УДК 511.36

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Ковалевская Э.И., канд. физ.-мат. наук, ст.н.с., Морозова И.М., канд. физ.-мат. наук., доцент, Рыкова О.В.
УО «Белорусский государственный аграрный технический университет» г. Минск, Республика Беларусь

Аннотация

Указаны некоторые математические модели, применяемые в прикладных задачах из области экономики и техники, в которых с помощью теории диофантовых приближений можно изучить меру множества особых точек, связанных с явлением резонанса. При этом дана оценка снизу для количества векторов с действительными алгебраическими координатами вблизи гладких многообразий.

Введение

Известно, что теория дифференциальных уравнений в частных производных находит большое применение в экономике (см. [1], главы 5,6), [2] и списки литературы, приведенные в них, а также в технике и астрономии [3]. В самой же теории дифференциальных уравнений в частных производных при нахождении решения системы n гиперболических дифференциальных уравнений (по временной переменной) с постоянными коэффициентами используется аппарат рядов Фурье. Это приводит к исследованию многоточечной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых полиномиально зависят от n целочисленных (диофантовых) параметров.

Основная часть

Далее для разыскиваемого решения возникают вопросы о его существовании, единственности и непрерывной зависимости от правых частей уравнения и граничных условий. Появляющиеся при этом условия, как правило, формулируются в теоретико-числовых терминах. В частности, в зависимости от значений малых знаменателей, величины которых изучаются в теории диофантовых приближений (см. [3], стр. 3 – 6, 37 – 44, 55 – 65).

Таким образом, если для некоторой экономической или технической задачи построена математическая модель, которая представляет собой указанную систему уравнений, то существование ее решения тесно связано с диофантовыми приближениями. Понятно, что вопрос о том, какова мера множества точек, где знаменатели малы, очень важен в приложениях, так как в этих точках возникает явление резонанса, которое разрушает нормально идущий процесс, и, следовательно, может принести убытки в различных видах производства и эксплуатации технических средств. Точки, дающие резонанс, называются особыми.

Для достаточно широкого класса изученных множеств особых точек современная теория диофантовых приближений показывает, что вероятность попадания в них равна нулю, и, значит, явление резонанса встречается в соответствующих процессах довольно редко. Таким образом, если в конкретной прикладной задаче возникнет новое такое множество, то мы обратимся к диофантовым приближениям, чтобы охарактеризовать его меру и вероятность попадания в него.

Выводы

Приведем новые результаты, полученные авторами в области диофантовых приближений.

Задача подсчета целых (рациональных, алгебраических) точек или векторов – классическая задача теории чисел. С ее решением связаны другие задачи. Например, проблема круга или задачи метрической теории диофантовых приближений, изучающие экстремальные многообразия. В последнее десятилетие получено продвижение в решении задачи о числе точек с рациональными координатами вблизи некоторых гладких кривых $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, в смысле получения нижних границ того же порядка, что и верхних. Отсюда следует, что такие точки равномерно распределены вблизи Γ ([4], [5]).

Пусть $P = P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 \in Z[t]$, $n \geq 3$, $a_n \neq 0$, $H(P) = \max\limits_{0 \leq i \leq n} |a_i|$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни многочлена P.

Пусть $\mu_i > 0 \left(i = \overline{1,4}\right)$. Рассмотрим параллелепипед $\mathfrak{I} = \prod_{i=1}^{4} I_i = \prod_{i=1}^{4} [a_i, b_i] \subset [-1/2, 1/2]^4$, где $|I_i| = b_i - a_i = Q^{-\mu_i}$

при $Q > Q_0 > 0$ и множество $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathfrak{I} : |x_i - x_j| < 0{,}01, i \neq j\}$. Положим $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I} \setminus M$. Введем класс многочленов $P_n(Q) = \{P : |a_n| >> H(P), H(P) \leq Q\}$. Пусть $A_n(\mathfrak{I}_1, Q)$ – множество векторов $\bar{\alpha}(= \alpha_i, \alpha_j, \alpha_k, \alpha_l)$, $1 \leq i < j < k < l \leq n$, составленных их действительных корней многочлена $P, P \in P_n(Q)$, таких что $\bar{\alpha} \in \mathfrak{I}_1$. Тогда эти корни различны.

Пусть $\bar{c} = (c_1, c_2, ..., c_8)$, $0 < c_i < 1$, и $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathrm{R}^4$, $v_i > 0$ – фиксированные константы. Обозначим через $M_n(\bar{c}, Q)$ множество $\bar{x} \in \mathfrak{I}_1$ таких, что система неравенств

$$|P(x_i)| < c_i Q^{-v_i}, |P'(x_i)| < c_{i+4} Q, (i = \overline{1,4})$$

при $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = n - 3$

имеет решение в многочленах $P \in P_n(Q)$. Доказана

Теорема 1. При $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_4 < 2^{-18-n/4} n^{-1}$ *имеем* $\mu M_n(\bar{c}, Q) < \frac{1}{16} \prod_{i=1}^{4} |I_i|$, *где* μX *обозначает меру Лебега измеримого множества* $X \in \mathrm{R}^4$, $|I|$ *– длину интервала* I.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если* $0 < \mu_i < 1/4$, $i = \overline{1,4}$, *то множество* $A_n(\mathfrak{I}_1, Q)$ *содержит* $\geq c(n) Q^{n+1-\mu_1-\mu_2-\mu_3-\mu_4}$ *векторов* $\bar{\alpha}$, *где* $c(n) > 0$ *– некоторая константа, зависящая только от* n.

Доказательство теоремы 2 основано на построении специальных многочленов с условиями:

1) величины $|P(t)|$ малы при $(t,t,t,t)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in B\in \Im_1$ и мера множества B больше половины меры $|\Im_1|$,

2) $|P'(t)| \asymp H(P) = Q$ в точках множества B.

Из теоремы 2 следует

Теорема 3. *Пусть функция* $u=f(x,y,z)$ *непрерывна в параллелепипеде* $K=\prod_{i=1}^{3}K_i\subset[-1/2,1/2]^3$. *Положим* $\Im(Q,\lambda)=\{(x,y,z,u): x\in K_1, y\in K_2, z\in K_3, |u-f(x,y,z)|<Q^{-\lambda}, 0<\lambda<1/4\}$. *Тогда существует* $\geq c(n)Q^{n+1-\lambda}$ *векторов* $\overline{\alpha}$ *из* $A_n(\Im_1,Q)$ *таких, что* $\overline{\alpha}\in\Im(Q,\lambda)$, *где* $c(n)>0$ *– некоторая константа, зависящая только от* n.

Базой сформулированных теорем является теорема 1. Для ее доказательства применяем метод существенных и несущественных областей В.Г. Спринджука [6], развитый и усовершенствованный представителями школ теории чисел при НАН Беларуси (г. Минск, Беларусь) и при Йоркском университете (г. Йорк, Великобритания).

В данной работе мы применяем современный вариант метода, который изложен в [7], и решаем более общую, чем в [7] задачу, расширяя размерность многообразия до 4.

Литература

1. Ерофеенко В.Т. Уравнения с частными производными с приложениями в экономике: курс лекций / Ерофеенко В.Т. , Козловская И.С. – Минск: БГУ, 2001. – 196 с.

2. Горбунов В.К. Математическая модель потребительского спроса: / Горбунов В.К. – М.: Экономика, 2004. – 174 с.

3. Пташник Б.И. Некорректные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными: / Пташник Б.И. – Киев: Навукова думка, 1984. – 264 с.

4. Beresnevich V.Diophantine approximation on planar curves and the distribution of rational points. With an Appendix II by Vaughan

R.C. / Beresnevich V , Dickinson D.,Velani S. // Ann. of Math. (2). 2007. Vol. 166, № 2. P. 367–426.

5. Beresnevich V. Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation / Beresnevich V. // Ann. of Math. 2012. Vol. 175. P. 187–235.

6. Спринджук В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S- чисел/ Спринджук В. Г. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 379 – 436.

7. Ковалевская Э.И. Развитие метода существенных и несущественных областей для подсчета векторов с действительными алгебраическими координатами вблизи гладких поверхностей/ Ковалевская Э.И., Рыкова О.В. // Чебышевский сборник – 2013. Т.14, № 4. С. 119-126.

Summary

We give some mathematical models which are connected with Diophantine Approximation and which can be apply in Economics and Technics. Namely, using theory of diophantine approximation we can investigate the measure of the sets of the singular points or the resonance points in these models. Also, we obtain the lower estimate for number of vectors with real algebraic coordinates near smooth manifolds.

УДК 519.9:63

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОГРАММЫ РАЗВИТИЯ ЖИВОТНОВОДЧЕСКИХ ОТРАСЛЕЙ НА ПРИМЕРЕ ИЧУСП «ШТОТЦ АГРО-СЕРВИС» С ПОМОЩЬЮ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Корсун Н.Ф., канд. экон. наук, доцент, Боровская А.А.
УО «Белорусский государственный аграрный технический университет», г. Минск, Республика Беларусь

Аннотация

В рыночных условиях хозяйствования экономико-математические методы и модели позволяют оперативно реагировать на изменяющиеся условия производства и находить оптимальные решения в управлении предприятиями АПК.