– диагностика проблемы, т.е. постановка целей;
– формулировка критериев для анализа;
– выявление и оценка первопричин проблем качества;
– принятие решений по устранению выявленных первопричин проблем качества.

Конкурентоспособность имеет профессиональное, техническое и экономическое значение. Знание теории конкурентоспособности может помочь управленческому персоналу всех рангов:
– планировать свои действия, базируясь на понимании места и роли человека в производстве и обществе;
– переосмыслить подходы к постановке и решению производственных задач;
– встать на новые позиции, измеряя результаты и оценивая приоритеты своих действий в экономическом и социальном развитии предприятия;
– точнее осознавать возможности предприятия при использовании современных технологий поиска первичных проблем качества для устойчивого экономического развития предприятия.

Вышеотмеченные аспекты соответствуют принципам качества работы не только управленческого персонала, но и всех сотрудников конкретного предприятия.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ КВАЗИАЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

В.И. Берник, *д.ф.-м.н., профессор,*
И.М. Морозова, *к.ф.-м.н.*, доцент
Белорусский государственный аграрный технический университет (г. Минск)

Данная статья является одним из этапов выполнения задания Государственной программы фундаментальных исследований "Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе".

Далее через
$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$
будем обозначать многочлен с целыми коэффициентами, а через $H = H(P) = \max\limits_{0 \le i \le n} |a_i|$ - его высоту. Пусть $\psi_1(x)$ - монотонно убывающая функция на R^+, а $\psi_2(x)$ - произвольная функция на R^+. Задача о разрешимости неравенств
$$|P(x)| < \psi_1(H) \qquad (2)$$
является классической задачей теории диофантовых приближений. При $n = 1$ и $\psi_1(x) = H^{-\omega}$, $\omega \ge 1$ началась теория диофантовых приближений, когда в середине 19 века Дирихле доказал, что при любом $x \in [0, 1)$ неравенство $|a_1 x + a_0| < |a_1|^{-1}$ имеет бесконечное число решений в целых числах (a_0, a_1). Исследование разрешимости (2) при конкретных числах *x* (например, *x* = π, *x* = lg2) представляет собой очень трудную задачу, которая решена лишь частично. Большие успехи достигнуты при изучении (2) для множеств чисел *x* из множеств нулевой и полной меры Лебега на *R*. Обозначим через $L_n(\Psi_1)$ – множество *x* из некоторого интервала I, для которых неравенство (2) имеет бесконечное число решений в полиномах *P*(*x*), а через μA – меру Лебега измеримого множества $A \subset R$.

Теорема 1. Справедливо равенство $\mu L_n(\psi_1) = \begin{cases} 0, & \sum\limits_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\psi_1(H) < \infty \\ \mu I, & \sum\limits_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\psi_1(H) = \infty \end{cases}$

Теорема 1. при *n* = 1 была доказана А.Я. Хинчиным [1]. Для произвольного *n* при сходимости ряда она доказана в [3], а при расходимости ряда в [4]. Заметим, что даже специальный случай, когда $\psi_1(H) = H^{-\omega}$, $\omega > n$ до 1964 года был гипотезой Малера и решен В.Г. Спринджуком [2].

Неравенство (2) с произвольной функцией $\psi_2(H)$ в правой части значительно сложнее. В случае сходимости ряда проблема была решена сравнительно недавно В.В. Бересневичем [5]. В данной работе мы обобщаем его результат на неоднородные приближения нуля моническими многочленами.

Далее $L_s(\Psi_2)$ – множество действительных чисел x, для которых неравенство $|P(x)+s|<\psi_2(H)$ имеет бесконечно много решений в целочисленных многочленах $P(x)$. Будем рассматривать два случая: $s = d$, $s = x^{n+1}$, где d - произвольное действительное число.

Теорема 2. При сходимости ряда $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\psi_2(H)$ справедливо равенство $\mu L_s(\Psi_2) = 0$.

Относительно однородных приближений, т.е. при s = 0 имеется ряд недавних работ [6, 7, 8]. Доказательства теоремы 2 при $s = d$, $s = x^{n+1}$ близки и в дальнейшем докажем только случай $s = d$.

От полиномов $P(x)+d$ мы перейдем к полиномам $T(x) = T_d(x) = (a_n+d)x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ с условием

$$|a_n+d| > c_1H(P) \tag{3}$$

Обоснование такого перехода приведено в работе [4] для действительного случая и в работе [6] для поля p-адических чисел. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ корни полинома $T(x)$. Заметим, что корни будут алгебраическими числами только при алгебраическом числе α. Далее через $c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать величины, зависящие только от n и не зависящие от H. Нетрудно доказать, что при выполнении неравенства (3) справедлива оценка $|\alpha_j| < c_2$, $1 \le j \le n$. при переходе от многочленов $P(x)$ к многочленам $T(x)$ высота полиномов изменяется незначительно, т.е. $H(P) \cong H(T)$. Введем множество

$$S(\alpha_i) = \left\{x \in R : |x-\alpha_i| = \min_{1\le j\le n}|x-\alpha_j| \right\} \tag{4}$$

Для упрощения обозначений будем считать $i=1$. Все корни α_i упорядочим относительно корня α_1:

$$|\alpha_1-\alpha_2| \le |\alpha_1-\alpha_3| \le \ldots \le |\alpha_1-\alpha_n| \tag{5}$$

Лемма 1. Пусть $x \in S(\alpha_1)$. Тогда

$$|x-\alpha_1| \le 2^n \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}, \qquad |x-\alpha_1| \le \min_{2\le j\le n}\left(2^{n-j}\frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}|\alpha_1-\alpha_2|\ldots|\alpha_1-\alpha_j|\right)^{1/j}. \tag{6}$$

Найдем числа ρ_i из равенства $|\alpha_1-\alpha_j| = H^{\rho_i}$. Возьмем достаточно большое число $T \in N$, положим $T^{-1} = \varepsilon_1$ и найдем целые числа l_j из неравенств

$$(l_j-1)T^{-1} \le \rho_j \le l_jT^{-1} \tag{7}$$

Так как корни α_j ограничены, то при достаточно большом H можно считать из $\rho_j > 0$, что $l_j \ge -\varepsilon_1$, $2 \le j \le n$. Все значения $l_j \ge n^2T$ будем обозначать одним и тем же символом l_0. Тогда количество всевозможных векторов $\vec{l} = (l_2, \ldots l_n)$ зависит только от n, T и не зависит от H. Определим

$$P_i = T^{-1}\sum_{j=i+1}^{n} l_j, \; 1 \le i \le n-1. \tag{8}$$

Лемма 2. Для любого j, $1 \le j \le n-1$, справедливы оценки

$$c_3H^{1-p_j-n\varepsilon_1} < |P^{(j)}(\alpha_1)| < c_4H^{1-p_j} \tag{9}$$

Доказательство теоремы 2. Доказательство будем проводить для полиномов $T(x)$, т.е. мы будем рассматривать неравенство

$$|T(x)| < \psi_2(H(T)) \tag{10}$$

при условиях $\sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\psi_2(H) < \infty$ и (3).

Последовательно рассмотрим различные случаи при изменяющемся P_i и $x \in S(\alpha_1)$. Обозначим через $P_n(M)$ класс многочленов, у которых $H(T) \le M$ и старший коэффициент удовлетворяет условию (3). Зафиксируем его, тогда число полиномов в $P_n(M)$ не превосходит $(2M+1)^n < 2^{n+1}M^n$.

Предложение 1. Теорема справедлива при $-n\varepsilon_1 < p_1 < 0{,}5 - \varepsilon_1$.

Из неравенства (10) и леммы 1 получаем

$$|x-\alpha_1| \le 2^n \frac{\psi_2(H)}{|T'(\alpha_1)|}. \tag{11}$$

Неравенство (11) определяет интервал, который обозначим $\sigma(T)$. При некотором $c_5>0$ определим интервал $\sigma_1(T)$

$$|x-\alpha_1| \le c_5 \frac{1}{|T'(\alpha_1)|}. \tag{12}$$

Будем говорить, что многочлен принадлежит интервалу I, если существуют $x \in I$, для которых выполняется неравенство (10). Покажем, что нет таких интервалов $\sigma_1(T)$, которым принадлежит более $L_1 = 2^{n+1}M^{n-1}$ многочленов $T(x) \in P_n(M)$. Предположим, что некоторому интервалу $\sigma_1(T)$ принадлежит более L_1 многочленов. Разложим каждый из них на $\sigma_1(T)$ в ряд Тейлора

$$T(x) = T'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \sum_{j=2}^{n}(j!)^{-1}T^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^j.$$

Из оценок (12) и леммы 2 при достаточно большом H имеем

$$|T'(\alpha_1)(x-\alpha_1)| < c_5, \quad \left|(j!)^{-1}T^{(j)}(\alpha)(x-\alpha_1)^j\right| < \frac{c_5}{2n}H^{-1+2p_1} < \frac{c_5}{2n},\ 2 \le j \le n,$$

откуда $\quad |T(x)| < 2c_5 \tag{13}$

У многочленов $T(x)$ зафиксирован старший коэффициент $a_n + d$ и коэффициенты $a_{n-1},...a_2,a_1$. Поскольку количество таких векторов $\vec{b} = (a_{n-1},...a_1)$ не превосходит $(2M+1)^{n-1} < 2^n M^{n-1}$, то среди L многочленов $T(x)$ всегда найдутся по крайней мере два различных многочлена $T_2(x)$ и $T_1(x)$ с одним и тем же вектором коэффициентов $(a_n + c, a_{n-1,...,} a_2, a_1)$. Их разность целое число $R(x) = T_2(x) - T_1(x)$, отличное от нуля. Однако оба полинома удовлетворяют неравенству (13) и поэтому $|R(x)| < 4c_1$. При $c_1 = 0{,}25$ получаем противоречие. Осталось рассмотреть интервалы $\sigma_1(T)$, которым принадлежит не более L_1 многочленов. Интервалы $\sigma_1(T_1)$ и $\sigma_1(T_2)$ не пересекаются при $T_1, T_2 \in P_n(M)$, что можно доказать аналогично, поэтому их количество не более $L_2 = |I|2^{-1}c_5^{-1}|T'(\alpha_1)|^{-1}$. Суммарная мера всех $x \in \sigma(T)$ не превосходит

$$L_1L_2\mu\sigma(T) \le 2^n c_5^{-1}|T'(\alpha_1)|^{-1}2^{n+1}\psi_2(M)M^{n-1}|T'(\alpha_1)| = c_6\psi_2(M)M^{n-1}. \tag{14}$$

Ряд с общим членом (14) по условию теоремы сходится и поэтому из леммы Бореля-Кантелли следует справедливость предложения 1.

Предложение 2. Теорема справедлива при $0{,}5 - \varepsilon_1 < p_1 < 1 - \varepsilon_1$.

При некотором $c_7>0$ определим интервал $\sigma_2(T)$:

$$|x-\alpha_1| \le c_7 \frac{1}{|T'(\alpha_1)|H} \tag{15}$$

Рассмотрим такие интервалы $\sigma_2(T)$, которым принадлежат более $L_3 = 2^n M^{n-2}$ полинома $T(x) \in P_n(M)$. Разложим $T(x)$ и $T'(x)$ на $\sigma_2(T)$ и оценим $|T(x)|$ и $|T'(x)|$ сверху.

$$|T(x)| < c_7 H^{-1} + c_8 H^{1-2-2+2p_1+2\varepsilon_1} \quad (16)$$

$$|T'(x)| < |T'(\alpha)| + c_9 H^{1-2+p_1+\varepsilon_1} \quad (17)$$

При условиях на p_1 из (16), (17) и леммы 2 получаем при достаточно большом H

$$|T(x)| < 2c_7 H^{-1}, \text{и } |T'(x)| < c_{10} H^{1-p_1+\varepsilon_1} \quad (18)$$

Количество различных векторов $(a_n + c, a_{n-1,\dots,} a_2, a_1)$, составленных из коэффициентов многочленов $T(x) \in P_n(M)$ не превосходит $(2M+1)^{n-2} < 2^{n-1} M^{n-2}$. Это означает, что можно применить принцип ящиков Дирихле и получить существование двух многочленов $T_2(x)$ и $T_1(x)$, у которых вектора $\vec{b}_1$ совпадают и которые удовлетворяют на интервале $\sigma_2(T)$ неравенствам (18). Многочлен $R(x) = T_2(x) - T_1(x)$ имеет первую степень, $R(x) = b_1 x + b_0$, $|b_j| \le 2M$, j=0,1.

$$|b_1 x + b_0| < 4c_7 H^{-1}, \ |b_1| < 2c_{10} H^{1-p_1+\varepsilon_1} \quad (19)$$

Из теоремы Хинчина получаем, что неравенства выполняются бесконечно часто только на множестве нулевой меры. Осталось рассмотреть интервалы $\sigma_2(T)$, которым принадлежат не более L_3 полиномов $T(x)$. Таких интервалов не более $L_4 = |I| 2^{-1} c_7^{-1} H |T'(\alpha_1)|^{-1}$. Просуммируем оценку (11) по всем полиномам, принадлежащим интервалам $\sigma_2(T)$. Получим

$$L_3 L_4 \mu\sigma(T) \le c_{11} |T'(\alpha_1)|^{-1} \psi_2(H) H M^{n-1} |T'(\alpha_1)| H^{n-2} = c_{11} \psi_2(H) H^{n-1}. \quad (20)$$

Ряд с общим членом (20) сходится по условию. Применение леммы Бореля-Кантелли заканчивает доказательство предложения 2.

Предложение 3. Теорема справедлива при $1 - \varepsilon_1 < p_1 < 3/2 - \varepsilon_1$.

При некотором c_{12}>0 определим интервал $\sigma_3(T)$:

$$|x - \alpha_1| \le c_{12} \frac{1}{|T'(\alpha_1)| H^2}. \quad (21)$$

Рассмотрим интервалы $\sigma_3(T)$, которым принадлежат более $L_5 = 2^{n-1} M^{n-3}$ полинома $T(x) \in P_n(M)$. Разложим $T(x)$ и $T'(x)$ на $\sigma_3(T)$ и оценим $|T(x)|$ и $|T'(x)|$ сверху. Поскольку такие же оценки мы проводили в (13) и (18), то приведем лишь окончательный вариант при $p_1 < 3/2 - \varepsilon_1$.

$$|T(x)| < 2c_{12} H^{-2}, \text{и } |T'(x)| < c_{13} H^{1-p_1+\varepsilon_1}. \quad (22)$$

Опять воспользуемся принципом ящиков Дирихле, взяв вектор $\vec{b} = (a_n + c, a_{n-1,\dots,} a_3)$, получим неравенства

$$|R_2(x)| = |b_2 x^2 + b_1 x + b_0| < 4c_{12} H^{-2}, \ |R_2'(x)| = |2b_2 x + b_1| < 2c_{13} H^{1-p_1+\varepsilon_1}, \ |b_j| \le 2M. \quad (23)$$

Система неравенств (23) проанализирована и доказано, что она имеет бесконечное число решений только на множестве нулевой меры. Если интервалам $\sigma_3(T)$ принадлежат не более L_5 полинома $T(x)$. то опять просуммируем оценку $\mu\sigma(T)$ по числу таких интервалов $L_6 = c_{12}{}^{-1} H^2 |T'(\alpha_1)|^{-1}$. Получим $L_5 L_6 \mu\sigma(P) < c_{14} \psi_2(H) H^{n-1}$. (24)

Ряд с общим членом (24) сходится, применив лемму Бореля-Кантелли, получаем доказательство.

Предложение 4. Теорема справедлива при $p_1 > 3/2 - \varepsilon_1$.

Условие $p_1 > 3/2 - \varepsilon_1$ вместе с неравенством (2) приводят к системе неравенств $|R(x)| < c_{15}\psi(H)$, $|R'(x)| < c_{16}H^{-0,5+\varepsilon_1}$ для некоторого многочлена $R(x)$, $\deg R \le n$-1, с целыми коэффициентами. Доказано ранее, что такая система имеет бесконечно решений только на множестве нулевой меры.

1. A. Khintchine, Einige Satze uber Kettenbruche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen, Math. Ann., 92 (1924), 115-125.
2. В. Г. Спринджук. Проблема Малера в метрической теории чисел. Мн., 1967
3. V.I. Bernik On the exact order of approximation of integral polynomials, Acta Arith., 53 (1989), 17-28.
4. V.V. Beresnevich, On approximation of real numbers by real algebraic numbers, Acta Arith., 90 (1999), 97-112.
5. V.V. Beresnevich, On a theorem of Bernik in the metric theory of Diophantine approximation, Acta Arith.,117 (2005), 71-80
6. N. Budarina, D. Dickinson, p- adic Diophantine approximation on the Veronese curve with a nonmonotonic error, Trudi Instituta matematiki NAN Belarusi, 15 1(2007), 98-104.
7. N. Budarina, D. Dickinson, Diophantine approximation on non-degenerate curve with nonmonotonic error function, Bulletin London Math. Soc., 41 1 (2009), 137-146.
8. Bernik V., Dodson M. Metric Diophantine approximation on manifolds. Cambridge University Press 1999.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЦИИ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ: ИННОВАЦИОННЫЙ АСПЕКТ

В.А. Воробьев, *д.э.н., профессор,* **И.И. Воробьева,** *к.э.н., доцент*

Белорусский государственный экономический университет (г. Минск)

Инновационное развитие белорусской экономики характеризуется противоречивыми тенденциями. С одной стороны, Беларусь обладает значительным человеческим и научно-техническим капиталом. Но, с другой стороны, остается невысоким уровень доведения результатов научных исследований до внедренных инноваций. Недостаточно используется потенциал вузовской науки, без чего невозможна реализация инновационного потенциала высшей школы. Поэтому необходим эффективный механизм стимулирования инноваций, развития интеграции науки и образования, сочетающий возможности рынка и государства в инновационной сфере, в том числе в области аграрного образования, аграрной науки и аграрного производства.

Й. Шумпетер одним из первых рассмотрел инновации и научные разработки как факторы экономической динамики. Он выделил конкуренцию и инновационную сверхприбыль (разновидность монопольной прибыли) как составляющие рыночного механизма разработки и внедрения инноваций в развитых странах.

Однако рыночный механизм в сфере инноваций характеризуется определенной ограниченностью. Провалы рынка в этой сфере связаны с неопределенностью и риском, с которыми сталкиваются организации при осуществлении научно-исследовательской деятельности; асимметричностью информации, которой владеют управляющие проектами и потенциальные инвесторы, в результате чего многие проекты с положительной чистой дисконтированной стоимостью остаются без финансирования; недостаточностью капитала у отдельных фирм для финансирования дорогостоящих инновационных проектов. К тому же продукт инновационной деятельности обладает свойствами общественного блага — неконкурентностью и неисключаемостью. Поэтому государство в условиях рыночной экономики должно либо заниматься производством знаний путем прямого финансирования НИОКР в научных и образовательных учреждениях, либо стимулировать инновационную активность с помощью патентов и других мер.

Большинство экономистов считает необходимым государственное финансирование фундаментальных научных исследований. Развитие же прикладных исследований, поиск новых технологических вариантов связывается с деятельностью частных предпринимателей, с рыночным механизмом. Государство может стимулировать эту деятельность с помощью патентной системы. Однако патентная система способствует монополизации производства, неэффективному использованию результатов НИОКР в течение определенного перио-