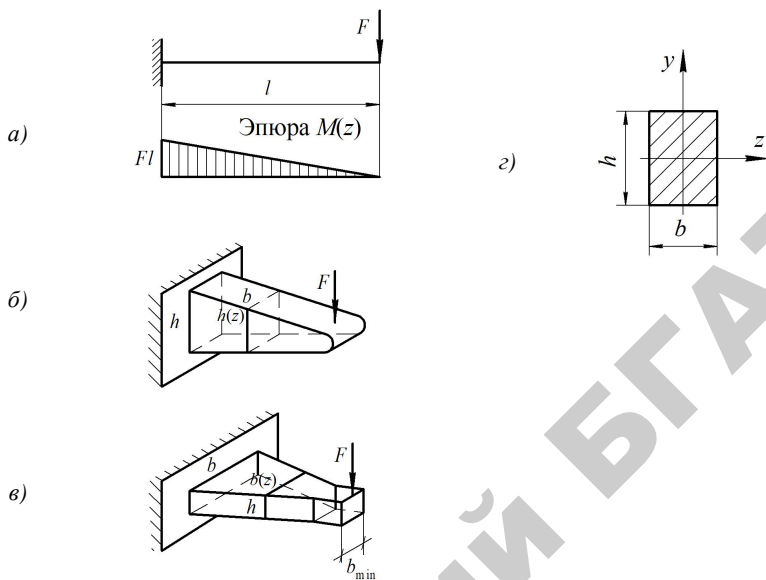


Рис. 9.29. Схема балки равного сопротивления изгибу по длине

В заделке  $M_{\max} = -Fl$ , при ширине сечения в заделке  $b$  и высоте  $h$ ,

$$W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

Рассмотрим частный случай, когда ширина сечения  $b = \text{const}$ , а высота сечения  $h = h(z)$ . В этом случае

$$W_z = \frac{bh(z)^2}{6},$$

тогда

$$\frac{\frac{bh(z)^2}{6}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{-Fz}{-Fl},$$

откуда

$$h(z) = h\sqrt{\frac{z}{l}}. \quad (9.46)$$

Из полученного выражения можно сделать вывод, что высота сечения балки равного сопротивления изгибу с постоянной шириной сечения меняется по закону параболы (рис. 9.29, б). Таким образом, определив высоту  $h$  в опасном сечении, можно определить и высоту  $h(z)$  в любом сечении балки.

Так как площадь параболы составляет  $2/3$  от площади описанного прямоугольника длиной  $l$  и высотой  $h$ , то объем балки равного сопротивления изгибу будет составлять  $2/3$  от объема балки с постоянным сечением  $bh$ . Таким образом, экономия материала составит 33 %.

Рассмотрим другое решение этой задачи, когда высота сечения  $h = \text{const}$ , а ширина сечения  $b = b(z)$ . В этом случае имеем

$$\frac{\frac{b(z)h^2}{6}}{bh^2} = \frac{-Fz}{-Fl},$$

откуда

$$b(z) = \frac{b}{l}z. \quad (9.47)$$

Следовательно, в этом случае ширина балки изменяется по линейному закону. Получить форму такой балки не представляет больших затруднений (рис. 9.29, в).

Экономия материала при применении такой балки в сравнении с призматической балкой, имеющей сечение  $bh$ , достигает 50 %. Ширина концевого сечения балки определяется из условия прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F}{hb_{\min}}, \quad (9.48)$$

откуда

$$b_{\min} \geq \frac{3F}{2h[\tau]}.$$

Определим наибольший прогиб этой балки. Момент инерции произвольного сечения относительно оси  $z$  (рис. 9.29,  $z$ ) определяется по формуле

$$I(z) = \frac{b(z)h^3}{12} = \left(\frac{b}{l}z\right)\frac{h^3}{12} = \frac{bh^3}{12} \frac{z}{l} = I \frac{z}{l}, \quad (9.49)$$

где  $I$  – момент инерции сечения в заделке.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки примет вид

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{-Fz}{EI_l} = -\frac{Fl}{EI}.$$

Последовательно интегрируя данное уравнение, получим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= -\frac{Fl}{EI}z + C; \\ y(z) &= -\frac{Fl}{EI} \frac{z^2}{2} + C_z + D. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Постоянные интегрирования находим из начальных условий:

$$\text{при } z = l - \frac{dy}{dz} = 0;$$

$$\text{при } z = l - y(z) = 0.$$

Из первого уравнения из начальных условий

$$-\frac{Fl}{EI}z + C = 0, \text{ откуда } C = \frac{Fl^2}{EI};$$

из второго уравнения из начальных условий

$$-\frac{Fl^3}{2EI} + \frac{Fl^3}{EI} + D = 0, \text{ откуда } D = -\frac{Fl^3}{2EI}.$$

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в уравнения перемещений балки при  $z = 0$ , получим

$$\frac{dy}{dz} = \theta(z) = \frac{Fl^3}{EI};$$

$$y(z) = y_{\max} = -\frac{Fl^3}{2EI}.$$

В балке постоянного сечения по длине

$$y_{\max} = -\frac{Fl^3}{3EI}. \quad (9.51)$$

Следовательно, балки равного сопротивления изгибу, обладая такой же прочностью в заделке, как и балка постоянного сечения, имеют в полтора раза больший прогиб. Подобного рода системы используются в технике при изготовлении рессор, которые должны обладать достаточной прочностью и большой гибкостью. Так, например, обыкновенная автомобильная рессора имеет такой же закон изменения жесткости, как рассмотренная выше балка.

### **9.10. Перемещения при изгибе, основные понятия.**

#### **Дифференциальное уравнение упругой линии балки**

Чтобы делать вывод о работе балок, недостаточно уметь проводить расчеты только на прочность. Может произойти такое, что довольно прочная балка не будет пригодна к эксплуатации вследствие недостаточной жесткости. Для расчетов на жесткость определяют перемещение при изгибе.

Под действием нагрузки балка искривляется, сечения балки смещаются перпендикулярно прямой оси и смещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, называется *прогибом*. Геометрическое место центров тяжести поперечных сечений деформированной балки представляет собой изогнутую ось, которая называется *упругой линией*. Упругую линию можно рассматривать как график некоторой функции, которая определяется характеристикой нагрузки на балку, ее размерами и материалом.

Угол, на который поворачивается сечение по отношению к ее первоначальному состоянию, называется *углом поворота сечения*. Угол поворота считают равным углу между касательной к упругой линии в данной точке и осью недеформированной балки.

При поперечном изгибе ось балки принимает вид кривой, расположенной в плоскости действия внешних нагрузок. При этом точки оси получают поперечные перемещения  $y$ , а поперечные сечения совершают повороты относительно своих нейтральных осей на угол  $\theta$ , равный углу наклона касательной и упругой линии балки (рис. 9.30).

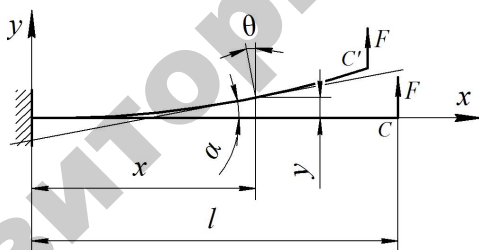


Рис. 9.30. Схема упругой оси балки при поперечном изгибе

Прогибы и углы поворотов поперечных сечений в балках являются функциями координаты  $x$ . Их определение необходимо для расчета балки на жесткость.

Рассмотрим изгиб балки в одной из главных плоскостей, например, в плоскости  $yx$ . Как показывает практика, элементы сооружений испытывают незначительные деформации ( $\frac{y_{\max}}{l} = 10^{-2} \dots 10^{-3}$ , где  $y_{\max}$  – максимальный прогиб;  $l$  – пролет балки).

В данном случае неизвестными функциями, определяющими положение точек поперечных сечений балки, являются  $y(x)$  и  $\theta(x) = \alpha(x)$ . Из геометрических построений (рис. 9.30) видно, что угол наклона касательной к оси  $x$  и угол поворота поперечного сечения при произвольном значении  $x$  равны между собой. В силу малости углов поворота сечений имеем

$$\theta(x) \approx \operatorname{tg}\theta(x) = y'(x).$$

Из курса высшей математики известно, что кривизна плоской кривой  $y(x)$  выражается формулой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (9.52)$$

Если в последнем выражении отбросить величину второго порядка из-за ее малости, то с учетом формулы

$$M_z = \frac{1}{\rho} EI_z, \quad (9.53)$$

после несложных математических преобразований получим дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$y''(x) = \frac{M_z}{EI_z}, \quad (9.54)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;

$I_z$  – момент инерции поперечного сечения балки относительно ее нейтральной оси;

$EI_z$  – жесткость балки.

Данное уравнение в общем случае справедливо для чистого изгиба балки, то есть когда изгибающий момент  $M_z$  имеет постоянное значение, а поперечная сила  $Q_y$  равна нулю. Это уравнение исполь-

зуется и в случае поперечного изгиба, при котором искривлениями поперечных сечений за счет их сдвигов пренебрегаем (гипотеза плоских сечений).

Введем еще одно упрощение, связанное с углом поворота поперечного сечения. Если упругая линия балки является пологой кривой, то углы поворота сечений можно принимать равными первой производной от прогибов. Отсюда следует, что прогиб балки принимает экстремальные значения в тех сечениях, где угол поворота равен нулю.

В общем случае, для того чтобы найти функции прогибов  $y(x)$  и углов поворота  $\varphi(x)$ , необходимо решить последнее уравнение с учетом граничных условий между смежными участками.

Для балки, имеющей несколько участков, определение формы упругой линии является достаточно сложной задачей, так как уравнение упругой линии балки, записанное для каждого участка, после интегрирования содержит две произвольные постоянные.

На границах соседних участков прогибы и углы поворота сечений являются непрерывными функциями. Это позволяет определить необходимое число граничных условий для вычисления произвольных постоянных интегрирования.

### 9.11. Способы определения перемещений при изгибе

Для определения углов поворотов и прогибов необходимо провести интегрирование дифференциального уравнения упругой линии. Это возможно сделать следующими методами.

*Метод начальных параметров.* Рассмотрим балку с постоянным поперечным сечением, нагруженную взаимно уравновешенной системой положительных силовых факторов (то есть вызывающих вертикальные перемещения сечений балки в положительном направлении оси  $y$ ). На балку действуют: моменты пары сил  $M$ , сосредоточенные силы  $F_1$ ,  $F_2$  и равномерно распределенная на участке балки нагрузка интенсивностью  $q$  (рис. 9.31).

Начало координат возьмем на левом конце балки, ось  $x$  направим вправо, ось  $y$  – вверх. Разобьем балку на ряд участков.

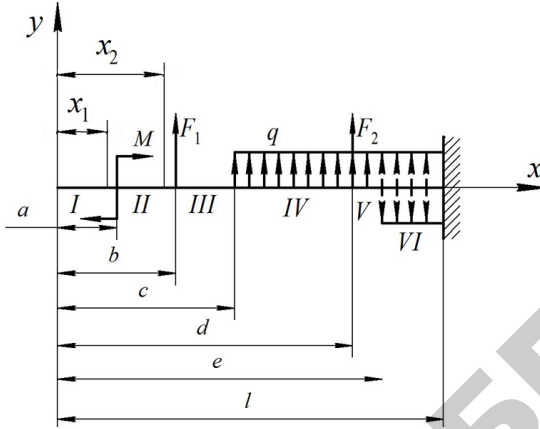


Рис. 9.31. Схема к расчету балки методом начальных параметров

Первый участок:

$$0 \leq x_1 \leq a; M_z = 0,$$

тогда

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

проинтегрируем уравнение упругой линии, получим

$$EI_z \frac{dy}{dx} = C_1, \quad EI_z y(x) = C_1 x + D_1. \quad (9.55)$$

Второй участок:

$$a \leq x_2 \leq b, \quad M_z = M.$$

Умножим изгибающий момент на величину  $(x_2 - a)^0$ , равную единице

$$M_z = M (x_2 - a)^0;$$



$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x_2 - a)^0, \quad (9.56)$$

после интегрирования имеем

$$EI_z \frac{dy}{dx} = M(x_2 - a) + C_2, \quad EI_z y(x) = \frac{M(x_2 - a)^2}{2} + C_2 x + D_2. \quad (9.57)$$

Постоянные интегрирования определим из условия, что упругая линия не имеет разрывов и изломов и является плавной кривой. На границе первого и второго участков имеем

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_1=a} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_2=a}.$$

Для  $n$  участков балки получим  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C$ , следовательно

$$y(x) \Big|_{x_1=a} = y(x) \Big|_{x_2=a},$$

тогда для  $n$  участков балки  $D_1 = D_2 = \dots = D_n = D$ .

Определим физический смысл постоянных интегрирования  $C$  и  $D$ . Если обозначить угол поворота и прогиб в начале координат через  $\theta_0$  и  $y_0$ , то из уравнения упругой линии получим начальные параметры:  $C = EI_z \theta_0$ ;  $D = EI_z y_0$ .

Рассмотрим последний шестой участок балки. Уравнение моментов в общем виде на этом участке имеет вид

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_i (x - a_i)^0 + \sum_{i=1}^m F_i (x - b_i) + \sum_{i=1}^k q_i \frac{(x - c_i)^2}{2} - \sum_{i=1}^p q_i \frac{(x - d_i)^2}{2}. \quad (9.58)$$

Проинтегрируем дважды это уравнение, получим

$$EI_z \theta_z = EI_z \theta_0 + \sum_{i=1}^n M_i (x - a_i) + \sum_{i=1}^m F_i \frac{(x - b_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^k q_i \frac{(x - c_i)^3}{6} - \sum_{i=1}^p q_i \frac{(x - d_i)^3}{6}; \quad (9.59)$$

$$EI_z y(x) = EI_z y_0 x + EI_z y_0 + \sum_{i=1}^n M_i \frac{(x - a_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^m F_i \frac{(x - b_i)^3}{6} + \sum_{i=1}^k q_i \frac{(x - c_i)^4}{24} - \sum_{i=1}^p q_i \frac{(x - d_i)^4}{24}. \quad (9.60)$$

При использовании полученных уравнений должны выполняться приведенные ниже требования.

1. При определении прогиба и угла поворота произвольного сечения в уравнения записываются слагаемые только для тех нагрузок, которые расположены между началом координат и рассматриваемым сечением. Если нагрузка относительно рассматриваемого сечения создает положительный изгибающий момент, то она входит в эти уравнения со знаком «плюс».

2. Распределенная нагрузка не должна прерываться. Если по условию задачи распределенная нагрузка оканчивается на одном из участков (конец пятого участка), то ее следует продолжить до конца балки, добавив одновременно нагрузку (добавленная и компенсирующая нагрузки показаны на расчетной схеме пунктиром, рис. 9.20) такой же интенсивности, но с противоположным знаком.

3. Если начало координат расположено на левом конце балки, то положительным будет угол поворота сечения против часовой стрелки. Если же начало координат взято на правом конце балки, то положительным будет угол поворота сечения по часовой стрелке. Линейное перемещение вверх будет положительным независимо от того, где расположено начало координат.

4. Жесткость балки должна быть постоянной на всех участках.

5. Начало координат является единым для всех участков балки.

6. Ось балки является прямой линией.

7. Значения начальных параметров находятся из граничных условий в опорных сечениях балки. Если начало координат взято

в жестко закрепленном опорном сечении, то начальные параметры будут равны нулю, то есть  $\theta_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ . Поэтому для консольной балки, имеющей жесткую заделку, начало координат обязательно следует размещать в этом сечении.

Если начало координат находится в сечении на шарнирной опоре, то  $\theta_0 \neq 0$  и  $y_0 = 0$ .

Если же концевые сечения балки не являются опорными сечениями, то начальные параметры не равны нулю и их необходимо определять.

Для этого в общем виде находят прогибы в опорных сечениях и, приравняв их к нулю, получают уравнения для определения начальных параметров.

*Графоаналитический метод. Интеграл Мора.* Определение перемещений и углов поворота различных сечений балки, лежащей на двух опорах, методом начальных параметров представляет собой достаточно трудоемкий процесс. Он требует громоздких вычислений по определению постоянных, интегрирования и граничных условий задачи.

Рассмотрим общий метод определения перемещений, пригодный для любой линейно деформируемой системы при любой нагрузке. Этот метод был предложен немецким ученым О. Мором.

Пусть требуется определить вертикальное перемещение  $y_c$  точки  $C$  балки, изображенной на рис. 9.32,  $a$ .

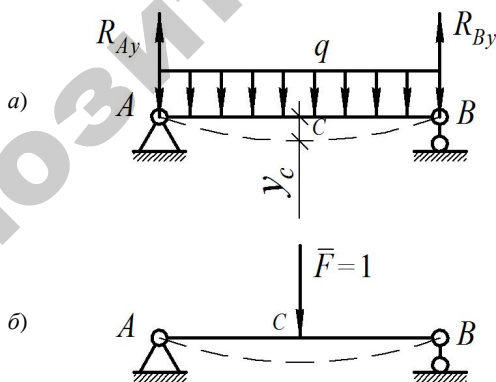


Рис. 9.32. Схема балки для определения перемещений с помощью интеграла Мора

Возьмем такую же вторую балку (рис. 9.32, б) и в искомой точке  $C$  приложим единичную силу  $\bar{F} = 1$ . Сообщим дополнительно этой балке такие же прогибы, какие имеет первая балка, изгибаемая распределенной нагрузкой  $q$ . Потенциальная энергия  $U$ , накопленная вследствие деформации второй балки, будет равна произведению работы единичной силы  $\bar{F} = 1$  на перемещение  $y_c$ :

$$U = 1 \cdot y_c.$$

Дополнительную потенциальную энергию второй балки можно определить другим способом. Если вырезать из балки бесконечно малый элемент длиной  $dx$ , то его потенциальная энергия определяется по формуле

$$dU = \bar{M} d\varphi, \quad (9.61)$$

где  $\bar{M}$  – момент от единичной нагрузки  $\bar{F} = 1$  в сечении  $C$ ;

$d\varphi$  – угол поворота концевых сечений элемента балки длиной  $dx$ , который определяется по формуле

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho}, \quad (9.62)$$

где  $\rho$  – радиус нейтрального слоя.

С учетом выражения  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$ , определим

$$d\varphi = \frac{M_z dx}{EI_z};$$

далее

$$dU = \frac{\bar{M} M_z dx}{EI_z}.$$

Потенциальная энергия всей балки, нагруженной единичной силой, определится по формуле

$$U = \int_0^l \frac{\overline{M}M_z dx}{EI_z}. \quad (9.63)$$

Сравним выражения для определения потенциальной энергии, найденной двумя способами, получим

$$y_c = \int_0^l \frac{\overline{M}M_z dx}{EI_z}. \quad (9.64)$$

Если балка имеет постоянное поперечное сечение, то

$$y_c = \frac{1}{EI_z} \int_0^l \overline{M}M_z dx - \text{интеграл Мора}, \quad (9.65)$$

где  $y_c$  – прогиб балки в рассматриваемом сечении;

$EI_z$  – жесткость балки при изгибе;

$\overline{M}$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении от действия единичной силы;

$M_z$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении от действия на балку внешних нагрузок;

$x$  – координата сечения балки.

Для определения угла поворота в рассматриваемом сечении прикладываем единичный момент  $\overline{M} = 1$ .

*Способ Верещагина.* Помимо непосредственного вычисления интеграла Мора для определения перемещений при изгибе можно пользоваться графоаналитическим методом перемножения эпюр по правилу Верещагина.

Для вывода формулы, предложенной Верещагиным, возьмем участок балки длиной  $l_1-l_2$ . Построим *грузовую* эпюру  $M$  от заданной внешней нагрузки. Часть *грузовой* эпюры на длине балки  $l_1-l_2$  показана на рис. 9.33, а.

В сечении  $C$ , где необходимо определить прогиб балки, прикладываем единичную силу  $\overline{F} = 1$  и строим от нее *единичную* эпюру изгибающих моментов  $\overline{M}$ . Часть этой эпюры на той же длине балки приведена на рис. 9.33, б.

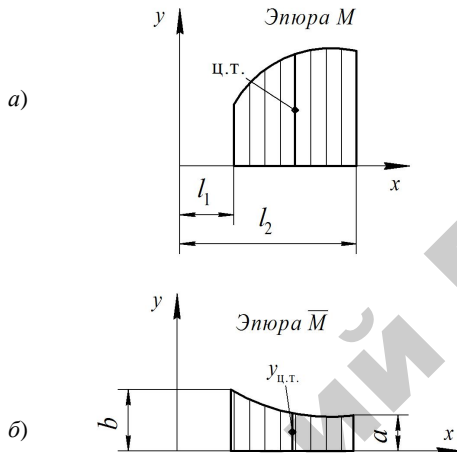


Рис. 9.33. Схема участка балки для определения перемещений способом Верещагина

В общем случае грузовая эпюра определяется уравнением  $M = \overline{f}(x)$ , а эпюра от единичной нагрузки – уравнением прямой линии  $\overline{M} = ax + b$ . Подставим эти значения в интеграл Мора, получим

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{1}{EI_z} \int_0^1 \overline{M} M_z dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^1 M_z (ax + b) dx = \\
 &= \frac{1}{EI_z} \int_0^1 M_z ax dx + \frac{1}{EI_z} \int_0^1 M_z b dx = \\
 &= \frac{1}{EI_z} \left( \int_0^1 ax dA + \int_0^1 b dA \right) = \frac{1}{EI_z} A(b + ax_{ц.г.})
 \end{aligned} \tag{9.66}$$

где  $x_{ц.г.}$  – ордината единичной эпюры моментов, расположенной под центром тяжести грузовой эпюры;

$A$  – площадь грузовой эпюры на участке балки длиной  $dx$ .

Так как  $b + ax_{ц.т} = \gamma_{ц.т}$ , то окончательно получим

$$y_c = \frac{1}{EI_z} Ay_{ц.т}, \quad (9.67)$$

где  $y_{ц.т}$  – ордината единичной эпюры моментов  $\overline{M}$  под центром тяжести грузовой эпюры  $M_z$ .

Для нескольких грузовых участков балки формула перемещений имеет вид

$$y_c = \frac{1}{EI_z} \sum_{i=1}^m Ay_{ц.т}. \quad (9.68)$$

Для определения перемещений при помощи правила Верещагина необходимо:

1) построить эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки.

В том сечении, где необходимо определить прогиб, приложить единичную силу (для нахождения угла поворота в сечении приложить единичный момент);

2) построить эпюры изгибающих моментов от единичной силы (от единичного момента);

3) вычислить площадь эпюры  $A$  на каждом участке балки.

Умножить каждую площадь грузовой эпюры на соответствующую ординату единичной эпюры, находящуюся под центром тяжести грузовой эпюры.

Полученные результаты сложить.

При этом необходимо учитывать следующее: перемножение эпюр с одинаковыми знаками дает знак «плюс», с разными знаками – «минус».

Положительные перемещения  $y_c$  и  $\theta_c$  всегда направлены в сторону действия соответствующей им единичной силы или единичного момента.

Для упрощения процесса расчета деформаций балки целесообразно воспользоваться готовой таблицей, где приведены формулы, по которым можно найти произведение  $Ay_{ц.т}$  в зависимости от вида эпюр  $M_x$  и  $\overline{M}$ .

## 9.12. Расчет балок на жесткость при изгибе

Расчет на жесткость заключается в учете, при выборе поперечных сечений стержней, величины допускаемых перемещений, устанавливаемых техническими нормами на основе результатов эксплуатации аналогичных конструкций.

Условие жесткости при изгибе имеет следующий вид:

$$y_p \leq [f], \quad (9.69)$$

где  $y_p$  – величина расчетного прогиба, вычисляемая с использованием уравнения упругой линии методом интегрирования, или методом начальных параметров, или другими методами, которые рассмотрены выше;

$[f]$  – допускаемый прогиб.

Выражая  $y_p$  через нагрузки, получим уравнение, позволяющее решать задачи, аналогичные задачам расчета на прочность.

## 9.13. Статически неопределимые балки при изгибе

Как уже известно, балка является статически определимой, если она опирается на две шарнирные опоры (одну подвижную и одну неподвижную) или заделана с одного конца, то есть если на нее наложены три внешние связи.

Реакции необходимых связей могут быть определены методами теоретической механики. Все закрепления сверх необходимых являются лишними с точки зрения геометрической неизменяемости системы, но по конструктивным соображениям эти связи необходимы, так как при их отсутствии могут оказаться необеспеченными прочность и жесткость системы. Балка при наличии лишних закреплений оказывается статически неопределимой, то есть число неизвестных реакций опорных закреплений больше числа уравнений равновесия, решаемых статикой твердого тела.

На рис. 9.34, *а*, *б* изображены две статически неопределимые балки; на каждую из них наложены четыре внешние связи; следовательно, эти балки по одному разу статически неопределимы.



На рис. 9.34, в показана балка с шестью внешними связями; она три раза статически неопределима. Степень статической неопределимости балки равна избыточному (лишнему) числу внешних связей (сверх трех). Статически неопределимые балки часто называют неразъемными балками.

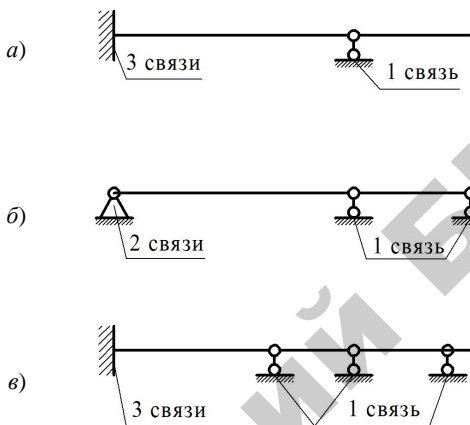


Рис. 9.34. Схема статически неопределимых балок при изгибе

Расчет неразъемных балок, как и расчет любых статически неопределимых систем, нельзя выполнить при помощи одних лишь уравнений равновесия; всегда необходимо составить дополнительные уравнения (уравнения перемещений), учитывающие характер деформации балки.

Расчет статически неопределимых балок производится с использованием универсального уравнения упругой линии балки.

Рассмотрим один раз статически неопределимую балку (рис. 9.35).

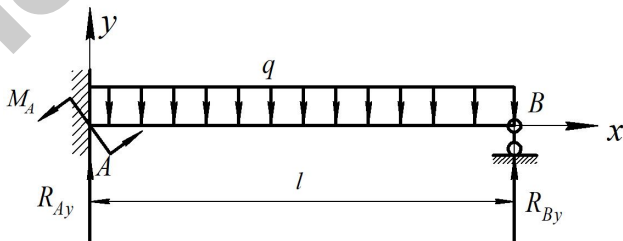


Рис. 9.35. Статически неопределимая балка

Для определения трех реактивных связей  $R_{Ay}$ ,  $R_{By}$  и  $M_A$  имеем два уравнения статики:

$$\sum M_A(F_i) = 0; M_A - \frac{ql^2}{2} + R_{By}l = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - ql + R_{By} = 0.$$

Третье дополнительное уравнение, необходимое для раскрытия статической неопределенности, можно получить, записав условия равенства нулю прогиба на шарнирной опоре:  $y(l) = 0$ .

Поскольку в заделке, то есть при  $x = 0$ , прогиб  $y(0) = 0$  и угол поворота сечения  $\theta(0) = 0$ , условие отсутствия прогиба в точке  $B$  примет вид

$$y(l) = -\frac{M_A(l-0)^2}{2EI_z} + \frac{R_{Ay}(l-0)^3}{6EI_z} - \frac{q(l-0)^4}{24EI_z} + \frac{q(l-l)^4}{24EI_z} = 0$$

или

$$-12M_A + 4R_{Ay}l - ql^2 = 0.$$

Имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$M_A - \frac{ql^2}{2} + R_{By}l = 0;$$

$$R_{Ay} - ql + R_{By} = 0;$$

$$12M_A + 4R_{Ay}l - ql^2 = 0.$$

Разрешив систему уравнений, получим решение для статически неопределимой балки

$$R_{Ay} = \frac{5ql}{8}; R_{By} = \frac{3ql}{8}; M_A = \frac{ql^2}{8}.$$

## Контрольные вопросы

1. Какой вид нагружения называется изгибом?
2. Что называется балкой?
3. Чем отличается чистый изгиб от поперечного, прямой изгиб от косоугого?
4. Какую плоскость называют силовой?
5. Что представляет собой нейтральный слой и нейтральная ось?
6. Какие ВСФ возникают в сечении при чистом и поперечном изгибах?
7. Что такое изгибающий момент  $M_z$  и как он определяется через внешние силы?
8. Что такое поперечная сила  $Q_y$  и как она определяется через внешние силы?
9. Каково правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил?
10. По какой формуле определяется нормальное напряжение в поперечном сечении балки при поперечном изгибе и как они изменяются по высоте балки?
11. Как определяется момент сопротивления для плоских сечений и какова его размерность?
12. Для чего строят эпюры ВСФ?
13. В какой последовательности строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов?
14. Какая дифференциальная зависимость связывает  $q$ ,  $Q$  и  $M$ ?
15. Каковы условия прочности при изгибе по нормальным и касательным напряжениям?
16. Что представляют собой прогибы и углы поворота при изгибе?
17. Как записывается универсальное уравнение упругой линии балки?
18. Что представляет собой уравнение метода начальных параметров?
19. Объясните сущность графоаналитического метода – интеграла Мора.
20. В чем заключается способ Верещагина?
21. Какой вид имеет условие жесткости при изгибе?

## 10. КРУЧЕНИЕ

Если на стержень, один конец которого закреплен, действуют параллельные и противоположно направленные силы  $F_1$  и  $F_2$ , называемые *парой сил*, при этом  $F_1 = F_2$  (рис. 10.1, а), и лежащие в плоскости, перпендикулярной оси стержня, то возникает деформация, называемая *кручением*. При кручении отдельные слои тела, как и при сдвиге, остаются параллельными, но поворачиваются друг относительно друга на некоторый угол. Деформация кручения представляет собой неоднородный сдвиг.

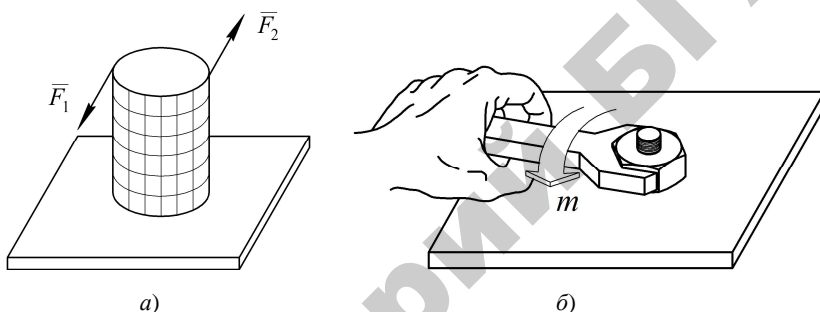


Рис. 10.1. Деформации кручения

Такая деформация возникает, например, при завинчивании гаек (рис. 10.1, б), а также кручению подвергаются валы машин, сверла, винтовые пружины, элементы пространственных конструкций.

Таким образом, кручение элемента конструкции возникает в том случае, когда в качестве внешних нагрузок имеются моменты (пары сил), лежащие в плоскости, перпендикулярной оси элемента. В результате действия этой пары сил в поперечном сечении элемента возникает *крутящий момент*  $T$ , который направлен в противоположную сторону относительно момента  $t$ , возникающего от пары сил и называемого *скручивающим моментом*.

Элементы круглого поперечного сечения, работающие на кручение, называются *валами*.

При расчете валов на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, испытывающих деформации кручения, надо решить две основные задачи: *определение напряжений от крутя-*

щих моментов  $T$ , возникающих в валу, и нахождение угловых перемещений в зависимости от внешних скручивающих вращающих моментов  $m$ . Внешние скручивающие моменты (в дальнейшем внешние моменты  $m$ ) передаются на вал в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес, там, где поперечная нагрузка смещена относительно оси вала.

### 10.1. Внутренние силовые факторы при кручении

При кручении в поперечных сечениях вала действует только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $T$ , а остальные силовые факторы (нормальная и поперечная силы, изгибающие моменты) отсутствуют.

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях вала, определяются по внешним моментам  $m$  с помощью метода сечений.

В простейшем случае, когда вал нагружен только двумя внешними моментами (эти моменты из условия равновесия вала  $\sum m_x = 0$  всегда равны друг другу по величине и направлены в противоположные стороны), как показано на рис. 10.2, крутящий момент  $T$  в любом поперечном сечении вала (на участке между внешними моментами) по величине равен внешнему моменту.

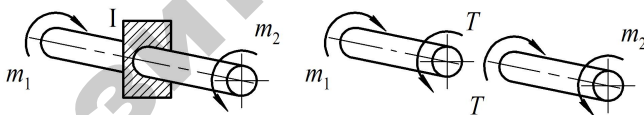


Рис. 10.2. Направления крутящих моментов в зависимости от действия внешних моментов

В более сложных случаях, когда к прямому валу приложено несколько внешних моментов, крутящие моменты  $T$  в поперечных сечениях различных участков вала неодинаковы.

На основании метода сечений крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к валу по одну сторону от рассматриваемого сечения, а именно

$$T = m = \Sigma m_i. \quad (10.1)$$

Величину крутящего момента  $T$  можно определить через  $\tau$ . Момент относительно оси  $x$  от действия касательных напряжений  $\tau$  на элементарной площадке  $dA$  равен (рис. 10.3)

$$dT = \tau \rho dA, \quad (10.2)$$

где  $\tau$  – касательное напряжение, действующее на элементарной площадке  $dA$ , расположенной на расстоянии  $\rho$  от центра тяжести сечения.

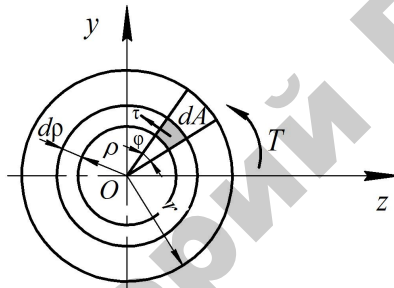


Рис. 10.3. Схема для определения  $T$  в сечении вала

Проинтегрировав это выражение по площади поперечного сечения вала, получим

$$T = \int_A \tau \rho dA. \quad (10.3)$$

Пусть геометрические размеры поперечного сечения вала одинаковы по длине. Материал вала однороден и изотропен. Подставим в интеграл выражение  $\tau$ , получим

$$T = \int_A G \rho \theta \rho dA = \int_A G \theta \rho^2 dA = G \theta I_p, \quad (10.4)$$

где  $\int_A \rho^2 dA = I_p$  – полярный момент инерции сечения вала.

### *Правило знаков для крутящих моментов.*

Если крутящий момент со стороны внешней нормали  $n$  к сечению вала вращается против часовой стрелки, то он считается положительным (рис. 10.4), в противном случае – крутящий момент считается отрицательным.

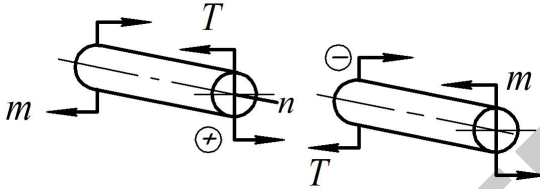


Рис. 10.4. Схема для определения знаков крутящих моментов в сечениях вала

На эпюре крутящих моментов положительные значения откладываются вверх от нулевой линии, отрицательные значения – вниз.

## **10.2. Напряжения в поперечных сечениях прямого круглого вала**

Сложность решения задачи по определению напряжений и деформаций при кручении зависит от формы поперечного сечения. Наиболее просто в механике материалов решаются задачи для стержней круглого и кольцевого поперечных сечений.

Чтобы определить напряжения в поперечных сечениях вала, рассмотрим уравнение (10.3), связывающее крутящий момент с касательными напряжениями.

Так как закон распределения касательных напряжений по сечению вала не известен, то определить  $\tau$  из интегрального уравнения невозможно. Для его определения рассмотрим деформации вала.

Для этого на поверхность круглого вала нанесем ортогональную сетку линий с постоянным шагом – прямые линии вдоль образующих цилиндра и окружности, перпендикулярные к продольной оси вала  $x$  (рис. 10.5, а). После деформации вала (рис. 10.5, б) образующие цилиндра переходят в винтовые линии, которые составляют угол  $\gamma$  с образующими.

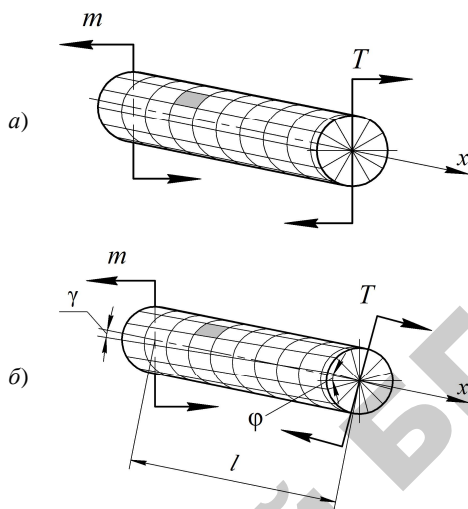


Рис. 10.5. Схема вала с ортогональной сеткой на его поверхности

Все окружности в перпендикулярных сечениях сохраняют свою форму и поворачиваются одна относительно другой на некоторый угол  $\varphi$ , называемый *углом закручивания*. Длина вала не изменяется. Квадратные элементы на цилиндрической поверхности вала деформируются и приобретают форму ромбов.

*Допущения, основанные на гипотезе плоских сечений:*

1) сечения, плоские до деформации, остаются плоскими после деформации и поворачиваются одно относительно другого на некоторый угол;

2) радиусы, проведенные мысленно в любом поперечном сечении, при кручении вала не искривляются.

Выделим часть вала длиной  $dx$  между двумя поперечными сечениями  $a-a$  и  $b-b$  (рис. 10.6, а). Считаем, что левое сечение  $a-a$  закреплено в заделке, а правое сечение  $b-b$  закручивается моментом  $T$  (рис. 10.6, б). Проведем на выделенном участке вала две параллельные линии  $AB$  и  $CD$ . Под воздействием момента  $T$  точка  $A$  остается неподвижной, а точка  $B$  переместится в положение  $B'$ . Мысленно вырежем в выделенном элементе внутреннюю часть с наружным радиусом  $\rho$ . Получим кольцевое сечение толщиной  $d\rho$ . Определим значение  $BB'$  из  $\triangle ABB'$  и  $\triangle BOB'$ .



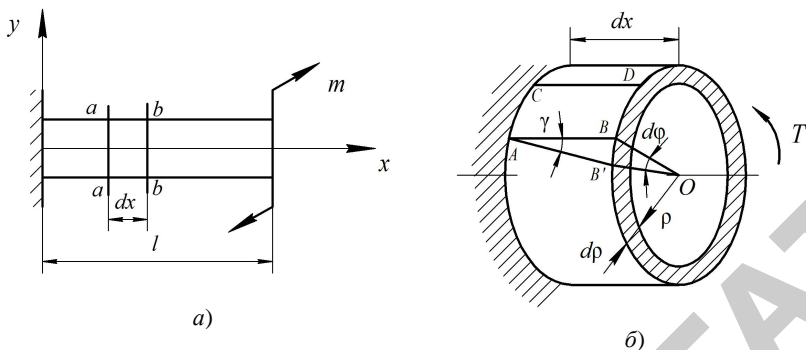


Рис. 10.6. Схема выделенной части вала длиной  $dx$

Из  $\triangle ABB'$  имеем, что  $BB' = ABt\gamma$ , учитывая, что при малых деформациях  $t\gamma \approx \gamma$ , получим  $BB' = AB\gamma = dx\gamma$ .

С другой стороны, из  $\triangle ABB'$ :  $BB' = OBd\phi = (\rho + d\rho)d\phi \approx \rho d\phi$ .

Окончательно получим  $dx\gamma = \rho d\phi$ , откуда

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}, \quad (10.5)$$

где  $\gamma$  – угол сдвига;

$d\phi$  – абсолютный угол закручивания, рад.

Обозначим  $\theta = \frac{d\phi}{dx}$  – относительный угол закручивания, рад/м.

Тогда

$$\gamma = \rho\theta. \quad (10.6)$$

Используя закон Гука при сдвиге, получим

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta, \quad (10.7)$$

где  $\tau$  – величина касательных напряжений в сечении вала на расстоянии  $\rho$  от центра тяжести сечения;

$G$  – модуль сдвига.

На основании полученной формулы (10.7) можно сделать вывод, что  $\tau$  в сечении вала распределяются по линейному закону и максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$  возникают на поверхности вала. В центре вала касательные напряжения равны нулю.

Распределение касательных напряжений по сечению вала показано на рис. 10.7.

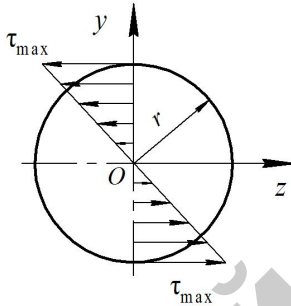


Рис. 10.7. Схема распределения касательных напряжений по сечению вала

### 10.3. Определение угла закручивания сечений вала при кручении

Из выражения крутящего момента при кручении определим относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{T}{GI_p}, \quad (10.8)$$

где  $GI_p$  – жесткость поперечного сечения вала при кручении.

Используя выражение  $d\varphi = \theta dx = \frac{T}{GI_p} dx$  проинтегрируем его, если длина вала равна  $l$ :

$$\varphi(x) = \int_0^l \frac{T}{GI_p} dx \cdot$$

Если  $T = \text{const}$ ,  $GI_p = \text{const}$ , то решение интеграла принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{Tl}{GI_p} + \varphi(0),$$

где  $\varphi(0)$  – угол закручивания сечения в начале системы отсчета.

Для определения касательных напряжений используем формулу (10.7). Подставляя в данную формулу выражение  $\theta$ , получим

$$\tau = G\rho \frac{T}{GI_p} = \frac{T\rho}{I_p}. \quad (10.9)$$

Это уравнение показывает, что при чистом кручении в сечении вала возникают касательные напряжения, прямо пропорциональные крутящему моменту и радиусу, где они определяются, и обратно пропорциональные полярному моменту инерции

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}, \quad (10.10)$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления вала ( $W_p = \frac{I_p}{r}$ , где  $r$  – радиус сечения вала).

#### 10.4. Потенциальная энергия упругой деформации при кручении

При кручении внешние моменты, приложенные к валу, совершают работу вследствие поворота сечений, к которым они приложены. Эта работа расходуется на создание запаса потенциальной энергии деформации, численно равной работе внутренних сил.

Согласно закону Гука, в пределах упругих деформаций угол закручивания растет пропорционально крутящему моменту. Поэтому зависимость крутящего момента от угла закручивания представляет собой прямую  $OA$ , изображенную на рис. 10.8.

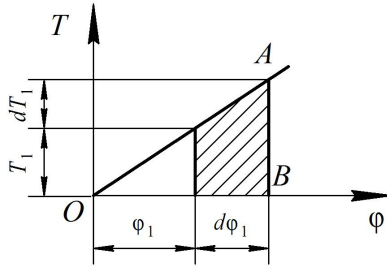


Рис. 10.8. Схема для определения потенциальной энергии деформации при кручении

Пусть угол  $\varphi_1$  соответствует промежуточному значению момента  $T_1$ . Увеличим момент на бесконечно малую величину  $dT_1$ . Тогда угол закручивания получит приращение  $d\varphi_1$ .

Произведенная работа равна площади заштрихованной трапеции и находится по формуле

$$dU = \frac{T_1 + dT_1 + T_1}{2} d\varphi_1 = \left( T_1 + \frac{dT_1}{2} \right) d\varphi. \quad (10.11)$$

Тогда полная работа деформации при возрастании крутящего момента от 0 до  $T$  равна накопленной потенциальной энергии  $U$  и определяется площадью треугольника  $OAB$ :

$$U = \frac{T\varphi}{2}. \quad (10.12)$$

Подставим в полученную формулу значение угла закручивания, получим

$$U = \frac{T\varphi}{2} = \frac{T^2 l}{2GI_p}, \quad (10.13)$$

где  $G$  – модуль сдвига;

$I_p$  – полярный момент инерции сечения;

$l$  – длина вала.

Выразим потенциальную энергию через деформацию. В формулу для определения накопленной потенциальной энергии  $U$  подставим зависимость крутящего момента от угла закручивания:

$$T = \frac{\varphi GI_p}{l}, \quad (10.14)$$

тогда

$$U = \frac{\varphi^2 G^2 I_p^2 l}{2Gl^2 I_p} = \frac{\varphi^2 GI_p}{2l}. \quad (10.15)$$

### 10.5. Условия прочности и жесткости при кручении. Допускаемые напряжения

Произведем расчет валов на прочность и жесткость при кручении. Используя формулу для максимальных касательных напряжений, можем записать *условие прочности при кручении* в следующем виде:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau], \quad (10.16)$$

где  $[\tau]$  – предельное допускаемое напряжение.

При практических расчетах, определяя предельные допускаемые напряжения для различных материалов, используют зависимость между напряжениями при растяжении и напряжениями при кручении, которая для стали и чугуна имеет следующий вид:

для стали –  $[\tau] = 0,55 \dots 0,6 [\sigma_p]$ ;

для чугуна –  $[\tau] = 1,0 \dots 1,2 [\sigma_p]$

(здесь  $[\sigma_p]$  – справочная или определяемая величина, (предельное допустимое напряжение растяжения) характеризующая материал бруса (вала)).

Из этого неравенства определяется полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{T}{[\tau]}. \quad (10.17)$$

Для вала круглого поперечного сечения имеем

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad W_p = \frac{2I_p}{d} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Подставим выражение  $W_p$  в условие прочности при кручении и, решая данное уравнение относительно диаметра, получим следующую расчетную формулу:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}}. \quad (10.18)$$

Расчетное значение диаметра округляем до ближайшего большего значения из ряда линейных размеров.

Если выбрать значение  $d$  несколько меньше *расчетного диаметра*, то необходимо выполнить проверочный расчет и убедиться, что перегрузка вала меньше 5 %, то есть выполнить последовательно следующий расчет

$$W_p = \frac{\pi d_m^3}{16}; \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}; \quad \Delta = \frac{\tau_{\max} - [\tau]}{[\tau]} 100 \% < 5 \%,$$

где  $d_m$  – диаметр вала несколько меньше расчетного.

Из схемы распределения касательных напряжений (рис. 10.7) следует, что материал вала вблизи оси используется нерационально. С точки зрения экономии металла и снижения веса конструкции следует выбирать вал пустотелый, поперечное сечение которого имеет форму кольца (рис. 10.9).

Обозначим через  $d_{\text{вн}}$  внутренний диаметр кольца,  $d_{\text{н}}$  – наружный диаметр,  $c = \frac{d_{\text{вн}}}{d_{\text{н}}}$  – отношение диаметров.

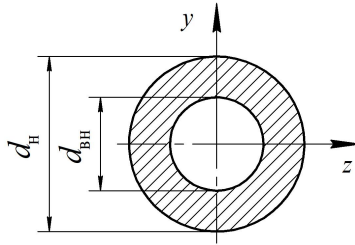


Рис. 10.9. Схема пустотелого вала

Определим геометрические характеристики кольцевого сечения вала, а именно: полярный момент инерции сечения  $I_p$  и полярный момент сопротивления сечения  $W_p$ :

$$I_p = \frac{\pi}{32} (d_n^4 - d_{vn}^4) = \frac{\pi d_n^4}{32} (1 - c^4);$$

$$W_p = \frac{2I_p}{d_n} = \frac{\pi d_n^3}{16} (1 - c^4).$$

Из условия прочности при кручении определим значение  $d_n$ :

$$d_n \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau](1 - c^4)}}.$$

Расчетное значение  $d_n$  округляется до ближайших нормальных значений  $d_{нвн}$  и  $d_{нн}$ , определяемых по ГОСТу 6636–86 (табл. А.5), и затем выполняется проверочный расчет:

$$I_p = \frac{\pi}{32} (d_{нн}^4 - d_{нвн}^4); \quad W_p = \frac{2I_p}{d_n};$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}; \quad \Delta = \frac{\tau_{\max} - [\tau]}{[\tau]} 100 \% < 5 \%.$$

Кроме требования прочности к валам предъявляются требования жесткости, которые заключается в том, что угол закручивания

участка вала длиной 1 м не должен превышать предельной величины, определяемой требованиями конструкции. *Допускаемый угол закручивания* 1 м длины вала задается в градусах и обозначается  $[\theta]$ .

Условие жесткости вала представим в следующем виде:

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \leq [\theta]. \quad (10.19)$$

Значения  $[\theta]$  зависит от условия работы вала и задается в градусах на длину вала. При статической нагрузке принимают

$$[\theta] = 0,3^\circ \frac{\pi}{180^\circ \cdot 100} = \frac{\pi}{6} 10^{-4} \frac{\text{рад}}{\text{см}}.$$

В реальных механизмах обычно допускаются углы закручивания валов в пределах  $[\theta] = 0,25 \dots 1$  град./м.

Если при проверочном расчете не выполняется условие прочности, то диаметр вала необходимо подбирать из условия жесткости

$$I_p \geq \frac{T}{G[\theta]}. \quad (10.20)$$

Для сплошного вала

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32T}{G\pi[\tau]}}.$$

Для вала кольцевого сечения с заданным соотношением диаметров

$$\frac{d_{\text{вн}}}{d_{\text{н}}} = c, \quad I_p = \frac{\pi d_{\text{н}}^4}{32} (1 - c^4);$$

$$d_{\text{н}} \geq \sqrt[4]{\frac{32T}{G(1 - c^4)\pi[\tau]}}, \quad d_{\text{вн}} = cd_{\text{н}}. \quad (10.21)$$



## 10.6. Расчет валов по заданной мощности и частоте вращения

На практике часто требуется рассчитать диаметр вала, когда известна мощность  $N$ , кВт, передаваемая валом, и частота вращения  $n$ , мин<sup>-1</sup>. Расчетная схема показана на рис. 10.10.

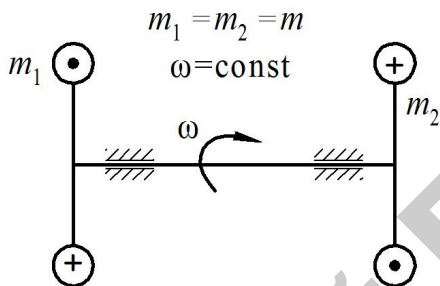


Рис. 10.10. Расчетная схема кручения вала

Как известно, мощность  $N = m\omega 10^{-3}$ ,

где  $N$  – передаваемая мощность, кВт;

$\omega$  – угловая скорость вращения вала, рад/с. Так как  $\omega = \frac{\pi n}{30}$ , то

крутящий момент  $T$  в сечениях вала, равный вращающему моменту  $m$ , определяется по формуле

$$T = m = \frac{N 10^3}{\omega} = \frac{30 N 10^3}{\pi n} = 9550 \frac{N}{n} \text{ Нм} = 9\,550\,000 \frac{N}{n} \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

Из условия прочности согласно условия прочности (10.20) и подставляя значение  $W_p$ , находим диаметр вала, мм

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 9\,550\,000 N}{3,1415 [\tau] n}} = 365 \sqrt[3]{\frac{N}{[\tau] n}}. \quad (10.22)$$

В формулу (10.22)  $N$  подставляется в кВт;  $n$  в мин<sup>-1</sup>;  $[\tau]$  в Н/мм<sup>2</sup>.

## 10.7. Статически неопределимые задачи при кручении

Как известно, статически неопределимыми называют задачи, в которых число неизвестных опорных реакций или число внутренних усилий превышает число возможных уравнений статики. Один из методов решения статически неопределимых задач сводится к следующему:

- а) составляются все возможные в данной задаче уравнения статики;
- б) представляется картина деформации, происходящей в данной конструкции, и записываются деформационные уравнения, число которых должно быть равно степени статической неопределимости задачи;
- в) решается совместная система уравнений статики и деформационных уравнений.

### Контрольные вопросы

1. Какой вид нагружения называется кручением?
2. Что называется валом? Что такое крутящий момент?
3. Какие деформации возникают при кручении?
4. Какие ВСФ возникают при кручении?
5. Выведите формулу для определения напряжений в поперечном сечении скручиваемого круглого вала.
6. Выведите формулы для определения относительного и полного углов закручивания круглого вала.
7. Что такое эпюра крутящего момента и как она строится?
8. Как распределяется касательное напряжение при кручении? Чему равно напряжение в центре круглого поперечного сечения?
9. Напишите формулу для расчета напряжения на поверхности вала при кручении. Как изменится напряжение, если диаметр вала увеличится в два раза?
10. В чем заключается расчет на прочность при кручении?
11. В чем заключается расчет на жесткость при кручении?
12. Почему при одинаковой прочности и жесткости вал кольцевого поперечного сечения легче, чем вал сплошного круглого сечения?
13. Как вычислить потенциальную энергию деформации, накапливаемую валом при кручении?
14. В чем заключается расчет валов по заданной мощности и числу оборотов?

## 11. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

До сих пор мы изучали простые виды нагружения элементов конструкции: осевое растяжение или сжатие, сдвиг, поперечный и чистый изгибы, кручение. Однако элементы, из которых состоит конструкция, нередко подвергаются воздействию сил, вызывающих в них одновременно растяжение с изгибом, или сжатие с изгибом, или какое-либо другое сложное нагружение.

Например, деформации растяжения и кручения испытывают болты и крепежные винты при затяжке; деформациям сжатия и кручения подвергаются винты домкрата, сверла, шпиндели станков; на сдвиг и кручение работают все цилиндрические винтовые пружины. Многие узлы и детали металлорежущих станков работают в условиях изгиба и кручения, например, оправка горизонтально-фрезерного станка, укрепленная на двух опорах и подвергаемая одновременно изгибу от силы резания на фрезе и кручению от передачи вращательного момента. Изгиб и кручение испытывают валы редукторов и коробок передачи, при этом изгиб может возникать как в одной, так и в нескольких плоскостях. Многие элементы конструкций работают в условиях растяжения или сжатия и изгиба (частный случай – внецентренное растяжение и сжатие). Элементы пространственных конструкций часто испытывают комбинацию всех деформаций: растяжение и сжатие, сдвиг, изгиб в двух плоскостях, кручение.

*Под сложным нагружением* подразумевают различные комбинации простейших деформаций. При этом наибольший практический интерес представляют собой сочетания следующих простейших видов сопротивления: косоугольный изгиб, внецентренное растяжение и сжатие, изгиб с кручением, изгиб с растяжением и сжатием, пространственный изгиб и т. д.

Таким образом, сложным нагружением является такой вид нагружения, когда в поперечных сечениях элемента конструкции действуют одновременно не менее двух ВСФ.

Исключением является поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя в сечениях возникает изгибающий момент и поперечная сила. Это связано с тем, что в большинстве случаев расчеты на прочность и жесткость проводятся без учета влияния поперечной силы.

Случаи сложного нагружения можно условно разделить на две группы.

К первой группе относятся такие случаи сложного нагружения, когда в опасных точках бруса напряженное состояние является одноосным. В эту группу относят кривой изгиб (рис. 11.1, *a*), изгиб с растяжением (рис. 11, *б*), внецентренное растяжение и сжатие (рис. 11.1, *в*) пространственный изгиб и др.

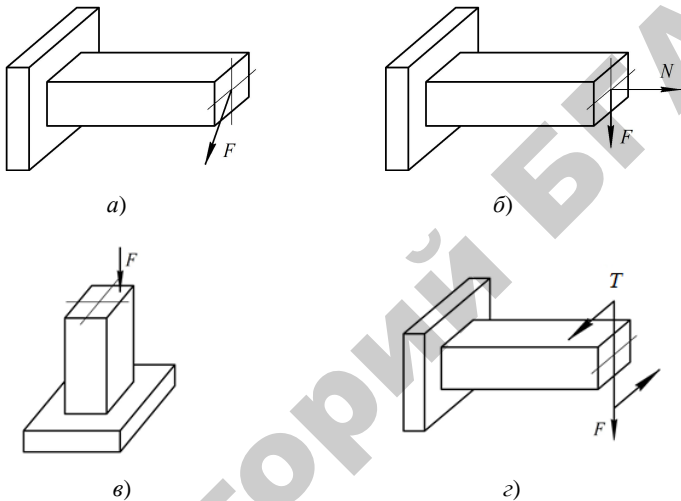


Рис. 11.1. Случаи сложного нагружения

Ко второй группе относятся такие случаи сложного нагружения, когда напряженное состояние является плоским. Например, изгиб с кручением (рис. 11.1, *г*).

Для случаев нагружения, относящихся к первой группе, в отличие от случаев второй группы, нет необходимости в применении гипотез прочности.

Задачи сложного нагружения на основании гипотезы о независимости действия сил решаются суммированием напряженных состояний, вызванных каждым видом простого нагружения в отдельности. Суммарные деформации находятся аналогично – сложением деформаций, возникающих от различных компонентов нагрузки. Следует иметь в виду, что принцип суммирования действия сил, или принцип суперпозиции, применим во всех случаях, когда деформации малы и материал подчиняется закону Гука.

Методика решения задач сложного нагружения заключается в том, что сначала, пользуясь методом сечений, находят усилия в поперечных сечениях стержня, строят эпюры, определяют общую картину распределения усилий по длине стержня и находят положение наиболее напряженного сечения. Далее в этом сечении вычисляют нормальные и касательные напряжения от каждого усилия в отдельности и, исследуя их распределение, находят опасную точку, в которой суммарные напряжения достигают наибольшей величины. Для этой точки в зависимости от вида напряженного состояния проверяются условия прочности и жесткости для материала элемента конструкции.

### 11.1. Косой изгиб, основные понятия

*Косым* называют такой вид изгиба, при котором все внешние нагрузки, вызывающие изгиб, действуют в одной силовой плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей.

Возникающее при косом изгибе напряженно-деформированное состояние проиллюстрируем на примере консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой  $F$  (рис. 11.2). Косой изгиб удобнее всего рассматривать как одновременный изгиб бруса в двух главных плоскостях  $yz$  и  $xz$ . Для наглядности рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, возьмем произвольное ее сечение на расстоянии  $l$  от конца консоли.

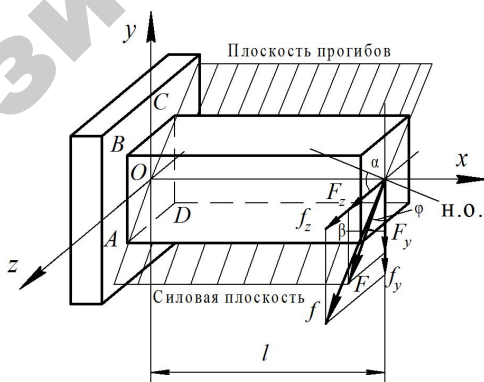


Рис. 11.2. Расчетная схема к косому изгибу

Внешняя сила  $F$  приложена под углом  $\varphi$  к оси  $y$ . Разложим силу  $F$  на составляющие, лежащие в главных плоскостях бруса, тогда

$$F_z = F \sin \varphi;$$

$$F_y = F \cos \varphi.$$

Изгибающие моменты в произвольном сечении, взятом на расстоянии  $x$  от свободного конца, будут равны

$$M_z = F_y x = Fx \cos \varphi;$$

$$M_y = F_z x = Fx \sin \varphi.$$

Таким образом, в каждом сечении бруса одновременно действуют два изгибающих момента, которые создают изгиб в главных плоскостях. Поэтому косоугольный изгиб можно рассматривать как частный случай пространственного изгиба.

### **11.1.1. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса. Нейтральная ось**

Нормальные напряжения в поперечном сечении бруса при косоугольном изгибе определяются по формуле

$$\sigma = \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y} = \pm Fz \left( \frac{y \cos \varphi}{I_z} + \frac{z \sin \varphi}{I_y} \right). \quad (11.1)$$

Для нахождения наибольших растягивающих и сжимающих нормальных напряжений при косоугольном изгибе необходимо выбрать опасное сечение бруса.

Если изгибающие моменты  $|M_z|$  и  $|M_y|$  достигают наибольших значений в некотором сечении, то это и есть опасное сечение.

Таким образом

$$|M_z|_{\max} = M_z^{\text{оп}}; \quad |M_y|_{\max} = M_y^{\text{оп}}.$$

К опасным сечениям относятся также сечения, где изгибающие моменты  $|M_z|$  и  $|M_y|$  одновременно достигают достаточно больших значений. Поэтому при косом изгибе может быть несколько опасных сечений.

В общем случае, когда  $I_z \neq I_y$ ,  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$  – несимметричное сечение, то есть нейтральная ось не перпендикулярна силовой плоскости. Для симметричных сечений косой изгиб невозможен.

Положение нейтральной оси (геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю) при косом изгибе определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{I_z}{I_y} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{I_z}{I_y}; \quad (11.2)$$

тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \varphi \frac{I_z}{I_y}, \quad (11.3)$$

где  $\alpha$  – угол наклона нейтральной оси к оси  $z$ ;

$\varphi$  – угол наклона силовой плоскости к оси  $y$  (рис. 11.2).

В опасном сечении бруса (в заделке, рис. 11.2) напряжения в угловых точках определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{F_y l}{W_z} - \frac{F_z l}{W_y}; \\ \sigma_B &= \frac{F_y l}{W_z} - \frac{F_z l}{W_y}; \\ \sigma_C &= \frac{F_y l}{W_z} + \frac{F_z l}{W_y}; \\ \sigma_D &= -\frac{F_y l}{W_z} + \frac{F_z l}{W_y}. \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

### 11.1.2. Условия прочности при косом изгибе. Определение размеров и перемещений поперечного сечения бруса

При косом изгибе нейтральная ось делит сечение бруса на две зоны – зону растяжения и зону сжатия. Для прямоугольного сечения эти зоны показаны на рис. 11.3.

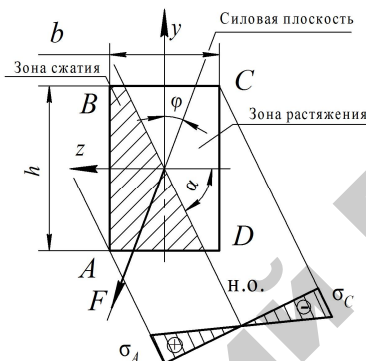


Рис. 11.3. Схема сечения защемленного бруса при косом изгибе

Для определения экстремальных растягивающих и сжимающих напряжений необходимо провести касательные к сечению в зонах растяжения и сжатия, параллельные нейтральной оси (рис. 11.3).

Наиболее удаленные от нейтральной оси точки касания  $A$  и  $C$  – опасные точки в зонах сжатия и растяжения соответственно.

Для пластичных материалов, когда расчетные сопротивления материала бруса при растяжении и сжатии равны между собой, то есть  $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$ , в опасном сечении определяется  $|\sigma|_{\max}$  и условие прочности можно представить в виде

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma]. \quad (11.5)$$

Для симметричных сечений (прямоугольник, двутавровое сечение) условие прочности имеет следующий вид:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_z^{\text{оп}}|}{W_z} + \frac{|M_y^{\text{оп}}|}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (11.6)$$



Из условия прочности вытекает три вида расчетов:

- проверочный;
- проектировочный – определение геометрических размеров сечения;
- определение несущей способности бруса (допускаемой нагрузки).

Если известно соотношение между сторонами поперечного сечения, например, для прямоугольника  $h = 2b$ , то из условия прочности заземленного бруса можно определить параметры  $b$  и  $h$  следующим образом:

$$6Fz \left( \frac{1}{bh^2} + \frac{1}{hb^2} \right) \leq [\sigma],$$

или

$$6Fz \left( \frac{1}{b(2b)^2} + \frac{1}{(2b)b^2} \right) \leq [\sigma],$$

далее

$$6Fz \left( \frac{1}{4b^3} + \frac{1}{2b^3} \right) \leq [\sigma],$$

Окончательно

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{9Fz}{2[\sigma]}}. \quad (11.7)$$

Аналогичным образом определяются параметры любого сечения. Полное перемещение сечения бруса при косом изгибе с учетом принципа независимости действия сил определяется как геометрическая сумма перемещений в главных плоскостях.

Определим перемещение свободного конца бруса. Воспользуемся способом Верещагина. Вертикальное перемещение находим перемножением эпюр (рис. 11.4) по формуле

$$f_y = \frac{1}{EI_z} \omega_y y_{ц.т.} = \frac{1}{EI_z} \frac{F_y}{2} l^2 \frac{2}{3} l = \frac{F_y l^3}{3EI_z}. \quad (11.8)$$

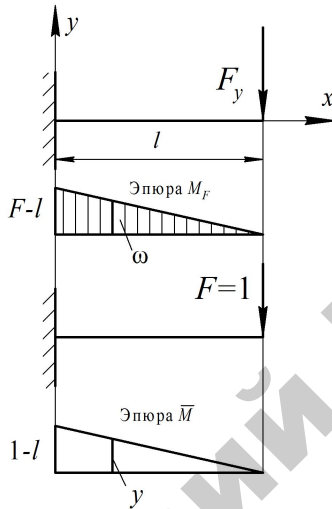


Рис. 11.4. Схема для определения полного перемещения при косом изгибе

Аналогично определим горизонтальное перемещение:

$$f_z = \frac{F_z l^3}{3EI_y}. \quad (11.9)$$

Тогда полное перемещение определим по формуле

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}. \quad (11.10)$$

Направление полного перемещения определяется углом  $\beta$  (рис. 11.5):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{F_y}{F_z} \frac{I_z}{I_y} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \frac{I_z}{I_y} = \operatorname{tg} \varphi \frac{I_z}{I_y}. \quad (11.11)$$

Полученная формула идентична формуле для определения положения нейтральной оси сечения бруса. Это позволяет сделать вывод, что  $\alpha = \beta$ , то есть направление прогиба перпендикулярно нейтральной оси. Следовательно, плоскость прогибов не совпадает с плоскостью нагружения.

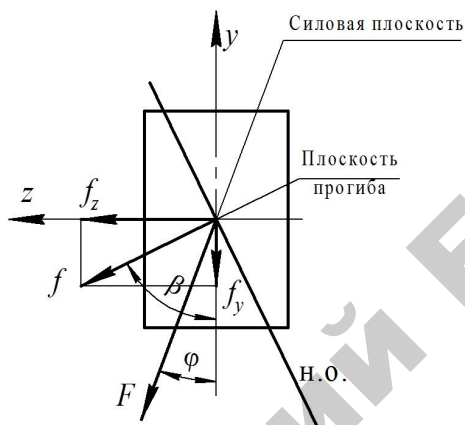


Рис. 11.5. Схема для определения плоскости прогиба при косом изгибе

Угол отклонения плоскости прогиба  $\beta$  от главной оси  $y$  будет тем большим, чем большим будет перемещение. Поэтому для бруса с упругим сечением, у которого отношение  $\frac{I_z}{I_y}$  велико, косой изгиб опасен, так как вызывает большие прогибы и напряжения в плоскости наименьшей жесткости. Для бруса, у которого  $I_z = I_y$ , суммарный прогиб лежит в силовой плоскости и косой изгиб невозможен.

## 11.2. Внецентренное растяжение и сжатие бруса.

### Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса

*Внецентренным растяжением или сжатием* называется такой вид деформации, при котором растягивающая или сжимающая сила параллельна продольной оси бруса, но точка ее приложения не совпадает с центром тяжести поперечного сечения.

Такой тип задач часто применяется в строительстве при расчете колонн зданий. Рассмотрим внецентренное сжатие бруса. Обозначим координаты точки приложения силы  $F$  через  $z_F$  и  $y_F$ , а главные оси поперечного сечения – через  $z$  и  $y$ . Ось  $x$  направим таким образом, чтобы координаты  $z_F$  и  $y_F$  были положительными (рис. 11.6, а).

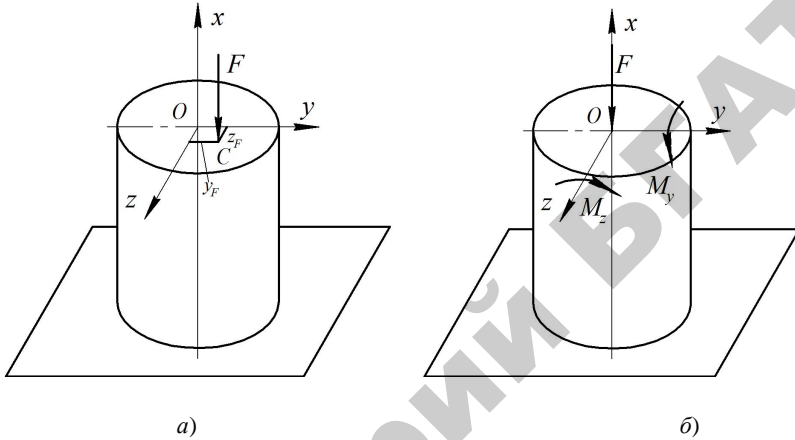


Рис. 11.6. Схема бруса при внецентренном сжатии

Используя правило параллельного переноса силы  $F$  (метод Пуансо) из точки  $C$  в центр тяжести сечения  $O$ , внецентренное сжатие можно представить как сумму трех простых деформаций: сжатия и двух прямых изгибов в двух плоскостях (рис. 11.6, б). При этом имеем продольную силу  $F$  и два изгибающих момента  $M_y$  и  $M_z$ :

$$M_y = Fz_F, \quad M_z = Fy_F.$$

Нормальные напряжения в произвольной точке сечения при внецентренном сжатии, лежащей в первом квадранте, с координатами  $y$  и  $z$  можно найти исходя из принципа независимости действия сил

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z}.$$

Тогда

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F A}{I_y} z + \frac{y_F A}{I_z} y \right). \quad (11.12)$$

Так как  $\frac{I_y}{A} = i_y^2$ ,  $\frac{I_z}{A} = i_z^2$  – квадраты радиусов инерции сечения, то

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F}{i_y^2} z + \frac{y_F}{i_z^2} y \right), \quad (11.13)$$

где  $z$  и  $y$  – координаты точки сечения, в которой определяется напряжение.

При определении напряжений необходимо учитывать знаки координат как точки приложения внешней силы, так и точки, где определяется напряжение.

В формулу (11.13) все величины подставляются со своими знаками: растягивающая сила  $F$  – со знаком плюс, сжимающая со знаком минус, координаты  $z_F, y_F$ , и  $z, y$  – с соответствующими своими знаками.

### 11.2.1. Нейтральная ось, ее уравнение и свойства.

#### Условия прочности

Обозначим координаты точек нейтральной оси через  $z_0$  и  $y_0$ . Так как в точках нейтральной оси  $\sigma = 0$ , то приравняем правую часть уравнения для определения нормальных напряжений к нулю.

С учетом того, что  $\frac{F}{A} \neq 0$ , получим:

$$1 + \frac{z_F}{i_y^2} z_0 + \frac{y_F}{i_z^2} y_0 = 0. \quad (11.14)$$

Это уравнение прямой, не проходящей через начало координат. Определим отрезки  $a_z$  и  $a_y$ , отсекаемые нейтральной осью на координатных осях (рис. 11.7).

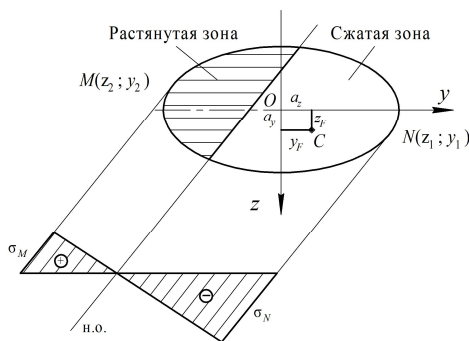


Рис. 11.7. Схема для определения отрезков, отсекаемых нейтральной осью на осях координат

Для этого в уравнении нейтральной оси сначала приравняем к нулю  $y_0$ .

При  $y_0 = 0$  получим следующее выражение

$$1 + \frac{z_F}{i_y^2} a_z = 0,$$

откуда

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}.$$

Аналогично при  $z_0 = 0$ , имеем

$$1 + \frac{y_F}{i_z^2} a_y = 0,$$

далее

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}.$$

Знак «минус» в данных формулах указывает на то, что точка приложения силы  $C$  и нейтральная ось всегда расположены по разные стороны от центра тяжести сечения (рис. 11.8, а, б).

Положение нейтральной оси зависит от координат точки приложения нагрузки: чем ближе сила приложена к центру тяжести сечения, тем дальше от него расположена нейтральная ось.

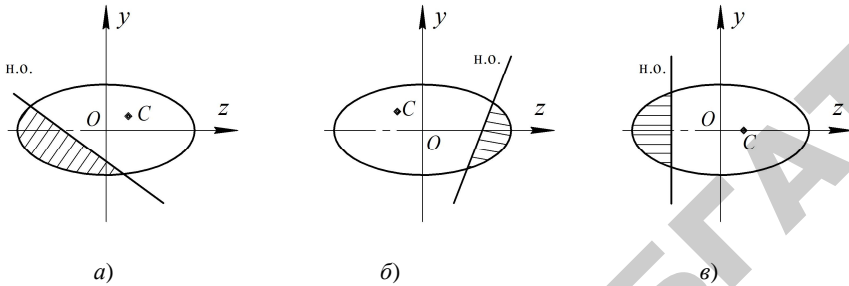


Рис. 11.8. Схема для определения положения нейтральной оси

Если сила  $F$  приложена в точке, лежащей на оси  $z$  ( $y_F = 0$ ), то нейтральная ось будет параллельна оси  $y$  (рис. 11.8, в), так как

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F} = -\frac{i_z^2}{0} = -\infty.$$

Аналогично и для другой оси.

Нейтральная ось делит сечение на две зоны – сжатую и растянутую. Напряжения в точках сечения линейно зависят от расстояния до нейтральной оси. Проведем касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной оси, получим точки  $M$  и  $N$  (см. рис. 11.7). В этих точках возникают максимальные напряжения растяжения и сжатия соответственно. Если материал бруса неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию (чугун, бетон, каменная кладка), то необходимо составить два условия прочности:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_N &= -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F}{i_y^2} z_1 + \frac{y_F}{i_z^2} y_1 \right) \leq [\sigma_c]; \\ \sigma_N &= -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F}{i_y^2} z_2 + \frac{y_F}{i_z^2} y_2 \right) \leq [\sigma_p]. \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

Для определения положения опасных точек в сечении следует параллельно нейтральной оси провести линии, касающиеся контура сечения. Таким путем находят точки сечения, расположенные по обе стороны от нейтральной оси и наиболее удаленные от нее, которые и могут быть опасными.

При пластичном материале для проверки прочности достаточно определить напряжения в одной точке сечения – в точке с наибольшим по абсолютной величине нормальным напряжением. При хрупком материале необходимо определить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения, то есть найти напряжения в двух точках (за исключением тех случаев, когда в сечении действуют напряжения одного знака).

### ***11.2.2. Понятие о ядре сечения при внецентренном растяжении и сжатии***

Нейтральная ось в общем случае может проходить через сечение, касаться сечения или находиться за его пределами.

Например, если сила  $F$  приложена в центре тяжести сечения, то нейтральная ось проходит в бесконечности и нормальные напряжения в этом случае распределяются равномерно по сечению (центральное растяжение-сжатие).

В некоторых случаях необходимо установить возможные положения сжимающей силы, при которых напряжения во всех точках поперечного сечения будут одного знака. Простейший пример представляет бетонная колонна, на которую опирается балка перекрытия. Так как бетон хорошо работает на сжатие и плохо работает на растяжение, то необходимо приложить внешнюю нагрузку таким образом, чтобы во всех точках сечения возникали только сжимающие напряжения. Следовательно, нейтральная ось в данном случае должна проходить вне сечения или только касаться его.

Область вокруг центра тяжести сечения, характерная тем, что всякая продольная сила, расположенная внутри или по границе этой области, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака, называется *ядром сечения*. Если силу



приложить на границе ядра сечения, то нейтральная ось будет касательной к контуру сечения.

Для построения ядра сечения необходимо рассмотреть различные положения касательных к контуру сечения, предполагая, что они представляют собой нейтральные линии, и найти координаты граничных точек ядра сечения, а затем по этим точкам построить ядро сечения.

Координаты границ ядра сечения можно определить по формулам

$$y_{\text{я}} = \frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_{\text{я}} = \frac{i_y^2}{a_z}. \quad (11.16)$$

### 11.3. Изгиб с кручением вала круглого поперечного сечения

Совместное действие изгиба и кручения является характерным случаем нагружения валов круглого поперечного сечения, которые являются составной частью редукторов, коробок переменных передач, тормозных устройств и т. п.

Силы, действующие на валы (усилия на зубьях шестерен, натяжение ремней шкивов ременных передач, собственный вес валов и шкивов и т. п.) вызывают в поперечном сечении следующие ВСФ:  $T, Q_z, Q_y, M_z, M_y$ .

Следовательно, в любом поперечном сечении вала возникают напряжения:

$$\tau_{\text{кр}} - \text{от } T;$$

$$\tau_Q - \text{от } Q;$$

$$\sigma - \text{от } M_{\text{и}}.$$

На практике обычно применяются валы круглого поперечного сечения, для которых невозможен кривой изгиб. Поэтому в общем случае при действии внешних сил вал круглого поперечного сечения испытывает действие прямого поперечного изгиба и кручения. Действием продольных сил  $N$  пренебрегаем.

Расчет вала с несколькими шкивами для ременной передачи или зубчатыми колесами начинается с определения величины крутящих моментов, передаваемых на вал по заданной мощности  $N$  (кВт) и числу оборотов вала  $n$  (об/мин). Для определения крутящего момента (кНм) воспользуемся формулой

$$T = 9,55 \frac{N}{n}. \quad (11.17)$$

После определения крутящих моментов, используя метод сечений, строим их эпюру. Построение эпюры крутящих моментов производят, двигаясь от одного конца вала к другому, например, слева направо. При этом следует учитывать, что внутренний крутящий момент в любом сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов по одну сторону от рассматриваемого сечения. Будем считать крутящий момент положительным, если со стороны нормали к отсеченной части вала внешний вращающий момент, действующий на эту часть, направлен по ходу часовой стрелки, и отрицательным – если против часовой стрелки.

Далее определяем окружные усилия, действующие на шкивы (зубчатые колеса). При этом вес шкивов и зубчатых колес не учитываем.

Силы, которые передаются на вал через шкивы, действуют под определенными углами наклона к горизонтальной оси, проходящей через центр вращения шкива. Каждая из них может быть разложена на две составляющие – горизонтальную и вертикальную. Для ременных передач принимают, что натяжение набегающей ветви ремня равно  $t$ , а натяжение сбегающей –  $2t$ .

Следовательно, крутящий момент (кНм), передаваемый шкивом, будет равен

$$T = \frac{Dt}{2}, \quad (11.18)$$

где  $t$  – разность натяжений сбегающей и набегающей ветвей ремня, кН;

$D$  – диаметр шкива, м.

Отсюда натяжение набегающей ветви ремня можно определить по формуле

$$t = \frac{2T}{D}. \quad (11.19)$$

Считаем, что набегающая и сбегающая ветви на шкивах параллельны. Тогда вал в сечениях, где посажены шкивы, будет нагружен силами  $F = 3t$  (рис. 11.9).

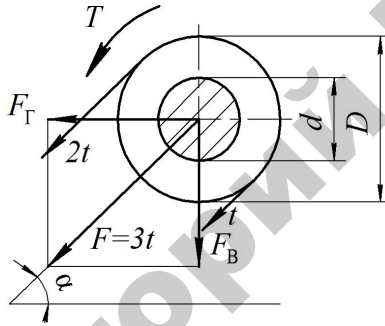


Рис. 11.9. Расчетная схема вала для определения окружных усилий на шкиве

Силы, изгибающие вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях, определяются по формулам

$$F_B = F \sin \alpha;$$

$$F_G = F \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол наклона ветвей ремня к горизонту.

На расчетной схеме (рис. 11.10) показаны усилия, действующие на зубья колес: окружные –  $F_t$ , радиальные –  $F_r$ , осевые –  $F_a$ .

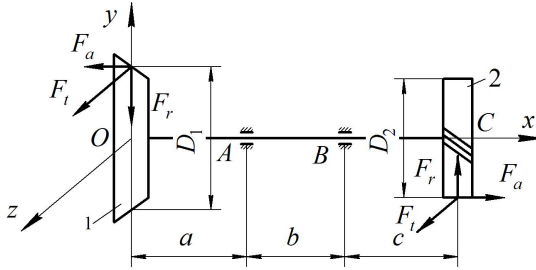


Рис. 11.10. Расчетная схема вала для определения усилий на зубчатых колесах

Силы, которые передаются на вал через зубчатые колеса, определяются по следующим формулам:

– для всех колес окружные усилия

$$F_{ti} = \frac{2T}{D_i}; \quad (11.20)$$

– для цилиндрического зубчатого колеса

$$F_{ri} = F_{ti} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}; \quad (11.21)$$

$$F_{ai} = F_{ti} \operatorname{tg} \beta; \quad (11.22)$$

– для конического зубчатого колеса

$$\left. \begin{aligned} F_{ri} &= F_{ti} \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_i; \\ F_{ai} &= F_{ti} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_i; \end{aligned} \right\} \quad (11.23)$$

где  $F_{ti}$  – окружная сила на  $i$ -м колесе, перпендикулярная оси вала и направленная по касательной к окружности вала диаметром  $D_i$ , кН;

$F_{ri}$  – радиальная сила на  $i$ -м колесе, перпендикулярная оси вала и пересекающая ее, кН;

$F_{ai}$  – осевая сила на  $i$ -м колесе, параллельная оси вала, кН;

$\alpha$  – угол зацепления;

$\beta$  – угол наклона линии зуба;  
 $\delta$  – угол делительного конуса.

После определения сил, действующих на вал перпендикулярно его оси, строим эпюры изгибающих моментов, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях. При этом вал рассматривается как простая статически определимая балка на двух опорах.

В вертикальной плоскости линии действия радиальных сил  $F_{ri}$  остаются неизменными. При переносе на ось вала осевых сил  $F_{ai}$  необходимо добавить изгибающие моменты, которые определяются по формуле

$$M_{ai} = F_{ai} \frac{D_i}{2}. \quad (11.24)$$

По отношению к осям  $y$  и  $z$  направления радиальных и осевых сил, а также моментов  $M_{ai}$  в вертикальной плоскости должны соответствовать тем направлениям, которые они имеют на схеме вала. То же самое касается и окружных сил  $F_{ti}$ , действующих в горизонтальной плоскости.

Эпюры изгибающих моментов  $M_{и}^B$  и  $M_{и}^Г$  от сил, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях, строим на основании общей схемы построения эпюр изгибающих моментов для однопролетной балки методом сечений.

Суммарный изгибающий момент  $M_{и}$  в любом сечении вала определяется по формуле

$$M_{и} = \sqrt{(M_{и}^B)^2 + (M_{и}^Г)^2}. \quad (11.25)$$

Вычисляя в характерных сечениях значения  $M_{и}$ , строим эпюру суммарных изгибающих момента для вала.

Суммарная эпюра моментов будет прямолинейной на тех участках вала, где  $M_{и}^B$  и  $M_{и}^Г$  по абсолютной величине одновременно убывают или одновременно возрастают. На тех участках, где  $M_{и}^B$  возрастает, а  $M_{и}^Г$  убывает (или наоборот,  $M_{и}^B$  убывает,  $M_{и}^Г$  возрастает) эпюра суммарных моментов будет криволинейной.

### **11.3.1. Определение положения опасного сечения и диаметра вала с использованием третьей и четвертой теорий прочности**

По эпюрам  $T$  и  $M_n$  находим опасное сечение и определяем максимальный расчетный момент.

Опасным сечением вала следует считать то, где суммарный изгибающий и крутящий моменты одновременно имеют большое значение.

В тех случаях, когда  $T$  и  $M_n$  имеют большое значение в разных сечениях, необходимо в каждом из сечений подсчитать величину расчетного момента и принять для дальнейшего расчета наибольшее из полученных значений.

Материал вала находится в условиях плоского напряженного состояния, которое создается нормальными напряжениями изгиба и касательными напряжениями кручения. Поэтому величину расчетного момента определяем по одной из принятых теорий прочности. Значения расчетных моментов для стальных валов определяем по следующим формулам:

по третьей теории прочности

$$M_p = \sqrt{M_n^2 + T^2}; \quad (11.26)$$

по четвертой теории прочности

$$M_p = \sqrt{M_n^2 + 0,75T^2}. \quad (11.27)$$

Расчетный момент для вала из хрупкого материала (дерево, чугун) определяем по второй теории прочности:

$$M_p = 0,35M_n + 0,65\sqrt{M_n^2 + T^2}; \quad (11.28)$$

где  $M_n$  и  $T$  – суммарный изгибающий и крутящий моменты в опасном сечении вала соответственно.

Если известны величина расчетного момента  $M_p$  (кНсм) и допускаемое напряжение  $[\sigma]$  (кН/см<sup>2</sup>), то из условия прочности можно найти диаметр вала по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_p}{W} \leq [\sigma], \quad (11.29)$$

где  $W = \frac{pd^3}{32} \approx 0,1d^3$  – осевой момент сопротивления вала, см<sup>3</sup>.

Таким образом, необходимый диаметр вала рассчитывается по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_p}{0,1[\sigma]}}. \quad (11.30)$$

Полученный диаметр вала следует округлить до ближайшего стандартного значения линейного ряда размеров.

Размеры кольцевого сечения вала определяются из условия прочности аналогичным образом

$$W \approx 0,1d^3(1-c^4), \quad (11.31)$$

где  $c$  – отношение внутреннего диаметра вала к наружному.

С учетом последнего выражения определим диаметр вала по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_p}{0,1(1-c^4)[\sigma]}}. \quad (11.32)$$

### Контрольные вопросы

1. Какой изгиб называется косым?
2. По каким формулам определяются нормальные напряжения при косом изгибе?
3. Как находится положение нейтральной оси при косом изгибе?
4. Что представляют собой опасные точки в сечении и как определяется их положение при косом изгибе?

5. Как определяются перемещения точек оси при косом изгибе?
6. Какой вид нагружения называется внецентренным растяжением (сжатием)?
7. Как определяются нормальные напряжения при внецентренном растяжении (сжатии)?
9. Чему равняется нормальное напряжение в центре тяжести сечения при внецентренном растяжении (сжатии)?
10. Какой вид нагружения называется совместным действием изгиба с кручением?
11. Какие точки поперечного сечения являются опасными при совместном действии изгиба с кручением?
12. Как находится расчетный момент при совместном действии изгиба с кручением? Постройте эпюры изгибающих и крутящих моментов.
13. Какие теории прочности используются в расчетах валов при совместном действии изгиба с кручением?
14. Как определяется диаметр вала при совместном действии изгиба с кручением?



## 12. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

До сих пор определение размеров поперечных сечений различных стержней мы производили из условий прочности. Для стержня, растянутого или сжатого силой  $F$ , например, мы пользовались условием

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma], \quad (12.1)$$

при котором предполагалось, что разрушение наступает в том случае, когда напряжения станут равными пределу прочности  $\sigma_B$  (для хрупкого материала) или пределу текучести  $\sigma_T$  (для пластичного материала). Никаких принципиальных различий между деформацией растяжения и сжатия не делалось, учитываются только площадь поперечного сечения стержня и характеристики прочности материала. Длина стержня и формы поперечного сечения во внимание не принимались.

Проверим, всегда ли это правильно.

Возьмем деревянную чертежную линейку и приложим к ней продольную сжимающую нагрузку. Постепенно ее увеличивая, заметим, что ось стержня сначала остается почти прямолинейной, а затем при некоторой нагрузке она внезапно искривляется и может сломаться. Заметим, что с изменением длины стержня изменяется и разрушающая нагрузка, чем длиннее стержень, тем при меньшей нагрузке он разрушается. Кроме того, при сжатии длинных стержней изменение формы поперечного сечения (при прочих равных условиях) так же вызывает изменение разрушающей нагрузки.

Очевидно, что в различных элементах конструкций соотношение между длиной сжатого стержня и размерами его поперечного сечения должно быть подобрано таким образом, чтобы обеспечить надежную работу конструкции. Решение этого вопроса и составляет содержание задачи, рассматриваемой в данной главе.

### 12.1. Устойчивость сжатых стержней прямолинейной формы

Из механики известно, что равновесие твердых тел может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным (рис. 12.1).

Аналогично этому равновесие упругих систем может быть устойчивым и неустойчивым.

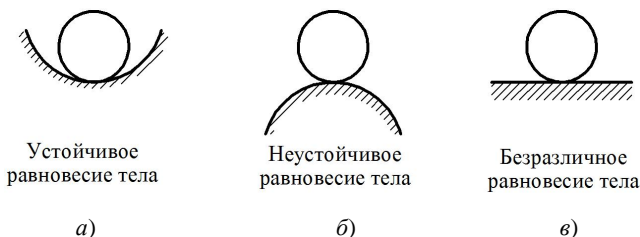


Рис. 12.1. Виды равновесия твердых тел

Рассмотрим тонкий стержень, испытывающий сжатие с постепенно возрастающей нагрузкой  $F_1 \leq F_2 \leq F_3$ .

При малой сжимающей силе  $F$  ось стержня остается прямолинейной. Если стержень отклонить незначительной горизонтальной силой, то после ее удаления, стержень снова возвратится в свое первоначальное положение. Такое упругое равновесие стержня называется устойчивым (рис. 12.2, а).

При большой величине сжимающей силы  $F_3$  после незначительного отклонения стержня его ось искривляется и стержень не может возвратиться в первоначальное положение, он продолжает еще более искривляться под действием сжимающей силы. При этом имеем неустойчивую форму упругого равновесия стержня. Далее происходит потеря устойчивости (рис. 12.2, в). Такой случай изгиба называют *продольным изгибом*, то есть изгибом, вызванным сжимающей силой, действующей вдоль оси стержня, при которой происходит потеря устойчивости первоначального состояния формы равновесия стержня.

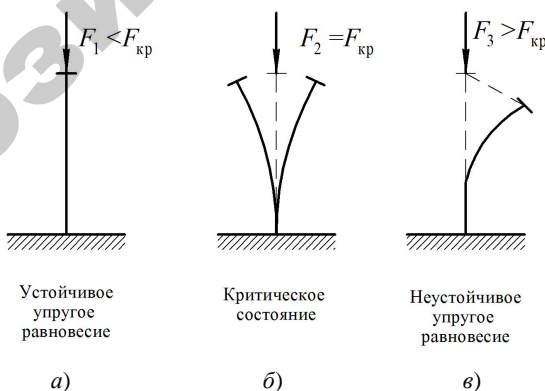


Рис. 12.2. Виды упругого равновесия тонкого стержня

Появление продольного изгиба опасно тем, что при нем происходит значительное нарастание деформаций при незначительном нарастании сжимающей нагрузки. Разрушения от продольного изгиба происходят внезапно, что чревато катастрофическими последствиями в технике и строительстве.

Между этими двумя состояниями равновесия существует переходное состояние, называемое критическим, при котором деформированное тело находится в безразличном равновесии. Оно может сохранять первоначальную прямолинейную форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия (рис. 12.2, б).

Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы равновесия стержня, называется *критической* и обозначается  $F_{кр}$ .

Для обеспечения устойчивости элементов конструкций и сооружений допускаются нагрузки, которые значительно меньше критических, то есть должно выполняться условие

$$[F] = \frac{F}{n_y}, \quad (12.2)$$

где  $[F]$  – допускаемая на стержень нагрузка;

$n_y$  – коэффициент запаса устойчивости, зависящий от материала, из которого изготовлен стержень.

Обычно принимают: дерево, коэффициент запаса устойчивости которого  $n_y = 2,8 \dots 3,2$ ; сталь –  $n_y = 1,8 \dots 3,0$ ; чугун –  $n_y = 5,0 \dots 5,5$ .

Таким образом, чтобы производить расчеты сжатых стержней на устойчивость, необходимо знать способы определения критических нагрузок  $F_{кр}$ .

## 12.2. Определение критической силы. Формула Эйлера

Рассмотрим стержень постоянного сечения, оба конца которого закреплены шарнирно (рис. 12.3). Стержень сжимается силой  $F$ . Рассматриваем малые перемещения сечений стержня. Задавшись прогибом оси стержня в определенном сечении, найдем величину

осевой сжимающей силы, при которой такой прогиб возможен. Будем считать, что напряжение в стержне не превышает предела пропорциональности.

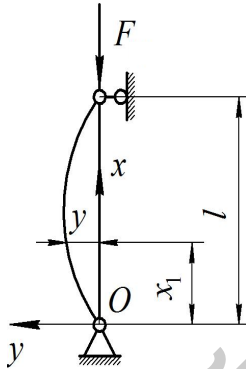


Рис. 12.3. Схема изгиба стержня сжимающей силой  $F$

Начало координат поместим в точке  $O$ , ось  $x$  направлена вдоль оси стержня, ось  $y$  – влево от начала координат. Определим прогиб стержня в произвольном сечении  $x_1$ .

Воспользуемся приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(z)}{EI}. \quad (12.3)$$

Определим изгибающий момент в произвольном сечении стержня:

$$M(z) = -Fy,$$

тогда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Fy}{EI}. \quad (12.4)$$

Обозначим  $\frac{F}{EI} = k^2$ , тогда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0. \quad (12.5)$$

Последнее выражение представляет собой однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Решение этого уравнения можно записать в виде гармонической функции:

$$y = A \sin kx + B \cos kx. \quad (12.6)$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  находятся из граничных условий.

При  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $B = 0$  и дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$y = A \sin kx. \quad (12.7)$$

Стержень изгибается по синусоиде.

При  $x = l$ ,  $y = 0$ ,  $A \sin kl = 0$ .

Известно, что произведение двух сомножителей равно нулю, лишь в том случае, если один из сомножителей равен нулю. Разберем оба случая.

Пусть  $A = 0$ , тогда  $y(x)$  всегда равен нулю и прогиба вообще не существует. Это решение противоречит принятому предположению о том, что стержень прогнулся, то есть  $A \neq 0$ . Следовательно, должно выполняться условие  $\sin kl = 0$ , откуда

$$kl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi,$$

где  $n$  – любое целое число.

Определим, какое значение  $n$  подходит к решению данной задачи. Рассмотрим условие

$$\frac{F}{EI} = k^2,$$

откуда

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}}. \quad (12.8)$$

Из последнего выражения следует, что если  $k = 0$ , то  $F_{\text{кр}} = 0$ , то есть стержень не нагружен, а это противоречит условию задачи. Следовательно, значение  $k = 0$  можно исключить из решения. В общем случае имеем

$$k = \frac{n\pi}{l}.$$

Приравняв  $F = F_{\text{кр}}$ , получим выражение

$$\frac{F_{\text{кр}}}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2},$$

откуда

$$F_{\text{кр}} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}, \quad (12.9)$$

где  $F_{\text{кр}}$  – наименьшее значение сжимающей силы, при котором происходит продольный изгиб, поэтому следует принять  $n = 1$ .

Тогда уравнение для определения критической силы примет вид

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (12.10)$$

Таким образом, стержень изгибается по синусоиде с одной полуволной.

При  $x = l/2$  прогиб стержня имеет максимальное значение.

При  $n = 2$  и  $n = 3$  стержень изгибается по двум и трем полуволнам синусоиды соответственно (рис. 12.4, б, в).

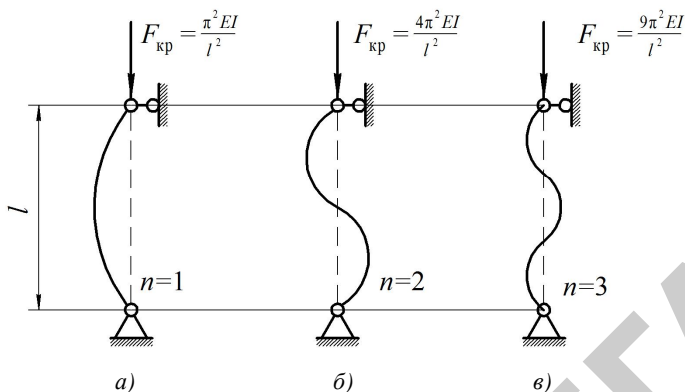


Рис. 12.4. Схема изогнутой оси стержня при различных значениях  $n$

Прогиб стержня в произвольном сечении под воздействием сжимающей силы можно определить по формуле

$$y = A \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (12.11)$$

Потеря устойчивости стержня происходит в плоскостях наименьшей жесткости, то есть  $I = I_{\min}$ , поэтому при определении критической силы следует учитывать наименьший осевой момент инерции сечения, тогда окончательно

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}, \quad (12.12)$$

где  $E$  – модуль Юнга, МПа;

$l$  – длина сжимаемого стержня, м;

$I_{\min}$  – минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стержня, см<sup>4</sup>, который определяется:

– для кругового сечения (рис. 12.5, а)

$$I_y = I_z = I_{\min} = \frac{\pi d^4}{64};$$

– для прямоугольного сечения (рис. 12.5, б)

$$I_y = \frac{bh^3}{12}; I_z = \frac{hb^3}{12}; I_{\min} = \frac{hb^3}{12}.$$

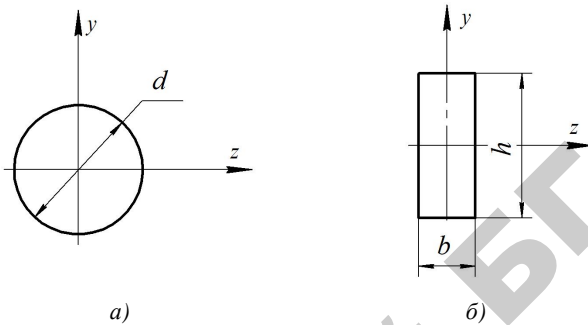


Рис. 12.5. Схема к определению осевого момента инерции поперечного сечения стержня

Если применить для исследования продольного изгиба не приближенное, а точное дифференциальное уравнение изогнутой оси, то оказывается возможным определить не только величину критической силы, но и зависимость между сжимающей силой и прогибом стержня.

Выведенная формула (12.12) называется *формулой Эйлера* и позволяет определить критическую силу для стержня с двумя шарнирно закрепленными концами (*основной случай*).

*Величина критической силы прямо пропорциональна наименьшей жесткости сечения и обратно пропорциональна квадрату длины стержня.*

Как видно из формулы Эйлера, величина критической силы зависит от геометрических характеристик стержня и модуля упругости материала, но не зависит от прочностных характеристик материала.

Так, например, критическая сила  $F_{кр}$  практически не зависит от марки стали.

Предельная растягивающая сила зависит от прочностных характеристик (в зависимости от марки стали она будет различной) и не зависит от длины стержня. Таким образом, можно утверждать, что имеется существенное различие между работой стержня на растяжение и сжатие.



### 12.3. Влияние способа закрепления концов стержня на величину критической силы

Выше был рассмотрен так называемый *основной случай* закрепления концов сжатого стержня, когда оба конца стержня закреплены шарнирно. На практике применяются и другие способы закрепления концов стержня.

Рассмотрим, как влияют условия закрепления стержня на величину критической силы.

*Второй случай:* один конец стержня жестко защемлен, второй свободен (рис. 12.6, а).

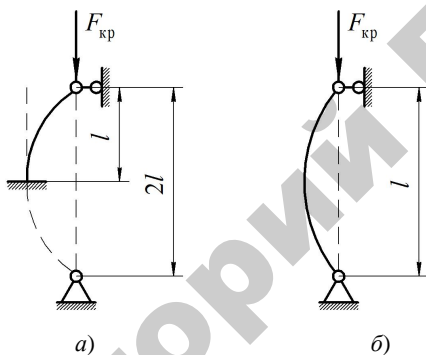


Рис. 12.6. Схема закрепления стержня по второму случаю

При потере устойчивости верхний конец стержня отклонится на некоторую величину и повернется, нижний защемленный конец останется вертикальным. Изогнутая ось получится такая же, как для одной половины стержня первого случая (рис. 12.6, б).

Для получения полного соответствия с первым случаем продолжим мысленно изогнутую ось стержня вниз. Тогда форма потери устойчивости будет полностью совпадать с первым случаем. Отсюда можно сделать вывод, что критическая сила для этого случая будет такая же, как и для пропорционально закрепленного по концам стержня длиной  $2l$ . Тогда

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}. \quad (12.13)$$

*Третий случай:* оба конца стержня жестко закреплены (рис. 12.7).

После потери устойчивости концы стержня не поворачиваются. Средняя часть стержня длиной  $l/2$  вследствие симметрии будет работать в таких же условиях, что и стержень с шарнирно опертыми концами, но длиной  $l$ . Тогда, исходя из формулы, получим

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0,5l)^2}. \quad (12.14)$$

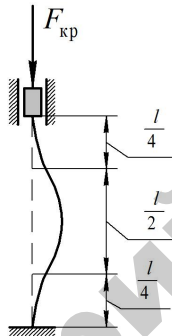


Рис. 12.7. Схема закрепления стержня по третьему случаю

*Четвертый случай:* один конец стержня жестко зашпелен, а другой закреплен шарнирно. В этом случае верхняя часть стержня длиной приблизительно  $2/3l$  имеет вид полуволны синусоиды и находится в таких же условиях, что и стержень с шарнирными опорами на концах (рис. 12.8).

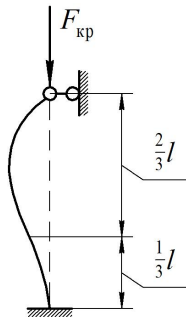


Рис. 12.8. Схема закрепления стержня по четвертому случаю

Тогда

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(0,7l)^2}, \quad (12.15)$$

Проанализировав последние выражения для определения критической силы, приходим к выводу, что чем более жестко закреплены концы стержня, тем большую нагрузку данный стержень может воспринимать.

Поэтому зависимости для определения критической силы при различных условиях закрепления стержня можно объединить в одну формулу

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2}, \quad (12.16)$$

где  $\mu l$  – приведенная длина стержня;

$\mu$  – коэффициент приведения длины стержня, зависящий от способа закрепления концов стержня;

$l$  – фактическая длина стержня.

Понятие о *приведенной длине* стержня впервые было введено профессором Петербургского института путей сообщения Ф. С. Ясинским в 1892 году.

Необходимо также отметить, что при составлении формул для определения критических сил в стержнях с различными условиями закрепления по концам использовалась аналогия в формах потери устойчивости отдельных их участков.

Однако эти решения можно получить также строго математически. Для этого необходимо записать для каждого случая дифференциальное уравнение упругой линии стержня при потере устойчивости и решить его с использованием граничных условий.

Поэтому весьма часто даже при жестком соединении концов стержня с другими элементами расчет в запас прочности ведут, предполагая шарнирное закрепление обоих концов (рис. 12.9).

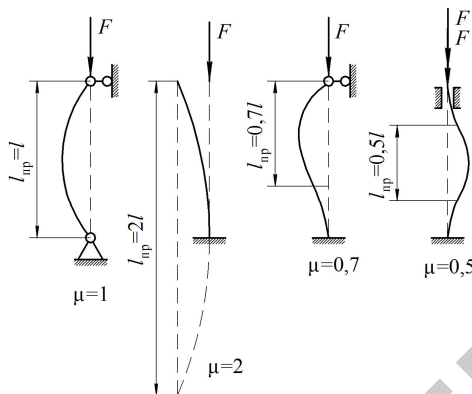


Рис.12.9. Коэффициент приведения длины для различных случаев закрепления концов стержня

## 12.4. Пределы применимости формулы Эйлера

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии в предположении, что материал стержня подчиняется закону Гука. Следовательно, формула Эйлера применима лишь в том случае, когда критические напряжения не превышают предела пропорциональности, то есть

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} \leq \sigma_{пц}. \quad (12.17)$$

Определим критические напряжения по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 A}. \quad (12.18)$$

Учитывая, что

$$\frac{I_{\min}}{A} = i_{\min}^2,$$

где  $i_{\min}$  – наименьший из главных радиусов инерции поперечного сечения стержня, получим

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i_{\text{min}}}\right)^2}. \quad (12.19)$$

Отношение приведенной длины стержня к радиусу инерции сечения называется гибкостью и обозначается  $\lambda$ , то есть

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}}.$$

Окончательно получим

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (12.20)$$

Формула Эйлера будет применима до тех пор, пока критические напряжения не станут равными пределу пропорциональности, то есть

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda_{\text{пред}}^2} = \sigma_{\text{пц}}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}. \quad (12.21)$$

Определим предел применимости *формулы Эйлера* для стержней, изготовленных из стали Ст3, для которой модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, предел пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}} = 200$  МПа, предел текучести  $\sigma_{\text{т}} = 240$  МПа.

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Таким образом, формула Эйлера может быть использована для стержней, у которых гибкость больше ста. В противном случае формулу Эйлера применять нельзя.

Аналогичным образом можно вычислить предел применимости формулы Эйлера и для любого другого материала, зная значение его модуля упругости и предел пропорциональности. Для чугуна формула Эйлера применима при гибкости  $\lambda_{\text{пред}} > 80$ , для сосны при гибкости  $\lambda_{\text{пред}} > 110$ .

## 12.5. Устойчивость сжатых стержней за пределами пропорциональности. Формула Ясинского

Если, как это очень часто случается на практике, гибкость стержней будет меньше предельной, то формула Эйлера становится неприменимой, так как критические напряжения превзойдут предел пропорциональности и закон Гука потеряет силу.

Теоретическое решение задачи об устойчивости за пределом пропорциональности выполнить сложно, поэтому для определения критических напряжений обычно пользуются эмпирическими формулами. Профессор Ф.С. Ясинский собрал и обработал обширный опытный материал по продольному изгибу стержней разной гибкости.

Опыты показали, что короткие стержни с малой гибкостью ( $0 < \lambda < 40$ ) не теряют устойчивости и разрушаются от простого сжатия, когда напряжения в них достигают предела текучести, то есть для них  $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{T}}$ .

Для стержней средней гибкости ( $40 < \lambda < 100$ ) Ясинским предложена эмпирическая зависимость:

– для стали и дерева

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda ; \quad (12.22)$$

– для чугуна

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 , \quad (12.23)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – коэффициенты, зависящие от физико-механических свойств материала.

Для стали (Ст3):  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа.

Для дерева (сосна):  $a = 29,3$  МПа,  $b = 0,194$  МПа.

Для чугуна:  $a = 776$  МПа,  $b = 12$  МПа,  $c = 0,053$  МПа.

Построим график зависимости критических напряжений от гибкости стержня, изготовленного из стали Ст3. Если на оси ординат (рис. 12.10) отложить величину предела пропорциональности ( $\sigma_{\text{пц}} = 200$  МПа) и провести из полученной точки прямую, параллельную оси абсцисс, то она в пересечении с гиперболой Эйлера даст точку  $K$ , абсцисса которой и есть  $\lambda_{\text{пред}} = 100$ .

Слева от точки  $K$  гиперболой Эйлера показана штриховой линией, так как здесь она дает значения напряжений большие, чем значения предела пропорциональности, и устойчивость стержня становится в этой области сомнительной.

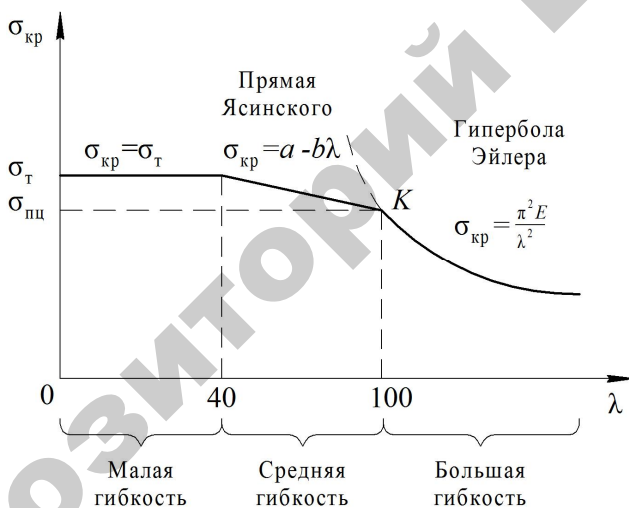


Рис.12.10. График зависимости критических напряжений от гибкости стержня

Таким образом, график состоит из трех частей: *гиперболы Эйлера* для стержней большой гибкости, *наклонной прямой* для стержней средней гибкости и *слабо наклоненной прямой* для стержней малой гибкости.

Подобные графики можно построить и для других материалов.

## 12.6. Расчеты на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемых напряжений

Надежная работа сжатого стержня будет обеспечена, если выполняются условия:

– прочности

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma_{\text{сж}}]; \quad (12.24)$$

– устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брутто}}} \leq [\sigma_y], \quad (12.25)$$

где  $A_{\text{нетто}}$ ,  $A_{\text{брутто}}$  – площадь поперечного сечения стержня с учетом и без учета ослаблений соответственно;

$[\sigma_{\text{сж}}]$  – допускаемое напряжение на сжатие для материала стержня, равное  $[\sigma_{\text{сж}}] = \frac{\sigma_T}{n_T}$ ;

$[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение на устойчивость, равное  $[\sigma_y] = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y}$ .

Допускаемое напряжение на устойчивость  $[\sigma_y]$  и допускаемое напряжение на прочность  $[\sigma_{\text{сж}}]$  взаимно связаны. Составим отношение

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma_{\text{сж}}]} = \frac{\sigma_{\text{кр}} n_T}{n_y \sigma_T}, \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_{\text{кр}} n_T}{n_y \sigma_T} [\sigma_{\text{сж}}].$$

Обозначив  $\frac{\sigma_{\text{кр}} n_T}{n_y \sigma_T} = \varphi$ , получим

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_{\text{сж}}]. \quad (12.26)$$

где  $\varphi$  – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения на простое сжатие (коэффициент продольного изгиба). Он всегда меньше единицы.



Коэффициент  $\varphi$  зависит от гибкости материала стержня и принимается по табл. 12.1. Условие устойчивости принимает вид

$$\frac{N}{A_{\text{брутто}}} \geq \varphi[\sigma_{\text{сж}}]. \quad (12.27)$$

Таблица 12.1

Значения коэффициентов продольного изгиба  
в зависимости от гибкости стержня

Гибкость, $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$	Коэффициенты $\varphi$			
	Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	0,25
120	0,45	0,36	—	0,22
130	0,40	0,33	—	0,18
140	0,36	0,29	—	0,16
150	0,32	0,26	—	0,14
160	0,29	0,24	—	0,12
170	0,26	0,21	—	0,11
180	0,23	0,19	—	0,10
190	0,21	0,17	—	0,09
200	0,19	0,16	—	0,08

При расчете стержня на устойчивость местные ослабления сечений практически не влияют на величину критической силы, поэтому в расчетные формулы вводится полная площадь поперечного сечения  $A_{\text{брутто}}$ .

Различают два вида расчетов на устойчивость сжатых стержней: проверочный и проектировочный.

*Проверочный расчет сжатых стержней.*

Порядок расчета.

1. Зная размеры и форму поперечного сечения, определить площадь поперечного сечения  $A_{\text{брутто}}$  и минимальный момент инерции  $I_{\text{мин}}$ .

2. Вычислить минимальный радиус инерции и гибкость стержня по формулам

$$i_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{I_{\text{мин}}}{A}}; \quad \lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{мин}}}.$$

3. По таблице 12.1 найти значение коэффициента  $\varphi$ .

4. Проверить условие устойчивости

$$\frac{N}{A_{\text{брутто}}} \geq \varphi [\sigma_{\text{сж}}].$$

*Проектировочный расчет сжатых стержней.*

Условие устойчивости содержит две неизвестные величины, которые зависят одна от другой, – площадь поперечного сечения и коэффициент продольного изгиба  $\varphi$ . Задача при проектировочном расчете сжатых стержней решается методом последовательных приближений. В первом приближении принимают  $\varphi_1 = 0,5$ , находят площадь сечения и устанавливают фактическое значение  $\varphi'_1$ . При большом различии между  $\varphi_1$  и  $\varphi'_1$  выполняется второе приближение, то есть

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}$$

и т. д., до тех пор, пока разница в значениях между  $\varphi_1$  и  $\varphi'_1$  будет не более 5 %.

Далее окончательно определяются геометрические параметры поперечного сечения стержня.

## 12.7. Выбор материалов и рациональной формы поперечных сечений сжатых стержней

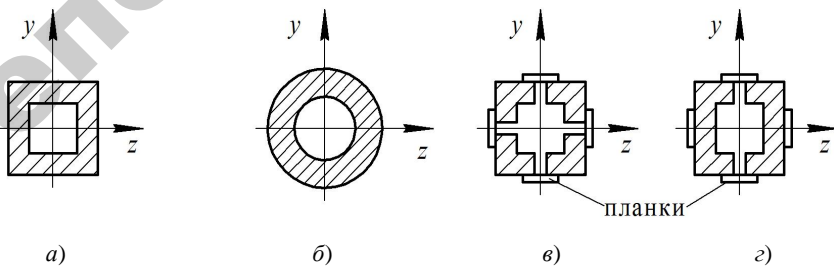
Для стержней большой гибкости ( $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ ;  $\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ ) модуль

упругости  $E$  является единственной механической характеристикой материала, определяющей критические напряжения. Так как модули упругости  $E$  для различных сталей почти одинаковы, то применять *высокопрочные стали* для гибких стержней нецелесообразно.

Для стержней малой гибкости (они не теряют устойчивости, а разрушаются от простого сжатия) использование сталей повышенной прочности будет целесообразным.

Так как продольный изгиб происходит всегда в плоскости наименьшей жесткости, то при проектировании сжатых стержней необходимо стремиться к тому, чтобы главные моменты инерции были по возможности одинаковыми. Поэтому применять двутавровые и сплошные прямоугольные сечения *нерационально*. При заданной площади сечения выгоднее будет такое сечение, у которого материал распределен по возможности дальше от главных центральных осей инерции. Поэтому кольцевое сечение в этом отношении значительно выгоднее, чем сплошное круглое. Рациональными являются и коробчатые тонкостенные сечения. Однако при значительном уменьшении толщины стенок пустотелых стержней может произойти местная потеря устойчивости, для предотвращения которой ставят ребра жесткости (рис. 12.11, е).

Самой экономичной конструкцией сжатых стержней являются решетчатые стержни.



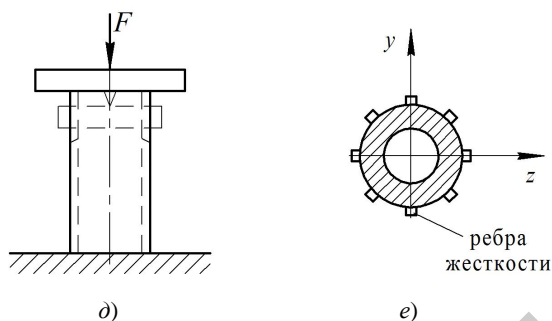


Рис. 12.11. Схемы рациональных поперечных сечений сжатых стержней

Для стержней, у которых осевые моменты инерции различны, добиться равной устойчивости в двух плоскостях можно при различном закреплении концов стержня.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
2. Какая сила называется критической силой?
3. Какое дифференциальное уравнение из теории изгиба лежит в основе вывода формулы Л. Эйлера?
4. Что называется гибкостью стержня? Приведите формулу.
5. Приведите формулу Л. Эйлера для определения критической силы.
6. Как учитывается различное закрепление концов стержня при определении критической силы?
7. Каков предел применимости формулы Л. Эйлера?
8. Как определяется предельная гибкость для формулы Л. Эйлера?
9. Как определяется критическая сила при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала?
10. Какой вид имеет график изменения критической силы в зависимости от гибкости (или длины) для стальных стержней?
11. Приведите формулу Ф. Ясинского для определения критической силы и укажите пределы ее применимости.

12. Как определяется коэффициент запаса устойчивости сжатого стержня?

13. Напишите условие устойчивости сжатого стержня через критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

14. Напишите условие устойчивости сжатого стержня с помощью коэффициента продольного изгиба  $\varphi$ .

15. От чего зависит коэффициент продольного изгиба  $\varphi$  и в каких пределах он изменяется?

16. Какие три типа задач можно решать исходя из условия устойчивости сжатого стержня?

17. Покажите порядок подбора сжатого стержня из условия устойчивости с помощью коэффициента  $\varphi$ .

### 13. ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

Многие детали машин или их элементы работают в условиях, когда возникающие в них напряжения периодически изменяют свое значение или значение и знак под действием внешней нагрузки. Переменность внешней нагрузки, например, автомобиля, может быть связана: с загрузкой (автомобиль может ехать с полной загрузкой, с частичной или без груза), с рельефом местности (езда под гору, по ровной местности, в гору) с видом и качеством дорожного полотна или грунта (грунтовая дорога, асфальт, бульжная мостовая), с остановом и разгоном у светофора, с квалификацией водителя и т. д. Каждый из этих факторов может менять нагрузку в несколько раз.

Такие нагрузки, действующие на детали машин или на отдельные элементы их, вызывают *переменные напряжения*. Действию переменных напряжений подвержены валы редукторов, шестерни, зубчатые колеса, оси автомобилей и железнодорожных вагонов и др.

Если уровень переменных напряжений превышает некоторый предел, то в материале детали происходит процесс постепенного накопления повреждений, который приводит к образованию субмикроскопических трещин. По мере наработки длина этих трещин увеличивается, затем они объединяются, образуя первую микроскопическую трещину, под которой понимается трещина протяженностью 0,1–0,5 мм. У корня этой трещины возникает местное увеличение напряжений, которое облегчает ее дальнейшее развитие. Трещина, постепенно развиваясь и ослабляя сечение, вызывает в некоторый момент времени внезапное разрушение детали, которое нередко связано с авариями и тяжелыми последствиями. Как показывает опыт, при действии переменных напряжений разрушение наступает при напряжениях, значительно меньших пределов прочности и текучести.

#### 13.1. Механизм усталостного разрушения деталей машин. Типы циклов напряжений и их параметры

Процесс постепенного накопления повреждений в материале под действием переменных напряжений и деформаций, приводящих к изменению свойств, образованию трещин и разрушению, называется усталостью, а соответствующее разрушение – *усталостным разрушением*.

Механизм усталостного разрушения чрезвычайно сложен, и многие его детали остаются пока неясными. Согласно современным представлениям, усталостное разрушение непосредственно связано с неоднородностью строения материалов, заключающейся в случайных вариациях механических свойств, размеров и очертаний отдельных зерен металла, направлений их кристаллографических плоскостей, наличием неоднородных фаз, включений, дефектов кристаллической решетки (вакансий, дислокаций), остаточных напряжений.

Законченной теории усталостного разрушения еще нет. В настоящее время интенсивно развиваются вероятностные методы расчетов на усталость, как более перспективные и эффективные. Одновременно продолжается процесс накопления экспериментальных фактов, на основе которых уточняются существующие и создаются новые расчетные методы.

Рассмотрим вагонную ось (рис. 13.1, а), которая изгибается под нагрузкой от веса вагона. При неподвижном вагоне в верхней части сечения от веса вагона будут действовать растягивающие нормальные напряжения (рис. 13.1, б), а в нижней части – сжимающие напряжения. При движении вагона ось вращается и каждая точка сечения оказывается то в растянутой, то в сжатой половине сечения.

Нормальные напряжения в произвольной точке В (рис. 13.1, в) будут изменяться во времени по синусоидальному закону и определяются по формуле

$$\sigma_B = \frac{M_z}{I_z} y_B = \frac{M_z}{I_z} \frac{d}{2} \sin \alpha = \frac{M_z}{I_z} \frac{d}{2} \sin(\omega t), \quad (13.1)$$

где  $\alpha = \omega t$  – при равномерном вращении оси.

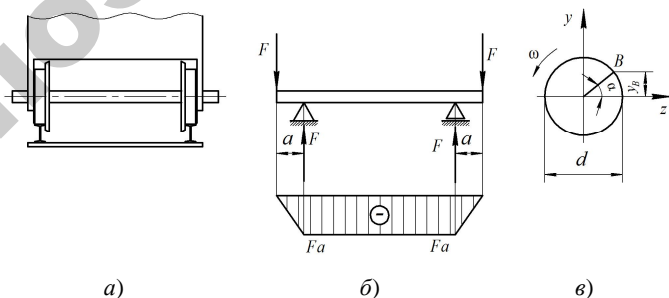


Рис. 13.1. Схема вагонной оси под нагрузкой

При знакопеременных напряжениях часто наблюдаются поломки деталей машин при нагрузках значительно меньших, чем при действии тех же нагрузок, но приложенных статически.

Процесс разрушения детали в зоне повышенных напряжений начинается с образования микротрещин, которые постепенно развиваются, превращаясь в макротрещины, что в конечном итоге может привести к выходу детали из строя.

Изменение напряжений во времени показано на графике (рис. 13.2).

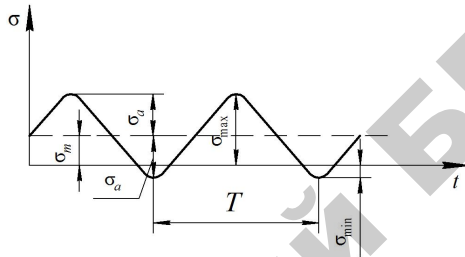


Рис. 13.2. График изменения напряжений во времени

Совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения называется *циклом напряжений*.  $T$  — период цикла.

*Цикл напряжений* в общем виде характеризуется  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ , за которые принимаются наибольшее и наименьшее по абсолютной величине значения напряжений цикла.

*Средним напряжением цикла* называется алгебраическая полу-сумма максимального и минимального напряжений, которая определяется по формуле

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}. \quad (13.2)$$

Амплитудой цикла называется алгебраическая полуразность максимального и минимального напряжений, то есть

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (13.3)$$



Среднее напряжение  $\sigma_m$  может быть больше нуля, меньше нуля или равным нулю ( $\sigma_m > 0$ ;  $\sigma_m < 0$ ;  $\sigma_m = 0$ ).

Амплитуда цикла  $\sigma_a$  всегда больше нуля ( $\sigma_a > 0$ ).

С другой стороны, максимальное и минимальное напряжения цикла определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_m + \sigma_a; \\ \sigma_{\min} &= \sigma_m - \sigma_a. \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Отношение минимального напряжения цикла к максимальному с учетом знаков этих напряжений называется *характеристикой цикла* или *коэффициентом асимметрии цикла* и определяется по формуле

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (13.5)$$

Коэффициент асимметрии цикла  $-\infty < r < +\infty$ . Для постоянного напряжения  $r = 1$ . Часто обозначаются  $r_\sigma$  для нормальных напряжений,  $r_\tau$  — для касательных напряжений.

Циклы напряжений, для которых коэффициенты асимметрии имеют одинаковые значения, называют *подобными*.

Величины  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$ ,  $r$  называют *параметрами цикла*.

Цикл считается определенным, если известны два любых его параметра.

Согласно лабораторных исследований, решающая роль в разрушении деталей при циклическом нагружении принадлежит максимальному и минимальному значениям напряжений цикла и общему количеству циклов. Влияние же продолжительности цикла и характера изменения напряжений в течение цикла незначительно.

Поэтому в расчетах действительный характер изменения напряжений заменяется гармонической кривой (рис. 13.3).

Все представленные циклы (рис. 13.3) считаются равноопасными.

Циклы напряжений бывают симметричными и асимметричными.

Цикл напряжений называется *симметричным*, если  $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ ;  $r = -1$ , если  $\sigma_{\max} \neq \sigma_{\min}$ , то цикл называется *асимметричным*.

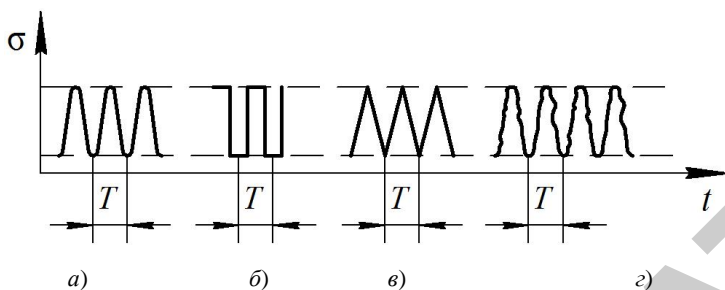


Рис. 13.3. Виды циклов при знакопеременных напряжениях

Ассиметричные циклы бывают знакопеременными и знакопостоянными (табл. 13.1).

Таблица 13.1

Характеристики циклов при циклически изменяющихся напряжениях

Название цикла	Схема	$\sigma_{\max}$ $\sigma_{\min}$	$\sigma_m$	$\sigma_a$	$r$
Симметричный		$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$	$\sigma_{\min} = 0$	$\sigma_{\max}$	-1
Пульсационный положительный (от нулевой)		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} = 0$	$\frac{\sigma_{\max}}{2}$	$\frac{\sigma_{\max}}{2}$	0
Знакопостоянный положительный		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} > 0$	$\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$	$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$	$0 < r < 1$
Знакопеременный		$\sigma_{\max} > 0$ $\sigma_{\min} < 0$	$\sigma_m > 0$	$\sigma_a > 0$	$-1 < r < 1$

### 13.2. Предел выносливости при симметричном цикле. Кривая усталости

Для оценки усталостной прочности необходимо располагать характеристиками сопротивления усталости материала. Под сопротивлением усталости элементов конструкций понимается их *способность не разрушаться под действием переменных напряжений в течении заданного числа циклов*. Характеристики сопротивления усталости материала определяются путем испытания гладких (без концентрации напряжений) полированных образцов на специальных машинах. Основным видом являются усталостные испытания при симметричном цикле в условиях чистого изгиба вращающегося образца.

Если подвергать деталь циклически изменяющемуся нагружению определенного уровня, то после некоторого числа перемен напряжений в материале появится трещина, которая постепенно будет развиваться. В итоге деталь разрушится, не дав при этом заметных остаточных деформаций, даже если материал пластичен.

Число циклов от появления первой трещины и до полного разрушения детали будет тем больше, чем меньше напряжения.

Характерно, что разрушение материала происходит при напряжениях, значительно меньших, чем в случае действия тех же нагрузок, но приложенных статически.

Способность материала сопротивляться разрушению при действии циклически изменяющихся напряжений называется *выносливостью*. Установлено, что в настоящее время свыше 80 % эксплуатационных поломок деталей машин в различных отраслях машиностроения связано с *усталостным разрушением*.

Поверхность излома при *усталостном разрушении* состоит из двух зон:

- с зернистой структурой;
- со шлифованной поверхностью (поверхности развивающихся трещин многократно трутся друг о друга, в результате чего они шлифуются).

Максимальное напряжение цикла после произвольно большого их числа, при котором не происходит усталостного разрушения образца из данного материала, называется *пределом выносливости*. Обозначают  $\sigma_r$  или  $\tau_r$ .

Предел выносливости является основной характеристикой усталостной прочности материалов и определяется экспериментально. Для этого испытывают серию образцов, количеством не менее 10 штук, форма, размеры и обработка поверхности которых лимитируются соответствующим ГОСТом. Образцы должны быть гладкие цилиндрические,  $d \leq 10$  мм, в средней части полированные (рис. 13.4).

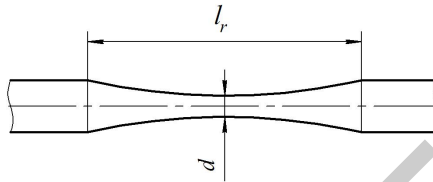


Рис. 13.4. Схема образца при испытаниях на выносливость

Симметричный цикл является самым опасным при испытаниях на усталостную прочность. С другой стороны, симметричный цикл легче всего осуществить в лабораторных условиях. Образец закрепляется во вращающихся цапгах и вращается вместе с ними (рис. 13.5, а). Нагрузка  $F$  создает чистый изгиб в пределах контрольной длины образца. Счетчик фиксирует число оборотов образца до разрушения.

Параметры цикла:  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ ;  $\sigma_m = 0$ ,  $\sigma_a = \sigma_{\max}$ ;  $r = -1$ .

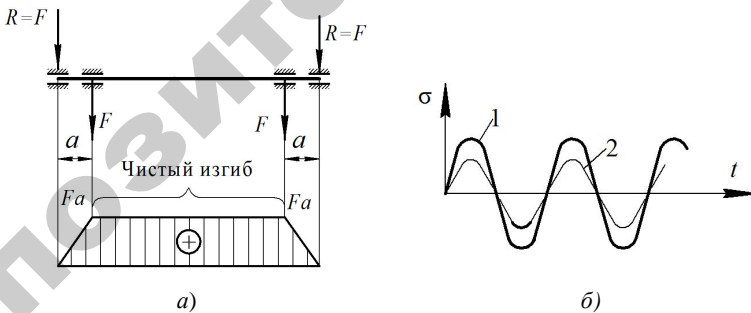


Рис. 13.5. Схема испытания образца на усталостную прочность

При больших напряжениях (рис.13.5, б, кривая 1) образец разрушается после небольшого числа циклов  $N_1$  с уменьшением напряжения (рис.13.5, б, кривая 2) число циклов  $N_2$  до разрушения увеличивается.

По результатам испытаний на усталостную прочность строят кривую усталости или *диаграмму Вёлера*, названную по имени немецкого инженера, впервые исследовавшего явление усталости в 1858 году. Кривая усталости устанавливает зависимость между максимальным напряжением цикла и числом циклов до разрушения. Испытания на усталостную прочность продолжительны во времени, от нескольких часов до недель непрерывной работы изделия.

### 13.3. Основные факторы, влияющие на предел выносливости материалов

В большинстве случаев испытания на выносливость проводят на стандартных лабораторных образцах. Чтобы определить предел выносливости для заданной детали, надо знать, какое влияние оказывают на него различные факторы. Рассмотрим основные факторы для наиболее изученного симметричного цикла.

*Концентрация напряжений.* Это наиболее важный фактор, снижающий значения напряжений  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ . Концентраторами напряжений являются отверстия, шпоночные канавки, выточки, нарезки на поверхности, царапины, заусенцы и т. д.

Степень концентрации напряжений характеризуется двумя коэффициентами:

– *действительный* (эффективный) коэффициент концентрации напряжений равен отношению предела выносливости образца без концентраторов напряжений к пределу выносливости образца тех же размеров, но с концентраторами напряжений, определяется по формулам

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}; \quad k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}}, \quad (13.6)$$

где  $k_{\sigma(\tau)}$  зависит также от свойств материала (чем хрупче материал, тем он чувствительнее к концентрации напряжений);

– *теоретический* коэффициент концентрации напряжений, который равен отношению максимальных местных напряжений к номинальным напряжениям, определяется по формулам

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_M^{\max}}{\sigma_H}; \quad \alpha_{\tau} = \frac{\tau_M^{\max}}{\tau_H}, \quad (13.7)$$

где  $\alpha_{\sigma(\tau)}$  определяется теоретическим путем и характеризует влияние концентрации напряжений при статическом нагружении абсолютно упругого материала (рис. 13.6).

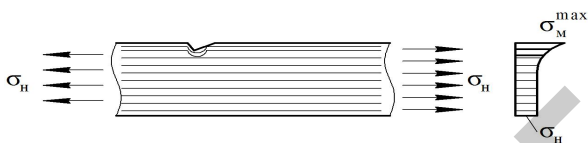


Рис. 13.6. Схема для определения теоретического коэффициента концентрации напряжений

При отсутствии экспериментальных данных  $k_{\sigma(\tau)}$  можно определить по формуле

$$k_{\sigma} = 1 + q(\alpha_{\sigma} - 1), \quad (13.8)$$

где  $q$  – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений (определяется по графикам в зависимости от  $\sigma_B$  материала),  $0 \leq q \leq 1$ .

Ориентировочно  $q = 0,4 \dots 0,8$  для углеродистых сталей;

$q \approx 1$  – для легированных сталей;

$q \approx 1$  – для чугуна.

При отсутствии более точных данных  $k_{\sigma}$  можно определить приближенно по эмпирическим соотношениям:

– при отсутствии концентраторов напряжений для деталей с чисто обработанной поверхностью

$$k_{\sigma} = 1,2 + 0,2 \frac{\sigma_B - 400}{1100};$$

– при наличии острых концентраторов напряжений

$$k_{\sigma} = 1,5 + 1,5 \frac{\sigma_B - 400}{1100},$$

где  $\sigma_B$  – предел прочности материала.

При использовании последних формул не следует отдельно учитывать влияние качества поверхности детали. Снижение концентрации напряжений достигается различными конструктивными мерами:

- путем увеличения радиусов переходной галтели;
- термомеханической обработкой (например, азотирование) зон концентрации;
- применением разгрузочных канавок при горячей посадке дисков на вал, и т. д.

*Влияние размеров детали.* Снижение предела выносливости материала с ростом абсолютных размеров детали называется *масштабным эффектом* или *масштабным фактором*.

Влияние размеров детали учитывается масштабным коэффициентом  $\beta_m$ , который равен отношению предела выносливости стандартного образца ( $d = 6 \dots 10$  мм) к пределу выносливости, определенному при испытании геометрически подобных образцов больших размеров, то есть

$$\beta_m = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1d}}, \quad \text{или} \quad \beta_m = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1d}}; \quad (13.9)$$

Значение  $\beta_m$  зависит:

- от материала детали. Более прочные стали чувствительнее к масштабному эффекту;
- от размеров;
- от наличия концентраторов напряжений.

Причины масштабного эффекта:

- в деталях больших размеров большая вероятность появления дефектов;
- с ростом размеров детали уменьшается роль наклепа, затрудняется качественное проведение термической обработки по всему объему материала;
- увеличивается градиент напряжений.

Эмпирическая формула для определения масштабного коэффициента при расчете валов на совместное действие изгиба и кручения

$$\beta_{m\sigma} = \beta_{m\tau} = 1,2 + 0,1(d - 3), \quad (13.10)$$

где  $d$  – диаметр вала в см.

*Влияние состояния поверхности детали.* Усталостные трещины, как правило, зарождаются на поверхности детали. Поэтому состояние поверхностного слоя оказывает существенное влияние на прочность при циклически изменяющихся напряжениях. Особенно неблагоприятное влияние оказывает коррозия поверхности.

Влияние состояния и качества обработки поверхности детали на  $\sigma_r$  учитывается *коэффициентом качества поверхности*  $\beta_{пн}$ , который определяется по формулам

$$\beta_{п\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1пн}}; \quad \beta_{п\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1пн}}, \quad (13.11)$$

где  $\sigma_{-1}$  ( $\tau_{-1}$ ) – предел выносливости полированных образцов;

$\sigma_{-1пн}$  ( $\tau_{-1пн}$ ) – предел выносливости подобного образца (по форме, размерам, материалу) с заданным состоянием поверхности.

Более прочные стали чувствительнее к влиянию состояния поверхности, чем менее прочные.

Для снижения величины  $\beta_{пн}$  применяют обкатку поверхности роликами, обдувку поверхности стальной или чугунной дробью, поверхностную термическую или термохимическую обработку (цементация, азотирование).

При понижении температуры детали с 20 до  $-190$  °С предел выносливости у некоторых сталей увеличивается более чем вдвое, хотя ударная вязкость при этом понижается. Это еще раз указывает на принципиальное отличие между усталостным и хрупким разрушением при статических ударных нагрузках.

Следует отметить, что эксплуатация изделий в условиях агрессивных сред вызывает коррозионную усталость, которая заключается в резком накоплении усталостных повреждений.

Совместное действие концентраций напряжений, размеров деталей и состояния поверхности на снижение  $\sigma_r$  можно оценить *обобщенным коэффициентом*, который определяется по формуле

$$k_{q\sigma} = \frac{k_{\sigma}}{\beta_{м\sigma} \beta_{п\sigma}}, \quad (13.12)$$

где  $k_{q\sigma}$  – общий коэффициент снижения предела выносливости при симметричном цикле по нормальным напряжениям. Аналогично по касательным напряжениям



$$k_{q_c} = \frac{k_c}{\beta_{m_c} \beta_{n_c}}, \quad (13.13)$$

где  $k_c (k_c)$  – действительный коэффициент концентрации напряжений;

$\beta_{m_c} (\beta_{m_c})$  – масштабный коэффициент;

$\beta_{n_c} (\beta_{n_c})$  – коэффициент качества поверхности.

#### 13.4. Схематизация диаграммы усталостной прочности

Построение диаграммы усталостной прочности представляет собой сложный процесс, связанный с длительными и трудоемкими испытаниями. Поэтому были высказаны предложения схематизировать диаграмму Хейга или диаграмму предельных амплитуд или диаграмму усталостной прочности таким образом, чтобы для ее построения требовалось знание всего нескольких значений механических характеристик материала. Первая попытка принадлежит Ц. Зодербергу (США), который предложил соединить прямой точки  $B$  и  $F$  (рис. 13.7, *a*). В этом случае для построения диаграммы достаточно знать предел текучести  $\sigma_T$  и предел выносливости при симметричном цикле. Однако такая схематизация значительно уменьшает рабочую зону на диаграмме Хейга.

Г. В. Ужик предложил соединить точку  $B$  с точкой  $C$  (рис. 13.7, *б*). В этом случае для построения диаграммы нужно знать пределы прочности и текучести материала и предел выносливости при симметричном цикле.

Рабочая зона несколько увеличивается, но зато требуется вести параллельно два расчета: по усталостному разрушению и по текучести. Наиболее удачным является предложение ученых С. В. Серенсена и Р. С. Кинашшвили (рис. 13.7, *в*). По этому предложению диаграмма строится по трем параметрам: пределу выносливости при симметричном цикле  $\sigma_{-1}$ , пределу выносливости при пульсационном цикле  $\sigma_0$  и пределу текучести  $\sigma_T$ . Предложенная схематизация уменьшает рабочую зону несущественно.

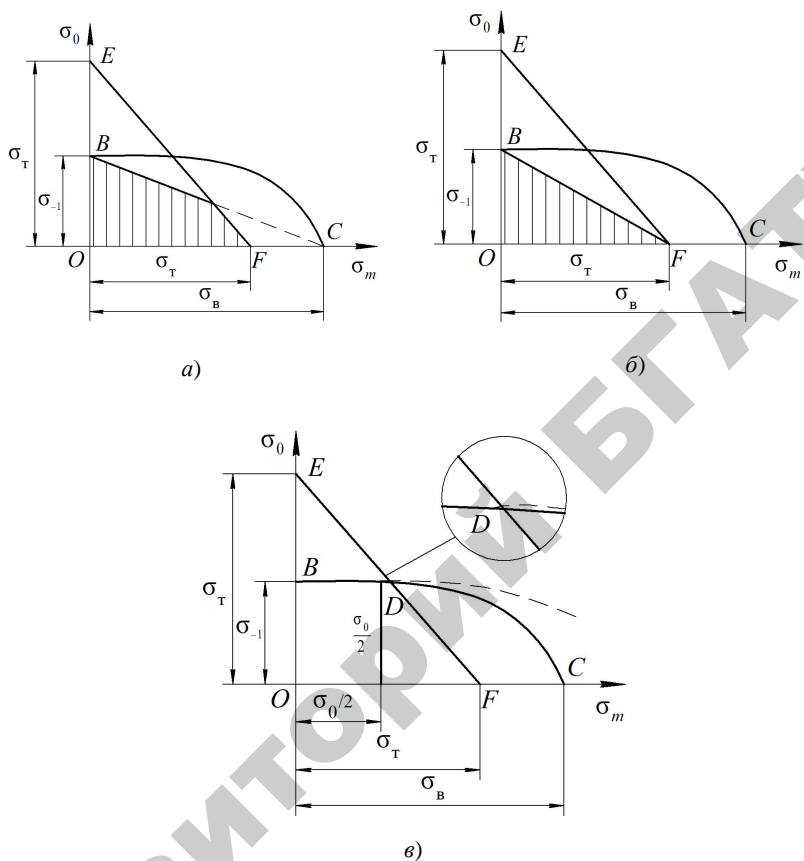


Рис. 13.7. Схематизация диаграммы усталостной прочности

### 13.5. Условия прочности и коэффициенты запаса прочности при различных циклах напряжений

В большинстве случаев расчеты на прочность при циклически изменяющихся напряжениях выполняются как проверочные.

Проектировочный расчет выполняется приближенно без учета переменности напряжений (как для статически приложенных нагрузок), но по пониженным допускаемым напряжениям, то есть

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]}, \quad (13.14)$$

где  $[n]$  – нормативный коэффициент запаса прочности (для стали – по пределу текучести):

$$[n] = [n_1] \cdot [n_2] \cdot [n_3],$$

где  $[n_1]$  – коэффициент, учитывающий неточность в определении нагрузок и напряжений,  $[n_1] = 1,1 \dots 1,5$ ;

$[n_2]$  – коэффициент, учитывающий неоднородность материала, повышенную чувствительность к недостаткам механической обработки;  $[n_2] = f\left(\frac{\sigma_T}{\sigma_B}\right) = 1,2 \dots 2,2$  – в зависимости от отношения  $\frac{\sigma_T}{\sigma_B}$ ;

$[n_3] = 1,0 \dots 1,5$  – коэффициент условий работы, учитывающий степень ответственности детали.

После выполнения предварительного проектировочного расчета проводится уточненный проверочный расчет с учетом переменности напряжений, а также конструктивных и технологических факторов, влияющих на усталостную прочность деталей. При этом расчете определяется коэффициент запаса прочности  $n$  по усталостному разрушению для одного или нескольких опасных сечений детали.

Условие прочности имеет вид

$$n \geq [n].$$

Коэффициент запаса прочности при симметричном цикле нормальных напряжений при изгибе определяется по формуле

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma} \sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{\beta_m \beta_n \sigma_a}. \quad (13.15)$$

Коэффициент запаса прочности при симметричном цикле касательных напряжений при кручении

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{k_{q\tau} \tau_{\max}} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\beta_M \beta_{\Pi}} \tau_a}. \quad (13.16)$$

Коэффициент запаса прочности при асимметричном цикле нормальных напряжений при изгибе определяется по формуле

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\beta_M \beta_{\Pi}} \sigma_a + \varphi_{\sigma} \sigma_m}, \quad (13.17)$$

Коэффициент запаса прочности при асимметричном цикле касательных напряжений при кручении:

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\beta_M \beta_{\Pi}} \tau_a + \varphi_{\tau} \tau_m}, \quad (13.18)$$

где  $\varphi_{\sigma}$ ,  $\varphi_{\tau}$  – коэффициенты чувствительности материала к асимметрии циклов, которые определяются по таблицам в зависимости от  $\sigma_b$ .

Наряду с коэффициентом запаса прочности по усталостному разрушению должен быть определен коэффициент запаса прочности  $n_{\tau}$  по текучести (для пластичных материалов).

При изгибе имеем

$$n_{\tau_{\sigma}} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_a + \sigma_m}. \quad (13.19)$$

При кручении

$$n_{\tau_{\tau}} = \frac{\tau_{\tau}}{\tau_a + \tau_m}. \quad (13.20)$$

В условие прочности в качестве расчетного коэффициента следует подставлять меньший по величине коэффициент запаса по усталостному разрушению  $n_{\sigma(\tau)}$  или по текучести  $n_{\tau_{\sigma(\tau)}}$ .

### 13.6. Расчеты на прочность при плоском напряженном состоянии

Общий коэффициент запаса прочности по усталостному разрушению при совместном действии изгиба и кручения определяется по формуле

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \geq [n]. \quad (13.21)$$

Общий коэффициент запаса прочности по текучести при совместном действии изгиба и кручения определяется по формуле

$$n_{\tau} = \frac{n_{\tau\sigma} n_{\tau\tau}}{\sqrt{n_{\tau\sigma}^2 + n_{\tau\tau}^2}} \geq [n]. \quad (13.22)$$

Если фактический запас прочности получается меньше нормативного, следует увеличить поперечное сечение детали, или сгладить концентраторы напряжений, или улучшить обработку поверхности, или заменить материал и т. д. Затем проверочный расчет повторить.

На основании многочисленных экспериментальных данных установлены следующие эмпирические зависимости:

– для углеродистой стали:

$$\sigma_{-1}^u = 0,43\sigma_B \text{ – при изгибе;}$$

$$\tau_{-1}^{kp} = 0,25\sigma_B \text{ – при кручении;}$$

$$\sigma_{-1}^p = 0,35\sigma_B \text{ – при растяжении;}$$

– для легированной стали:

$$\sigma_{-1}^u = 0,35\sigma_B + 120 \text{ МПа – при изгибе;}$$

$$\tau_{-1}^{kp} = 0,25\sigma_B \text{ – при кручении;}$$

$$\sigma_{-1}^p = 0,28\sigma_B + 90 \text{ МПа – при растяжении.}$$

### 13.7. Пути повышения сопротивления усталости конструкции

Повышение надежности и долговечности деталей, а также элементов конструкций должно обеспечиваться уже на стадии проектирования, так как использованные при этом принципы конструирования существенно будут влиять на сопротивление усталости как определенных деталей, так и всей конструкции в целом. В связи с этим можно указать следующие общие положения повышения сопротивления усталости деталей и элементов конструкций.

1. Детали из качественных, высокопрочных материалов должны тщательно обрабатываться, на поверхности не должно быть царапин, рисок, вмятин и т. д.

2. Геометрическая форма деталей должна выбираться такой, чтобы концентрация напряжений отсутствовала или была минимальной.

3. Детали и конструкции в целом должны предохраняться от коррозии путем покраски, смазывания и т. д.

4. Должны использоваться технологические приемы, повышающие сопротивление усталости.

5. При конструировании узлов отрицательное влияние концентраторов напряжений необходимо уменьшать путем перемещения их в менее нагруженные зоны. Так, на рис. 13.8, *а* сварной шов расположен на нейтральной линии, где напряжения от изгиба отсутствуют, на рис. 13.8, *б* заклепки также расположены ближе к нейтральной линии.

6. При конструировании сварных соединений концентрацию напряжений нужно уменьшать путем исключения резких перепадов жесткостей. На рис. 13.8, *в* замена треугольных косынок трапецидальными уменьшает концентрацию напряжений в зоне стыка за счет устранения пересечения сварных швов.

7. Уменьшать нормальные напряжения стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля заменой в зоне крепления тонкостенными стержнями закрытого профиля (рис. 13.8, *з*).

8. Повышать жесткость стыков путем перехода к закрытым профилям и использования вставок (рис. 13.8, *д*).

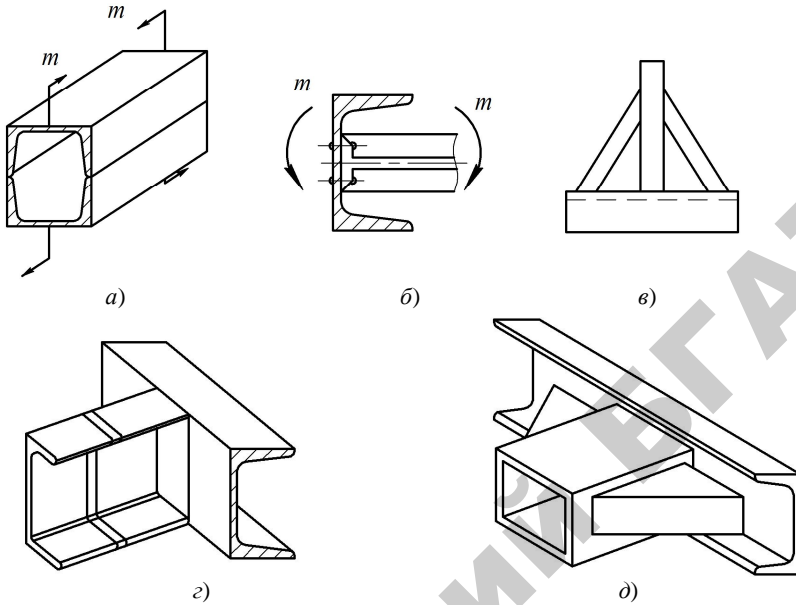


Рис. 13.8. Общие положения повышения сопротивления усталости деталей и элементов

### Контрольные вопросы

1. Что такое цикл напряжений?
2. Что такое амплитуда и среднее напряжение цикла? Как они определяются?
3. Определите максимальное и минимальное напряжение цикла, коэффициент асимметрии цикла. Перечислите типы циклов.
4. Что такое предел выносливости материала?
5. Что такое концентрация напряжений?
6. Какими коэффициентами характеризуется степень концентрации напряжений и как они определяются?
7. Как влияет масштабный фактор на предел выносливости материала? Что такое масштабный фактор и как он определяется?
8. Как влияет состояние поверхности на усталостную прочность деталей?

9. Что такое коэффициент качества поверхности и как он определяется?

10. Как влияет на предел выносливости обкатка поверхности детали роликами и обработка ее дробью?

11. Почему уточненные расчеты на усталостную прочность выполняют как проверочные? Какой вид при этом имеет условие прочности?

12. От каких основных факторов зависит величина требуемого коэффициента запаса прочности?

13. Как определяются коэффициенты запаса прочности при симметричном цикле при растяжении и сжатии, изгибе, кручении?

14. Как учитывают при определении коэффициента запаса прочности (асимметричный цикл) факторы, влияющие на величину предела выносливости?

15. Как определяют коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести?

16. Как определяют коэффициент запаса прочности для детали (вала), работающей на совместное действие изгиба с кручением?

17. Назовите основные пути повышения сопротивления усталости конструкций.



## 14. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЖЕНИЯ

До сих пор во всех рассмотренных нами задачах предполагалось, что действующие нагрузки статические, то есть они не изменяются с течением времени.

Примером статической нагрузки или статического действия нагрузки является действие висящего на цепи груза. Это действие остается статическим, если груз будет подниматься цепью с постоянной скоростью, а именно с ускорением, равным нулю. Но тот же груз, поднимаемый цепью с ускорением, будет действовать на цепь динамически. Для расчета цепи в этом случае мы должны учесть не только вес груза, но и силу инерции груза. Эта сила инерции может быть значительно больше, чем вес самого груза.

К динамическому виду нагрузки относится также ударная нагрузка. Примерами ударно действующих нагрузок являются действия падающего груза на забиваемую сваю, молота на отковываемую деталь и наковальню, взрыв пороха в стволе ружья и т. д. Кроме этого, на детали машин могут действовать ударные нагрузки вследствие наличия зазоров в местах сопряжения деталей. В последнем случае ударная нагрузка вредна и ее стараются всеми мерами уменьшить.

Таким образом, *динамическим* называется такой вид нагружения, при котором приложенные к элементу конструкции внешние нагрузки значительно изменяются за малые промежутки времени. Такие нагрузки, а также вызываемые ими в теле напряжения и деформации, называются *динамическими*. При действии динамической нагрузки движение тела совершается с ускорением или происходит резкое изменение скоростей соприкоснувшихся тел. Так, первый случай имеет место при подъеме грузов с ускорением; второй – при забивании свай в грунт с помощью копра, при ударе бойка кузнечного молота о наковальню и т. д. При ускоренном движении тела на него будут действовать силы инерции, которые должны учитываться в расчете. Динамический расчет имеет целью обеспечить необходимую прочность и не допустить нежелательных деформаций конструкции.

### 14.1. Динамические нагрузки, вызывающие движение тела с ускорением

Действие динамических нагрузок характеризуется наличием *сил инерции, равных произведению массы тела на его ускорение и направленных в сторону, противоположную ускорению ( $I = ma$ )*. Силы инерции вызывают дополнительные напряжения и деформации, которые необходимо учитывать.

Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на принципе Даламбера. Согласно этому принципу всякое движущееся тело может рассматриваться в равновесии, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции. То есть если силы инерции известны, то внутренние усилия определяются обычным путем – методом сечений.

Рассмотрим задачу о расчете троса, поднимающего груз  $G^f$  с ускорением  $a$  (рис. 14.1).

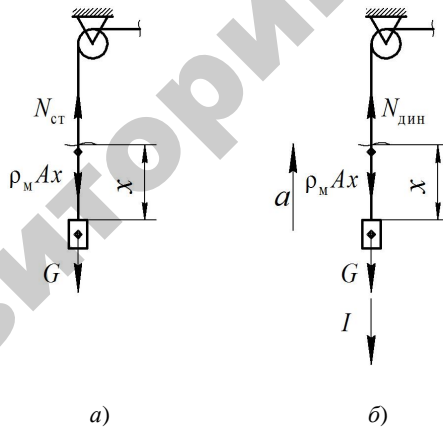


Рис. 14.1. Схема поднимаемого с ускорением груза

Площадь поперечного сечения троса –  $A$ , плотность материала троса –  $\rho_m$ .

Если груз находится в покое или поднимается равномерно, то есть без ускорения (рис. 14.1, а), то на расстоянии  $x$  от груза продольная сила будет равна

$$N_{\text{ст}} = G^r + \rho_m Ax, \quad (14.1)$$

где  $\rho_m Ax$  – вес участка троса длиной  $x$ .

Если груз поднимается с ускорением (рис. 13.1, б), возникает сила инерции  $I = ma$ , направленная вниз, значение которой определяется по формуле

$$I = ma = \frac{(G^r + \rho_m Ax)}{g} a, \quad (14.2)$$

где  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

Тогда получим

$$\begin{aligned} N_{\text{дин}} &= G^r + \rho_m Ax + I = G^r + \rho_m Ax + \frac{(G^r + \rho_m Ax)}{g} a = \\ &= (G^r + \rho_m Ax) \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = N_{\text{ст}} k_d, \end{aligned} \quad (14.3)$$

где  $k_d = 1 + \frac{a}{g}$  – динамический коэффициент.

Определим динамическое напряжение:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{дин}} &= \frac{N_{\text{дин}}}{A} = k_d \frac{N}{A}; \\ \sigma_{\text{дин}} &= k_d \sigma_{\text{ст}}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Если груз опускается с ускорением  $a$ , то величина ускорения будет входить в формулу усилия и напряжения со знаком «минус». При свободном падении груза при  $a = g$ ,  $k_d = 0$ , то есть трос будет следовать за грузом без натяжения,  $\sigma_{\text{ст}} = 0$ .

## 14.2. Критическая скорость вращения вала

Из практики эксплуатации машин известно, что вал при некоторых определенных числах оборотов, попадая в резонанс, становится динамически неустойчивым. При этом в поперечном сечении вала возникают недопустимые поперечные колебания вала.

Число оборотов вала, при котором вал переходит в резонанс, называется критическим (рис. 14.2).

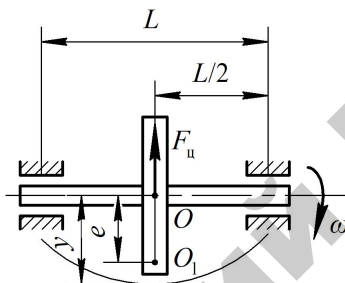


Рис. 14.2. Схема вала для определения критических оборотов:

$O_1$  – центр тяжести шкива;  $O$  – центр тяжести вала;

$e$  – эксцентриситет между центрами тяжести вала и шкива

(несовпадение центров тяжести масс вала и шкива);  $y$  – прогиб вала

Колебания и вибрация обусловлены эксцентриситетом между центрами тяжести сечения вала и насадками (шкив, шестерня и т. д.) на вал в данном сечении.

Прогиб вала определяется по формуле

$$y = \frac{e}{\frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2}}. \quad (14.5)$$

Из данного выражения следует:

1) если собственная скорость вращения вала  $\omega$  меньше критической скорости  $\omega_{кр}$ , то прогиб вала не выходит за пределы допустимого;

2) при стремлении собственной скорости вращения вала к критической амплитуда колебаний уменьшается, но прогиб вала увеличивается до бесконечности, что может привести к разрушению;

3) в том случае, если собственная скорость вращения больше критической, то прогиб вала уменьшается. При этом центр массы шкива приближается к оси опор подшипников и несбалансированный шкив самоцентрируется, то есть превышение собственной скорости над критической скоростью вращения соответствует работоспособности вала.

Таким образом, вывод вала из состояния *резонанса* можно обеспечить за счет динамической или статической балансировки, или за счет обеспечения неравенства собственной скорости вращения и критической. Поэтому при расчете вала на виброустойчивость используются следующие соотношения:

для жестких валов

$$\omega \leq 0,7\omega_{кр};$$

для гибких валов

$$\omega \geq 1,3\omega_{кр}.$$

Расчет критической скорости вращения вала проводят с учетом следующих условий:

а) критическая скорость вала без учета массы вала (учитывается только масса сосредоточенных на валу масс)

$$\omega_{кр}^m = \sqrt{\frac{1}{m_i \delta_{11}}}, \quad (14.6)$$

где  $m_i$  – масса устанавливаемого на вал элемента;

$\delta_{11}$  – коэффициент влияния или коэффициент приведения, который зависит от расположения на валу масс и расположения подшипников (рис. 14.3);

б) критическая скорость с учетом собственной массы вала

$$\omega_{\text{кр}}^{\text{B}} = \left( \frac{a}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{m_1}}; \quad (14.7)$$

$$\omega_{\text{кр}}^{\text{B}} = \left( \frac{a}{L_1} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_x}{m_1}},$$

где  $I_x$  – осевой момент инерции сечения вала относительно оси  $x$ ;  
 $a$  – корень решения уравнения изменения критической скорости от массы;

$m_1$  – масса единицы длины вала,  $m_1 = \frac{\pi d^4}{4} \rho$ .

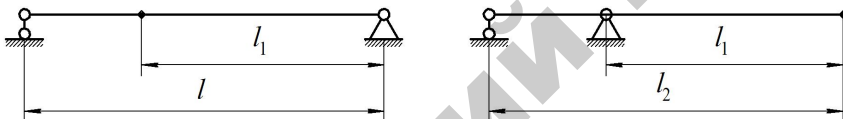


Рис. 14.3. Схемы однопролетного и консольного валов

Критическая скорость с учетом массы самого вала и массы, установленной на валу, определяется по формуле

$$\frac{1}{\omega_{\text{кр}}^2} = \frac{1}{(\omega_{\text{кр}}^{\text{B}})^2} + \frac{1}{(\omega_{\text{кр}}^{\text{m}})^2}; \quad I_x = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (14.8)$$

При выборе жесткого или гибкого вала необходимо учитывать отношение рабочей скорости вращения к критической, то есть

$$a = \frac{\omega}{\omega_{\text{кр}}}. \quad (14.9)$$

При этом следует помнить, что:

– уменьшение диаметра вала уменьшает деформацию и, следовательно, уменьшает критическую скорость;

- увеличение длины вала уменьшает критическую скорость вращения;
- смещение массы на валу от центра вдоль оси уменьшает критическую скорость вращения;
- увеличение вылета центра вращающихся масс уменьшает критическую скорость вращения;
- введение упругих опор уменьшает критическую скорость вращения.

### **14.3. Механические процессы, сопровождающие удар**

Многие детали машин и элементы конструкций испытывают постоянно или периодически ударные нагрузки (кузнечные молоты и штампы; строительные копры и сваи; стволы стрелкового и артиллерийского оружия; режущий инструмент при обработке граненых заготовок; отбойные молотки; двигатели внутреннего сгорания при детонации; шасси транспортных средств при скоростном движении по неровной дороге). На практике нередки случаи, когда детали, изготовленные из пластичных сталей, при ударном нагружении преждевременно выходят из строя в результате хрупкого или вязкого разрушения. Хрупкое разрушение такое, которое происходит путем отрыва одних частиц материала от других без заметных макропластических деформаций. Поверхность хрупкого излома имеет кристаллический блеск. Вязкое разрушение совершается при значительных макропластических деформациях путем сдвига по плоскостям действия наибольших касательных напряжений. Поверхность вязкого разрушения имеет матовый оттенок. В некоторых случаях наблюдается смешанный характер разрушения, когда примыкающая к надрезу часть излома разрушается хрупко, а остальная – вязко. Хрупкое разрушение более опасно, поскольку оно в меньшей мере предсказуемо, совершается практически мгновенно, имеет более широкий диапазон рассеивания разрушающих нагрузок.

Под *ударом* понимается взаимодействие движущихся навстречу друг другу тел в результате их соприкосновения, связанное с резким изменением скоростей точек этих тел за весьма малый промежуток времени.

Ударная нагрузка является динамической. Время удара измеряется в тысячных, а иногда и миллионных долях секунды, а сила удара достигает большой величины, например, действие кузнечного молота на кусок металла, удар падающего груза при забивке свай и др.

За очень малый промежуток времени скорость ударяющегося тела становится равной нулю. В этот момент напряжения и деформации в системе достигают наибольших значений. Целью расчета на удар и является определение наибольших деформаций и напряжений.

Система, подвергающаяся удару, может испытывать различные деформации, такие как сжатие, растяжение, изгиб, кручение, изгиб с кручением и др. Поэтому различают продольный, поперечный и скручивающий удары (рис. 14.4).

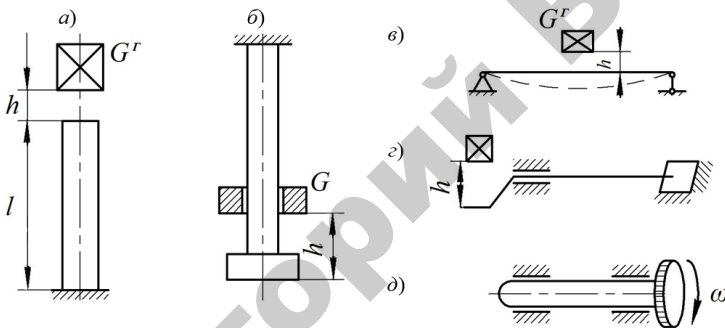


Рис. 14.4. Схемы ударных нагрузок

На рис. 14.4, а и б показаны продольные удары – сжимающий и растягивающий, на рис 14.4, в показан поперечный изгибающий удар.

Скручивающий удар имеет место при падении груза  $G$  с высоты  $h$  или при резком снижении угловой скорости  $\omega$  вала с маховиком, например, при внезапной его остановке (рис. 14.4, г, д).

Точное решение задачи о напряжениях и деформациях при ударе затруднительно, потому что неизвестен закон изменения скорости при соударении тел и, следовательно, действующих при ударе нагрузок, неизвестны силы сопротивления при ударе, чрезвычайно сложен закон распространения скорости деформации в системе, воспринимающей удар.

В практике применяют упрощенные методы расчета, основанные на следующих основных допущениях:



1) деформации стержня от ударяющего груза распространяются по всей длине стержня, они подчиняются закону Гука и подобны деформациям, возникающим от статического приложения того же груза. Поэтому связь между динамическими силами и перемещениями остается такой же, как и при статической нагрузке;

2) опорные устройства, как правило, полагают абсолютно жесткими;

3) ударяющее тело является абсолютно жестким и при ударе не отскакивает от системы.

#### 14.4. Техническая теория удара. Динамический коэффициент

Изучение напряжений и деформаций при ударе основано на использовании закона сохранения энергии. При этом предполагается, что кинетическая энергия падающего груза  $K$  численно равна потенциальной энергии  $U$  деформации упругой системы:

$$K = U. \quad (14.10)$$

Рассмотрим сначала расчет на удар в случаях, когда масса упругого тела, подвергающегося удару, мала и ею можно пренебречь. Продольный удар груза  $G^r$  падает с высоты  $h$  и ударяется о стержень, вызывая его сжатие на величину  $\Delta_{\text{дин}}$ , которая больше деформации стержня  $\Delta_{\text{ст}}$  при статическом действии груза  $G^r$  (рис. 14.5).

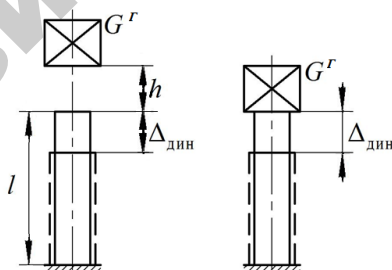


Рис.14.5. Схема сжатия при ударе

Тогда кинетическая энергия падающего груза будет равна

$$K = G^r(h + \Delta_{\text{дин}}). \quad (14.11)$$

Потенциальная энергия численно равна площади треугольника диаграммы  $F_{\text{дин}} - \Delta_{\text{дин}}$  (рис. 14.6).

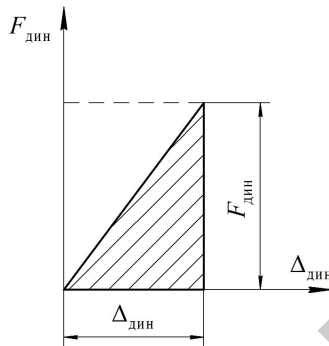


Рис. 14.6. Схема для определения потенциальной энергии деформации при ударе

$$U = \frac{1}{2} F_{\text{дин}} \Delta_{\text{дин}}. \quad (14.12)$$

С учетом зависимости  $K = U$  имеем

$$G^r (h + \Delta_{\text{дин}}) = \frac{1}{2} F_{\text{дин}} \Delta_{\text{дин}}. \quad (14.13)$$

Выразим нагрузки через деформации:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{G^r l}{EA} \Rightarrow G^r = \Delta_{\text{ст}} \frac{EA}{l};$$

$$\Delta_{\text{дин}} = \frac{F_{\text{дин}} l}{EA} \Rightarrow F_{\text{дин}} = \Delta_{\text{дин}} \frac{EA}{l}.$$

Далее имеем

$$\Delta_{\text{ст}} \frac{EA}{l} (h + \Delta_{\text{дин}}) = \frac{1}{2} \Delta_{\text{дин}}^2 \frac{EA}{l};$$

$$\Delta_{\text{ст}} h + \Delta_{\text{ст}} \Delta_{\text{дин}} - \frac{1}{2} \Delta_{\text{дин}}^2 = 0;$$

$$\Delta_{\text{дин}}^2 - 2\Delta_{\text{ст}} \Delta_{\text{дин}} - 2h\Delta_{\text{ст}} = 0.$$

Получим квадратное уравнение для определения  $\Delta_{\text{дин}}$ :

$$\Delta_{\text{дин}} = \Delta_{\text{ст}} \pm \sqrt{\Delta_{\text{ст}}^2 + 2h\Delta_{\text{ст}}}. \quad (14.14)$$

Учитывая, что  $\Delta_{\text{дин}} > \Delta_{\text{ст}}$ , в формуле (14.14) перед корнем следует взять знак «плюс». Тогда получим

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{дин}} &= \Delta_{\text{ст}} + \sqrt{\Delta_{\text{ст}}^2 + 2h\Delta_{\text{ст}}} = \Delta_{\text{ст}} + \Delta_{\text{ст}} \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = \\ &= \Delta_{\text{ст}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} \right) = \Delta_{\text{ст}} k_{\text{д}}, \end{aligned} \quad (14.15)$$

где  $k_{\text{д}}$  – динамический коэффициент, который будет равен

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}. \quad (14.16)$$

Как видно из формулы (14.16) динамический коэффициент зависит от величины, определяемой по формуле

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Gl}{EA}. \quad (14.17)$$

Зная динамический коэффициент, можно определить и напряжения

$$\sigma_{\text{дин}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}}. \quad (14.18)$$

Следовательно, напряжения при ударе зависят не только от площади поперечного сечения стержня  $A$  (как при статическом

приложении нагрузки), но и от длины стержня и жесткости материала  $E$ . Чем больше длина  $l$ , тем напряжения при ударе будут меньшими. С увеличением модуля упругости напряжения увеличиваются.

### 14.5. Анализ формулы динамического коэффициента

С целью уменьшения динамических напряжений в технике используются различные амортизаторы, увеличивающие податливость стержня (резиновые прокладки, пружины) (рис. 14.7).

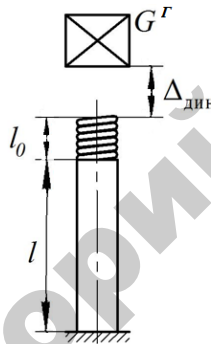


Рис. 14.7. Схема удара сжатием с амортизатором – пружиной

В этом случае

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст\ стержня} + \Delta_{ст\ пружины}}}. \quad (14.19)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. При мгновенном приложении нагрузки, когда  $h = 0$  (скорость или кинетическая энергия ударной массы равна нулю), динамический коэффициент  $k_d$  равен 2 (см. формулу (14.19)).

При этом напряжение и перемещение в два раза больше, чем при статическом приложении нагрузки.

2. Если высота падения груза  $h$  велика, то есть

$$\left( \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}} \gg 1 \right),$$

то единицей в подкоренном выражении для определения динамического коэффициента можно пренебречь, тогда

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}.$$

3. При очень больших величинах  $\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}$  можно пренебречь единицей и перед корнем. Тогда

$$k_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}.$$

Если известна скорость падения груза, а не высота падения, то динамический коэффициент может быть выражен через скорость. При свободном падении

$$V^2 = 2gh, \quad 2h = \frac{V^2}{g},$$

Тогда

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \frac{V}{\sqrt{g\Delta_{\text{ст}}}}. \quad (14.20)$$

*Определение динамического коэффициента при продольном ударе стержней с переменным поперечным сечением.*

Сравним прочность двух стержней, подвергающихся продольному удару. Один стержень имеет постоянную площадь сечения  $A$ , а другой на участке длиной  $l$  имеет площадь сечения  $A$ , а в пределах остальной длины стержня –  $nA$ , где  $n > 1$  (рис. 14.8).

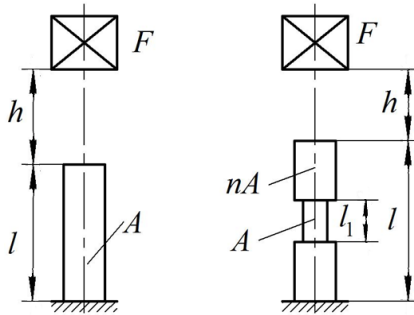


Рис. 14.8. Схема продольного удара

При статическом воздействии груза  $F$  оба бруса равнопрочны, так как наибольшие напряжения (при расчете без учета концентрации напряжений) в каждом из них

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{F}{A}. \quad (14.21)$$

При ударном действии нагрузки динамический коэффициент для первого бруса равен

$$k_{\text{д1}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст1}}}} = \sqrt{\frac{2hEF}{Fl}},$$

где  $\Delta_{\text{ст1}} = \frac{Fl}{EA}$ .

Для второго бруса

$$\Delta_{\text{ст2}} = \frac{F(l-l_1)}{EnA} + \frac{Fl_1}{EA}.$$

Если длина  $l_1$  очень мала, что имеет место, например, при наличии поперечных выточек, то приближенно можно принять

$$\Delta_{\text{ст2}} = \frac{Fl}{AE}.$$

Динамический коэффициент для второго стержня

$$k_{д2} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст2}}} = \sqrt{\frac{2hEnA}{Fl}} = k_{д1} \sqrt{n}, \quad (14.22)$$

то есть в  $\sqrt{n}$  раз больше, чем для первого стержня. Таким образом, второй брус при ударном действии нагрузки менее прочен, чем первый. Поэтому оказывается более выгодным уменьшать площадь сечения по всей длине стержня.

В качестве примера можно привести болт, передающий от одной части конструкции на другую растягивающий удар. Участок болта с нарезкой, имеющий меньший диаметр, будет работать как выточка. Обрыв болта весьма вероятен. Для улучшения конструкции необходимо сделать его площадь всюду (или почти всюду) равной площади по внутреннему диаметру нарезки. Этого можно достигнуть путем обтачивания болта или высверливанием в нем канала (рис. 14.9).

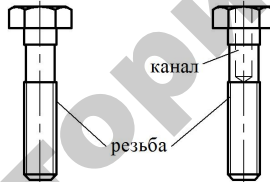


Рис. 14.9. Болт, работающий на растягивающий удар

*Поперечный изгибающий удар.* Рассмотрим балку, свободно лежащую на двух шарнирных опорах. Балка изгибается под действием груза  $F$ , падающего с высоты  $h$  (рис. 14.10).

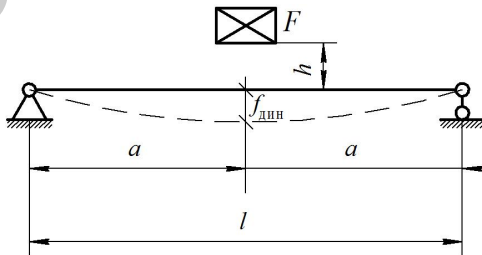


Рис. 14.10. Схема поперечного изгибающего удара

Динамический коэффициент в этом случае определяется по формуле

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{ст}}}, \quad (14.23)$$

где  $f_{ст}$  – прогиб балки в месте падения груза при статическом ее нагружении.

Если  $a = b = l/2$ , то

$$f_{ст} = \frac{Fl^3}{48EI}, \quad (14.24)$$

тогда

$$f_{дин} = k_d f_{ст}, \quad \sigma_{дин} = k_d \sigma_{ст}.$$

Так же, как и при продольном ударе, внезапное приложение нагрузки на балку вызывает напряжение

$$\sigma_{дин} = 2\sigma_{ст}. \quad (14.25)$$

Условие прочности при изгибающем ударе имеет такой же вид, как и при продольном, то есть

$$\sigma_{дин} \leq [\sigma_d]. \quad (14.26)$$

*Учет массы тела, испытывающего удар.*

Если груз падает на стержень, обладающий значительной массой, то решение значительно усложняется. Можно применить приближенное решение, оно сводится к замене реальной массы стержня приведенной массой, сосредоточенной в месте удара. Учет массы тела может оказать существенное влияние на динамические напряжения.

Если груз  $G^r$  падает на стержень, вес  $Q$  которого значителен, то динамический коэффициент определяется по формуле



$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст} \left(1 + \beta \frac{Q}{G^r}\right)}} \quad (14.27)$$

где  $h$  – высота падения;

$\beta$  – коэффициент приведения массы стержня. Он зависит от способов закрепления концов стержня и вида удара (продольный, поперечный и т. д.). Для определения коэффициента  $\beta$  рассматривают кинетическую энергию стержня при его движении вследствие удара;

$Q$  – вес ударяемого стержня;

$G^r$  – вес падающего груза.

Рассмотрим частные случаи.

1. *Продольный удар.* Стержень постоянного сечения  $A$  зашпелен одним концом. Плотность материала  $\rho_m$ . Будем считать, что в момент удара верхний конец ударяемого стержня получает скорость  $V$ . Скорость нижележащих сечений стержня изменяется по линейному закону, достигая нулевого значения в нижнем сечении стержня (рис. 14.11).

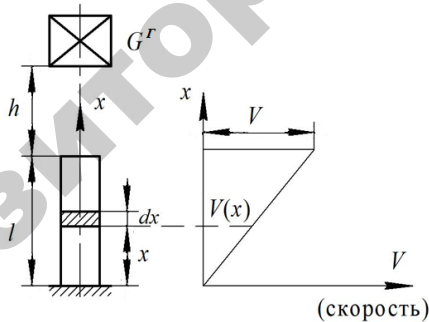


Рис. 14.11. Схема продольного удара

Скорость движения произвольного сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от нижнего сечения, будет равна

$$V(x) = V \frac{x}{l}. \quad (14.28)$$

Так как частицы стержня движутся, то стержень обладает кинетической энергией. Кинетическая энергия элементарной частицы стержня длиной  $dx$  будет равна

$$dk = \frac{dmV(x^2)}{2} = \frac{F\rho_m dxV(x^2)}{2g}. \quad (14.29)$$

Кинетическая энергия всего стержня с учетом данной формулы равна

$$\begin{aligned} A &= \int_0^l \frac{F\rho_m V(x^2)}{2g} dx = \int_0^l \frac{F\rho_m}{2g} V^2 \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{F\rho_m V^2}{2gl^2} \int_0^l x^2 dx = \\ &= \frac{F\rho_m V^2}{2gl^2} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} \frac{F\rho_m V^2 l}{2g} = \frac{1}{3} m \frac{V^2}{2} = \frac{m_{\text{прив}}}{2} V^2, \end{aligned} \quad (14.30)$$

где  $m_{\text{прив}}$  – приведенная масса стержня.

2. *Поперечный удар.* В этом случае балка постоянного поперечного сечения защемлена одним концом и испытывает удар груза на свободном конце (рис. 14.12).

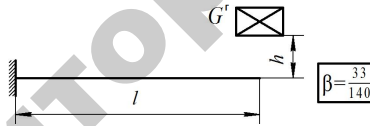


Рис. 14.12. Схема консольной балки при ударе

Для балки, закрепленной шарнирно, удар приходится посередине пролета (рис. 14.13).

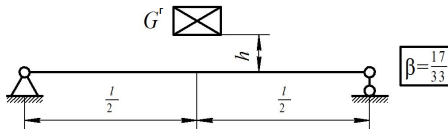


Рис. 14.13. Схема поперечного удара для однопролетной балки

Учет массы ударяемого стержня может значительно уменьшить динамический коэффициент.

## 14.6. Удар при кручении. Определение напряжений при ударном воздействии

Определим динамический крутящий момент и динамическое напряжение, возникающее в сечении вала при ударе, вызванном внезапной остановкой его левого конца  $A$ .

Пусть вал с диском, момент инерции которого относительно продольной оси вращения равен  $I_m > 0$ , вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Если внезапно остановить левый конец стержня, то вся кинетическая энергия, которой обладает диск, обратится в потенциальную энергию деформации вала (рис. 14.14).

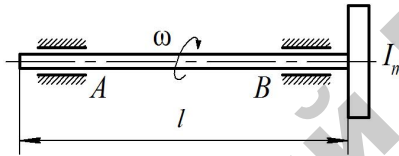


Рис. 14.14. Схема крутильного удара

Энергия диска вызывает динамический крутящий момент. Кинетическая энергия диска

$$K = I_m \frac{\omega^2}{2}. \quad (14.31)$$

Потенциальная энергия, накопленная в брус:

$$U = \frac{M_{\text{дин}} \Phi_{\text{дин}}}{2}, \quad (14.32)$$

где  $M_{\text{дин}}$  – действующий крутящий момент, эквивалентный по результатам своего действия явлению крутящего удара;

$\Phi_{\text{дин}}$  – динамический угол закручивания вала.

Согласно закону сохранения энергии, имеем

$$I_m \frac{\omega^2}{2} = \frac{M_{\text{дин}} \Phi_{\text{дин}}}{2}.$$

Учитывая, что

$$\varphi_{\text{дин}} = \frac{M_{\text{дин}} l}{GI_{\text{кр}}},$$

получим

$$I_m \frac{\omega^2}{2} = \frac{M_{\text{дин}}^2 l}{2GI_{\text{кр}}},$$

тогда

$$M_{\text{дин}} = \omega \sqrt{\frac{I_m GI_{\text{кр}}}{l}}, \quad (14.33)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения системы;

$I_m$  – момент инерции массы диска относительно оси вращения;

$GI_{\text{кр}}$  – жесткость сечения вала при кручении;

$l$  – длина части бруса, подвергающейся деформации.

Зная  $M_{\text{дин}}$ , находим максимальное напряжение при крутящем ударе так же, как при статическом кручении:

$$\tau_{\text{дин}} = \frac{M_{\text{дин}}}{W_{\text{кр}}}; \quad (14.34)$$

для круглого сечения

$$\tau_{\text{дин}} = \frac{M_{\text{дин}}}{W_p}. \quad (14.35)$$

Динамический угол закручивания

$$\varphi_{\text{дин}} = \frac{M_{\text{дин}} l}{GI_{\text{кр}}} = \omega \sqrt{\frac{I_m l}{GI_{\text{кр}}}}. \quad (14.36)$$

Таким образом, определение напряжений и деформаций при ударном кручении методически мало отличается от ударного растяжения (сжатия) или ударного изгиба. При ударном кручении применимы формулы для определения динамического коэффициента (14.16, 14.20).

#### 14.7. Условие прочности при ударе

При ударном нагружении развитие и распространение пластических деформаций и напряжений в образце затруднено. Поэтому происходит повышение пределов текучести и прочности материала при резком уменьшении относительного удлинения.

Поскольку вывод всех формул для расчета на удар построен на основе приближенной теории упругого удара, то расчет на прочность при ударе принято проводить не по динамическим, а по статическим предельным характеристикам материала. Определив по соответствующим формулам величину динамического напряжения, условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_d \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (14.37)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение при статическом растяжении (сжатии);

$\sigma_T$  – предел текучести материала.

Величина коэффициента безопасности  $n_T$  принимается несколько большей ( $n_T = 2$ ) по сравнению с нормативным значением ( $n_T = 1,4 \dots 1,6$ ), выбираемый при статическом действии нагрузок. Кроме того, для деталей, работающих на ударную нагрузку, необходимо применять материал более высокого качества по однородности и пластическим свойствам.

При проектировании элементов конструкций, испытывающих удар, следует отчетливо представлять, что сопротивление их ударной нагрузке качественно отличается от сопротивления статической нагрузке. С целью уменьшения динамических напряжений необходимо стремиться увеличивать статические деформации.

## 14.8. Элементы рационального проектирования систем при ударном нагружении

Детали, испытывающие продольный и скручивающий удары, должны иметь по возможности большую длину и одинаковое поперечное сечение. Местные, на небольшой длине стержня, уменьшения площади поперечного сечения вызывают резкое повышение динамических напряжений. Уменьшить жесткость систем можно постановкой пружин, путем использования материала с меньшим модулем упругости. Весьма эффективным является выравнивание площадей поперечных сечений элементов; местные выточки крайне нежелательны.

Например, конструкция, показанная на рис. 14.15, *а*, будет плохо сопротивляться ударной нагрузке, так как участок болта, имеющий меньший диаметр, будет работать как выточка. Значительная энергия удара будет поглощаться именно частью болта, имеющей нарезку, поэтому обрыв болта на этом участке очень вероятен. Улучшить конструкцию можно, заставив болт более или менее равномерно поглощать энергию удара по всей длине; для этого нужно сделать его площадь поперечного сечения равной площади по внутреннему диаметру нарезки путем обтачивания тела болта снаружи (рис. 14.5, *б*) или высверливанием в нем отверстия (рис. 14.15, *в*).

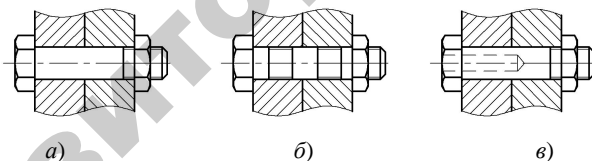


Рис. 14.15. Улучшение работы конструкции болтового соединения

На рис 14.16, *а* показаны рациональное (вверху) и нерациональное (внизу) крепления крышек цилиндра бурового, клепального инструмента болтами. Крепление крышек длинными болтами включает обрыв болтов при ударной нагрузке.

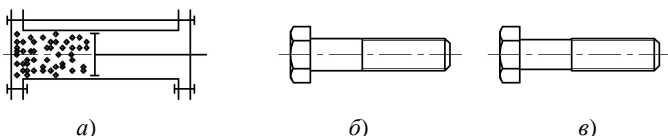


Рис. 14.16. Рациональные формы отдельных конструктивных элементов

На рис. 14.16, б представлена нерациональная, а на рис. 14.16, в рациональная форма болта, воспринимающего ударную нагрузку. Уменьшение площади его ненарезной части не увеличивает абсолютное статическое удлинение, а значит, уменьшает динамический коэффициент.

### Контрольные вопросы

1. Какие виды динамических нагрузок существуют?
2. Что такое силы инерции? Как они учитываются в динамических расчетах? Как определяется динамический коэффициент?
3. Какие существуют критерии определения критической скорости вращения вала?
4. Что такое ударная динамическая нагрузка?
5. В чем различие между продольным и поперечным ударами?
6. Как определяется динамический коэффициент при ударе?
7. Как определяется динамический коэффициент при ударе стержней с переменным поперечным сечением?
8. Как влияет учет массы ударяемого стержня на величину динамического коэффициента?
9. Что такое крутильный удар?
10. Как определяется динамический угол закручивания?
11. Как определяются допустимые напряжения при ударе?
12. Как выполняется расчет на прочность при ударе?
13. Охарактеризуйте условие прочности при ударе.
14. Приведите примеры рационального проектирования систем при ударном нагружении.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сурин, В. М. Прикладная механика: учеб. пособие / В. М. Сурин. – Минск : Новое знание, 2005. – 388 с.
2. Марченко, С. И. Прикладная механика : учеб. пособие / С. И. Марченко, Е. П. Марченко, Н. В. Логинова. – Ростов на Дону : Феникс, 2006. – 541 с.
3. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
4. Афанасенко, Е. В. Механика материалов : учебник / Е. В. Афанасенко, М. В. Нестеров, В. Н. Основин. – Минск : ИВЦ Минфина, 2017. – 492 с.
5. Механика материалов : учеб. пособие / О. И. Мисуно [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2013. – 252 с.
6. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов. Практикум по решению задач : учеб. пособие / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2009, – 688 с.
7. Прикладная механика : учебник для вузов / В. В. Джамай [и др.]; под ред. В. В. Джамай. – М. : Дрофа, 2004. – 414 с.
8. Николаенко, В. Л. Прикладная механика. Расчет типовых элементов конструкций : учеб. пособие / В. Л. Николаенко. – Минск : изд-во Гревцова, 2010. – 386 с.



**ПРИЛОЖЕНИЯ**

Репозиторий БГАТУ

## Приложение А (справочное) Справочные данные

В данном учебном издании использована *Международная система единиц Systeme International d'Unites* (в русской транскрипции СИ), которая является обязательной во всех областях науки и техники. Кратко напомним некоторые основные указания по применению СИ.

Значения физических величин, как правило, представляются в виде десятичных кратных и дольных единиц от исходных единиц СИ путем умножения их на число 10 в соответствующей степени. Наименование десятичных кратных и дольных единиц образуется присоединением приставок к наименованиям исходных единиц (табл. А.1).

Таблица А.1  
Наименование десятичных кратных и дольных единиц

Приставка	Сокращенное обозначение	Множитель	Приставка	Сокращенное обозначение	Множитель
Тера	Т	$10^{12}$	Деци	д	$10^{-1}$
Гига	Г	$10^9$	Санتي	с	$10^{-2}$
Мега	М	$10^6$	Милли	м	$10^{-3}$
Кило	к	$10^3$	Микро	мк	$10^{-6}$
Гекто	г	$10^2$	Нано	н	$10^{-9}$
Дека	да	$10^1$	Пико	п	$10^{-12}$

Приставки рекомендуется выбирать таким образом, чтобы числовые значения величин находились в пределах 0,1–1000. Например, сила  $F$  равняется 14,3 кН (килоньютона), но не 0,0143 МН (меганьютона) или 1430 даН (деканьютона).

Для каждой физической величины, как правило, следует применять одно (основное) наименование. Например, в качестве характеристики количества вещества, заключенного в теле, следует применять массу (а не вес); в качестве параметра вещества – плотность, определяемую как отношение массы к объему.

Среди производных единиц с большой буквы пишутся те, которые образованы от фамилий ученых (Гц, Н, Па и т. д.).

Производные единицы связаны с основными, например

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кгм/с}^2; 1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2;$$

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Нм}; 1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}.$$

Приведем пример использования указанных выше приставок. Модуль упругости для стали

$$\begin{aligned} E &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па} = 2,1 \cdot 10^9 \text{ гПа} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ кПа} = \\ &= 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 0,21 \cdot 10^3 \text{ ГПа} = 0,21 \text{ ТПа}. \end{aligned}$$

В некоторых задачах по механике материалов в исходных данных используются внесистемные единицы, например, обороты в минуту или сантиметр в четвертой степени и т. д. Это связано с тем, что на многих работающих сейчас электродвигателях, создающих динамическую нагрузку, обозначено именно количество оборотов в минуту, а в действующих сортаментах на прокат даны геометрические характеристики пока еще в единицах, производных от сантиметра. Переход от этих единиц к системным очевиден. Например

$$1 \text{ см}^4 = 1(10^{-2} \text{ м})^4 = 1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$300 \text{ об/мин} = 5 \text{ об/с} = 5 \cdot 2\pi \text{ Гц}.$$

Основные механические величины в единицах СИ и соотношения между ними и прежними единицами, подлежащими изъятию, приводятся в табл. А.2.

Таблица А.2

Основные механические величины в системе СИ  
и соотношения между ними и прежними единицами

Наименование величины	Единица		Соотношение единиц
	Наименование	Обозна- чение	
Сила, нагрузка, вес	Ньютон	Н	1Н $\approx$ 0,1 кгс 1кН $\approx$ 0,1 тс
Линейная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м	1Н/м $\approx$ 0,1 кгс/м 1кН/м $\approx$ 0,1 тс/м
Механическое напряжение, модуль упругости	Паскаль	Па	1 Па $\approx$ 0,1 кгс/м <sup>2</sup> 1 кПа $\approx$ 0,1 тс/м <sup>2</sup> 1 МПа $\approx$ 10 кгс/см <sup>2</sup>
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр	Нм	1 Нм $\approx$ 0,1 кгсм 1 кНм $\approx$ 0,1 тсм
Работа (энергия)	Джоуль	Дж	1 Дж $\approx$ 0,1 кгсм
Мощность	Ватт (джоуль в секунду)	Вт	1 Вт $\approx$ 0,1 кгсм/с 1 кВт $\approx$ 1,36 л.с.

Некоторые основные и производственные единицы, имеющие специальные названия (м, с, Гц, Н, Дж, Вт), в окончательных результатах расчетов можно увеличивать или уменьшать, используя для этого приставки, указанные в табл. А.1.

Обозначения основных величин указаны в табл. А.3.

Таблица А.3

Обозначения основных величин

Обозначение	Наименование	Единицы измерения
1	2	3
<b>1. Внешние нагрузки и параметры поперечных сечений</b>		
<i>F</i>	Сосредоточенная внешняя сила (нагрузка)	Н, кН
<i>R</i>	Реактивная сила (сила реакции связей)	Н, кН
<i>q</i>	Интенсивность распределенной нагрузки по длине стержня	Н/м, кН/м

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
<i>p</i>	Интенсивность распределенной нагрузки по площади	Н/м <sup>2</sup> , кН/м <sup>2</sup>
<i>M</i>	Сосредоточенный момент пары сил	Н·м, кН·м
<i>A</i>	Площадь поперечного сечения бруса	м <sup>2</sup> , см <sup>2</sup> , мм <sup>2</sup>
<i>b, h</i>	Соответственно ширина и высота поперечного сечения бруса	м, см, мм
<i>l</i>	Длина бруса, пролет	м
<i>e</i>	Эксцентриситет внешней нагрузки	м, см, мм
<b>2. Обозначение осей</b>		
<i>x</i>	Продольная ось стержня	–
<i>y, z</i>	Оси инерции поперечного сечения стержня	–
<i>v, u</i>	Главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня	–
<b>3. Внутренние силовые факторы</b>		
<i>N</i>	Продольная (нормальная) сила	Н, кН
<i>Q<sub>z</sub>, Q<sub>y</sub></i>	Поперечные силы, направленные вдоль оси <i>y, z</i>	Н, кН
<i>M<sub>y</sub>, M<sub>z</sub></i>	Изгибающие моменты в поперечном сечении балки относительно осей <i>y, z</i>	Н·м, кН·м
<i>T</i>	Крутящий момент в поперечном сечении вала	Н·м, кН·м
<b>4. Напряжения</b>		
<i>ρ (ρ<sub>0</sub>)</i>	Полное напряжение или напряжение в данной точке рассматриваемого сечения	МПа
<i>σ</i>	Нормальное напряжение (общее обозначение)	МПа
<i>τ, τ<sub>α</sub>, τ<sub>xy</sub></i>	Касательное напряжение (общее обозначение)	МПа
<i>σ<sub>см</sub></i>	Нормальное напряжение при смятии	МПа
<i>[σ]</i>	Допускаемое нормальное напряжение	МПа
<i>[σ<sub>p</sub>]</i>	Допускаемое нормальное напряжение при растяжении	МПа
<i>[σ<sub>c</sub>]</i>	Допускаемое нормальное напряжение при сжатии	МПа

1	2	3
$[\tau]$	Допускаемое касательное напряжение	МПа
$\sigma_{\max}, \tau_{\max}$	Максимальные расчетные напряжения	МПа
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Главные нормальные напряжения	МПа
$\sigma_{\text{эКВ}}$	Эквивалентное напряжение	МПа
<b>5. Перемещения и деформации</b>		
$\Delta l$	Абсолютное удлинение (укорочение) стержня	м, см, мм
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Относительные линейные деформации	–
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Главные деформации	–
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Относительные угловые деформации (углы сдвига) в координатных плоскостях	–
$\sigma$ (омикрон)	Относительное изменение объема	–
$\alpha$	Коэффициент линейного температурного расширения	–
$\delta$	Перемещения сечения бруса при растяжении (сжатии)	см, мм
<b>6. Основные физико-механические характеристики материалов</b>		
$\sigma_{\text{пц}}$	Предел пропорциональности	МПа
$\sigma_y$	Предел упругости	МПа
$\sigma_T$	Предел текучести	МПа
$\sigma_B$	Предел прочности	МПа
$E$	Модуль продольной упругости (модуль Юнга)	МПа
$G$	Модуль упругости при сдвиге (модуль сдвига)	МПа
$\nu$ (ню)	Коэффициент Пуассона	–
$\rho_m$	Плотность материала	Н/м <sup>3</sup> , кН/м <sup>3</sup>
<b>7. Геометрические характеристики поперечных сечений стержня</b>		
$S_z, S_y$	Статические моменты площади относительно осей z, y	м <sup>3</sup> , см <sup>3</sup> , мм <sup>3</sup>

1	2	3
$I_z, I_y$	Осевые моменты инерции сечения относительно осей $z, y$	$\text{м}^4, \text{см}^4, \text{мм}^4$
$I_{yz}$	Центробежный момент инерции сечения относительно осей $y, z$	$\text{м}^4, \text{см}^4, \text{мм}^4$
$I_p$	Полярный момент инерции сечения	$\text{м}^4, \text{см}^4, \text{мм}^4$
$I_v, I_u$	Главные моменты инерции сечения	$\text{м}^4, \text{см}^4, \text{мм}^4$
$i_x, i_y, i_z$	Радиусы моментов сечения относительно соответствующих осей	м, см, мм
$C$	Центр тяжести сечения	—
<b>8. Кручение</b>		
$\varphi$	Угол закручивания	рад, град.
$\theta$ (тэта)	Относительный угол закручивания	—
$[\theta]$	Допускаемый относительный угол закручивания	рад/м, град./м
$\gamma$	Угол сдвига	град.
$P$	Мощность	Вт, кВт
$n$	Частота вращения	$\text{мин}^{-1}$
$\omega$	Угловая скорость	$\text{с}^{-1}$
$W_p$	Полярный момент сопротивления	$\text{м}^3, \text{см}^3, \text{мм}^3$
$\rho$	Радиус кривизны волокна, принадлежащего нейтральному слою	м, см, мм
$d$	Диаметр круглого стержня (вала)	м, см, мм
<b>9. Изгиб</b>		
$W_z, W_y$	Осевой момент сопротивления относительно осей $z, y$	$\text{м}^3, \text{см}^3, \text{мм}^3$
$y$	Прогиб балки при изгибе	мм
$\theta$	Угол поворота поперечного сечения (угол поворота оси) балки	рад, град.
$F_k$	Критическая сила	Н, кН
$\sigma_k$	Критическое напряжение	МПа

1	2	3
<b>10. Продольный изгиб прямых стержней</b>		
$\lambda$	Гибкость стержня	–
$\lambda_{\text{пр}}$	Предельная гибкость стержня	–
$\mu$	Коэффициент приведения длины стержня	–
$i_{\text{min}}$	Наименьший радиус инерции сечения	м, см, мм
$n_{\gamma}$	Коэффициент безопасности по устойчивости	–
$[\sigma_{\gamma}]$	Допускаемое напряжение на устойчивость	МПа
$\varphi$	Коэффициент продольного изгиба	–
<b>11. Прочность при циклически изменяющихся нагрузках</b>		
$\sigma_m (\tau_m)$	Среднее напряжение цикла	МПа
$\sigma_a (\tau_a)$	Амплитудное напряжение цикла	МПа
$r$	Коэффициент асимметрии цикла	–
$\sigma_{-1} (\tau_{-1})$	Предел выносливости при симметричном цикле	МПа
$k_{\sigma} (k_{\tau})$	Эффективный коэффициент концентрации	–
$\varepsilon_{\text{мс}} (\varepsilon_{\text{мт}})$	Масштабный коэффициент	–
$\varepsilon_{\text{пс}} (\varepsilon_{\text{пт}})$	Коэффициент качества поверхности	–
$\beta_{\text{впр}}$	Коэффициент упрочнения	–
$\Psi_{\sigma} (\Psi_{\tau})$	Коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла	–
$n_r$	Коэффициент безопасности по усталостному разрушению	–
$n_r$	Коэффициент безопасности по текучести материала	–
$k_{\text{сд}} (k_{\text{сд}})$	Общий коэффициент снижения предела выносливости при симметричном цикле	–
<b>12. Динамические нагружения</b>		
$F_{\text{и}}$	Сила инерции	Н, кН
$F_{\text{д}}$	Динамическая сила	Н, кН
$\sigma_{\text{д}} (\tau_{\text{д}})$	Динамическое напряжение	МПа
$\Delta_{\text{д}}$	Динамическое перемещение	см, мм
$a$	Ускорение	м/с <sup>2</sup>
$k_{\text{д}}$	Динамический коэффициент	–



Таблица А.4

Значения тригонометрических функций некоторых углов

$\alpha^\circ$	$\sin$	$\cos$	$tg$	$ctg$
0	0,0000	1,0000	0,0000	343,8000
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4300
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6710
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321
16	0,2756	0,9613	0,2868	3,4874
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4750
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503
28	0,4695	0,8830	0,5317	1,8807
30	0,5000	0,8660	0,5774	0,7321
32	0,5299	0,8481	0,6249	1,6003
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4282
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000
48	0,7431	0,6691	1,1106	0,9004
50	0,7660	0,6428	1,1918	0,8391
52	0,7880	0,6157	1,2799	0,7813
54	0,8090	0,5878	1,3764	0,7265
55	0,8192	0,5736	1,4281	0,7002
60	0,8660	0,5000	1,7321	0,5774
62	0,8830	0,4695	1,8807	0,5317

Окончание таблицы А.4

$\alpha^\circ$	<i>sin</i>	<i>cos</i>	<i>tg</i>	<i>ctg</i>
65	0,9063	0,4226	2,1445	0,4663
70	0,9397	0,3420	2,7475	0,3640
75	0,9659	0,2588	3,7321	0,2679
80	0,9848	0,1736	5,6710	0,1763
85	0,9962	0,0872	11,4300	0,0875
90	1,0000	0,0000	343,8000	0,0000

Для облегчения выполнения условий взаимозаменяемости рекомендуется использовать *нормальные линейные размеры*, установленные на основе *стандартных рядов предпочтительных чисел* (табл. А.5).

Таблица А.5

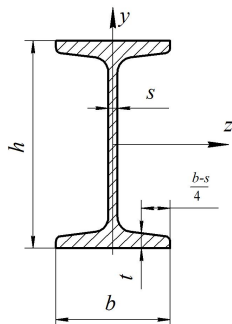
Ряды линейных диаметров, длин, высот, глубин  
и других размеров (по ГОСТ 6636–86)

5,0	10,0	21	42	85	170	340
5,3	10,5	22	45	90	180	360
5,6	11	24	48	95	190	380
6,0	12	25	50	100	200	400
6,3	13	26	53	105	210	420
6,7	14	28	56	110	220	450
7,1	15	30	60	120	240	480
7,5	16	32	63	125	250	500
8,0	17	34	67	130	260	530
8,5	18	36	71	140	280	560
9,0	19	38	75	150	300	600
9,5	20	40	80	160	320	630

**Приложение Б**  
(справочное)  
**Сортамент стандартных профилей**

Таблица Б.1

**Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239–89)**  
Размеры и справочные данные для осей двутавров



Обозначения:

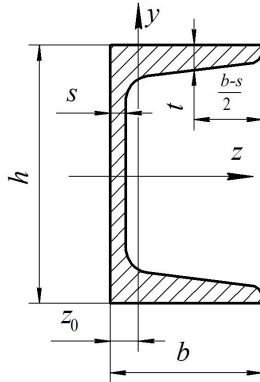
$h$  – высота двутавра;  
 $b$  – ширина полки;  
 $s$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;  
 $A$  – площадь поперечного сечения;

$S$  – статический момент полусечения;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $I$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления.

Номер профиля	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A$ , см <sup>2</sup>	$I_z$ , см <sup>4</sup>	$W_{z3}$ , см <sup>3</sup>	$i_z$ , см	$S_{z3}$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_{y3}$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
		$h$	$b$	$s$	$t$								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55

Номер профиля	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A, см <sup>2</sup>	$I_z,$ см <sup>4</sup>	$W_z,$ см <sup>3</sup>	$i_z,$ см	$S_z,$ см <sup>3</sup>	$I_y,$ см <sup>4</sup>	$W_y,$ см <sup>3</sup>	$i_y,$ см
		$h$	$b$	$s$	$t$								
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13 380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19 062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27 696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39 727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55 962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76 806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

## Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240–89)



Обозначения:

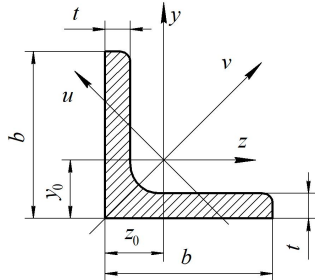
$h$  – высота швеллера;  
 $b$  – ширина полки;  
 $s$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;  
 $A$  – площадь поперечного сечения;

$I$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $S$  – статический момент полусечения;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $z_0$  – расстояние от оси  $y$  до наружной грани стенки.

Номер профиля	Масса $\Gamma$ , кг	Размеры, мм				$A$ , см <sup>2</sup>	$I_z$ , см <sup>4</sup>	$W_z$ , см <sup>3</sup>	$i_z$ , см	$S_z$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см
		$h$	$b$	$s$	$t$									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54

Номер профиля	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A, см <sup>2</sup>	I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> , см	S <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	z <sub>0</sub> , см
		h	b	s	t									
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	16,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

## Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509–86)



Обозначения:

 $b$  – ширина полки; $t$  – толщина полки; $A$  – площадь поперечного сечения; $I$  – момент инерции; $i$  – радиус инерции; $z_0, y_0$  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полков.

343

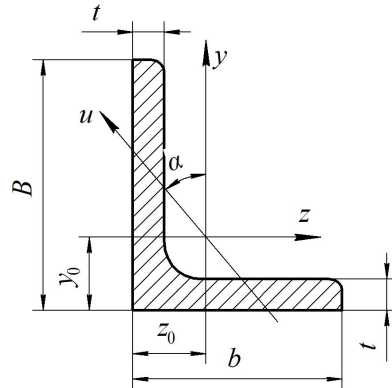
Номер профиля	Масса $I$ м, кг	Размеры, мм		$A$ , $см^2$	$I_z$ , $см^4$	$i_z$ , $см$	$I_v \max$ , $см^4$	$i_v \max$ , $см$	$I_u \max$ , $см^4$	$i_u \max$ , $см$	$ J_{zy} $ , $см^4$	$y_0 = z_0$ , $см$
		$b$	$t$									
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94

Номер профиля	Масса $I$ , кг	Размеры, мм		$A$ , см <sup>2</sup>	$I_z$ , см <sup>4</sup>	$i_z$ , см	$I_{y \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y \max}$ , см	$I_u \max$ , см <sup>4</sup>	$i_u \max$ , см	$ J_{zy} $ , см <sup>4</sup>	$y_0 = z_0$ , см
		$b$	$t$									
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	34,3	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	11,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,52	670	4,82	174	2,46	248	3,53



Номер профиля	Масса $I$ , кг	Размеры, мм		$A$ , см <sup>2</sup>	$I_z$ , см <sup>4</sup>	$i_z$ , см	$I_v \text{ max.}$ , см <sup>4</sup>	$i_v \text{ max.}$ , см	$I_u \text{ max.}$ , см <sup>4</sup>	$i_u \text{ max.}$ , см	$ J_{zy} $ , см <sup>4</sup>	$y_0 = z_0$ , см
		$b$	$t$									
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,9
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
	27		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34		14	43,6	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,6	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные  
(по ГОСТ 8510–86)



$B$  – ширина большой полки;  
 $b$  – ширина меньшей полки;  
 $t$  – толщина полки;  
 $A$  – площадь поперечного сечения;

Обозначения:

$I$  – момент инерции;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $z_0, y_0$  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полкок.

Номер профиля	Масса 1 м, кг	Размеры, мм			$A$ , см <sup>2</sup>	$I_z$ , см <sup>4</sup>	$i_z$ , см	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$i_y$ , см	$I_{u \min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{u \min}$ , см	tg $\alpha$	$ I_{zy} $ , см <sup>4</sup>	$z_0$ , см	$y_0$ , см
		$B$	$b$	$t$											
5/3,2	2,4	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12	1,17	2,39
9/5,6	6,7	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95

Номер профиля	Масса 1 м, кг	Размеры, мм			A, см <sup>2</sup>	I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>z</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u min</sub> , см	tg α	I <sub>zy</sub>  , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см
		B	b	t											
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,2
	8,7			7	11,1	113	3,19	35	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,5	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	11	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,8	4,01
	12,6			8	16	256	4	83	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58
16/10	18	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,2	0,391	194	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,39	213	2,28	5,23
	23,6			12	30	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,8	276	3,12	165	2,42	0,376	295	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,1	194	2,4	0,374	348	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,5
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	503	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,39	573	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	643	2,93	6,71

**Приложение В**  
(справочное)  
**Механические характеристики материалов**

*Таблица В.1*

Механические характеристики углеродистых качественных сталей, МПа

Марка стали	$\sigma_B$ не менее	$\sigma_T$ не менее	$\tau_T$ не менее	$\sigma_{-1}$	$\tau_{-1}$	$\sigma_{-1p}$
10	340	210	140	160–220	80–120	120–150
20	420	250	160	170–250	100–130	110–160
25	480	280	–	190–250	–	–
30	500	300	170	200–270	110–140	170–210
35	430	320	190	220–300	130–180	170–220
40	530	340	–	230–320	140–190	180–240
45	610	360	220	250–340	150–200	190–250
50	640	380	–	270–350	160–210	200–260
55	660	390	–	–	–	–
60	690	410	–	310–380	180–220	220–280
20Г	460	280	–	–	–	–
30Г	550	320	–	220–320	–	–
50Г	660	400	–	290–360	–	–

*Примечание.* Данные приведены для сталей в нормализованном состоянии, получены на образцах с диаметром  $d$ , равным 6–12 мм, с полированной поверхностью. При пользовании таблицей можно принимать соответствие: сталь Ст3 – стали 20, Ст4 – стали 25, сталь Ст5 – стали 35, сталь Ст6 – стали 45.

Таблица В.2

Механические характеристики легированных конструкционных сталей, МПа

Марка стали	$\sigma_b$ не менее	$\sigma_T$ не менее	$\tau_T$ не менее	$\sigma_{-1}$	$\tau_{-1}$	$\sigma_{-1p}$
20X	800	650	–	310–380	–	170–230
40X	1000	800	–	320–480	240–340	210–260
45X	1050	850	–	400–500	370	230
30XM	250	750	–	310–410	370	230
35XM	1000	850	–	470–510	–	–
40XH	1000	800	390	460–600	310–420	–
50XH	1100	900	–	550	–	–
40XФА	900	750	–	380–490	–	–
38XMЮА	1000	850	–	4420–550	–	–
12XНЗА	950	700	400	420–640	–	220–300
20XНЗА	950	750	–	430–650	–	240–310
30XНЗА	100	800	–	520–700	–	320–400
40XНМА	110	950	–	500–700	–	270–380
30XГСА	110	850	–	480–700	–	280–400

*Примечание.* Данные приведены для термически обработанных образцов, пределы выносливости получены на образцах  $d = 6-12$  мм с полированной поверхностью.

Таблица В.3

Механические характеристики чугуна, МПа

Марка чугуна	$\sigma$ при растяжении	$\sigma$ при сжатии	$\sigma$ при изгибе	$\sigma$ при кручении	$\sigma_{-1}$ при изгибе	$\sigma_{-1p}$ при кручении
СЧ 12	120	500	280	–	–	–
СЧ 15	150	650	320	240	70	50
СЧ 18	180	700	360	–	–	–
СЧ 21	210	950	400	280	100	80
СЧ 24	240	1000	440	300	120	100
СЧ 28	280	1100	480	350	140	110
СЧ 32	320	1200	520	390	140	110
СЧ 35	360	1200	560	400	150	115
СЧ 38	380	1400	600	460	150	115

*Примечание.* Данные получены на образцах  $d = 40$  мм.

Таблица В.4

Модуль упругости и сдвига, коэффициент Пуассона для материалов

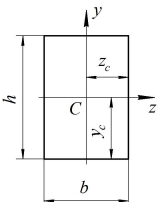
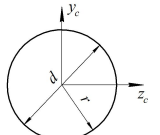
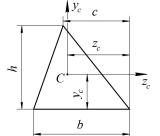
Наименование материала	Модуль упругости $E$ , МПа	Модуль сдвига $G$ , МПа	Коэффициент Пуассона $\nu$
Стали углеродистые	$2,0-2,1 \cdot 10^5$	$8,0-8,1 \cdot 10^4$	0,24–0,28
Стали легированные	$2,1 \cdot 10^5$	$8,0-8,1 \cdot 10^4$	0,25–0,30
Стальное литье	$1,75 \cdot 10^5$	–	–
Чугун серый, белый	$1,15-1,6 \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23–0,27
Чугун ковкий	$1,55 \cdot 10^5$	–	–
Медь прокатанная	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,31–0,34
Медь холоднотянутая	$1,3 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^4$	–
Медь литье	$0,84 \cdot 10^5$	–	–
Бронза фосфористая	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	0,32–0,35
Бронза марганцовистая	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,35
Бронза алюминиевая литье	$1,05 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	–
Латунь холоднотянутая	$0,91-0,99 \cdot 10^5$	$3,5-3,7 \cdot 10^4$	0,32–0,34
Алюминиевые сплавы	$0,69-0,71 \cdot 10^5$	$2,6-2,7 \cdot 10^4$	0,32–0,36
Алюминиевая проволока	$0,7 \cdot 10^5$	–	–
Дюралюминий	$0,71 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$	–
Цинк	$0,78 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$	0,27
Свинец	$0,15-0,2 \cdot 10^5$	$0,7 \cdot 10^4$	0,42
Никель	$2,06 \cdot 10^5$	$7,5 \cdot 10^4$	0,33
Гранит	$4,9 \cdot 10^4$	–	–
Известняк	$4,2 \cdot 10^4$	–	–
Мрамор	$5,6 \cdot 10^4$	–	–
Песчаник	$1,8 \cdot 10^4$	–	–
Каменная кладка: гранит	$0,9-1 \cdot 10^4$	–	–
известняк	$0,6 \cdot 10^4$	–	–
кирпич	$0,27-0,3 \cdot 10^4$	–	–
Бетон прочностью, МПа: 10	$1,46-1,96 \cdot 10^4$	–	0,16–0,18
15	$1,64-2,14 \cdot 10^4$	–	0,16–0,18
20	$1,82-2,32 \cdot 10^4$	–	0,16–0,18
Железобетон: сжатие	$1,77-4,22 \cdot 10^4$	–	–
изгиб	$1,08-2,65 \cdot 10^4$	–	–
Древесина: вдоль волокон	$0,88-1,57 \cdot 10^4$	$0,44-0,64 \cdot 10^3$	–
поперек волокон	$0,39-0,98 \cdot 10^3$	–	–
Каучук	8	–	0,47
Текстолит	$0,58-0,98 \cdot 10^4$	–	–
Фторопласт	$4,6-8,3 \cdot 10^4$	–	–
Стекло	$4,9-5,8 \cdot 10^4$	$2,06-2,26 \cdot 10^3$	0,24–0,27
Стекло органическое	$2,9-4,1 \cdot 10^3$	–	0,35–0,38
Лед	$1 \cdot 10^4$	$2,8-3,0 \cdot 10^3$	–
Целлулоид	$0,14-0,28 \cdot 10^4$	$0,69-0,98 \cdot 10^3$	0,33–0,38

**Приложение Г**  
(справочное)

**Геометрические характеристики плоских сечений**

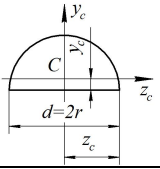
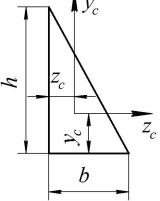
Таблица Г.1

Формулы для определения геометрических характеристик плоских сечений

Форма сечения	Площадь	Координаты центра тяжести	Моменты инерции			
			осевые		центробежный	полярный
			$I_z$	$I_y$	$I_{zy}$	$I_p$
1	2	3	4	5	6	7
	$A = bh$	$z_c = \frac{b}{2};$ $y_c = \frac{h}{2}$	$I_{z_c} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{y_c} = \frac{hb^3}{12}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{bh^3}{12}(h^2 + b^2)$
	$A = \pi r^2 =$ $= \frac{\pi d^2}{4}$	$z_c = y_c = r$	$I_{z_c} = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_{y_c} = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$
	$A = \frac{1}{2}bh$	$z_c = \frac{b+c}{3};$ $y_c = \frac{h}{3}$	$I_{z_c} = \frac{bh^3}{36}$	$I_{y_c} = \frac{hb}{36}(b^2 - bc + c^2)$	$I_{z_c y_c} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c)$	$I_p = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc + c^2)$

1	2	3	4	5	6	7
	$A = \frac{1}{2}bh$	$z_c = \frac{b}{3};$ $y_c = \frac{h}{3}$	$I_{z_c} = \frac{bh^3}{36}$	$I_{y_c} = \frac{hb^3}{48}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{bh^3}{144}(4h^2 + 3b^2)$
	$A = a^2$	$z_c = y_c = \frac{a}{2}$	$I_{z_c} = \frac{a^4}{12}$	$I_{y_c} = \frac{a^4}{12}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{a^4}{6}$
	$A = a^2 - a_1^2$	$z_c = y_c = \frac{a}{2}$	$I_{z_c} = \frac{a^4 - a_1^4}{12}$	$I_{y_c} = \frac{a^4 - a_1^4}{12}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = \frac{a^4 - a_1^4}{6}$
$d_1 = 2r_1$ $d_2 = 2r_2$ 	$A = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$	$z_c = y_c = r_1$	$I_{z_c} = \frac{\pi}{64}(d_1^4 - d_2^4) =$ $= \frac{\pi d_1^4}{64}(1 - c^4);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$	$I_{y_c} = \frac{\pi}{64}(d_1^4 - d_2^4) =$ $= \frac{\pi d_1^4}{64}(1 - c^4);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_{z_c} = \frac{\pi d_1^4}{32}(1 - c^4);$ $c = \frac{d_2}{d_1}$



1	2	3	4	5	6	7
	$A = \frac{\pi d^2}{3}$	$y_c = \frac{4r}{3\pi};$ $z_c = r$	$I_{z_c} = 0,00686d^4 =$ $= 0,110r^4$	$I_{y_c} = \frac{\pi d^4}{128} =$ $= 0,025d^4$	$I_{z_c y_c} = 0$	$I_p = 0,03186d^4$
	$A = \frac{1}{2}bh$	$z_c = \frac{b}{3};$ $y_c = \frac{h}{3}$	$I_{z_c} = \frac{bh^3}{36}$	$I_{y_c} = \frac{hb^3}{36}$	$I_{z_c y_c} = \frac{b^2 h^2}{72}$	$I_p = \frac{bh^3}{18}(h^2 + b^2)$

**Приложение Д**  
(справочное)  
**Продольный изгиб прямых стержней**

*Таблица Д.1*

Коэффициент снижения основного допускаемого напряжения  $\varphi$

Гибкость	Коэффициент $\varphi$			
	для Ст2, Ст3, Ст4	для Ст5	для чугуна	для дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	–	0,25
120	0,45	0,36	–	0,22
130	0,40	0,33	–	0,18
140	0,36	0,29	–	0,16
150	0,32	0,26	–	0,14
160	0,29	0,24	–	0,12
170	0,26	0,21	–	0,11
180	0,23	0,19	–	0,10
190	0,21	0,17	–	0,09
200	0,19	0,16	–	0,08

ДЛЯ ЗАМЕТОК

РЕПОЗИТОРИЙ БГАТУ

Учебное издание

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА.  
МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ**

Учебно-методическое пособие

Составители:

**Основин** Виктор Николаевич,  
**Афанасенко** Евгений Викторович,  
**Сокол** Ольга Васильевна и др.

Ответственный за выпуск *В. Н. Основин*

Редактор *Д. О. Бабакова*

Корректор *Д. О. Бабакова*

Компьютерная верстка *Е. А. Хмельницкой, Д. О. Бабаковой*

Дизайн обложки *О. В. Сокол, Д. О. Бабаковой*

Подписано в печать 25.06.2018 г. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 20,69. Уч.-изд. л. 16,18. Тираж 96 экз. Заказ 29.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Учреждение образования

«Белорусский государственный аграрный технический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,

распространителя печатных изданий

№ 1/359 от 09.06.2014.

№ 2/151 от 11.06.2014.

Пр-т Независимости, 99–2, 220023, Минск.