МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс

В четырех частях

Часть 2

Минск
БГАТУ
2011

УДК 51(07)
ББК 22.1я7
М34

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета предпринимательства и управления БГАТУ.
Протокол № 1 от 20 сентября 2011 г.*

Составители:
кандидат физико-математических наук, доцент *И. М. Морозова*,
кандидат физико-математических наук, доцент *Л. А. Хвощинская*,
кандидат физико-математических наук *А. А. Тиунчик*,
старший преподаватель *Л. В. Лобанок*,
ассистент *О. В. Рыкова*,
ассистент *О. Н. Кемеш*

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой
теоретической механики и теории механизмов и машин БГАТУ
А. Н. Орда;
доктор педагогических наук, доцент кафедры теории функций БГУ
Н. В. Бровка

Математика : учебно-методический комплекс. В 4 ч.
М34 Ч. 2 / сост. : И. М. Морозова [и др.]. — Минск : БГАТУ, 2011.
— 188 с.
ISBN 978-985-519-486-7.

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» предназначен для студентов дневной формы обучения инженерных специальностей сельскохозяйственных высших учебных заведений.

УДК 53(07)
ББК 22.3я7

ISBN 978-985-519-486-7 (ч. 2)
ISBN 978-985-519-371-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное издание – это вторая из четырех частей учебно-методического комплекса, каждая из которых содержит учебный материал, излагаемый в соответствующем семестре. Вторая часть данного комплекса содержит перечень основных вопросов учебной программы дисциплины «Математика» 2 семестра, учебные материалы по темам: «Комплексные числа», «Неопределенные интегралы», «Определенные интегралы», «Обыкновенные дифференциальные уравнения». УМК составлен в соответствии с типовой программой дисциплины «Математика», разработанной по модульной технологии обучения. Каждый модуль содержит теоретический материал, соответствующий темам лекций, в который включены задачи с подробными решениями. Также предлагаются задачи для решения с преподавателем на практических занятиях и самостоятельной работы, примерный вариант контрольного теста (образцы итоговых тестовых заданий даны по уровням и отмечены знаками: репродуктивного уровня – знаком ^{0}, творческого уровня – знаком *), индивидуальное домашнее задание (ИДЗ) и решение задач типового варианта ИДЗ для выявления достижений студентов.

В результате изучения дисциплины «Математика» во втором семестре студент должен ***знать:***

- определение формы записи и действия над комплексными числами
- основные методы интегрирования;
- приложения определенного интеграла к задачам геометрии и механики;
- основные типы дифференциальных уравнений и методы их решения;

уметь:

- производить действия над комплексными числами;
- находить неопределенные интегралы;
- вычислять с помощью определенного интеграла площади, длины дуг, объемы и площади тел вращения;
- решать основные типы дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» (2 СЕМЕСТР)

Модуль 6
Комплексные числа

Комплексные числа, действия с ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа.

Действия над комплексными числами: сложение, умножение, деление. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел. Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры о разложении многочлена на множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Разложение рациональных дробей в сумму простейших дробей четырех типов.

Модуль 7
Неопределенные интегралы

Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его основные свойства. Таблица основных неопределенных интегралов. Понятие об основных методах интегрирования: непосредственное интегрирование, метод замены переменной (метод подстановки), метод интегрирования по частям. Интегрирование простейших рациональных дробей и любых рациональных дробей. Интегрирование простейших иррациональных функций, теорема Чебышева. Интегрирование некоторых классов функций, содержащих тригонометрические функции. Универсальная и упрощенные подстановки. Понятие о «неберущихся» интегралах.

Модуль 8
Определенные интегралы

Определение определенного интеграла, теорема об условиях его существования. Основные свойства определенных интегралов, геометрический смысл. Вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенных интегралов с помощью методов замены переменной и интегрирования по частям. Несобственные интегралы (интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от неограниченных функций), теоремы об их сходимости и расходимости. Приложения определенных интегралов к некоторым задачам геометрического и физического содержания. Вычисление площадей плоских фигур, длины дуги кривой, объемов и площадей поверхностей тел вращения, работы переменной силы, давления на помещенную в жидкость пластину, координат центра масс плоской дуги и фигуры, моментов инерции некоторых материальных систем. Численные приближенные методы вычисления определенных интегралов: формулы прямоугольников, трапеций, парабол (Симпсона), точность вычислений.

Модуль 9
Обыкновенные дифференциальные уравнения

Некоторые задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Понятие о дифференциальных уравнениях n-го порядка и их решениях. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача и теорема Коши, их геометрическая интерпретация, изоклины, графическое интегрирование. Дифференциальные уравнения: с разделенными и разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к ним, линейные, Бернулли, в полных дифференциалах и приводящиеся к ним с помощью интегрирующего множителя; методы их интегрирования. Понятие об особых точках и решениях дифференциальных уравнений первого порядка, уравнения Клеро и Лагранжа. Огибающие, ортогональные и изогональные траектории. Дифференциальные уравнения второго и высших порядков. Задача и теорема Коши, их геометрическая интерпретация и графическое решение в случае второго порядка. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков, фундаментальная система решений, структура общего решения. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение, нахождение его корней, фундаментальной системы решений и общего решения. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения со специальной и неспециальной правой частью. Методы отыскания частного решения (метод спецструктуры и метод вариации произвольных постоянных Лагранжа). Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений n -го порядка и их решение методом исключения. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, их решение с помощью характеристического уравнения системы.Приближенные методы решения дифференциальных уравнений и их систем методом, основанном на применении формулы Тейлора, методами Адамса и Эйлера. Приложения дифференциальных уравнений к решению задач геометрического, физического, химического и экономического содержания.

МОДУЛЬ 6
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В результате изучения модуля студенты должны:

1) знать а) *понятия и определения*: комплексное число, мнимая единица, действительная и мнимая часть комплексного числа, модуль, аргумент, тригонометрическая, показательная форма записи комплексного числа, формулы Эйлера; **б)** *характеризовать* связь между формами записи комплексного числа и изображением его на комплексной плоскости; **в)** *моделировать* практические задачи на составление уравнений с отрицательным дискриминантом.

2) уметь находить действительную и мнимую части комплексного числа, модуль и аргумент, записывать тригонометрическую и показательную формы числа; представлять синусоидальный ток в комплексной форме.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Попытки решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом привели к возникновению понятия комплексных чисел.

Определение. *Комплексным числом* называется число вида

$$\boxed{z = x + iy}, \tag{6.1}$$

где x, y – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ $(i^2 = -1)$ – мнимая единица.

В технической литературе используют обозначение $j = \sqrt{-1}$.

Число x называется *действительной частью* комплексного числа, а y – его *мнимой частью* и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Запись $z = x + iy$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Множество всех комплексных чисел обозначают **C**.

При $y = 0$ получим действительное число $x + i \cdot 0 = x$, т. е. $R \subset C$.

При $x = 0$ получим число вида $0 + i \cdot y = iy$, которое называется *чисто мнимым*.

Два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части.

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *сопряженными*.

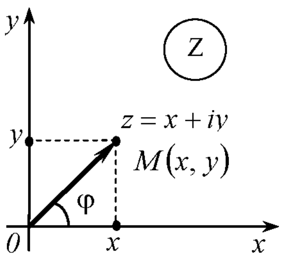


Рис. 6.1

Если на плоскости введена прямоугольная декартова система координат *xOy*, то каждому комплексному числу соответствует точка *M*(*x*, *y*) плоскости или вектор $\overrightarrow{OM}$. И наоборот, каждая точка *M*(*x*, *y*) плоскости изображает комплексное число $z = x + iy$ (рис. 6.1).

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* и обозначается Z, ось *Ox* – *действительной осью*, а ось *Oy* – *мнимой осью*.

§ 2. МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Определение. *Модулем комплексного числа* $z = x + iy$ называется число

$$r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и обозначается $r = |z|$.

Определение. Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом комплексного числа* и обозначается $\varphi = arcg\ z$.

Аргумент φ комплексного числа может быть найден из системы уравнений (см. рис. 8.1)

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Очевидно, что аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in Z$. *Главное значение аргумента* $\varphi = \arg\ z$ выбирается из условий:

$$-\pi < \arg z \le \pi \qquad \text{или} \qquad 0 \le \arg z < 2\pi .$$

Подставим в алгебраическую форму комплексного числа $z = x + iy$ формулы соотношения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Получим формулу $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, или

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}, \tag{6.2}$$

которая называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Обозначив символом $e^{i\varphi}$ комплексное число

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

запишем комплексное число (8.2) *в показательной форме* $\boxed{z = re^{i\varphi}}$.

Таким образом, комплексное число имеет 3 формы записи:

1. $z = x + iy$ – *алгебраическая форма*,

2. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – *тригонометрическая форма,*

3. $z = re^{i\varphi}$ – *показательная форма*,

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа, φ – аргумент комплексного числа, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, $(-\pi < \varphi \le \pi)$.

Формулы Эйлера

Заменяя в формуле

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{6.3}$$

φ на $-\varphi$, получим

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi . \tag{6.4}$$

Складывая и вычитая равенства (6.3) и (6.4), находим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad .$$

Формулы (6.3) и (6.4) называются *формулами Эйлера*. Эти формулы связывают показательную и тригонометрические функции.

Пример 6.1. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить точками и векторами на комплексной плоскости: **а)** $z_1 = 2 - \sqrt{12}i$, **б)** $z_2 = -4$.

Решение. а) Действительная и мнимая части комплексного числа равны $x = \operatorname{Re} z_1 = 2,\qquad y = \operatorname{Im} z_1 = -\sqrt{12}$

Найдем модуль и аргумент z_1:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{12})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{12}}{4} = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, представление комплексного числа z_1 в тригонометрической и показательной формах имеет вид

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 4(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) \quad \text{и} \quad z_1 = re^{i\varphi} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

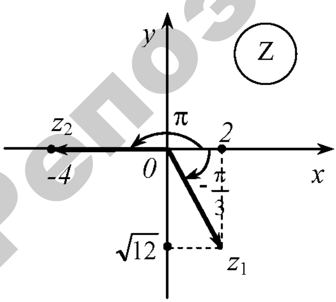


Рис. 6.2

б) $z_2 = -4$.

$$x = \operatorname{Re} z_2 = -4, \qquad y = \operatorname{Im} z_2 = 0,$$

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{-4}{4} = -1, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{0}{4} = 0$$

$\Rightarrow \varphi = \pi.$ Таким образом,

$$z_2 = 4(\cos\pi - i\sin\pi) = 4e^{i\pi}.$$

Числа z_1 и z_2 изображены на рис. 6.2.

§ 3. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Если комплексные числа заданы в алгебраической форме $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то операции сложения, вычитания, умножения и деления этих чисел выполняются по следующим правилам:

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,

2. $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$,

3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2 y_1y_2 =$
$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$,

4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 - i^2 y_1y_2}{x_2^2 - i^2 y_2^2} =$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

при этом $z_2 \neq 0$.

Пример 6.2. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 5 + i,\ z_2 = -2 + 3i,\ z_3 = 2 - i.$$

Вычислить: 1) $z_1z_2 + z_3^3$; 2) $z_3^2 + \dfrac{z_1}{z_2}$; 3) $z_1^2 - \overline{z}_2 z_3$.

Решение.

1) Последовательно вычислим $z_1z_2 + z_3^3$:

$$z_1 \cdot z_2 = (5 + i)(-2 + 3i) = -10 - 2i + 15i + 3i^2 = -10 + 13i - 3 = -13 + 13i;$$

$$z_3^3 = (2 - i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i.$$

Тогда $z_1z_2 + z_3^3 = -13 + 13i + 2 - 11i = -11 + 2i$.

2) Аналогично вычисляем $z_3^2 + \dfrac{z_1}{z_2}$:

$$z_3^2 = (2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5+i}{-2+3i}=\frac{(5+i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}=\frac{-10-2i-15i-3i^2}{(-2)^2-(3i)^2}=\frac{-7-17i}{4+9}=$$
$$=\frac{-7-17i}{13}=-\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i;$$

Тогда
$$z_3^2+\frac{z_1}{z_2}=-\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i+3-4i=\frac{-7+39}{13}+\frac{-17-52}{13}\,i=\frac{32}{13}-\frac{69}{13}i\,.$$

3) Вычисляем $z_1^2-\bar{z}_2 z_3$:

$$z_1^2=(5+i)^2=25+10i+i^2=24+10i;$$

$$\bar{z}_2 z_3=(-2-3i)(2-i)=-4+2i-6i+3i^2=-7-4i\,.$$

Тогда $z_1^2-\bar{z}_2 z_3=24+10i-(-7-4i)=24+10i+7+4i=31+14i$.

Операции умножения и деления удобно проводить и над числами, заданными в тригонометрической или показательной формах (см. [1], гл. VII, § 2,3).

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Рассмотрим синусоидальный ток, закон изменения которого во времени описывается формулой

$$i=I_m\sin(\omega t+\psi),$$

где I_m – *амплитуда* тока, характеризует максимальное значение тока, ω – *угловая частота*, $\omega t+\psi$ – *фаза*, характеризует состояние колебания в момент времени t, ψ – *начальная фаза*.

График тока дан на рис. 8.3.

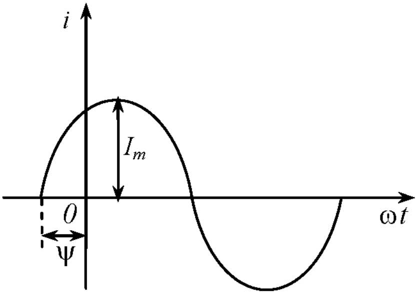


Рис. 6.3

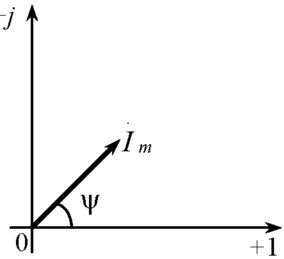


Рис. 6.4

При расчете цепей синусоидального тока используется также понятие *действующего значения тока*

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Для облегчения расчетов в электротехнике синусоидальный ток принято изображать вектором (или точкой) на комплексной плоскости

$$\dot{I}_m = I_m \cdot \mathrm{e}^{\psi j} \qquad (j = \sqrt{-1}), \qquad (6.5)$$

который называется *комплексной амплитудой* (рис. 8.4). (обратите внимание на обозначения осей координат!). Модуль этого вектора равен амплитуде I_m, а аргумент – начальной фазе ψ тока.

Если комплексную амплитуду разделить на $\sqrt{2}$, то получим *комплексное действующее значения тока*

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\psi j}.$$

Зная комплексную амплитуду или комплексное действующее значение синусоидальной величины, можно осуществить обратный переход и записать выражение для мгновенного значения этой величины.

Пример 6.3. Ток меняется по закону $i = 10\sin(\omega t + 120^0)$ А. Найти комплексную амплитуду тока и изобразить ее на комплексной плоскости.

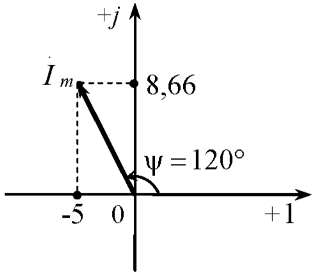


Рис. 6.5

Решение. Из условия находим амплитуду I_m и начальную фазу ψ тока: $I_m = 10, \quad \psi = 120^0$.

По формуле (8.5) находим комплексную амплитуду:

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{\psi j} = 10 \cdot e^{120^0 j} =$$

$$= 10(\cos 120^0 + j \sin 120^0) =$$

$$= 10(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = -5 + 8{,}66 j \text{ А}.$$

Комплексная амплитуда изображена на рис. 6.5.

Пример 6.4. Задано комплексное действующее значение тока $\dot{I} = 10 - 10j$ А. Записать выражение для его мгновенного значения.

Решение. Найдем действующее значение I тока как модуль комплексного действующего значения $\dot{I}$ тока:

$$I = |\dot{I}| = \sqrt{10^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2} = 14{,}14 \text{ А}.$$

Амплитуда I_m тока вычисляется по формуле

$$I_m = I \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20 \text{ А}.$$

Определим начальную фазу ψ как аргумент комплексного числа $\dot{I}$ из уравнения $\quad \operatorname{tg}\psi = -\frac{10}{10} = -1$.

Поскольку число $\dot{I} = 10 - 10j$ расположено в четвертой четверти, то $\psi = -45^0$. Записываем выражение для мгновенного значения синусоидального тока:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) = 20 \sin(\omega t - 45^0) \text{ А}.$$

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 - 2i$.

Найти число $z = \dfrac{(z_1 + z_3) \cdot \bar{z}_2}{z_3}$.

2. Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить на комплексной плоскости комплексные числа:

а) $z_1 = 2 - 2i$; **б)** $z_2 = -i$; **в)** $z_3 = \sqrt{3} + i$.

3. Решить уравнения

а) $x^2 + 4x + 5 = 0$; **б)** $x^2 + 9 = 0$.

4. Ток меняется по закону $i = 90\sin(\omega t - \dfrac{5\pi}{6})$ А. Найти комплексную амплитуду $\dot{I}$ тока и изобразить ее на комплексной плоскости.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + 3i$, $z_3 = 2 + i$.

Найти число $z = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2} + z_3^2}{z_2}$.

2. Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить на комплексной плоскости комплексное число $z = -\sqrt{3} + i$.

Вариант 2

Даны комплексные числа $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = 1 - 4i$, $z_3 = 2 + 2i$.

Найти число $z = \dfrac{z_1\left(z_2^2 + \overline{z_3}\right)}{z_3}$.

2. Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить на комплексной плоскости комплексное число $z = 4 - 4i$.

Домашнее задание

1.Даны числа $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = 2 + 5i$, $z_4 = 3 - 2i$.

Вычислить

а) $\dfrac{z_1 \cdot z_3 + z_4}{z_2}$; **б)** $\dfrac{z_1^3 + z_3^2}{z_2 + z_4}$; **в)** $\dfrac{(z_2^2 - \overline{z}_3) \cdot z_4}{z_1}$.

2. Представить числа $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$ в тригонометрической и показательной формах, изобразить их на комплексной плоскости .

3. Решить уравнения **а)** $x^2 + 2x + 2 = 0$; **б)** $x^2 + 16 = 0$.

Управляемая самостоятельная работа студентов

Самостоятельно изучить следующие вопросы с подготовкой рефератов по ним:

история возникновения теории комплексных чисел; комплексное сопротивление электрической цепи, комплексная форма записи закона Ома.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ № 6

1⁰. Найти значение выражения $(2+6i)+(-5-9i)$.

2⁰. Действительной частью комплексного числа $(-3+2i)$ является число

а) 2; **б)** 3; **в)** -3; **г)** -1.

3⁰. Какое число будет сопряженным числу $5-6i$?

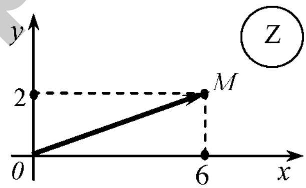
а) $5-6i$; **б)** $5+6i$; **в)** $-5-6i$; **г)** $-5+6i$.

4. Как называется число вида $-10i$?

а) действительным числом; **б)** отрицательным числом;
в) неполным комплексным числом; **г)** чисто мнимым числом

5. Какое комплексное число изображается точкой M?

а) $2-6i$; **б)** $2+6i$;
в) $6-2i$; **г)** $6+2i$.



6. Какую из форм записи комплексного числа называют алгебраической?

а) $z=x+iy$; **б)** $z=re^{i\varphi}$;

в) $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; **г)** $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

7. Модулем комплексного числа $z=x+iy$ называется число

а) $r=\sqrt{x^2+y^2}$; **б)** $r=|x|+|y|$;

в) $r=z(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; **г)** $r=\sqrt{x^2-y^2}$.

8. Если тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид $z = 4(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$, то в показательной форме это число имеет вид **а)** $z = 2 - \sqrt{12}i$; **б)** $z = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$; **в)** $z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$; **г)** $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
9*. Решите уравнение $x^2 + 4 = 0$.
10*. Аргумент комплексного числа $z = -1 - \sqrt{3}i$ равен **а)** $\frac{\pi}{3}$; **б)** $-\frac{2}{3}\pi$; **в)** $-\frac{\pi}{3}$; **г)** $\frac{\pi}{6}$.

ИДЗ 6

Задание 1. Даны комлексные числа z_1, z_2, z_3. Вычислить: $z_1 z_2 + z_3^2 + \overline{z_2} \cdot \frac{z_1}{z_3}$.

Задание 2. Представить заданное комплексное число в тригонометрической и показательной формах и изобразить его на комплексной плоскости.

Вариант 1

1. $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 4 + 3i$, $z_3 = 1 - i$.

2. $z = 4 + 4i$;

Вариант 2

1. $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = 3 + 2i$.

2. $z = 2\sqrt{3} + 2i$;

Вариант 3

1. $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 2 - i$.

2. $z = 3 - 3\sqrt{3}i$;

Вариант 4

1. $z_1 = 1 + 2i,$ $z_2 = 1 - i,$ $z_3 = 3 - i.$

2. $z = -5 + 5\sqrt{3}i;$

Вариант 5

1. $z_1 = 2 - i,$ $z_2 = 2 + 3i,$ $z_3 = 1 + 3i.$

2. $z = 3 - 3i;$

Вариант 6

1. $z_1 = -1 + i,$ $z_2 = 1 + 2i,$ $z_3 = 3 - 2i.$

2. $z = 4\sqrt{3} - 4i;$

Вариант 7

1. $z_1 = -1 - i,$ $z_2 = 1 - i,$ $z_3 = 2 + 3i.$

2. $z = -6 + 6i;$

Вариант 8

1. $z_1 = 2 + i,$ $z_2 = 1 - 2i,$ $z_3 = 1 + 2i.$

2. $z = -10 - 10\sqrt{3}i;$

Вариант 9

1. $z_1 = -2 + i,$ $z_2 = -1 + 2i,$ $z_3 = -3 + i.$

2. $z = 3 + 3\sqrt{3}i;$

Вариант 10

1. $z_1 = -3 + i,$ $z_2 = -2 + 2i,$ $z_3 = -1 + 3i.$
2. $z = -8 - 8i;$

Вариант 11

1. $z_1 = 1 + i,$ $z_2 = 3 + i,$ $z_3 = 4 - i.$
2. $z = 5\sqrt{3} - 5i;$

Вариант 12

1. $z_1 = 3 + 2i,$ $z_2 = 3 + i,$ $z_3 = 4 - 2i.$
2. $z = 4 - 4i;$

Вариант 13

1. $z_1 = 4 + 2i,$ $z_2 = 2 + 4i,$ $z_3 = 1 + i.$
2. $z = 6 + 6i;$

Вариант 14

1. $z_1 = -1 - 2i,$ $z_2 = 2 + i,$ $z_3 = 3 - 3i.$
2. $z = -2\sqrt{3} + 2i;$

Вариант 15

1. $z_1 = 3 + 3i,$ $z_2 = 1 + 2i,$ $z_3 = 3 + i.$
2. $z = 7 + 7\sqrt{3}i;$

Вариант 16

1. $z_1 = 1 + 4i,$ $z_2 = 1 - 4i,$ $z_3 = -1 - i.$
2. $z = -2 + 2i;$

Вариант 17

1. $z_1 = 3 + 4i,$ $z_2 = 3 - 4i,$ $z_3 = 2 - 2i.$
2. $z = -5 - 5\sqrt{3}i;$

Вариант 18

1. $z_1 = 2 + 3i,$ $z_2 = 3 + 4i,$ $z_3 = 3 + 3i.$
2. $z = 3\sqrt{3} - 3i;$

Вариант 19

1. $z_1 = 1 + 3i,$ $z_2 = 2 + 3i,$ $z_3 = 2 - i.$
2. $z = -4 + 4i;$

Вариант 20

1. $z_1 = 1 + 3i,$ $z_2 = 4 - i,$ $z_3 = 4 - 3i.$
2. $z = 10 - 10i;$

Вариант 21

1. $z_1 = 1 - i,$ $z_2 = 2 + 3i,$ $z_3 = 2 - i.$
2. $z = 3 + \sqrt{3}i;$

Вариант 22

1. $z_1 = -1 + 3i,$ $z_2 = 1 - i,$ $z_3 = 1 + 2i.$
2. $z = \sqrt{3} - 3i;$

Вариант 23

1. $z_1 = -1 + 2i,$ $\quad z_2 = 3 + 4i,$ $\quad z_3 = 3 + i.$
2. $z = -6 - 2\sqrt{3}i;$

Вариант 24

1. $z_1 = -1 - i,$ $\quad z_2 = 2 + 3i,$ $\quad z_3 = 1 - i.$
2. $z = 2\sqrt{3} + 6i;$

Вариант 25

1. $z_1 = -2 + i,$ $\quad z_2 = 2 + 3i,$ $\quad z_3 = 1 + 3i.$
2. $z = 2 - 2i.$

Вариант 26

1. $z_1 = 4 - 3i,$ $\quad z_2 = -1 + 2i,$ $\quad z_3 = 3 - i.$
2. $z = -6 + 2\sqrt{3}i;$

Вариант 27

1. $z_1 = 2 + 3i,$ $\quad z_2 = 1 - i,$ $\quad z_3 = -1 - i.$
2. $z = -3 + 3i;$

Вариант 28

1. $z_1 = -1 - 2i,$ $\quad z_2 = -2 + 2i,$ $\quad z_3 = -1 + 3i.$
2. $z = \sqrt{3} + 3i;$

Вариант 29

1. $z_1 = 2 - i,$ $z_2 = 2 + i,$ $z_3 = 4 - 2i.$

2. $z = 5 - 5i;$

Вариант 30

1. $z_1 = 1 - i,$ $z_2 = -1 + 2i,$ $z_3 = 1 - i.$

2. $z = -5 + 5i;$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Даны комплексные числа:

$z_1 = 5 - i$, $z_2 = -1 - 3i$, $z_3 = -2 + i$.

Вычислить $z_1 z_2 + z_3^2 + \overline{z_2} \cdot \dfrac{z_1}{z_3}$.

Решение. Последовательно вычислим $z_1 z_2 + z_3^2$:

$$z_1 \cdot z_2 = (5 - i)(-1 - 3i) = -5 + i - 15i + 3i^2 = -5 - 14i - 3 = -8 - 14i;$$

$$z_3^2 = (-2 + i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i;.$$

Тогда $z_1 z_2 + z_3^2 = -8 - 14i + 3 - 4i = -5 - 18i$.

Аналогично вычисляем $\overline{z_2}\dfrac{z_1}{z_3}$:

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{5 - i}{-2 + i} = \frac{(5 - i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \frac{-10 + 2i - 5i + i^2}{(-2)^2 - (i)^2} = \frac{-11 - 3i}{4 + 1} =$$

$$= \frac{-11 - 3i}{5} = -\frac{11}{5} - \frac{3}{5}i;$$

$$\overline{z_2} = -1 + 3i .$$

Тогда

$$\overline{z_2}\,\frac{z_1}{z_3}=\left(-1+3i\right)\cdot\left(-\frac{11}{5}-\frac{3}{5}i\right)=\frac{11}{5}-\frac{33}{5}i+\frac{3}{5}i-\frac{9}{5}i^2=4-6i\,.$$

Вычисляем $z_1z_2+z_3^2+\overline{z_2}\cdot\dfrac{z_1}{z_3}$:

$$z_1z_2+z_3^2+\overline{z_2}\cdot\frac{z_1}{z_3}=\left(-5-18i\right)+\left(4-6i\right)=-1-24i.$$

Задание 2. Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить на комплексной плоскости комплексное число $z=-2-2i$.

Решение. Действительная и мнимая части комплексного числа равны $x=\operatorname{Re}z=-2,\qquad y=\operatorname{Im}z=-2$

Найдем модуль и аргумент z :

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2},$$

$tg\varphi=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-2}{-2}=1$, так как число z находится в третьей четверти комплексной плоскости, то $\varphi=-\dfrac{3}{4}\pi$.

Следовательно, представление комплексного числа z в тригонометрической и показательной формах имеет вид

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$ и

$$z=re^{i\varphi}=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\,.$$

МОДУЛЬ 7
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В результате изучения модуля студенты должны:

1) знать а) *понятия и определения*: первообразная, неопределенный интеграл, основные свойства неопределенного интеграла, таблицу неопределенных интегралов, формулу интегрирования по частям; простейшие рациональные дроби I-IV типов, правильная и неправильная рациональные дроби, схема интегрирования дробно-рациональной функции, формулировка теоремы о разложении дробно-рациональной функции на сумму простейших дробей; тригонометрические и иррациональные функции, универсальная подстановка; **б)** *характеризовать* методы непосредственного интегрирования, замены переменной и по частям в неопределенном интеграле; виды простейших рациональных дробей; виды интегралов от тригонометрических и иррациональных функций;

2) уметь находить неопределенные интегралы по таблице интегралов, используя методы непосредственного интегрирования, поднесения под знак дифференциала, замены переменной и интегрирования по частям; интегрировать простейшие рациональные дроби I-IV типов, выделять целую часть неправильной рациональной дроби, разлагать правильную рациональную функцию на сумму простейших дробей I-IV типов; вычислять интегралы от простейших иррациональных и тригонометрических функций.

§ 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Определение. *Первообразной функцией* для функции $f(x)$ на промежутке X называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т.е.

$$F'(x) = f(x) \text{ для любых } x \in X .$$

Например, $\sin x$ есть первообразная функции $\cos x$ для любого действительного *x*, так как $(\sin x)' = \cos x$, $\ln x$ есть первообразная функция $\dfrac{1}{x}$ на промежутке $(0, +\infty)$, т. к. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ – две первообразные для одной и той же функции $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – постоянная.

Определение. Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C}.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)\mathrm{d}x$ *подынтегральным выражением.*

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ или $\mathrm{d}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ или $\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$.

3. $\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x$ (c = const).

4. $\int \left[f_1(x) + f_2(x)\right]\mathrm{d}x = \int f_1(x)\mathrm{d}x + \int f_2(x)\mathrm{d}x$.

5. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, а $u = u(x)$ – дифференцируемая функция, то $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$.

Таблица неопределенных интегралов

1.	$\int \mathrm{d}u = u + C$	**2.**	$\int 0\, \mathrm{d}u = C$
3.	$\int u^{\alpha}\mathrm{d}u = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$	**4.**	$, \quad \int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$
5.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	**6.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
7.	$\int a^{u}\mathrm{d}u = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C,$ $(a > 0, a \neq 1)$	**8.**	$\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{u} + C$
9.	$\int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C$	**10.**	$\int \cos u\mathrm{d}u = \sin u + C$
11.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	**12.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
13.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C$	**14.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u+a}{u-a}\right\rvert + C$
15.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$	**16.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$
17.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a^2}\right\rvert + C$	**18.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 - a^2}\right\rvert + C$
19.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sin u} = \ln\lvert \operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\rvert + C$	**20.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
21.	$\int \operatorname{tg} u\mathrm{d}u = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	**22.**	$\int \operatorname{ctg} u\mathrm{d}u = \ln\lvert\sin u\rvert + C$

Пример 7.1. Найти $\int\left(x-\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

Решение. Возведем подынтегральную функцию в квадрат и разобъем интеграл на сумму трех табличных интегралов:

$$\int\left(x-\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x=\int\left(x^2-2x\sqrt{x}+x\right)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x-2\int x^{3/2}\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^3}{3}-4\frac{x^{5/2}}{5}+\frac{x^2}{2}+C.$$

Пример 7.2. Найти $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}$.

Решение.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\left|\textit{применим табл. интеграл №11}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C\cdot$$

Пример 7.3. Найти $\int\frac{4-3x^2}{x^2\left(4+x^2\right)}dx$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в числителе подынтегральной функции:

$$\int\frac{4-3x^2}{x^2\left(4+x^2\right)}dx=\int\frac{\left(4+x^2\right)-4x^2}{x^2\left(4+x^2\right)}dx=\int\frac{4+x^2}{x^2\left(4+x^2\right)}dx-$$

$$-\int\frac{4x^2}{x^2\left(4+x^2\right)}dx=\int\frac{dx}{x^2}-4\int\frac{dx}{2^2+x^2}=-\frac{1}{x}-\frac{4}{2}arctg\frac{x}{2}+C=$$

$$-\frac{1}{x}-2arctg\frac{x}{2}+C.$$

§ 2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В НЕОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ (МЕТОД ПОДСТАНОВКИ)

При вычислении неопределенных интегралов методом замены переменной применяют два типа подстановок: либо $u=\varphi(x)$, либо $x=\psi(t)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ — некоторые функции.

После подстановки полученный интеграл может оказаться проще исходного.

Частным случаем метода замены переменной является *метод подведения под знак дифференциала*, основанный на формуле

$$\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(x) .$$

Например, $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\ln x$, $x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$ и т.п.

Пример 7.4. Найти $\int \sin(2x+1)\mathrm{d}x$ **.**

Решение. Сделаем замену переменной

$$2x+1 = u \Rightarrow x = \frac{u-1}{2}, \quad \mathrm{d}x = \left(\frac{u-1}{2}\right)' du \quad , \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u .$$

Тогда $\int \sin(2x+1)\mathrm{d}x = \int \sin u \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \sin u\mathrm{d}u =$

$$= -\frac{1}{2}\cos u + C = = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C .$$

Можно этот интеграл находить иначе, предварительно преобразовав выражение под знаком дифференциала:

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(2x+1) ,$$

так как дифференциал от постоянной $\mathrm{d}c = c'\mathrm{d}x = 0$. Значит,

$$\int \sin(2x+1)\mathrm{d}x = \int \sin(2x+1) \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}(2x+1) = \left|2x+1 = u\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C .$$

Пример 7.5. Найти $\int \frac{dx}{3x-1}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \left|3x-1=u\right| = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C\ .$$

Пример 7.6. Найти $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{9+\sin^2 2x}}dx$.

Решение. $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{9+\sin^2 2x}}dx = \left|\cos 2xdx = \frac{1}{2}d(\sin 2x)\right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin 2x)}{\sqrt{9+\sin^2 2x}} =$

$$= \left|\sin 2x = u\right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{9+u^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{9+u^2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\sin 2x + \sqrt{9+\sin^2 2x}\right| + C.$$

Пример 7.7. Найти $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$**.**

Решение. Поскольку $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, то подводя $\frac{1}{x}$ под знак дифференциала $\mathrm{d}x$, получаем $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln x)$.

Тогда $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x}$. Обозначив $\ln x = u$, получим табличный интеграл вида $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$.

Пример 7.8. Найти $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx.$

Решение.

$$\int \frac{\ln^5 x}{x}dx = \int \ln^5 x d\ln x = \left|\ln x = u\right| = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{\ln^6 x}{6} + C.$$

Пример 7.9. Найти $\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)arctgx}$.

Решение. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)arctgx} = \left| \frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx) \right| = \int \frac{d(arctgx)}{arctgx} =$

$= \left| arctgx = u \right| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|arctgx| + C$.

Пример 7.10. Найти $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+9}$.

Решение. Введем x под знак дифференциала. Тогда

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+9}} = \left| x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}x^2 \right| = \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2}{\sqrt{(x^2)^2+3^2}} = \left| x^2 = u \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+3^2}} = \frac{1}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+3^2}| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+\sqrt{x^4+9}| + C .$$

Пример 7.11. Найти $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx$.

Решение. $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx =$

$$\int \frac{2\sin x\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \left| \begin{matrix} 4+\sin^2 x = t, \\ 2\sin x\cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(4+\sin^2 x) + C.$$

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Если $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, тогда $\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$. Интегрируя обе части полученного равенства и учитывая, что $\int \mathrm{d}(uv) = uv$, получим *формулу интегрирования по частям* в неопределенном интеграле:

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u}.$$

Среди интегралов, берущихся по частям, выделяют три основных класса интегралов:

1. $\int x^n \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \mathrm{e}^x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$, здесь полагают $u = x^n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = nx^{n-1}\mathrm{d}x$.

2. $\int x^n \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \mathrm{arctg} x \\ \mathrm{arcctg} x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$, здесь полагают $\mathrm{d}v = x^n \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

3. $\int \mathrm{e}^x \begin{Bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$, полагают либо $u = \mathrm{e}^x$, либо $\mathrm{d}v = e^x \mathrm{d}x$ и дважды интегрируют по частям.

Пример 7.12. Найти $\int (x+2)e^{-8x}\mathrm{d}x$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = x + 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = (x+2)' \mathrm{d}x = \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = e^{-8x}\mathrm{d}x \Rightarrow v = \int \mathrm{e}^{-8x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\int \mathrm{e}^{-8x}\mathrm{d}(-8x) = -\frac{1}{8}e^{-8x}.$$

Тогда $\int (x+2x)e^{-8x}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{8}e^{-8x}(x+2) + \dfrac{1}{8}\int e^{-8x}\mathrm{d}x =$

$$= -\frac{1}{8}e^{-8x}(x+2) + \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)e^{-8x} + C = -\frac{1}{8}e^{-8x}(x+2) - \frac{1}{64}e^{-8x} + C.$$

Замечание. Иногда формулу интегрирования по частям применяют несколько раз подряд.

Пример 7.13. Найти $\int x^2 \cos 2x\mathrm{d}x$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = \cos 2x\mathrm{d}x \Rightarrow v = \int \cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Тогда

$$\int x^2\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\int x\sin 2x\mathrm{d}x$$

К последнему интегралу снова применим формулу интегрирования по частям, полагая $u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=\sin 2x\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x$.

Окончательно получаем

$$\int x^2\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

Пример 7.14. Найти $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$.

Решение. $\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix} u=\ln x & \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x & v=\frac{x^3}{3}\end{matrix}\right|=$

$$=\ln x\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=$$

$$=\frac{1}{3}x^3(\ln x-\frac{1}{3})+C.$$

Пример 7.15. Найти $\int x\,arctg\,x\,dx$.

Решение. $\int x\,arctg\,x\,dx=\left|\begin{matrix} u=arctgx, & du=\frac{dx}{1+x^2}, \\ dv=xdx, & v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}arctg\,x-$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}arctg\,x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg\,x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{x}arctg\,x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctg\,x+C\,.$$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Интегралы вида

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c},\quad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad \int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x,\quad \int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$$

сводятся к табличным после предварительного выделения полного квадрата в квадратном трехчлене с последующей заменой переменной.

Пример 7.16. Найти $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+5}$.

Решение. Выделим в знаменателе полный квадрат

$$x^2+6x+5=(x^2+2\cdot 3x+3^2)-3^2+5=(x+3)^2-4\,.$$

Тогда

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2-4}=\left|\begin{array}{l}x+3=u\\ x=u-3\\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}u\end{array}\right|=\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-4}=\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+3-2}{x+3+2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right|+C\,.$$

Пример 7.17. Найти $\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{9x^2-12x+5}$.

Решение.

$$\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{9x^2-12x+5}=\left|\begin{array}{l}9x^2-12x+5=(3x)^2-2\cdot 2\cdot 3x+4-4+5=\\ =(3x-2)^2+1\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{9x^2-12x+5}=\left|\begin{array}{c}3x-2=u,\\ x=\frac{u+2}{3},\quad \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}u\end{array}\right|=\int\frac{\frac{u+2}{3}-1}{u^2+1}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}u=\frac{1}{9}\int\frac{u-1}{u^2+1}\mathrm{d}u=$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{u}{u^2+1}\mathrm{d}u-\frac{1}{9}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(u^2+1)}{u^2+1}-\frac{1}{9}\mathrm{arctg}u=\frac{1}{18}\ln(u^2+1)-$$
$$-\frac{1}{9}\mathrm{arctg}u+C=\frac{1}{18}\ln(9x^2-12x+5)-\frac{1}{9}\mathrm{arctg}(3x-2)+C.$$

Для нахождения интегралов вида $\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$, $\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$ можно предложить еще один способ, который не использует замену переменной. Если $m\neq 0$, то в числителе можно выделить слагаемое, равное производной квадратного трехчлена $2ax+b=\left(ax^2+bx+c\right)'$.

Пример 7. 18. Найти $\int\frac{5x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$.

Решение.

$$\int\frac{5x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=\left|\left(x^2-4x+8\right)'=2x-4\right|=\int\frac{\frac{5}{2}(2x-4)+(10-1)}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=$$

$$=\int\frac{5/2(2x-4)+9}{\sqrt{x^2-4x+8}}=\frac{5}{2}\int\frac{d\left(x^2-4x+8\right)}{\sqrt{x^2-4x+8}}+9\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+2^2}}=$$

$$=5\sqrt{x^2-4x+8}++9\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}\right|+C.$$

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рациональной функцией называют дробь вида

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+\ldots+b_1x+b_0},$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно.

Если $m \geq n$, то дробь называется *неправильной*, а если $m < n$ – *правильной*.

Если дробь неправильная, то *выделяют целую часть*. Для этого числитель делят "уголком" на знаменатель.

Например, дробь $\dfrac{2x^3+3}{x^2+x+1}$ является неправильной, так как в числителе стоит многочлен третьей степени, а в знаменателе – второй. Разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
-\;2x^3 + 3 \qquad\qquad & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^3+2x^2+2x} & 2x-2 \\
-\;-2x^2-2x+3 & \\
\underline{-2x^2-2x-2} & \\
5 &
\end{array}$$

При делении на каждом шаге мы знаменатель x^2+x+1 умножили на такую степень x, чтобы при вычитании полученного после этого многочлена старшие степени уничтожались (сначала мы умножили на $2x$, затем на (-2)).

Следовательно, неправильную дробь можно представить в виде:

$$\frac{2x^3+3}{x^2+x+1} = 2x-2+\frac{5}{x^2+x+1}.$$

Из алгебры известно, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму *простейших* (*элементарных*) *рациональных дробей* следующих четырех типов:

I тип	$\dfrac{A}{x-a}$
II тип	$\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k = 2, 3, 4,\ldots)$
III тип	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$
IV тип	$\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l}$ $(k = 2, 3, 4,\ldots)$

где k, l – натуральные числа, A, B, C, a, p, q – постоянные, причем $p^2 - 4q < 0$ (квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней).

Интегралы от простейших дробей находятся следующими способами:

I тип	$\dfrac{A}{x-a}$	$\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln\lvert x-a\rvert + C$
II тип	$\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k = 2, 3, \ldots)$	$\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$
III тип	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$	Способ интегрирования рассматривался в §4.
IV тип	$\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l}$ $(k = 2,3, \ldots)$	Способ интегрирования рассматривается в [7] гл.8.

Интегрирование правильной рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m < n)$ производят по следующей схеме:

1) Раскладывают знаменатель на неприводимые множители (линейные и квадратичные)

$$Q_n(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q)^l .$$

2) Представляем правильную рациональную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^l} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \ldots$$

$$+ \frac{B_1x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{B_lx + C_l}{(x^2+px+q)^l}.$$

Т. е. каждому множителю $(x-a)^k$ в знаменателе соответствует сумма k дробей вида $\frac{A_i}{(x-a)^i}$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$), а каждому множителю $(x^2+px+q)^l$ – сумма l дробей вида:

$$\frac{B_j x + C_j}{(x^2+px+q)^j},\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l).$$

3) Находим неопределенные коэффициенты разложения.

Для определения коэффициентов A_i ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$), B_j, C_j ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ l$) правую часть разложения приводят к общему знаменателю и приравнивают числитель полученной дроби к $P_m(x)$.

Затем,

а) либо приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x (метод неопределенных коэффициентов);

б) либо придают x частные значения, в первую очередь значения корней знаменателя (метод частных значений);

в) либо комбинируют оба указанных приема.

4) Вычисляем интегралы. В общем случае интеграл от рациональной функции всегда может быть выражен через элементарные функции: степенную, $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$.

Пример 7.19. Найти $\int \frac{x^3-6}{x^2-9}\mathrm{d}x$.

Решение. Дробь $\frac{x^3-6}{x^2-9}$ является неправильной. Выделим ее целую часть

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3-6 & x^2-9 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-9x} & x \\ 9x-6 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3-6}{x^2-9}\mathrm{d}x = \int\left(x+\frac{9x-6}{x^2-9}\right)dx = \int x dx + \int \frac{9x}{x^2-9}dx - 6\int \frac{dx}{x^2-9} =$$

$$= \int x dx + \frac{9}{2}\int \frac{d(x^2-9)}{x^2-9} - 6\int \frac{dx}{x^2-3^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}\ln\left|x^2-9\right| - \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C .$$

Пример 7.20. Найти $\int \frac{x^2+3}{x^3-9x} \mathrm{d}x$.

Решение. Дробь $\frac{x^2+3}{x^3-9x}$ является правильной. Разложим знаменатель дроби на простые множители:

$$x^3 - 9x = x(x^2-9) = x(x-3)(x+3) .$$

Разложение подынтегральной функции на сумму простейших дробей имеет вид

$$\frac{x^2+3}{x(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3} .$$

Приведя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим

$$x^2 + 3 = A(x-3)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-3).$$

Для определения коэффициентов A, B, C применяем метод частных значений. Будем полагать в последнем равенстве x равным корням знаменателя:

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ x=3 \\ x=-3 \end{array}\right| \begin{array}{l} 3=-9A \\ 12=18B \\ 12=18C \end{array} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{3}, \quad B=\frac{2}{3}, \quad C=\frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$\int \frac{x^2+3}{x^3-9x}\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{2}{3}}{x-3} + \frac{\frac{2}{3}}{x+3} \right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x-3)}{x-3} +$$

$$+ \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3} = -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-3| + \frac{2}{3}\ln|x+3| + C .$$

Пример 7.21. Найти $\int \frac{x^5 - x^2 - 2}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

Решение. Дробь $\frac{x^5 - x^2 - 2}{x^2(x^2+1)}$ является неправильной. Выделим целую часть:

$$\begin{array}{l|l} x^5 - x^2 - 2 & x^4 + x^2 \\ \cline{2-2} \underline{x^5 + x^3} & x \\ -x^3 - x^2 - 2 & \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 - x^2 - 2}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int\left(x - \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2(x^2+1)}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x.$$

Вычислим последний интеграл. Разложение на простейшие элементарные дроби будет иметь вид:

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получаем

$$x^3 + x^2 + 2 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx + D)x^2.$$

Применим метод неопределенных коэффициентов, т.е. будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 1 = A + C, \\ x^2 & 1 = B + D, \\ x & 0 = A, \\ x^0 & 2 = B, \end{array}$$

откуда находим $A = 0$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -1$.

Значит,

$$\int \frac{x^5 - x^2 - 2}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{2}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1} +$$

$$+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - 2(-\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} + \mathrm{arctg}\,x = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \mathrm{arctg}\,x + C.$$

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

I. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{(ax+b)^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_s]{(ax+b)^{m_s}}\right)\mathrm{d}x,$$

где R – рациональная функция, $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots, m_s, n_s$ – целые числа, сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки

$$ax + b = t^k,$$

где k – наименьшее общее кратное показателей корней $n_1\, n_2, \ldots, n_s$, т. е. $k = НОК(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Пример 7.22. Найти $\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt[4]{2x+3}-1\right)\sqrt{2x+3}}$.

Решение. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt[4]{2x+3}-1\right)\sqrt{2x+3}} = \left|\begin{array}{l} НОК(2,4)=4 \\ 2x+3=t^4 \\ x=\dfrac{t^4-3}{2} \\ \mathrm{d}x = 2t^3\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int\frac{2t^3\mathrm{d}t}{(t-1)t^2} =$$

$$2\int\frac{t\mathrm{d}t}{t-1} = 2\int\frac{(t-1)+1}{t-1}\mathrm{d}t = 2\left(\int\mathrm{d}t + \int\frac{\mathrm{d}(t-1)}{t-1}\right) =$$

$$= 2\left(t + \ln|t-1|\right) + C = 2\left(\sqrt[4]{2x+3} + \ln\left|\sqrt[4]{2x-3}-1\right|\right) + C.$$

II. Интегралы вида

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx,$$

где a, b - постоянные, отличные от нуля, m, n, p - рациональные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции с помощью *подстановок Чебышева* в следующих случаях:

1) если p - целое число, то имеем , рассмотренный выше случай интегрирования простейших иррациональных функций;

2) если $(m+1)/n$ – целое число, то применяется подстановка $a + bx^n = u^s$, где s – знаменатель дроби $p = r/s,\ s > 0$;

3) если $(m+1)/n + p$ - целое число, то используется подстановка $a + bx^n = u^s x^n$.

Пример 7.23 Найти $\int \frac{dx}{x^7 \sqrt{1+x^4}}$.

Решение. Так как $m = -7, \quad n = 4, \quad p = -1/2$, то

$(m+1)/n + p = -3/2 - 1/2 = -2$ - целое число. Имеем третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^7 \sqrt{1+x^4}} = \left| \begin{array}{l} 1 + x^4 = u^2 x^4,\ x = \left(u^2 - 1\right)^{-1/4}, \\ dx = -\frac{1}{2}\left(u^2 - 1\right)^{-5/4} u\, du \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(u^2 - 1\right)^{7/4} u^{-1} \left(u^2 - 1\right)^{1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(u^2 - 1\right)^{-5/4} u\, du =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left(u^2 - 1\right) du = -\frac{1}{6} u^3 + \frac{1}{2} u + C = \left(-\frac{1}{6x^6} + \frac{1}{3x^2}\right) \sqrt{1 + x^4} + C.$$

§ 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

I. Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx .$$

1. Если хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное положительное*, то от нечетной степени отделяем один множитель и вносим его под знак дифференциала. Оставшуюся четную степень выражаем через дополнительную функцию с помощью формул $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Пример 7.24. Найти $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x\mathrm{d}x$

Решение. $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x\mathrm{d}x =$

$$= \int \sin^2 x(\cos^2 x)^2 \mathrm{d}(\sin x) = \int \sin^2 x(1 - \sin^2 x)^2 \mathrm{d}(\sin x) = \left| \sin x = t \right| =$$

$$= \int t^2 (1 - t^2)^2 \mathrm{d}t = \int t^2 (1 - 2t^2 + t^4)\mathrm{d}t = \int (t^2 - 2t^4 + t^6)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} +$$

$$+ \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

2. Если оба числа m и n *четные неотрицательные*, то применяем формулы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x .$$

Пример 7.25. Найти $\int \sin^2 x \cos^2 x\mathrm{d}x$

Решение. $\int \sin^2 x \cos^2 x\mathrm{d}x = \int (\sin x \cos x)^2 \mathrm{d}x =$

$$= \int (\frac{1}{2}\sin 2x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1 - \cos 4x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{8}(\int \mathrm{d}x - \int \cos 4x\mathrm{d}x) =$$

$$= \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\int \cos 4x\mathrm{d}4x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

II. Интегралы вида

$$\int \mathrm{tg}^m x\mathrm{d}x, \qquad \int \mathrm{ctg}^m x\mathrm{d}x, \qquad (m = 2, 3, \dots),$$

находятся соответственно с помощью подстановок:

$$\mathrm{tg}x = t, \qquad \mathrm{ctg}x = t.$$

Пример 7.26. Найти $\int \mathrm{tg}^4 x\mathrm{d}x$

Решение. $\int \mathrm{tg}^4 x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \mathrm{tg}x = t \\ x = \mathrm{arctg}t \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \dfrac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t =$

$$= \left| \begin{array}{l|l} t^4 & t^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{t^4 + t^2} & t^2 - 1 \\ -t^2 & \\ \underline{-t^2 - 1} & \\ \quad 1 & \end{array} \right| = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \int t^2 \mathrm{d}t - \int \mathrm{d}t + \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + \mathrm{arctg}t + C = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}x + x + C.$$

III. Интегралы вида

$\int \sin ax \sin bx\mathrm{d}x$, $\int \cos ax \cos bx\mathrm{d}x$, $\int \sin ax \cos bx\mathrm{d}x$
находятся с применением формул:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right],$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right],$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right].$$

Пример 7.27. Найти $\int \cos(2x-1)\cos(3x+5)dx$.

Решение. $\int \cos(2x-1)\cos(3x+4)dx =$

$$=\frac{1}{2}\int \left(\cos(x+6)+\cos(5x+3)\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int \cos(x+6)d(x+6)+\frac{1}{10}\int \cos(5x+3)d(5x+3)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin(x+6)+\frac{1}{10}\sin(5x+3)+C.$$

IV. В общем случае интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x,$$

где R – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональной функции новой переменной t с помощью *универсальной подстановки* $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, при этом

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Замечание. В случае, когда выполняется тождество

$R(-\cos x, -\sin x)\equiv R(\cos x, \sin x)$ можно применять *упрощенную подстановку* $\mathrm{tg}\,x=t$, при этом

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Пример 7.28. Найти $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+3\sin x+2\cos x}$.

Решение. $$\int\frac{\mathrm{d}x}{2+3\sin x+2\cos x}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}(x/2)=t\\ \sin x=2t/(1+t^2)\\ \cos x=(1-t^2)/(1+t^2)\\ \mathrm{d}x=2\mathrm{d}t/(1+t^2)\end{array}\right|=$$

$$\int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{2+3\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{\mathrm{d}t}{3t+2}=\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(3t+2)}{3t+2}=\frac{1}{3}\ln\left|3\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+2\right|+C.$$

Пример 7.29. Найти $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos^2 x}$.

Решение. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos^2 x}=\left| \begin{array}{l} tgx=t, \\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}, \\ dx=\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right|=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2+\frac{1}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+1}{1+t^2}}=$

$=\int \frac{dt}{3+2t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{2}t\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}t\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}+C=$

$=\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{\sqrt{2}tgx}{\sqrt{3}}+C$.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Найти интегралы

1) $\int \frac{x^3 - 2x + \sqrt{x} + 1}{x} dx$;

2) $\int \cos(5x - 2) dx$;

3) $\left(\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \right) dx$;

4) $\int \frac{dx}{3x + 4}$;

5) $\int \frac{xdx}{x^2 + 4}$;

6) $\int \frac{\ln x \, dx}{x}$;

7) $\int (2x + 3) \cos x dx$;

8) $\int (2x + 1) \ln x \, dx$;

9) $\int e^{4x} (x + 3) dx$;

10) $\int (x^2 - 3) \sin 2x dx$;

11) $\int \ln^2 x \, dx$;

12) $\int \arcsin x dx$.

13) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 8}$;

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 0{,}75}}$;

15) $\int \frac{x^5 + 2}{x^2 + 4} dx$;

16) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} dx$;

17) $\int \frac{x - 2}{x^2 - 8x - 9} dx$;

18) $\int \frac{x + 9}{x(x^2 + 6x + 5)} dx$;

19) $\int \frac{4x - 9}{x(x - 3)^2} dx$;

20) $\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 - 2x^2 + 5x} dx$.

21) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}$;

22) $\int \frac{\sqrt[6]{x + 1} \, dx}{\sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{x + 1}}$

23) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5x+4}+2\sqrt[4]{5x+4}}$; **24)** $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$;

25) $\int \sin^2 3x dx$; **26)** $\int \cos^4 \dfrac{x}{2} dx$;

27) $\int \dfrac{dx}{3+2\cos x}$; **28)** $\int \sin 3x \cos x dx$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

1. Найти: а) $\int \dfrac{5dx}{4x+3}$; б) $\int \dfrac{dx}{4x^2+5}$; в) $\int (x-1)e^{2x} dx$;

г) $\int x \cos 4x dx$; д) $\int x e^{4x^2} dx$; е) $\int \dfrac{dx}{x \ln x}$.

Вариант 2.

1. Найти: а) $\int \dfrac{7dx}{3x-2}$; б) $\int \dfrac{dx}{9x^2+10}$; в) $\int (2x+1)e^{x} dx$;

г) $\int (x+1)\sin 2x dx$; д) $\int x \sin x^{2^2} dx$; е) $\int \dfrac{\ln x dx}{x}$.

Домашнее задание

1. Найти: а) $\int \cos 6x dx$; б) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{10-3x^2}}$; в) $\int \dfrac{dx}{10-3x^2}$;

г) $\int \dfrac{\ln^2 x dx}{x}$; д) $\int e^{7x+10} dx$; е) $\int x \cos x^{2^2} dx$;

ж) $\int (4x+1)e^{3x} dx$; з) $\int (x+2)\sin 3x dx$; и) $\int \ln 4x dx$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти: а) $\int \frac{dx}{x^2+6x-40}$; б) $\int \frac{xdx}{x+2}$; в) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

Вариант 2

1. Найти: а) $\int \frac{dx}{x^2-8x-20}$; б) $\int \frac{xdx}{x+3}$; в) $\int \frac{4xdx}{(x-2)(x+1)(x+4)}$.

Домашнее задание

1. Найти: а) $\int \frac{dx}{x^2+10x-75}$; б); $\int \frac{xdx}{x+2}$ в) $\int \frac{x^2dx}{x^2+1}$;

г) $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x+2)(x-4)}$; д) $\int \frac{x^2dx}{(x+1)^2(x-2)}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти: а) $\int \frac{(1+x)dx}{\sqrt{x}+1}$; б) $\int \cos^2 xdx$; в) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$.

Вариант 2

1. Найти: а) $\int \frac{xdx}{4+\sqrt{x}}$; б) $\int \sin^2 xdx$; в) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

Домашнее задание

1. Найти: а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x}+1}$; б) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$; в) $\int \cos^3 xdx$;

г) $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ № 7

1^0. Если $F(x)=x^5$ является первообразной некоторой функции $f(x)$, то какая из предложенных функций также является первообразной $f(x)$?   **а)** $\Phi(x)=x^6$; **б)** $\Phi(x)=x^5-10$;   **в)** $\Phi(x)=x^4$ **г)** $\Phi(x)=\frac{x^5}{5}$.
2^0. Записать результат интегрирования $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+25}$.
3. В каком случае свойство интеграла применяется неверно   **а)** $\int(x+5)dx=\int xdx+\int 5dx$ **;**   **б)** $\int(x+5)^2dx=2\int(x+5)dx$ **;**   **в)** $\int(x-5)dx=\int xdx-5\int dx$ **;**   **г)** $\int(x-5)^2dx=\int x^2dx-10\int xdx+25\int dx$ **.**
3^0. Интеграл $\int\cos 3x\mathrm{d}x$ равен   а) $\sin 3x+C$; б) $\frac{1}{3}\sin 3x+C$;   в) $-\frac{1}{3}\sin 3x+C$; г) $-\sin 3x$.
4. Дробь $\frac{x^2}{x^2-8}$ называется   **а)** правильной; **б)** неправильной;   **в)** приведенной; **г)** неприведенной.
5. Записать замену для нахождения интеграла $\int\frac{3dx}{5+\sqrt{x+6}}$.

6. С помощью какой замены можно найти интеграл $\int \frac{1}{\cos x + 4}$ **?** **а)** $x = tgt$; **б)** $t = tgx$; **в)** $t = tg\frac{x}{2}$; **г)** $t = tg\frac{x}{4}$.
7. Для нахождения интеграла $\int (x+10)\sin 3x dx$ применяется формула интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$, где **а)** $u = x+10, dv = \sin 3x dx$; **б)** $u = \sin 3x dx, dv = x+10$; **в)** $u = (x+10)\sin 3x, dv = dx$; **г)** $u = (x+10)dx, dv = \sin 3x$.
8*. Замена $x = t^6$ применяется для нахождения интеграла **а)** $\int \frac{x^5}{x+6}dx$; **б)** $\int \cos 5x dx$; **в)** $\int \frac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt[12]{x} + x}dx$; **г)** $\int \frac{5}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}dx$.

ИДЗ 7

В задачах 1-7 найти неопределенные интегралы

Вариант 1

1. а) $\int (e^x - 2\sin x + 3x^2 - \frac{5}{x})dx$; **б)** $\int \frac{x^2 - 4x + 8}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+4}$; **г)** $\int \frac{3dx}{2x+1}$; **д)** $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$.

2. а) $\int xe^{-x^2}dx$; **б)** $\int \frac{\sin(\ln x)dx}{x}$; **в)** $\int \sin 2x \sqrt{\cos^3 2x} dx$.

3. а) $\int (x-1)e^{4x}dx$; **б)** $\int (3x+2)\sin x dx$; **в)** $\int \ln(x+1)dx$.

4. а) $\int \frac{x^2 dx}{x-1}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+4x+6}$; в) $\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$.

5. а) $\int \frac{3dx}{x(x-1)(x+2)}$; б) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; в) $\int \frac{4dx}{x^2(x-3)}$.

6. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+5}$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{x}dx}{1-\sqrt{x}}$.

7. а) $\int \cos^2 2xdx$; б) $\int \sin^3 xdx$; в) $\int \frac{dx}{3+\sin x}$.

Вариант 2

1. а) $\int (4x^5 - \frac{7}{x^2} + 2^x - \cos x)dx$; б) $\int \frac{1-3x^2+x^4}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{16-x^2}$; г) $\int \frac{2dx}{4x-3}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

2. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$; б) $\int \frac{e^x dx}{\sin^2(e^x)}$; в) $\int \sin 2x \cos^2 2xdx$.

3. а) $\int (2x+1)e^x dx$; б) $\int (x-2)\cos 3xdx$; в) $\int arctg 2xdx$.

4. а) $\int \frac{x^2 dx}{x+4}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$; в) $\int \frac{(4x+1)dx}{x^2+4x+3}$.

5. а) $\int \frac{2dx}{(x-3)(x+1)x}$; б) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$; в) $\int \frac{3dx}{(x-1)^2(x+2)}$.

6. а) $\int \frac{dx}{4-\sqrt{x-3}}$; б) $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}-4)\sqrt{x}}$.

7. а) $\int \sin^2 3xdx$; б) $\int tg^3(2x)dx$; в) $\int \frac{dx}{2-\cos x}$.

Вариант 3

1. а) $\int (4x^3 - \frac{2}{x^3} + 3tgx - 3^x)dx$; б) $\int \frac{3-5x+x^3}{x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{8+x^2}$; г) $\int \frac{5dx}{4-2x}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

2.а) $\int \sin^2 4x \cos 4x dx$; б) $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$; в) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

3. а) $\int (3x+5)e^x dx$; б) $\int (x-4)\sin 2x dx$; в) $\int \arcsin 3x dx$.

4. а) $\int \frac{x^3 dx}{x^2+1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$; в) $\int \frac{(5x+2)dx}{x^2+8x+17}$.

5.а) $\int \frac{5dx}{(x+3)(x+2)(x-4)}$; б) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$; в) $\int \frac{2dx}{(x+1)^2(x-2)}$.

6. а) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt{x}+1}$.

7. а) $\int \cos^4 3x dx$; б) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$; в) $\int \frac{5dx}{4+\cos x}$.

Вариант 4

1. а) $\int (2x^2 - \frac{3}{x} + 5\cos x - e^x)dx$; б) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3}dx$;

в) $\int \frac{dx}{4-x^2}$; г) $\int \frac{dx}{4x^2+7}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$.

2. а) $\int \frac{\sin x dx}{5\cos x+3}$; б) $\int \frac{x\,dx}{x^2-3}$; в) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

3. **а)** $\int (x+4)e^{-2x}dx$; **б)** $\int (3x-2)\cos 4x dx$; **в)** $\int \frac{\ln x\, dx}{\sqrt{x}}$.

4. **а)** $\int \frac{x^2+3\, dx}{x-2}$; **б)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$; **в)** $\int \frac{(x+3)\, dx}{x^2+2x+5}$.

5. **а)** $\int \frac{8dx}{x(x-1)(x-4)}$; **б)** $\int \frac{dx}{x(x^2+3)}$; **в)** $\int \frac{5dx}{(x-2)^2 x}$.

6. **а)** $\int \frac{2\, dx}{1+\sqrt{x}}$; **б)** $\int \frac{\sqrt{x+1}\, dx}{2-\sqrt[3]{x+1}}$.

7. **а)** $\int \sin^4 2x dx$; **б)** $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; **в)** $\int \frac{4dx}{\sin x - 2}$.

Вариант 5

1. **а)** $\int (2\cos x - 3x^6 + 4^x + 1)dx$; **б)** $\int \frac{x^2-6x+8}{x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{25+x^2}$; **г)** $\int \frac{dx}{4x^2-9}$; **д)** $\int \frac{5dx}{3x-2}$.

2. **а)** $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^4+1}}$; **б)** $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; **в)** $\int \frac{\sin 5x\, dx}{\cos^2 5x + 4}$.

3. **а)** $\int (4x-3)e^{2x}dx$; **б)** $\int (x+7)\sin 4x dx$; **в)** $\int arctg 3x dx$.

4. **а)** $\int \frac{x^2+1}{x-5}dx$; **б)** $\int \frac{dx}{x^2+8x+17}$; **в)** $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

5. **а)** $\int \frac{4dx}{(x-3)(x+5)x}$; **б)** $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+8)}$; **в)** $\int \frac{8dx}{(x-2)x^2}$.

6. а) $\int\frac{5dx}{3+\sqrt{x-2}}$; б) $\int\frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{4+\sqrt{x}}$; в) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{4-\sqrt[4]{x}}$.

7. а) $\int\cos^2 5xdx$; б) $\int\sin^2 2x\cos^3 2xdx$; в) $\int\frac{2dx}{4+\cos x}$.

Вариант 6

1. а) $\int(2x^7-\frac{3}{\sqrt{x}}+6^x-\sin x)dx$; б) $\int\frac{x+8x^3-6}{x^2}dx$;

в) $\int\frac{dx}{9-x^2}$; г) $\int\frac{dx}{5+9x^2}$; д) $\int\frac{7dx}{2x+1}$.

2. а) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-16}}$; б) $\int\frac{\ln x\,dx}{x}$; в) $\int\frac{\cos 3x\,dx}{\sin^2 3x+9}$.

3. а) $\int(x-7)e^{-7x}dx$; б) $\int(3x+1)\cos 2xdx$; в) $\int\arccos 2xdx$.

4. а) $\int\frac{x^3+1}{x^2-3}dx$; б) $\int\frac{dx}{x^2-4x+8}$; в) $\int\frac{(x+6)dx}{x^2+4x+3}$.

5. а) $\int\frac{2dx}{x(x-1)(x-2)}$; б) $\int\frac{dx}{x(x^2+7)}$; в) $\int\frac{4dx}{x^2(x-4)}$.

6. а) $\int\frac{x\,dx}{4-\sqrt{x}}$; б) $\int\frac{\sqrt[4]{x-3}dx}{5+\sqrt{x-3}}$.

7. а) $\int\sin^2 6xdx$; б) $\int\cos^2 2x\sin^3 2xdx$; в) $\int\frac{2dx}{\sin x-\cos x}$.

Вариант 7

1. а) $\int(2x^3-\frac{7}{x}+e^x+\cos x)dx$; б) $\int\frac{2x^3+4x^2-7}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+121}$; г) $\int \frac{dx}{9x^2-49}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$.

2. а) $\int \frac{2x\,dx}{x^2-5}$; **б)** $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$; **в)** $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

3. а) $\int (2x+3)e^{-x}dx$; **б)** $\int (3-x)\cos 2x dx$; **в)** $\int (4x+3)\ln x dx$.

4. а) $\int \frac{x^2dx}{x+5}$; **б)** $\int \frac{dx}{x^2+6x+8}$; **в)** $\int \frac{2x\,dx}{x^2-2x+5}$.

5.а) $\int \frac{5dx}{x(x-1)(x-3)}$; **б)** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-8)}$; **в)** $\int \frac{3dx}{(x-1)^2(x-3)}$.

6. а) $\int \frac{2dx}{\sqrt{x-1}+2}$; **б)** $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$.

7. а) $\int \cos^4 \frac{3}{2}x\,dx$; **б)** $\int \sin^3 2x dx$; **в)** $\int \frac{2dx}{\cos x-3}$.

Вариант 8

1. а) $\int (2^x - \sin x + 5x^2 - 6)dx$; **б)** $\int \frac{3x^4+x-7}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2-10}$; **г)** $\int \frac{dx}{4-3x}$; **д)** $\int \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$.

2. а) $\int \frac{x\,dx}{x^2+16}$; **б)** $\int \frac{e^x\,dx}{1-e^{2x}}$; **в)** $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sqrt{\sin 2x}}$.

3.а) $\int (x-4)e^{3x}dx$; **б)** $\int (2x+7)\cos 3x dx$; **в)** $\int (9x^2+4x)\ln x\,dx$.

4. а) $\int \frac{x^3dx}{x^2-1}$; **б)** $\int \frac{dx}{x^2-8x+20}$; **в)** $\int \frac{(4x-3)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

5. а) $\int \frac{2dx}{(x+1)(x+5)(x+3)}$; б) $\int \frac{dx}{(x-2)(x^2+3)}$; в) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+4)}$.

6. а) $\int \frac{3dx}{5-\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{x+1}\,dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

7. а) $\int \sin^4 \frac{5}{2}x\,dx$; б) $\int \sin^3 3x \cdot \cos^2 3x\,dx$; в) $\int \frac{4dx}{2+3\sin x}$.

Вариант 9

1. а) $\int (3x^2 - \frac{6}{x} + 7^x - \cos x)dx$; б) $\int \frac{2x^2-7x+3}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+7}$; г) $\int \frac{dx}{4x^2-1}$; д) $\int \frac{4dx}{5x-6}$.

2. а) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$; в) $\int \frac{\sin 4x dx}{\cos^2 4x+4}$.

3. а) $\int (2x+3)e^{4x}dx$; б) $\int (x-7)\cos 3x dx$; в) $\int \arccos 2x dx$.

4. а) $\int \frac{x^2dx}{x-2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+2x+17}$; в) $\int \frac{(1-2x)dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

5. а) $\int \frac{2dx}{x(x+4)(x-1)}$; б) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)}$; в) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+5)}$.

6. а) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4+x}$; б) $\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{3+\sqrt[3]{x+2}}$.

7. а) $\int \cos^4 \frac{7}{2}x dx$; б) $\int \sin^3 4x \cos^2 4x dx$; в) $\int \frac{2dx}{4+3\cos x}$.

Вариант 10

1. а) $\int(e^x-6x^3+\frac{8}{x^2}+2tgx)dx$; б) $\int\frac{4-3x^2+5x^4}{x}dx$;

в) $\int\frac{-3dx}{2x+7}$; г) $\int\frac{dx}{25x^2+9}$; д) $\int\frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$.

2. а) $\int\frac{\sqrt{\ln x}dx}{x}$; б) $\int\frac{xdx}{4+x^2}$; в) $\int\frac{\cos 2xdx}{3\sin 2x-2}$.

3. а) $\int(3-x)e^{6x}dx$; б) $\int(3x-6)\sin 2xdx$; в) $\int\frac{3\ln x}{x^4}dx$.

4. а) $\int\frac{x^2+2}{x+1}dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$; в) $\int\frac{(3x+2)dx}{x^2+6x+8}$.

5. а) $\int\frac{6dx}{(x+1)(x-4)(x-7)}$; б) $\int\frac{dx}{(x-7)(x^2+1)}$; в) $\int\frac{5dx}{(x+2)^2(x+5)}$.

6. а) $\int\frac{7dx}{7+\sqrt{x+4}}$; б) $\int\frac{dx}{(4-\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

7. а) $\int\sin^2 8xdx$; б) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$; в) $\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x}$.

Вариант 11

1. а) $\int(7^x+3x-\frac{6}{x}-ctgx)dx$; б) $\int\frac{2x^4-5x^2+8}{x^2}dx$;

в) $\int\frac{dx}{5+x^2}$; г) $\int\frac{dx}{9x^2-16}$; д) $\int\cos(11x-1)dx$.

2. а) $\int\frac{xdx}{4x^2-1}$; б) $\int\frac{\cos xdx}{2\sin^2 x}$; в) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. а) $\int(2x-4)e^{3x}dx$; **б)** $\int(x-7)\sin 8x dx$; **в)** $\int(4x-1)\ln x dx$.

4. а) $\int\frac{x^2+4}{x-3}dx$; **б)** $\int\frac{dx}{x^2+4x+9}$; **в)** $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

5. а) $\int\frac{6dx}{x(x-1)(x-2)}$; **б)** $\int\frac{dx}{(x+4)(x^2+2)}$; **в)** $\int\frac{9dx}{x^2(x+3)}$.

6. а) $\int\frac{4dx}{\sqrt{2x+1}+2}$; **б)** $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{(\sqrt[3]{x}+4)x}$.

7. а) $\int\sin^2 3x dx$; **б)** $\int\frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$; **в)** $\int\frac{2dx}{3+\cos x}$.

Вариант 12

1. а) $\int(e^x-7x^5+\cos x-2)dx$; **б)** $\int\frac{x^3-6x^2+7}{x^2}dx$;

в) $\int\frac{4dx}{2-5x}$; **г)** $\int\frac{dx}{16+x^2}$; **д)** $\int\sin(2-7x)dx$.

2. а) $\int\frac{dx}{x(\ln^2 x+4)}$; **б)** $\int\frac{e^x dx}{9+e^{2x}}$; **в)** $\int\frac{xdx}{\sqrt{7+2x^2}}$.

3.а) $\int(2-3x)e^{3x}dx$; **б)** $\int(2x+1)\cos x dx$; **в)** $\int arctg 3x dx$.

4. а) $\int\frac{x^2+3}{x+7}dx$; **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+17}}$; **в)** $\int\frac{(3x-2)dx}{x^2+6x+10}$.

5.а) $\int\frac{8dx}{(x+1)(x+4)(x-2)}$; **б)** $\int\frac{dx}{(x+3)(x^2+4)}$; **в)** $\int\frac{64}{x^2(x+8)}dx$.

6. а) $\int \frac{7dx}{\sqrt{x-3}+1}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$.

7. а) $\int \sin^2 6xdx$; б) $\int \sin^3 7x\cos^2 7xdx$; в) $\int \frac{-3dx}{\sin x-2}$.

Вариант 13

1. а) $\int (2-3x^6+\frac{1}{x}-4tgx+2^x)dx$; б) $\int \frac{x-6x^2+7}{x^3}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+6}$; г) $\int \frac{dx}{x^2+225}$; д) $\int \sin(2-4x)dx$.

2. а) $\int \frac{\cos xdx}{3-\sin x}$; б) $\int \frac{x\,dx}{x^2-6}$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{9-ctg^2 x}}$.

3. а) $\int (2x+8)e^{3x}dx$; б) $\int (3-4x)\cos 5xdx$; в) $\int \arccos 5xdx$.

4. а) $\int \frac{(x^3+6)dx}{x-2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$; в) $\int \frac{(4x+9)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$.

5. а) $\int \frac{2dx}{x(x+5)(x-6)}$; б) $\int \frac{dx}{(x-5)(x^2+1)}$; в) $\int \frac{-4dx}{(x+1)^2(x+4)}$.

6. а) $\int \frac{5dx}{6-\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x}+2)\sqrt{x}}$.

7. а) $\int \cos^2 2xdx$; б) $\int \sin^3 5xdx$; в) $\int \frac{2dx}{\sin x+\cos x}$.

Вариант 14

1. а) $\int (e^x - ctgx + 3x^5 + \frac{2}{x^2})dx$; **б)** $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + 5}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{8 + x^2}$; **г)** $\int \frac{2dx}{7x + 12}$; **д)** $\int \frac{dx}{\sqrt{7 + x^2}}$.

2. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{121 - x^2}}$; **б)** $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 25}$; **в)** $\int 2^{\sin x} \cos x dx$.

3. а) $\int e^{2x}(7 - 8x)dx$; **б)** $\int (4x + 5)\sin 2x dx$; **в)** $\int \left(3\sqrt{x} + 1\right)\ln x dx$.

4. а) $\int \frac{x^2 + 4}{x - 5}dx$; **б)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 16}}$; **в)** $\int \frac{(4x + 3)dx}{x^2 + 8x + 20}$.

5 а) $\int \frac{8dx}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)}$; **б)** $\int \frac{dx}{(x - 2)(x^2 + 2)}$ **в)** $\int \frac{dx}{(x + 4)^2 x}$.

6. а) $\int \frac{3dx}{\sqrt{x} - 1}$; **б)** $\int \frac{\sqrt[4]{x + 1}dx}{\sqrt{x + 1} + 4}$.

7. а) $\int \sin^2 \frac{7}{2}xdx$; **б)** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$; **в)** $\int \frac{2dx}{3 + 2\sin x}$.

Вариант 15

1. а) $\int (\frac{2}{x} - 4\cos x + 2^x - 7)dx$; **б)** $\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^3}dx$;

в) $\int \frac{dx}{11 - x^2}$; **г)** $\int \frac{2dx}{7 - 6x}$; **д)** $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}}$.

2. а) $\int \frac{xdx}{x^2 - 81}$; **б)** $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$; **в)** $\int \sin(7 - 3x)dx$.

3. а) $\int (2-8x)e^{5x}dx$; б) $\int (3-5x)\cos 2x dx$; в) $\int (1-4x)\ln x dx$.

4. а) $\int \frac{x^2+4}{x-1}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+8x+32}$; в) $\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt{x^2+10x+9}}$.

5. а) $\int \frac{-3dx}{(x+3)(x+7)x}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+4)(x-4)}$ в) $\int \frac{2dx}{(x+8)x^2}$.

6. а) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{6-x}$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{2x+3}dx}{4-\sqrt{2x+3}}$.

7. а) $\int \sin^2 4x dx$; б) $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx$; в) $\int \frac{5dx}{2-3\sin x}$.

Вариант 16

1. а) $\int (e^x+3x^8-\frac{3}{x^2}+\sin x)dx$; б) $\int \frac{7-5x^2+2x^4}{x^3}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+13}$; г) $\int \frac{5dx}{8x+13}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

2. а) $\int \frac{xdx}{x^2-15}$; б) $\int \frac{\sqrt{tgx}\,dx}{\cos^2 x}$; в) $\int e^x \cos(e^x)dx$.

3. а) $\int (3-x)e^{-7x}dx$; б) $\int (8x+2)\sin 7x dx$; в) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$.

4. а) $\int \frac{x^2-3}{x+1}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$; в) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

5. а) $\int \frac{7dx}{(x-1)(x+5)(x-6)}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x+4)}$; в) $\int \frac{7\,dx}{x^2(x+7)}$.

6. а) $\int \frac{3dx}{2+\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{x-2}\,dx}{\sqrt{x-2}-4}$.

7. а) $\int \sin^4 2x$; б) $\int \sin^2 3x \cos^3 3x dx$; в) $\int \frac{2dx}{5+3\cos x}$.

Вариант 17

1. а) $\int (4^x - \frac{3}{x^2} + 2\cos x - 5)dx$; б) $\int \frac{2x^3-4x+5}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2-11}$; г) $\int \frac{dx}{x^2+17}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

2. а) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$; б) $\int \frac{e^x\,dx}{8-e^{2x}}$; в) $\int \sin(2x-6)dx$.

3.а) $\int e^{3x}(7-2x)dx$; б) $\int (1-3x)\cos 5x dx$; в) $\int (3x^2+1)\ln x dx$.

4. а) $\int \frac{(x^3-1)dx}{x^2+2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+18}}$; в) $\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2+8x+9}$.

5.а) $\int \frac{2dx}{(x+1)(x-3)(x+5)}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+2)}$; в) $\int \frac{-4dx}{(x-1)^2(x+6)}$.

6. а) $\int \frac{dx}{4+\sqrt{x+3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^3}}$.

7. а) $\int \cos^4 4x$; б) $\int \sin^2 8x \cos^5 8x dx$; в) $\int \frac{6dx}{\cos x - 2\sin x}$.

Вариант 18

1. а) $\int (3x^4 - \frac{6}{x} + 3ctgx - e^x)dx$; б) $\int \frac{1-5x^2+6x^3}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{625+x^2}$; г) $\int \frac{dx}{3-8x}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8}}$.

2. а) $\int \frac{3x^2}{x^3+3}dx$; б) $\int \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}dx$; в) $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$.

3. а) $\int (2+6x)e^{-x}dx$; б) $\int (4-x)\sin 8x dx$; в) $\int \left(9x^2+4x\right)\ln x dx$.

4. а) $\int \frac{x^2 dx}{x+6}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-10x+50}$; в) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x-5}}dx$.

5. а) $\int \frac{-4dx}{x(x-3)(x-7)}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+4)(x+1)}$; в) $\int \frac{2dx}{(x-3)^2(x-1)}$.

6. а) $\int \frac{7dx}{\sqrt{x+3}+8}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}$.

7. а) $\int \sin^4 \frac{x}{2}dx$; б) $\int \sin^5 2x\cos^3 2x dx$; в) $\int \frac{3dx}{4-\sin x}$.

Вариант 19

1. а) $\int (2x^7-\frac{5}{\sqrt{x}}+7\cos x-3^x)dx$; б) $\int \frac{4x^3+2x-1}{x^2}dx$;

2. в) $\int \frac{dx}{64+x^2}$; г) $\int \frac{dx}{x^2-100}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12}}$.

2. а) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$; б) $\int \frac{xdx}{5+x^2}$; в) $\int \frac{\ln^2 xdx}{x}$.

3. а) $\int (2-8x)e^{-5x}dx$; б) $\int (6+x)\sin(8x-1)dx$; в) $\int \frac{\ln xdx}{x^2}$.

4. а) $\int \frac{(x^3-1)dx}{x^2+8}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+10x+15}$; в) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2+8x+52}}$.

5. а) $\int \frac{8dx}{x(x+1)(x+9)}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+3)(x+2)}$; в) $\int \frac{-3dx}{(x+7)^2(x-1)}$.

6. а) $\int \frac{2dx}{\sqrt{x+5}+3}$; б) $\int \frac{\sqrt[6]{2x-3}dx}{8+\sqrt{2x-3}}$.

7.а) $\int \cos^2 2xdx$; б) $\int \sin^3 6x \cos^4 6xdx$; в) $\int \frac{4dx}{2\sin x + 3\cos x}$.

Вариант 20

1. а) $\int (e^x + \frac{15}{x^3} - 3x^7 + \sin x)dx$; б) $\int \frac{4-3x^2+7x^4}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+16}$; г) $\int \frac{dx}{x^2-121}$; д) $\int \sin(3-6x)dx$.

2. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$; б) $\int \frac{\ln^3(x+1)dx}{x+1}$; в) $\int \sin^5 2x \cos 2xdx$.

3. а) $\int (3+2x)e^{2x}dx$; б) $\int (7-x)\cos 2xdx$; в) $\int arctg 5xdx$.

4. а) $\int \frac{(x^2+7)dx}{x-2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+32}}$; в) $\int \frac{(x-5)dx}{x^2+6x+13}$.

5. а) $\int \frac{3dx}{(x-2)(x-3)(x+5)}$; б) $\int \frac{dx}{(x-7)(x^2+8)}$; в) $\int \frac{-14dx}{(x+2)x^2}$.

6. а) $\int \frac{dx}{6+\sqrt{x-1}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3+\sqrt[3]{x}}$.

7. а) $\int \sin^2 3xdx$; б) $\int \frac{\sin^5 2x}{\cos^3 2x}dx$; в) $\int \frac{7dx}{4+3\cos x}$.

Вариант 21

1. а) $\int (2-\frac{5}{x}+8tgx-4^x)dx$; б) $\int \frac{8x-3x^3+9}{x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2-16}$; г) $\int \cos(9x-3)dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$.

2. а) $\int \frac{\sqrt{ctgx}dx}{\sin^2 x}$; б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; в) $\int \frac{12x}{x^4+36}dx$.

3. а) $\int (6+x)e^{9x}dx$; б) $\int (4-11x)\sin(3x+7)dx$; в) $\int (x-3)\ln x dx$.

4. а) $\int \frac{(x^2+6)dx}{x-7}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+12x+40}$; в) $\int \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx$.

5. а) $\int \frac{-9dx}{(x-4)(x-5)(x+3)}$ б) $\int \frac{dx}{(x+8)(x^2+2)}$ в) $\int \frac{7dx}{(x+9)^2(x-4)}$.

6. а) $\int \frac{5dx}{\sqrt{4x+1}-2}$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt{x}+2}$.

7. а) $\int 8\cos^4 3x dx$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$; в) $\int \frac{7dx}{2\sin x-8}$.

Вариант 22

1. а) $\int (8x^6-\frac{3}{x}-2\sin x+e^x)dx$; б) $\int \frac{5x^2-3x-7}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{49+x^2}$; г) $\int e^{4x+8}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{24+x^2}}$.

2. а) $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$; б) $\int \frac{3x^2 dx}{x^3+3}$; в) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x+16}$.

3. а) $\int(3x-8)e^{-4x}dx$ **;б)** $\int(18+2x)\cos(4x-2)dx$ **;в)** $\int\arccos 5x dx$.

4. а) $\int\frac{x^3dx}{x^2-2}$; **б)** $\int\frac{dx}{x^2+14x+48}$; **в)** $\int\frac{(1-x)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

5. а) $\int\frac{4dx}{x(x-3)(x+1)}$; **б)** $\int\frac{dx}{(x^2+7)(x-5)}$; **в)** $\int\frac{dx}{(x+4)(x-1)^2}$.

6. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+7}+5}$; **б)** $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$.

7. а) $\int 6\sin^4 3x dx$ **; б)** $\int\sin^2 5x\cos^3 5x dx$ **; в)** $\int\frac{-6dx}{3\sin x-\cos x}$.

Вариант 23

1. а) $\int(\frac{5}{x^3}+7\cos x-8^x+2\sqrt{x})dx$; **б)** $\int\frac{4-2x-9x^3}{x^2}dx$;

в) $\int\frac{dx}{81-x^2}$; **г)** $\int e^{11+2x}dx$; **д)** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-64}}$.

2. а) $\int\frac{xdx}{6x^2-1}$; **б)** $\int\frac{dx}{x(\ln^2 x+4)}$; **в)** $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{9-\sin^2 x}}$.

3. а) $\int(3-x)e^{-13x}dx$**; б)** $\int(2x-8)\sin 4x dx$ **;в)** $\int(3x-1)\ln x dx$.

4. а) $\int\frac{x^2dx}{x-11}$; **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+68}}$; **в)** $\int\frac{xdx}{x^2-6x+10}$.

5. а) $\int\frac{dx}{(x-9)(x+6)(x+1)}$; **б)** $\int\frac{dx}{(x-3)(x^2+6)}$; **в)** $\int\frac{7dx}{x^2(x-11)}$.

6. а) $\int \frac{3dx}{3\sqrt{x}-2}$; б) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}dx}{\sqrt[3]{x+3}+2}$.

7.а) $\int \cos^2 \frac{5}{2}xdx$; б) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x}$; в) $\int \frac{9dx}{5\sin x+1}$.

Вариант 24

1. а) $\int (2\sqrt{x}-6\cos x+\frac{8}{x^2}-7^x)dx$; б) $\int \frac{7-2x^3+4x^4}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{100+x^2}$; г) $\int \frac{dx}{x-12}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+81}}$.

2. а) $\int \frac{2dx}{3x-14}$; б) $\int e^{7-12x}dx$; в) $\int \sin(13-2x)dx$.

3. а) $\int (7x+11)e^{3x}dx$ б) $\int (2x-15)\cos 2xdx$;в) $\int arctg(3x+1)dx$.

4. а) $\int \frac{x+5}{x-1}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{x-13}$; в) $\int \frac{dx}{x^2-12x+20}$.

5. а) $\int \frac{4dx}{(x+8)(x-4)(x-2)}$; б) $\int \frac{dx}{(x+3)(x^2+6)}$ в) $\int \frac{5dx}{x^2(x+7)}$.

6. а) $\int \frac{3dx}{4-3\sqrt{x+4}}$; б) $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{(\sqrt[3]{x}+4)x}$.

7. а) $\int \cos^4 \frac{x}{4}dx$; б) $\int \sin^5 3xdx$; в) $\int \frac{4dx}{\sin x+2\cos x}$.

Вариант 25

1. а) $\int (3-e^x+2\sin x-4\sqrt[3]{x})dx$; б) $\int \frac{2x^3+5x^2-3}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{16x^2-9}$; г) $\int e^{-8x-1}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$.

2. а) $\int \frac{4xdx}{7x^2+5}$; б) $\int \frac{\sqrt{arctgx}dx}{1+x^2}$; в) $\int \sin x\sqrt[3]{\cos^2 x}dx$.

3. а) $\int (2-5x)e^{4x}dx$; б) $\int (1-8x)\sin 5xdx$; в) $\int x^2 \ln xdx$.

4. а) $\int \frac{x^3dx}{x^2+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x-11}}$; в) $\int \frac{(5-2x)dx}{x^2+8x+25}$.

5. а) $\int \frac{2dx}{x(x+2)(x-4)}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$; в) $\int \frac{-7dx}{(x+2)^2(x-3)}$.

6. а) $\int \frac{4dx}{2\sqrt{x+5}+3}$; б) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+4)dx}{\sqrt{x}+1}$.

7. а) $\int \sin^2 \frac{7}{2}xdx$; б) $\int \cos^5 2xdx$; в) $\int \frac{5dx}{3-\sin x}$.

Вариант 26

1. а) $\int (2^x-4tgx+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x})dx$; б) $\int \frac{1-2x^2+3x^3}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{5dx}{6x+1}$; г) $\int \frac{dx}{144+x^2}$; д) $\int \sin(2x+11)dx$.

2. а) $\int x\cos(x^2)dx$; б) $\int \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}dx$; в) $\int \sin 5x\cos^4 5xdx$.

3. а) $\int (x-8)e^{-4x}dx$; б) $\int (2x+7)\cos 8xdx$; в) $\int arcctg3xdx$.

4. а) $\int \frac{(x^2+4)dx}{x-1}$; б $\int \frac{dx}{x^2-14x+48}$; в) $\int \frac{(3+2x)dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$.

5. а) $\int\frac{6dx}{(x-1)(x+7)(x+6)}$; б) $\int\frac{dx}{(x^2+5)(x-2)}$; в) $\int\frac{8dx}{(x-3)^2x}$.

6. а) $\int\frac{3dx}{4+5\sqrt{2x+3}}$; б) $\int\frac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x})dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$.

7. а) $\int\sin^2 3x$; б) $\int\frac{\cos^5 xdx}{\sin x}$; в) $\int\frac{7dx}{4+3\cos x}$.

Вариант 27

1. а) $\int(5x^2-\frac{3}{x^2}+7\cos x-8^x)dx$; б) $\int\frac{4x^2-2x+1}{x}dx$;

в) $\int\frac{dx}{27+x^2}$; г) $\int\frac{3dx}{6-8x}$; д) $\int\frac{dx}{\sqrt{19+x^2}}$.

2. а) $\int x\sin(4x^2+7)dx$; б) $\int\sin^7 10x\cos 10xdx$;

в) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-4}}$.

3. а) $\int(2x+1)e^{7x}dx$; б) $\int(1-x)\cos 3xdx$; в) $\int\arccos 4xdx$.

4. а) $\int\frac{x^3dx}{x^2+6}$; б) $\int\frac{dx}{x^2+20x+64}$; в) $\int\frac{3x+6}{\sqrt{x^2-6x+10}}$.

5. а) $\int\frac{2dx}{x(x-3)(x+5)}$; б) $\int\frac{dx}{(x^2+7)(x+1)}$; в) $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-8)}$.

6. а) $\int\frac{5dx}{3-\sqrt{x+7}}$; б) $\int\frac{dx}{(3-\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

7. а) $\int\cos^2 11xdx$; б) $\int\sin^4 2x\cos^3 2xdx$; в) $\int\frac{dx}{2+\cos x}$.

Вариант 28

1. а) $\int (e^x + 5\sin x - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x})dx$; б) $\int \frac{3x + 5x^2 + 7}{x^2} dx$;

в) $\int \frac{dx}{17 + x^2}$; г) $\int \frac{8dx}{3 - 5x}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 7}}$.

2. а) $\int \frac{xdx}{3x^2 + 5}$; б) $\int \frac{\sin xdx}{2 - \cos x}$; в) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 9}$.

3. а) $\int (2x + 2)e^{-3x} dx$; б) $\int (1 - 3x)\sin 5xdx$; в) $\int (3x + 7)\ln xdx$.

4. а) $\int \frac{(x^2 + 5)dx}{x + 4}$; б) $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 58}}$; в) $\int \frac{(7x - 3)dx}{x^2 - 12x + 35}$.

5. а) $\int \frac{4dx}{(x + 5)(x + 2)(x + 3)}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2 + 3)(x - 1)}$; в) $\int \frac{6dx}{(x + 1)^2 (x + 6)}$.

6. а) $\int \frac{dx}{6 + \sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{2x + 4}dx}{3 - \sqrt{2x + 4}}$.

7. а) $\int \sin^2 18xdx$; б) $\int \sin^2 4x \cos^3 4xdx$; в) $\int \frac{5dx}{\cos x - 2\sin x}$.

Вариант 29

1. а) $\int (5x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} - 6\cos x + e^x)dx$; б) $\int \frac{4 - 2x + 3x^2}{x^2} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2 - 6}$; г) $\int \frac{3dx}{7x + 6}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{27 - x^2}}$.

2. а) $\int x\sqrt{3x^2 + 1}dx$; б) $\int \frac{\ln^4 xdx}{x}$; в) $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^2 2x + 25}$.

3. а) $\int (7 - 2x)e^{7x} dx$; б) $\int (1 + 3x)\cos 8xdx$; в) $\int arctg 4xdx$.

4. а) $\int \frac{x^3dx}{7-x^2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2+8x+52}$; в) $\int \frac{(5+3x)dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

5. а) $\int \frac{-3dx}{x(x-1)(x-7)}$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+8)(x+3)}$; в) $\int \frac{3dx}{(x-2)(x+4)^2}$.

6. а) $\int \frac{8dx}{2\sqrt{x}-7}$; б) $\int \frac{\sqrt[6]{2x-3}dx}{3+\sqrt[3]{2x-3}}$.

7. а) $\int 4\cos^4\frac{x}{2}dx$; б) $\int \sin^3 5xdx$; в) $\int \frac{3dx}{4+5\cos x}$.

Вариант 30

1. а) $\int (5\sin x - 2^x + 2x^3 + \frac{3}{\sqrt[4]{x}})dx$; б) $\int \frac{2x^2+7x-5}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2+16}$; г) $\int \frac{5dx}{1-3x}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{144+x^2}}$.

2. а) $\int \frac{3xdx}{\sqrt{3x^2+2}}$; б) $\int \frac{e^x dx}{\cos^2(e^x)}$; в) $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{\cos 2x}}$.

3. а) $\int (4x-3)e^{-7x}dx$; б) $\int (7-2x)\cos 8xdx$; в) $\int \ln(x+5)dx$.

4. а) $\int \frac{x^2dx}{x+8}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-32}}$; в) $\int \frac{10x-3}{x^2-10x+24}dx$.

5. а) $\int \frac{5dx}{(x-1)(x+5)(x-2)}$ б) $\int \frac{dx}{(x^2+8)(x+1)}$ в) $\int \frac{5dx}{x^2(x-4)(x-2)}$.

6. а) $\int \frac{6dx}{4-3\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{4x-3}}{5+\sqrt{4x-3}}dx$.

. а) $\int \sin^4 3xdx$; б) $\int \cos^3 5xdx$; в) $\int \frac{2dx}{5-\sin x}$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

1. Найти интегралы

а) $\int (3^x - 5x^2 + 4\cos x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$, **б)** $\int \frac{4x^3 + 8x^2 - 7}{x^2} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^2 + 79}$; **г)** $\int \frac{dx}{29 + x}$; **д)** $\int \frac{dx}{\sqrt{15 - x^2}}$.

Решение

а) Вычислим данный интеграл, используя основные правила интегрирования и таблицу основных неопределенных интегралов.

$$\int (3^x - 5x^2 + 4\cos x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx = \int 3^x dx - 5\int x^2 dx + 4\int \cos x dx - \int x^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3} - 5\frac{x^3}{3} + 4\sin x - \frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{\ln 3}3^x - \frac{5}{3}x^3 + 4\sin x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c \cdot$$

б) Чтобы вычислить данный интеграл, необходимо вначале выполнить почленное деление числителя на знаменатель, далее используем правила интегрирования и таблицу основных интегралов.

$$\int \frac{4x^3 + 8x^2 - 7}{x^2} dx = \int \left(4x + 8 - \frac{7}{x^2}\right) dx = 4\int x dx + 8\int dx - 7\int \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 8x - 7 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + c = 2x^2 + 8x + \frac{7}{x} + c.$$

в) $\int \frac{dx}{x^2 + 79} = \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{79}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{79}} arctg \frac{x}{\sqrt{79}} + c.$

г) $\int \frac{dx}{29 + x} = \int \frac{d(29 + x)}{29 + x} = \left|u = 29 + x\right| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|29 + x| + c.$

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{15-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{15})^2 - x^2}} = \left| \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c \right| =$

$= \arcsin\frac{x}{\sqrt{15}} + c$.

2. Найти интегралы

а) $\int \frac{7x}{8-11x^2}dx$; **б)** $\int \frac{e^{5x}}{\sqrt{e^{5x}+3}}dx$; **в)** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-tg^2x}}$.

Решение

Найдем данные интегралы, используя внесения под знак дифференциала числа и коэффициента и сведение его к табличным неопределенным интегралам.

а) $\int \frac{7x}{8-11x^2}dx = 7\int \frac{x}{8-11x^2}dx = 7\int \frac{1/2\,dx^2}{8-11x^2} = \frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)\int \frac{d(-11x^2)}{8-11x^2} =$

$= -\frac{7}{22}\int \frac{d(8-11x^2)}{8-11x^2} = \left|8-11x^2 = u\right| = -\frac{7}{22}\int\frac{du}{u} = -\frac{7}{22}\ln|u| + c =$

$-\frac{7}{22}\ln\left|8-11x^2\right| + c$.

б) $\int \frac{e^{5x}}{\sqrt{e^{5x}+3}}dx = \int \frac{1/5\,d\left(e^{5x}\right)}{\sqrt{e^{5x}+3}} = \frac{1}{5}\int \frac{d(e^{5x}+3)}{\sqrt{e^{5x}+3}} = \left|e^{5x}+3 = u\right| = \frac{1}{5}\int\frac{du}{\sqrt{u}} =$

$= \frac{1}{5}2\sqrt{u} + c = \frac{2}{5}\sqrt{e^{5x}+3} + c$.

в) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-tg^2x}} = \left|\frac{dx}{\cos^2 x} = dtgx\right| = \int \frac{dtgx}{\sqrt{4-tg^2x}} = \left|tgx = u\right| =$

$= \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{2} + c = \arcsin\frac{ctgx}{2} + c$.

3. Найти интегралы

а) $\int (3x-7)e^{-2x}dx$; **б)** $\int (8x+5)\sin 3x dx$; **в)** $\int \ln(3+x)dx$.

Решение

Данные интегралы относятся к интегралам, которые берутся с помощью формулы интегрирования по частям, т. е. $\int u dv = uv - \int v du$.

а) $$\int (3x-7)e^{-2x}dx = \left| \begin{matrix} u = 3x-7 \Rightarrow du = 3dx \\ dv = e^{-2x}dx \Rightarrow v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= (3x-7)\cdot(-\frac{1}{2}e^{-2x}) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot 3dx = -\frac{1}{2}(3x-7)e^{-2x} + \frac{3}{2}\int e^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-7)e^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + c .$$

б) $$\int (8x+5)\sin 3x dx = \left| \begin{matrix} u = 8x+5 \quad \Rightarrow du = 8dx \\ dv = \sin 3x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| = (8x+5)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) -$$

$$-\int -\frac{1}{3}\cos 3x \cdot 8dx = (8x+5)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) + \frac{8}{3}\int \cos 3x dx = (8x+5) - \frac{1}{3}(8x+5)\cos 3x +$$

$$+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + c = \frac{8}{9}\sin 3x + c = -\frac{1}{3}(8x+5)\cos 3x.$$

в) $$\int \ln(3+x)dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(3+x) \Rightarrow du = \frac{1}{3+x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\ln(3+x) - \int \frac{xdx}{3+x} =$$

$$= x\cdot\ln(3+x) - \int \frac{x+3-3}{3+x}dx = x\ln(3+x) - \int (1 - \frac{3}{3+x})dx =$$

$$= x\cdot\ln(3+x) - \int dx + \int \frac{3dx}{3+x} = x\cdot\ln(3+x) - x + \ln|3+x| + c .$$

4. Найти интегралы

а) $\int \frac{(x^2+5)dx}{x+2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+18x+80}}$; в) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

Решение:

а) Данное дробно-рациональное выражение является неправильной дробью, выделим целую часть путем деления числителя на знаменатель уголком.

$$
\begin{array}{r|l}
-\ x^2+5 & x+2 \\
x^2+2x & \overline{x-2} \\
\hline
-\ -2x+5 & \\
-2x-4 & \\
\hline
9 &
\end{array}
$$

$$\int \frac{x^2+5}{x+2}dx = \int\left(x-2+\frac{9}{x+2}\right)dx =$$

$$= \int xdx - 2\int dx + 9\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 9\ln|x+2| + c\,.$$

б) Данные неопределенный интеграл находим, используя выделение полного квадрата в знаменателе.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+18x+80}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+2\cdot 9x+81\right)-81+80}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+9)^2-1}} =$$

$$=\ln\left|x+9+\sqrt{(x+9)^2-1}\right|+c = \ln\left|x+9+\sqrt{x^2+18x+80}\right|+c.$$

в) Найти $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+13}dx = \left|\left(x^2-4x+13\right)' = 2x-4\right| =$$

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+6-1}{x^2-4x+13}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx + 5\int \frac{dx}{x^2-4x+13} =$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(2x-4)}{x^2-4x+13}+5\int\frac{dx}{x^2-2\cdot 2x+2^2+9}=$$

$$=\ \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|+5\int\frac{dx}{(x-2)^2+3^2}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|+$$

$$+\frac{5}{3}arctg\frac{x-2}{3}+c\cdot$$

5.Найти интегралы

5. а) $\int\frac{-15dx}{x(x-8)(x+10)}$ **; б)** $\int\frac{dx}{(x^2+7)(x-7)}$ **; в)** $\int\frac{2dx}{(x+1)^2(x-11)}$.

Решение:

Данные интегралы будем решать, используя разложение выражений на простейшие дроби

а) Т.к. каждому множителю знаменателя $(x-a)$ соответствует слагаемое $\frac{A}{x-a}$, получим разложение

$$\int\frac{-15dx}{x(x-8)(x+10)}=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-8}+\frac{C}{x+10}\right)dx.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и сравним числители условия и разложения на простейшие дроби

$$-15=A(x-8)(x+10)+Bx(x+10)+Cx(x-8).$$

Найдем неопределенные коэффициенты A,B,C с помощью метода частных значений

$$x=0:-15=-80A\Rightarrow A=\frac{15}{80}=\frac{3}{16},$$

$$x=8:-15=144B\Rightarrow B=-\frac{15}{144}=-\frac{5}{48},$$

$$x=-10:-15=780C\Rightarrow C=-\frac{15}{780}=-\frac{1}{52}.$$

Подставим найденные коэффициенты в разложение подынтегральной функции на простейшие дроби, получим

$$\int \frac{-15dx}{x(x-8)(x+10)} = \int \left(\frac{3/16}{x} + \frac{-5/48}{x-8} + \frac{-1/52}{x+10} \right) dx =$$

$$= \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{5}{48}\ln|x-8| - \frac{1}{52}\ln|x+10| + c.$$

б) Т. к. множителю $(x-a)$ соответствует дробь $\frac{A}{x-a}$, а множитель (x^2+a^2), если a>0, дробь $\frac{Bx+C}{x^2+a^2}$, то получим:

$$\int \frac{dx}{(x^2+7)(x-7)} = \int \left(\frac{A}{x-7} + \frac{Bx+C}{x^2+7} \right) dx.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и сравним числители условия и разложения на простейшие дроби

$$A(x^2+7) + (Bx+C)(x-7) = 1.$$

$$Ax^2 + 7A + Bx^2 - 7Bx + Cx - 7C = 1.$$

Сравним коэффициенты при соответствующих степенях х:

$$\begin{aligned} &x^2 : A + B = 0 \\ &x : -7B + C = 0 \qquad \Rightarrow B = -\frac{1}{56}; A = \frac{1}{56}; C = -\frac{1}{8}. \\ &x^0 : 7A - 7C = 1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+7)(x-7)} = \int \left(\frac{1/56}{x-7} + \frac{-1/56\, x - \frac{1}{8}}{x^2+7} \right) dx =$$

$$=\frac{1}{56}\ln|x-7|+\int\left(\frac{-\frac{1}{56}x}{x^2+7}-\frac{\frac{1}{8}}{x^2+7}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{56}\ln|x-7|-\frac{1}{56}\int\frac{xdx}{x^2+7}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2+7}=$$

$$=\frac{1}{56}\ln|x-7|-\frac{1}{56}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+7}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{56}\ln|x-7|-\frac{1}{112}\ln\left|x^2+7\right|-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{x}{\sqrt{7}}+c.$$

в) $\int\frac{2dx}{(x+1)^2(x-11)}=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-11}\right)dx.$

$$A(x+1)(x-11)+B(x-11)+C(x+1)^2=2$$

$$Ax^2-10Ax-11A+Bx-11B+Cx^2+2Cx+C=2$$

$$\begin{aligned}&x^2: A+C=0\\&x: -10A+B+2C=0 \qquad \Rightarrow C=\frac{1}{72};A=-\frac{1}{72};B=-\frac{1}{6}.\\&x^0: -11A-11B+C=2\end{aligned}$$

$$\int\frac{2dx}{(x+1)^2(x-11)}=\int\left(\frac{-\frac{1}{72}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{6}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{72}}{x-11}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{72}\ln|x+1|+\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{72}\ln|x-11|+c.$$

6. Найти интегралы

а) $\int\frac{4dx}{7-3\sqrt{x+8}}$; **б)** $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{2\sqrt{x}+7\sqrt[3]{x}}$.

Решение:

Данные интегралы будем решать при помощи замены корня (корней).

а) $$\int \frac{4dx}{7-3\sqrt{x+8}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+8}=t \\ x+8=t^2 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = \int \frac{4\cdot 2tdt}{7-2t} = 8\int \frac{tdt}{7-2t} = -8\int \frac{tdt}{2t-7} =$$

$$= -8\cdot\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t-\frac{7}{2}} = -4\int \frac{t-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}}{t-\frac{7}{2}}dt = -4\int\left(1+\frac{\frac{7}{2}}{t-\frac{7}{2}}\right)dt =$$

$$= -4\left(\int dt + \frac{7}{2}\int \frac{dt}{t-\frac{7}{2}}\right) = -4\left(t+\frac{7}{2}\ln\left|t-\frac{7}{2}\right|\right)+c =$$

$$= -4t - 14\ln\left|t-\frac{7}{2}\right| + c = -4\sqrt{x+8} - 14\ln\left|\sqrt{x+8}-\frac{7}{2}\right| + c.$$

б) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} НОК(2,3)=6 \\ x=t^6,\ dx=6t^5dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3+2t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+2} =$$

$$= \left| \begin{array}{rl} -\dfrac{t^3}{t^3+2t^2} & \dfrac{t+2}{t^2-2t+4} \\ -2t^2 & \\ \underline{-2t^2-4t} & \\ 4t & \\ \underline{4t+8} & \\ -8 & \end{array} \right| = 6\int\left(t^2-2t+4-\frac{8}{t+2}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^2}{2} + 4t - 8\ln|t+2|\right) + c = \left|t = \sqrt[6]{x}\right| = 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} + c =$$

$$= -48\ln\left(\sqrt[6]{x} + 2\right) + c.$$

7. Найти интегралы

а) $\int \sin^4 \frac{3}{2}x dx$ **;** **б)** $\int \sin^3 10x \cos^2 10x dx$ **;** **в)** $\int \frac{dx}{\cos x + 2}$ **.**

Решение:

а) Данный интеграл вычислим путем понижения степени с использованием формул: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Тогда

$$\int \sin^4 \frac{3}{2}x dx = \int \left(\sin^2 \frac{3}{2}x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 3x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1 - 2\cos 3x + \cos^2 3x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\cdot 2\int \cos 3x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 6x}{2}dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{8}\left(\int dx + \int \cos 6x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{48}\sin 6x + c$$

б) $$\int \sin^3 10x \cos^2 10x dx = \left|\begin{array}{l} \cos 10x = t \\ -\frac{1}{10}\sin 10x dx = dt \\ \sin 10x dx = -10dt \end{array}\right| =$$

$$= \int \sin^2 10x \sin 10x \cos^2 10x dx = \int (1-\cos^2 10x)\sin 10x \cos^2 10x dx =$$

$$=\int(1-t^2)t^2\cdot(-10dt)=-10\int(t^2-t^4)dt=-10\left(\int t^2dt-\int t^4dt\right)=$$

$$=-10\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)+c=-\frac{10}{3}\cos^3 10x-2\cos^5 10x+c.$$

в) Применим универсальную подстановку

$$\int\frac{dx}{\cos x+2}=\left|\begin{array}{l} tg\,\dfrac{x}{2}=t;\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2};dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+2}=$$

$$=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2+2+2t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{3+t^2}=2\int\frac{dt}{(\sqrt{3})^2+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+c=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\dfrac{x}{2}}{\sqrt{3}}+c.$$

МОДУЛЬ 8. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть функция $f(x)$ – определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. На каждом из полученных элементарных отрезков длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ произвольным образом выберем точку $\xi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ и составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Эта сумма называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

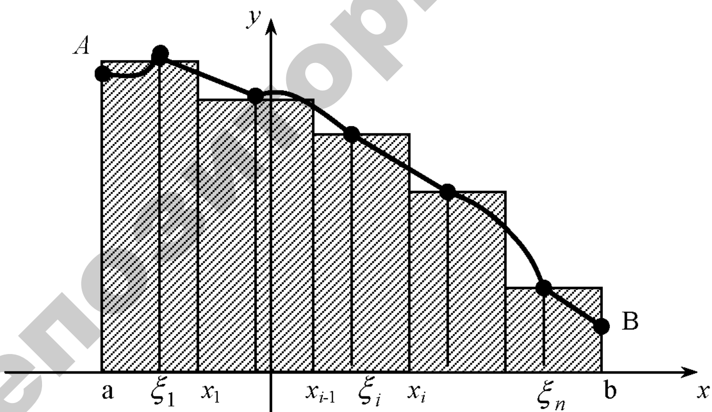


Рис. 8.1.

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм S_n при стремлении к нулю наибольшей из длин Δx_i, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i, то он называется ***определенным интегралом от функции*** $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Таким образом, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Непрерывная на отрезке $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *интегрируема на этом отрезке.*

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Если $y = f(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$, то геометрически определенный интеграл выражает площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$, $x = b$. Эта фигура называется *криволинейной трапецией.* В общем случае, когда функция $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ принимает значения разных знаков, определенный интеграл выражает разность площадей криволинейных трапеций, расположенных над осью Ox и под ней, так как площадям криволинейных трапеций, расположенных под осью Ox, присваивается знак «–». Например, для функции, график которой изображен на рисунке 8.2, имеем

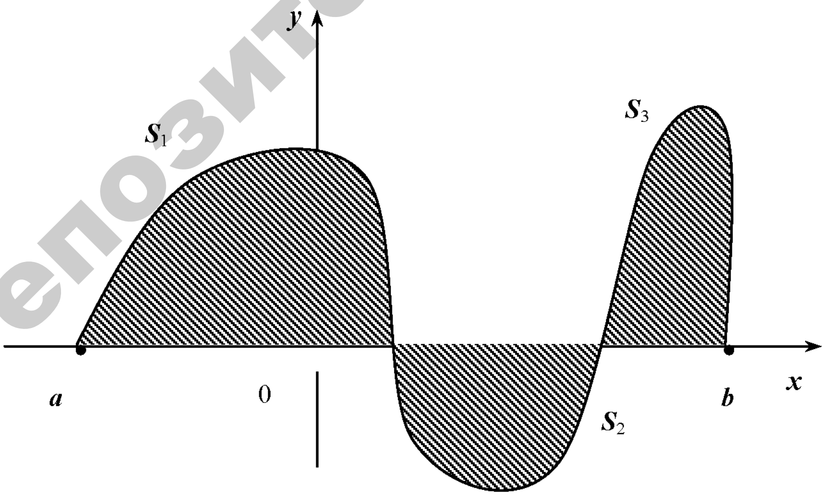


Рис. 8.2.

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3$$

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

3. $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (c = const).

4. $\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$.

5. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ для любого действительного c.

6. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, где $a<b$, и $f(x) \le \varphi(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \le \int_a^b \varphi(x)\mathrm{dx}.$$

7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда найдется хотя бы одна точка $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = f(c)(b-a)$$

(теорема о среднем для определенного интеграла).

§ 2. ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то есть существует интеграл

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\,. \qquad (8.1)$$

Верхний и нижний пределы интегрирования интеграла (8.1) являются постоянными. Если нижний предел интегрирования оставить постоянным, а в качестве верхнего предела использовать переменную x ($a \le x \le b$), то, в силу интегрируемости функции $y = f(x)$ на любом отрезке $[a;x]$, на отрезке $[a;b]$ определена функция вида

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}\,, \qquad (8.2)$$

где переменная интегрирования для удобства обозначена буквой t. Функция (8.2) называется ***интегралом с переменным верхним пределом***.

Найдем производную от $\Phi(x)$ по верхнему пределу x.

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда производная интеграла $\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$ по переменному верхнему пределу существует и равна подынтегральной функции $f(x)$, т.е.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}\right)'_x = f(x) \text{ для любого } x \in [a,b].$$

Доказательство. Пусть $x \in [a,b]$ – произвольная точка на отрезке $[a,b]$. Пусть приращение Δx таково, чтобы $x + \Delta x \in [a,b]$. Тогда

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Используя свойство 5 определенного интеграла, имеем

$$\Delta\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Применяя свойство 7, получаем

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{dt}=f(c)\Delta x,$$

где $c\in[x;x+\Delta x]$.

По определению производной с учетом непрерывности функции получаем, что

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x),$$

что и требовалось доказать.

§ 3. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Теорема. Значение определенного интеграла на отрезке $[a,b]$ от непрерывной функции $f(x)$ равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при $x=a$ и $x=b$:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{dx}=F(b)-F(a).$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, т.е.

$$\int f(x)\mathrm{dx}=F(x)+C.$$

По теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом первообразной функции $f(x)$ является также функция

$$\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{dt}\cdot$$

Так как первообразные $F(x)$ и $\Phi(x)$ отличаются друг от друга на постоянную, то на отрезке $[a,b]$ выполняется равенство

$$\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)+C\cdot \qquad (8.3)$$

Если в равенстве (8.3) положить $x = a$, то получим

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{dt} = F(a) + C\ .$$

Так как по свойству 2 определенного интеграла $\int_a^a f(t)\,\mathrm{dt} = 0$, то $F(a) + C = 0$, то есть

$$C = -F(a)$$

и

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} = F(x) - F(a)\,.$$

Полагая в последнем равенстве $x = b$, получаем

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = F(b) + C = F(b) - F(a)\,.$$

Заменяя переменную интегрирования t на x и вводя обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, получим формулу

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,,}$$

которая называется ***формулой Ньютона — Лейбница***.

Формула Ньютона — Лейбница позволяет свести вычисление определенного интеграла к нахождению неопределенного.

§ 4. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Непосредственное вычисление интегралов по формуле Ньютона – Лейбница осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 8.1. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$.

Решение. Так как $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$,

$$\text{то } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Пример 8.2. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x$.

Решение. Преобразуем выражение под знаком дифференциала

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 (3x+1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}\mathrm{d}(3x+1) = \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) =$$

$$= \frac{2}{9}(2^3 - 1) = \frac{14}{9}.$$

Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t,$$

где $x = \phi(t)$ имеет непрерывную производную, $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$.

Пример 8.3. Вычислить $\int_0^{16} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Введем замену переменной $\sqrt{x} = t$.

$$\int_0^{16} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 & a = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t & b = 16 \Rightarrow \beta = 4 \end{array} \right| = \int_0^4 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int_0^4 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2\left(t - \ln|1+t|\right)\Big|_0^4 = 2\left(4 - \ln 5 - 0\right) = 8 - 2\ln 5.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняется по формуле

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u .$$

Пример 8.4. Вычислить $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, положив $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, $\quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \Rightarrow v = x$.

Тогда

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \ln 1 - x\Big|_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 0 - \mathrm{e} + 1 = 1 .$$

Интегрирование четных и нечетных функций по симметричному отрезку. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a, a]$, симметричном относительно точки $x = 0$. Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\cdot\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{если} \quad f(x) - \text{четная}, \\ 0, & \text{если} \quad f(x) - \text{нечетная}. \end{cases} .$$

Пример 8.5. Вычислить $\int_{-1}^{1} \sin^{11} x\mathrm{d}x$.

Решение. Так как функция $f(x) = \sin^{11} x$ является нечетной, то $\int_{-1}^{1} \sin^{11} x\mathrm{d}x = 0$.

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

1. Площадь плоской фигуры

1) Площадь криволинейной трапеции (см. рис. 8.3), ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$, слева и справа соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx \qquad (8.3)$$

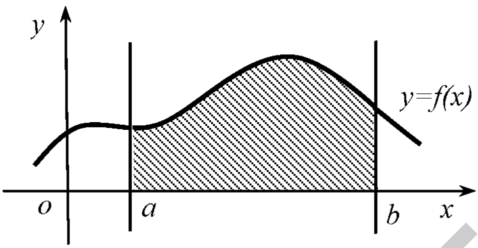


Рис. 8.3

2) Площадь фигуры (см. рис. 8.4), ограниченной сверху и снизу соответственно кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, определяется формулой

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x \qquad (8.4)$$

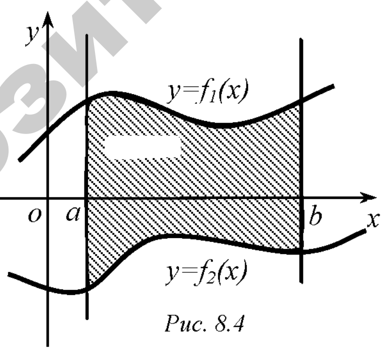


Рис. 8.4

3) Площадь криволинейной трапеции, в случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le x \le b$, $a = x(t_1), b = x(t_2)$, будет вычисляться по формуле

$$S = \int_{t_2}^{t_1} y(t) x'(t) \mathrm{d}t \qquad (8.5)$$

4) Площадь криволинейного сектора (см. рис. 8.5), ограниченного непрерывной кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \qquad (8.6)$$

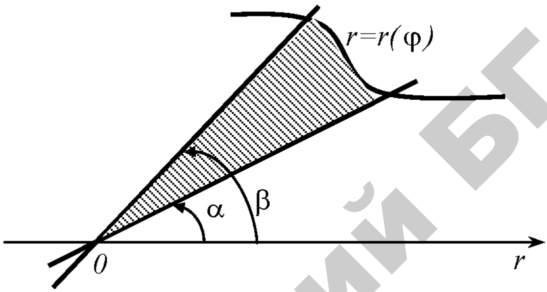


Рис. 8.5

Пример 8.6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x - y + 2 = 0$.

Решение. Данная фигура ограничена сверху прямой $y = x + 2$, а снизу – параболой $y = x^2$ (см. рис. 8.6).

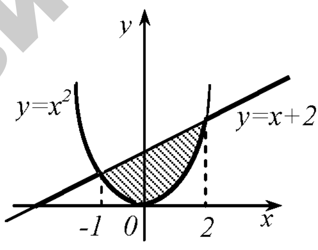


Рис. 8.6

Точки пересечения этих кривых найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой (8.4)

$$S=\int\limits_{-1}^{2}((x+2)-x^2)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}x\mathrm{d}x+2\int\limits_{-1}^{2}\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=2-\frac{1}{2}+4+2-\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{9}{2}.$$

Пример 8.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x=a\cos t,\qquad y=b\sin t.$

Решение. Так как эллипс (см. рис. 8.7) симметричен относительно координатных осей, достаточно найти площадь $\frac{1}{4}$ части фигуры, лежащей в первой четверти. Для вычисления площади воспользуемся формулой (8.5).

Найдем пределы интегрирования по t:

если $x=0$, то $\cos t=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\pi}{2}$ – нижний предел,

если $x=a$, то $\cos t=1 \quad\Rightarrow\quad t=0$ – верхний предел.

Значит,

$$\frac{1}{4}S=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t(a\cos t)'\mathrm{d}t=-ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\mathrm{d}t=-ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=$$

$$=-\frac{ab}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{\pi/2}^{0}=-\frac{ab}{2}(-\frac{\pi}{2}+0)=\frac{\pi ab}{4}.$$

Отсюда находим $S=\pi ab$.

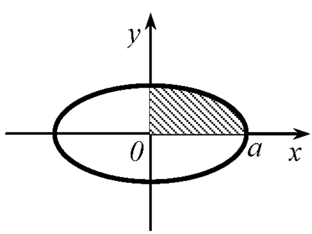


Рис. 8.7

Пример 8.8. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $r = a\cos\varphi$ и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. В полярной системе координат уравнение $r = a\cos\varphi$ задает окружность радиусом $\dfrac{a}{2}$ со смещенным центром (рис. 8.8).

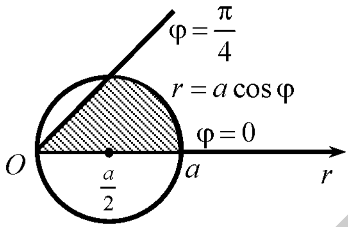


Рис. 8.8

Криволинейный сектор, площадь которого мы вычисляем, ограничен кривой $r = a\cos\varphi$ и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Поэтому

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a\cos\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2(\pi+2)}{8}.$$

2. Длина дуги кривой

1) Длина дуги кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (8.7)$$

2) Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,\mathrm{d}t\,. \qquad (8.8)$$

3) Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi . \qquad (8.9)$$

Пример 8.9. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки A (4, 8) (см. рис. 8.9).

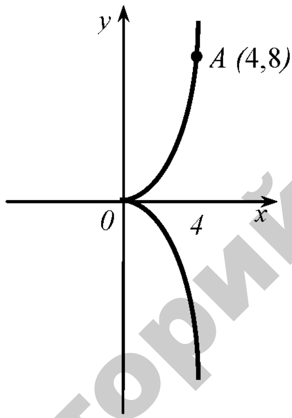


Рис. 8.9

Решение. Имеем $\quad y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}})^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{(1 + \frac{9}{4} x)}\, d(1 + \frac{9}{4} x) =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} (1 + \frac{9}{4} x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

Пример 8.10. Найти длину кардиоиды (см. рис. 8.10) $r = a(1 + \cos\varphi)$.

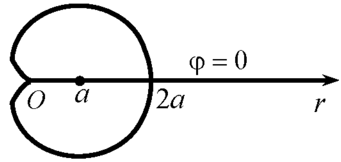


Рис. 8.10

Решение. Имеем

$$\frac{1}{2}l=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=a\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,\mathrm{d}\varphi=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi=2a2\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\frac{\varphi}{2}=4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=4a,$$

откуда $l=8a$.

3. ОБЪЕМ И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

1) Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, $a\le x\le b$.

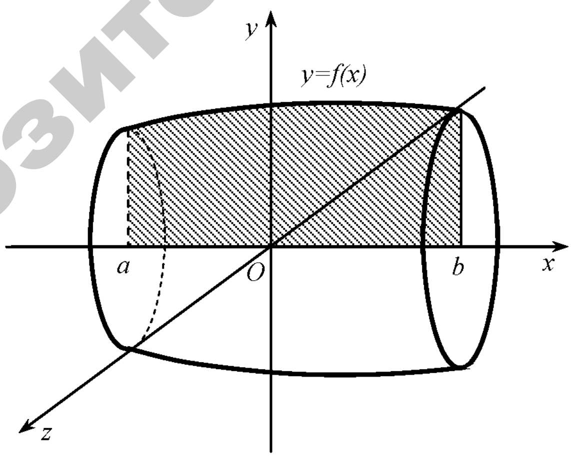


Рис. 8.11

(см. рис. 8.11), вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 \mathrm{d}x \quad . \tag{8.10}$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, вращается вокруг оси Oy, то

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 \mathrm{d}y. \tag{8.11}$$

2) Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$Q_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.12}$$

Если дуга $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, вращается вокруг оси Oy, то

$$Q_y = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+(x'_y)^2}\,\mathrm{d}y\,. \tag{8.13}$$

Пример 8.11. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $x = y^2$ (см. рис. 8.14).

Решение. Найдем точки пересечения кривых из системы

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = x^4 \quad \Leftrightarrow \quad x - x^4 = 0, \quad x(1 - x^3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

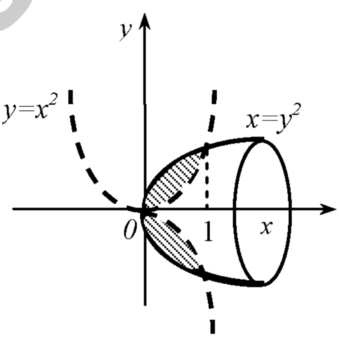


Рис. 8.14

Искомый объем есть разность двух объемов: объема V_1, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=\sqrt{x}$ $(0 \le x \le 1)$ и объема V_2, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=x^2$ $(0 \le x \le 1)$.

Используя формулу (8.10), получаем

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x dx - \pi\int_0^1 x^4 dx =$$

$$= \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}) = \frac{3}{10}\pi.$$

Координаты центра тяжести плоской пластинки

Рассмотрим плоскую пластинку, имеющую форму криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Будем предполагать, что пластинка является однородной с плотностью

$$\rho = \text{const}.$$

Масса такой пластинки вычисляется по формуле

$$m = \rho\int_a^b f(x)\, dx = \rho\, S,$$

где S – площадь пластинки.

Координаты центра тяжести C (x_c, y_c) однородной пластинки могут быть вычислены по формулам

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b xy\, dx, \quad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx,$$

где S – площадь пластинки.

§ 6. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода)

Определение. ***Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования*** от непрерывной на промежутке $[a,+\infty)$ функции $f(x)$ называется предел

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.14}$$

Аналогично ***несобственным интегралом с бесконечным нижним пределом интегрирования*** от непрерывной на промежутке $(-\infty,b]$ функции $f(x)$ называется предел

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{8.15}$$

Если пределы в правых частях формул (8.14) и (8.15) существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы называются ***сходящимися***, если пределы не существуют или бесконечны, — ***расходящимися***.

Несобственным интегралом с бесконечными пределами интегрирования от непрерывной на промежутке $(-\infty,+\infty)$ функции $f(x)$ называется интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{8.16}$$

где $c\in(-\infty,\infty)$ – произвольная точка. Этот несобственный интеграл называется ***сходящимся***, если оба предела существуют. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ называется ***расходящимся***.

Интегралы (8.14) – (8.16) называются также ***несобственными интегралами первого рода***.

Пример 8.12. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1 .$$

Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ сходится.

Пример 8.13. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

Решение. $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to \infty} \ln x \Big|_1^b = \lim\limits_{b \to \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$.

Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ расходится.

Пример 8.14. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x + \lim_{b \to \infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_a^0 + \lim_{b \to \infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b =$$

$$= \operatorname{arctg} 0 - \lim_{a \to -\infty} \operatorname{arctg} a + \lim_{b \to \infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 =$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} + 0 = \pi.$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x$ сходится.

Критерии сходимости несобственных интегралов первого рода

Теорема. (признак сравнения). Пусть на промежутке $[a,+\infty)$ определены две интегрируемые на любом конечном отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, а если расходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Теорема (предельный признак сравнения). Пусть на промежутке $[a,+\infty)$ определены две интегрируемые на любом конечном отрезке $[a,b]$ функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, и существует конечный предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A .$$

Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 8.15. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+\sin x} \mathrm{d}x$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения. В примере 8.10 было показано, что интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ сходится. Так как

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+\sin x}{x^2} = 1 ,$$

то интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2 + \sin x} \mathrm{d}x$ тоже сходится.

Теорема. Если на промежутке $[a, +\infty)$ функция $y = f(x)$ меняет знак и при этом сходится несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$.

Если несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ называется ***абсолютно сходящимся***.

Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода).

Определение. ***Несобственным интегралом*** от непрерывной на промежутке $[a, b)$ функции $f(x)$, неограниченной справа в точке $x = b$, называется предел

$$\int\limits_{a}^{b} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x) \mathrm{d}x. \qquad (8.17)$$

Аналогично ***несобственным интегралом*** от непрерывной на промежутке $(a, b]$ функции $f(x)$, неограниченной слева в точке $x = a$, называется предел

$$\int\limits_{a}^{b} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x) \mathrm{d}x. \qquad (8.18)$$

Если функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой внутренней точке отрезка $c \in (a, b)$, то интеграл представляют в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8.19}$$

Если пределы в правых частях формул (8.17) – (8.19) существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы от разрывной функции называются ***сходящимися***, в противном случае — ***расходящимися***.

Интегралы (8.17) – (8.19) называются также ***несобственными интегралами второго рода***.

Пример 8.16. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. При при $x = 1$ подынтегральная функция является неограниченной, следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 \right) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится.

Пример 8.17. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(-\frac{1}{x} \right)\Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty .$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ расходится.

Критерии сходимости несобственных интегралов второго рода

Теорема (признак сравнения). Пусть в левой (правой) окрестности точки b (точки a) определены функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, а если расходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, то расходится и несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Теорема (предельный признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны на промежутке $[a,b)$, b – точка бесконечного разрыва функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = A$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ сходятся или расходятся одновременно.

Аналогично формулируется предельный признак сравнения несобственных интегралов, имеющих разрыв в точке a или в точке $c \in (a;b)$.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Вычислить интегралы

а) $\int_0^1 (3x^2 + 4x - 1)dx$; **б)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$, $y = 4\ (x \geq 0)$.

3. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$ от $x = -1$ до $x = 4$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = 2 - x^2$ и прямыми $y = x$ и $x = 0$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

1. Вычислить интеграл

а) $\int_0^2 (6x^2 - 8x + 3)dx$; б) $\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = -6x^2 + 12x$ и осью Ox.

3. Исследовать несобственный интеграл $\int_1^{\infty} (2x+3)dx$ на сходимость.

Вариант 2.

1. Вычислить интеграл

а) $\int_0^1 \left(9x^2+2x-1\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/6} \cos 3x dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=-6x^2+6x$ и осью Ox.

3. Исследовать несобственный интеграл $\int_1^{\infty}(3x-2)dx$ на сходимость.

Домашнее задание

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2 (x^2+3)dx$; б) $\int_0^3 (3x+2)^2 dx$; в) $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x dx$;

г) $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x+1)}$; д) $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-8x+20}$; е) $\int_1^{64} \frac{dx}{(4-\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

2. Материальная точка движется со скоростью $v=2t+3t^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за четвертую секунду.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=2-x$.

4. Найти длину дуги кривой $y=\ln(\cos x)$ от 0 до $\frac{\pi}{3}$.

5. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной кривыми $y=2-x^2$, $y=x$ и $x=0$ $(x\ge 0)$

а) вокруг оси Ox

б) вокруг оси Oy

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ № 8

1⁰. Если $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$, то справедливо равенство

а) $\int\limits_c^d f(x)dx = F(a) - F(b)$; **б)** $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\cdot b - F(x)\cdot a$;

в) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a) + F(b) + C$; **г)** $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

2⁰. Значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, если $f(x) \le 0$ равно:

а) длине дуги $y = f(x), a \le x \le b$;

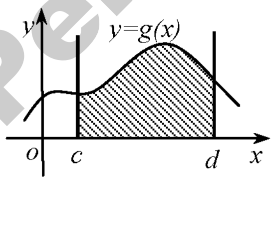
б) длине отрезка $[a,b]$.

в) площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x), x = a, x = b, y = 0$;

г) площади криволинейной трапеции, взятой со знаком минус.

3⁰. Вычислить $\int\limits_1^1 \left(x^5 + \cos 4x - 4\right)dx$.

4. На рисунке изображена криволинейная трапеция. Объем тела вращения вокруг оси Ox можно найти по формуле



а) $\int\limits_c^d g^2(x)dx$;

б) $\pi\int\limits_d^c g^2(x)dx$;

в) $\pi\int\limits_c^d g^2(x)dx$; **г)** $\int\limits_d^c g(x)dx$.

5. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2$, то интеграл $\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, \mathrm{d}t$ позволяет найти:

а) площадь плоской фигуры; **б)** объем тела вращения;
в) длину дуги кривой; **г)** площадь поверхности вращения.

---

6. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2x+5}$ равен:

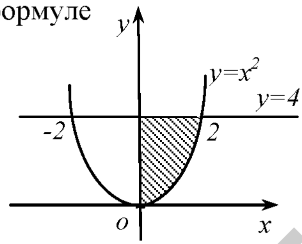
а) $\ln|2x+5| + C$; **б)** $\ln|2x+5|$;

в) $\frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{2}\ln 5$; **г)** $\frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 7$.

---

7. Вычислить $\int\limits_{14}^{15} dx$.

8*. Площадь фигуры, изображенной, на рисунке находится по формуле



а) $S = \int\limits_0^2 x^2 dx$; **б)** $S = \int\limits_0^4 y dy$;

в) $S = \int\limits_0^2 \left(4 - x^2\right) dx$; **г)** $S = \int\limits_0^4 x^2 dx$.

9*. Длина линии $y = \sqrt{x}$ между точками $O(0;0)$ и $A(1;1)$ вычисляется с помощью интеграла

а) $l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$; **б)** $l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{3}{2}x^2}\, dx$;

в) $l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$; **г)** $l = \int\limits_1^0 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$.

10*. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид

а) $\int\limits_a^b u dv = uv - \int\limits_a^b v du$; **б)** $\int\limits_a^b u dv = uv + \int\limits_a^b v du$;

в) $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$; **г)** $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b + \int\limits_a^b v du$.

ИДЗ 8

Задание 1.

Вычислить определенный интеграл.

Задание 2.

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

Задание 3.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

Задание 4.

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг оси Ox.

Вариант 1.

1. а) $\int\limits_1^2 \frac{3\mathrm{dx}}{2x-1}$; **б)** $\int\limits_1^2 (x+2)\ln x\mathrm{dx}$.

2. $\int\limits_4^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-8x+25}$.

3. $y=x^2-4x+5$, $y=2x-3$.

4. Ф: $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi/2$.

Вариант 2.

1. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt[3]{1+x^2}\mathrm{dx}$; **б)** $\int\limits_0^1 e^{3x}(2x-1)\mathrm{dx}$.

2. $\int\limits_{-3}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+6x+10}$.

3. $y=x^2-6x+7$, $y=2x-5$.

4. Ф: $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $x=1$.

Вариант 3.

1. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\mathrm{dx}}{x^2+1}$ **;** **б)** $\int\limits_{-1}^{0} (2x+3)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ **.**

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-4x+8}$ **.**

3. $y = x^2 - 3x + 1$, $y = x - 2$.

4. Ф: $y = x^2$, $x = 0$, $x = 3$.

Вариант 4.

1. а) $\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ **;** **б)** $\int\limits_1^e x^3 \ln x \mathrm{d}x$ **.**

2. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+2x+17}$ **.**

3. $y = x^2 - 5$, $y = 2x + 3$.

4. Ф: $y = 6x^2 + 2x$, $x = 0$, $x = 1$.

Вариант 5.

1. а) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\mathrm{d}x$ **;** **б)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x \mathrm{d}x$ **.**

2. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-4x+13}$ **.**

3. $y = x^2 - x - 1$, $y = x + 2$.

4. Ф: $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/2$.

Вариант 6.

1. а) $\int\limits_0^5 \frac{4x\mathrm{d}x}{x^2+5}$; **б)** $\int\limits_1^9 \sqrt{x}\ \ln x\, \mathrm{d}x$.

2. $\int\limits_{-3}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+6x+25}$.

3. $y = x^2 + x + 8$, $y = 7x$.

4. Ф: $y = x^3$, $x = 0$, $x = 2$.

Вариант 7.

1. а) $\int\limits_0^2 \frac{4\mathrm{d}x}{3x+1}$; **б)** $\int\limits_0^{\ln 2} e^{2x}(3x+2)\mathrm{d}x$.

2. $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+4x+5}$.

3. $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 4x - 7$.

4. Ф: $y = x^3 + x$, $x = 1$, $x = 2$.

Вариант 8.

1. а) $\int\limits_1^5 \frac{5\mathrm{d}x}{\sqrt{5+4x}}$; **б)** $\int\limits_1^e x \ln x \mathrm{d}x$.

2. $\int\limits_{-4}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+8x+32}$.

3. $y = x^2 - 4x - 5$, $y = -2$.

4. Ф: $y = 3x + 1$, $x = 0$, $x = 3$.

Вариант 9.

1. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\mathrm{d}x$ **;** **б)** $\int\limits_0^1 \mathrm{arctg}\, x\mathrm{d}x$ **.**

2. $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+4x+20}$.

3. $y = x^2 + 3x - 2$, $y = 5x + 6$.

4. Ф: $y = x + \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$.

Вариант 10.

1. а) $\int\limits_{-3}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25+3x}}$ **;** **б)** $\int\limits_1^e \ln x\mathrm{d}x$ **.**

2. $\int\limits_{-4}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-8x+20}$.

3. $y = x^2 - 3x - 2$, $y = -x + 1$.

4. Ф: $y = x^2 + 3x$, $x = 1$, $x = 2$.

Вариант 11.

1. а) $\int\limits_0^2 \frac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+4}}$ **;** **б)** $\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{dx}$ **.**

2. $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+8x+17}$.

3. $y = x^2 - 6x$, $y = -8$.

4. Ф: $y = 6x + 3$, $x = 0$, $x = 2$.

Вариант 12.

1. а) $\int\limits_0^1 x^3 \cdot \sqrt{4+5x^4}\,\mathrm{dx}$ **;** **б)** $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{dx}$ **.**

2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-2x+10}$ **.**

3. $y = x^2 - 8x$, $y = -12$.

4. Ф: $y = 9x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 2$.

Вариант 13.

1. а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{dx}}{3x+4}$ **;** **б)** $\int\limits_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{dx}$ **.**

2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-2x+5}$ **.**

3. $y = x^2 - 5x - 5$, $y = -x - 2$.

4. Ф: $y = 4x^3 + 4x$, $x = 0$, $x = 1$.

Вариант 14.

1. а) $\int\limits_0^{1/2} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **;** **б)** $\int\limits_1^{e} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ **.**

2. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+2x+2}$ **.**

3. $y = x^2 - x - 1$, $y = x + 7$.

4. Ф: $y = 2\sqrt{x} + 6x^2$, $x = 0$, $x = 1$.

Вариант 15.

1. а) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\sin(\ln x)\,dx}{x}$; **б)** $\int\limits_{0}^{1}e^{3x}(2x-1)\mathrm{dx}$.

2. $\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{x^2-6x+13}$.

3. $y=x^2-x-6$, $y=x-3$.

4. Ф: $y=x-\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$.

Вариант 16.

1. а) $\int\limits_{1}^{4}\frac{2dx}{\sqrt{5x-4}}$; **б)** $\int\limits_{0}^{\pi/2}(2x+1)\cos x\mathrm{dx}$.

2. $\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{x^2-6x+18}$.

3. $y=x^2+x-1$, $y=-x+2$.

4. Ф: $y=x^2-x$, $x=2$, $x=3$.

Вариант 17.

1. а) $\int\limits_{3}^{8}\sqrt{x+1}\mathrm{dx}$; **б)** $\int\limits_{0}^{\pi/2}(2x-1)\sin 3x\mathrm{dx}$.

2. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{x^2-2x+2}$.

3. $y=x^2-x-5$, $y=x-2$.

4. Ф: $y=x^2+\sqrt{x}$, $x=1$, $x=4$.

Вариант 18.

1. а) $\int\limits_0^4 \frac{3x\mathrm{d}x}{\sqrt{9+x^2}}$; **б)** $\int\limits_0^1 e^{2x+1}\cdot 3x\mathrm{d}x$ **.**

2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-2x+17}$.

3. $y=x^2+x+1$, $y=-2x-1$.

4. Ф: $y=4x+x^3$, $x=0$, $x=2$.

Вариант 19.

1. а) $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/6} 12\,\mathrm{ctg}\,3x\mathrm{dx}$; **б)** $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{dx}$ **.**

2. $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+4x+8}$.

3. $y=3x^2-6x-6$, $y=3x+6$.

4. Ф: $y=2x+3x^2$, $x=1$, $x=3$.

Вариант 20.

1. а) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x}}$; **б)** $\int\limits_0^{\pi} (5x+2)\sin 2x\mathrm{dx}$ **.**

2. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-4x+5}$.

3. $y=3x^2+6x$, $y=-9x-12$.

4. Ф: $y=2x-x^2$, $x=0$, $x=2$.

Вариант 21.

1. а) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$; **б)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2\mathrm{x}+2)\cos x\mathrm{d}x$ **.**

2. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+2x+10}$.

3. $y = 3x^2 + x - 2$, $y = -5x + 7$.

4. Ф: $y = 4x + 4x^3$, $x = 0$, $x = 2$.

Вариант 22.

1. а) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x\mathrm{d}x}{x}$; **б)** $\int\limits_{0}^{1} (2x-3)e^{x/2}\mathrm{dx}$ **.**

2. $\int\limits_{-4}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+8x+20}$.

3. $y = 3x^2 - 4x - 5$, $y = 2x + 4$.

4. Ф: $y = 2\sqrt{x} - x$, $x = 0$, $x = 4$.

Вариант 23.

1. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x\mathrm{dx}$ **; б)** $\int\limits_{0}^{\pi} (2x-1)\sin x\mathrm{dx}$ **.**

2. $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-8x+32}$.

3. $y = 3x^2 - 2x - 1$, $y = x + 5$.

4. Ф: $y = 2x + 6x^2$, $x = 0$, $x = 1$.

Вариант 24.

1. а) $\int\limits_{-1}^{3}\frac{3x\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x}}$; **б)** $\int\limits_{0}^{1}e^{5x}(3x+1)\mathrm{dx}$.

2. $\int\limits_{-3}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{x^2+6x+13}$.

3. $y=3x^2+x-6$, $y=-2x$.

4. Ф: $y=4x^3+2\sqrt{x}$, $x=0$, $x=4$.

Вариант 25.

1. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\sin^3 x\mathrm{dx}$; **б)** $\int\limits_{1}^{e}\sqrt[3]{x}\ln x\mathrm{dx}$.

2. $\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{x^2-6x+10}$.

3. $y=3x^2-x-3$, $y=8x+9$.

4. Ф: $y=\sqrt{x}+1$, $x=0$, $x=1$.

Вариант 26.

1. а) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{3\mathrm{dx}}{2x+5}$; **б)** $\int\limits_{0}^{\pi}(2x-3)\sin x\mathrm{dx}$.

2. $\int\limits_{-3}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{x^2+6x+18}$.

3. $y=3x^2+11x+7$, $y=-4x-5$.

4. Ф: $y=3x^2+2$, $x=0$, $x=2$.

Вариант 27.

1. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin 2x\mathrm{dx}$ **;** **б)** $\int\limits_{0}^{\pi} (2x+1)\cos 3x\mathrm{dx}$**.**

2. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-4x+20}$**.**

3. $y=3x^2+x,\quad y=-5x+9.$

4. Ф: $y=2x-2,\quad x=1,\quad x=3.$

Вариант 28.

1. а) $\int\limits_{3}^{5} x\sqrt{x^2-9}\mathrm{dx}$ **;** **б)** $\int\limits_{0}^{1} e^{4x}(x+3)\mathrm{dx}$**.**

2. $\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2+4x+13}$**.**

3. $y=3x^2,\quad y=6x+9.$

4. Ф: $y=x^3-x,\quad x=2,\quad x=4.$

Вариант 29.

1. а) $\int\limits_{0}^{1} x^2\cdot\sqrt{4+12x^3}\mathrm{dx}$ **;** **б)** $\int\limits_{0}^{\pi} (3x-1)\sin 2x\mathrm{dx}$ **.**

2. $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2-6x+25}$**.**

3. $y=3x^2-x,\quad y=2x+6.$

4. Ф: $y=3x^2+4,\quad x=0,\quad x=1.$

Вариант 30.

1. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^3 x\mathrm{dx}$; **б)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} (x-1)\cos 2x\mathrm{dx}$.

2. $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2 - 8x + 17}$.

3. $y = 3x^2 + 2x - 1$, $y = -x + 5$.

4. Ф: $y = x^3 + 3x$, $x = 0$, $x = 2$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Вычислить определенные интегралы $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 6x\mathrm{dx}$.

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 6x\mathrm{dx} = \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 6x\mathrm{d}6\mathrm{x} = -\frac{1}{6}\sin 6x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{6}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{6}\sin 0 = \frac{1}{6}.$

б) $\int (3x+2)e^{-x}dx$..

$$\int (3x+2)e^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = 3x+2, du = 3dx \\ dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -(3x+2)e^{-x} +$$

$$+\int e^{-x} \cdot 3dx = -(3x+2)e^{-x} - 3e^{-x} + C = (3x+5)e^{-x} + C.$$

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^2 + 2x + 5}.$$

Решение.

$$\int_{-1}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{x^2+2x+5}=\int_{-1}^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{(x+1)^2+4}=\lim_{B\to+\infty}\int_{A}^{B}\frac{\mathrm{dx}}{\left(x+1\right)^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\bigg|_{-1}^{B}=\frac{1}{2}\lim_{A\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{B+1}{2}-\operatorname{arctg}0\right)=$$

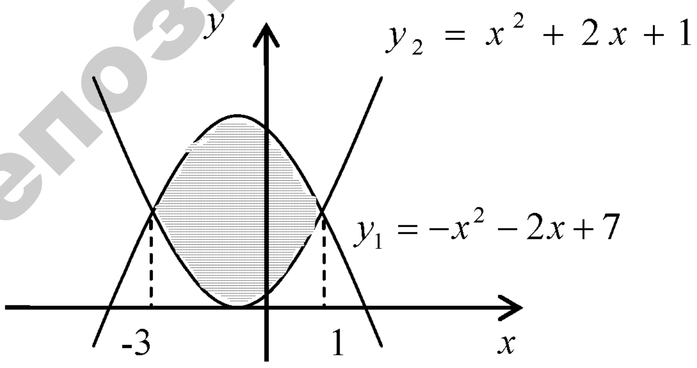
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-(0)\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями: $y=x^2+2x+1$, $y=-x^2-2x+7$.

Решение. Для нахождения площади фигуры, заданной в декартовой системе координат и ограниченной сверху линией $y=f_1(x)$, снизу – линией $y=f_2(x)$, слева – прямой $x=a$, справа – прямой $x=b$, воспользуемся формулой

$$S=\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx,$$

Построим график. Из графика видно, что фигура ограничена сверху линией $y=-x^2-2x+7$, а снизу – линией $y=x^2+2x+1$.



Для нахождения координат точек пересечения линий $y = x^2 + 2x + 1$ и $y = -x^2 - 2x + 7$ составим систему

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1, \\ y = -x^2 - 2x + 7 \end{cases}$$

и решим ее:

$x^2 + 2x + 1 = -x^2 - 2x + 7 \iff 2x^2 + 4x - 6 = 0 \iff$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x_1 = -3\ x_2 = 1.$

То есть $a = -3$; $b = 1$.

Найдем искомую площадь:

$$S = \int_{-3}^{1} \left(\left(-x^2 - 2x + 7 \right) - (x^2 + 2x + 1) \right) \mathrm{d}x = \int_{-3}^{1} \left(-2x^2 - 4x + 6 \right) \mathrm{d}x =$$

$$\left(-2\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 6x \right) \Bigg|_{-3}^{1} = \left(-2\frac{1^3}{3} - 4\frac{1^2}{2} + 6 \cdot 1 \right) - \left(-2\frac{(-3)^3}{3} - 4\frac{(-3)^2}{2} + 6 \cdot (-3) \right) =$$

$$= -\frac{2}{3} - 2 + 6 - 18 + 18 + 18 = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

Задание 4. Вычислить объем объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг оси Ox.

Ф: $y = x^2 - 3x$, $x = 0$, $x = 2$.

Решение.

$$V = \pi \int_0^2 \left(x^2 - 3x \right)^2 \mathrm{dx} = \pi \int_0^2 \left(x^4 - 6x^3 + 9x^2 \right) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - 6\frac{x^4}{4} + 9\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{2} + 3x^3 \right) \Bigg|_0^2 = \pi \left(\frac{2^5}{5} - 3\frac{2^4}{2} + 3 \cdot 2^3 \right) - 0 = \frac{32}{5}\pi = 6{,}4\pi$$

МОДУЛЬ 9. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение. *Дифференциальным уравнением (ДУ) первого порядка* называется уравнение, связывающее независимую переменную (x), неизвестную функцию (y) и ее производную (y').

Общий вид ДУ 1-го порядка

$$\boxed{F(x, y, y') = 0}. \tag{9.1}$$

Если уравнение (9.1) разрешимо относительно y', то его можно переписать в *нормальной форме*

$$\boxed{y' = f(x, y)}. \tag{9.1$'$}$$

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, уравнение (9.1′) можно переписать в *дифференциальной форме*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{9.1$''$}$$

Например, уравнение $xy' + y = 0$ можно записать в нормальной форме следующим образом: $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Представив в последнем уравнении y' в виде отношения двух дифференциалов $y' = \dfrac{dy}{dx}$, перепишем это уравнение в дифференциальной форме:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \Rightarrow xdy = -ydx \Rightarrow ydx + xdy = 0 \cdot$$

Определение. *Решением ДУ* называется любая функция $y=\varphi(x)$, определенная на интервале $(a,\ b)$ и обращающая на этом интервале уравнение в тождество.

Определение. *Общим решением ДУ 1-го порядка* называется функция $y=\varphi(x,c)$, которая при любом значении постоянной c является решением этого уравнения.

Определение. Если общее решение ДУ задано неявно уравнением $\Phi(x,y,c)=0$, то оно называется *общим интегралом ДУ.*

Определение. Решение, которое получается из общего решения при фиксированном значении постоянной c, называется *частным решением ДУ.*

Определение. График решения ДУ называется *интегральной кривой.*

Например, общим решением ДУ $y'=2x$ является функция $y=x^2+c$, где c – произвольная постоянная. При $c=1$ получим частное решение $y=x^2+1$. Интегральными кривыми уравнения является семейство парабол $y=x^2+c$.

***Задача Коши для ДУ 1-го порядка*:** найти частное решение ДУ (9.1), удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0)=y_0\ .$$

Геометрически задача Коши означает, что из множества интегральных кривых выбирается та, которая проходит через точку (x_0,y_0) (рис.9.1).

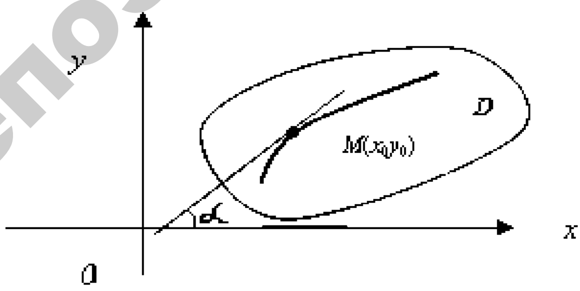


Рис.9.1

Теорема Коши (о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка). *Если в ДУ* $y' = f(x,y)$ *функция* $f(x,y)$ *и ее частная производная* f'_y *непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, то для любой точки* $(x_0, y_0) \in D$ *существует единственное решение y(x) этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0) = y_0$.

Точки области *D*, в которых нарушается единственность решения задачи Коши, называются *особыми точками ДУ*.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

1. ДУ с разделенными переменными.

Определение. Уравнение вида $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными.*

Его решением будет общий интеграл вида

$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$, где C – произвольная постоянная.

Пример 9.1. Найти общий интеграл ДУ $(5+x)dx + \dfrac{dy}{2y+1} = 0$.

Решение. Проинтегрируем обе части равенства

$$\int (5+x)dx + \int \frac{dy}{2y+1} = C, \qquad 5x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|2y+1| = C.$$

2. ДУ с разделяющимися переменными.

Определение. Уравнение в нормальной форме вида

$$\boxed{y' = f_1(x) \cdot f_2(y)} \tag{9.2}$$

называется ДУ с *разделяющимися переменными.*

В дифференциальной форме ДУ с разделяющимися переменными имеет вид

$$\boxed{M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0}.$$

Представляя y' в виде $y' = \dfrac{dy}{dx}$ перепишем уравнение (9.2) следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Далее *разделим переменные*, т. е. используя свойства пропорций, соберем слева функции, содержащие только переменную x, а справа – функции, содержащие переменную y:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим общий интеграл ДУ:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c.$$

Пример 9.2. Найти частное решение ДУ

$$xy' + y = 0, \tag{9.3}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Решение. Заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и преобразуем уравнение

$$\frac{xdy}{dx} + y = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -y.$$

Разделив переменные, получим уравнение $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя обе части последнего уравнения, запишем общий интеграл ДУ:

$$\ln|y| = -\ln|x| + C. \tag{9.4}$$

Поскольку C – произвольная постоянная, то мы можем взять ее в *логарифмическом виде*, т.е. положить $c = \ln|C|$. Тогда решение (9.4) примет вид

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|.$$

Воспользовавшись свойством логарифмов, перепишем последнее равенство в виде $\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$, откуда $y = \frac{C}{x}$ – общее решение ДУ(9.3).

Найдем частное решение этого уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию. Подставив в формулу общего решения x=1 и y = 2, найдем значение постоянной C:

$$2 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 2.$$

Следовательно, искомое частное решение ДУ имеет вид $y = \frac{2}{x}$.

Замечание. В этом примере и в дальнейшем мы используем следующие свойства логарифмов:

1. $\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)$;

2. $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$;

3. $n \cdot \ln x = \ln x^n$ (n – действительное число).

Пример 9.3. Найти общее решение ДУ

$$\left(x^2 + 1\right)y' = x(2y - 1).$$

Решение. Заменим $y' = \frac{dy}{dx}$ и преобразуем уравнение:

$$\left(x^2 + 1\right)\frac{dy}{dx} = x(2y - 1), \qquad \frac{dy}{2y - 1} = \frac{xdx}{x^2 + 1}.$$

Проинтегрируем обе части последнего уравнения:

$$\int \frac{dy}{2y - 1} = \int \frac{xdx}{x^2 + 1}.$$

Найдем интегралы:

$$\int \frac{dy}{2y-1} = \int \frac{\frac{1}{2}d(2y)}{2y-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2y-1)}{2y-1} = \frac{1}{2}\ln|2y-1| + c,$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \left| xdx = \frac{1}{2}d(x^2) \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dx^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c.$$

Таким образом, мы получим решение ДУ в виде

$$\frac{1}{2}\ln|2y-1| = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c, \text{ или } \ln|2y-1| = \ln|x^2+1| + \ln|C|,$$

где введено обозначение $2c = \ln|C|$.

Воспользовавшись свойством логарифмов, находим общее решение исходного уравнения:

$$\ln|2y-1| = \ln|(x^2+1)C|,\ \ 2y-1 = (x^2+1)C, \text{ или } \ y = \frac{1}{2}\left(1+(x^2+1)C\right).$$

Пример 9.4. Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение. Интегрируя, находим общий интеграл д.у. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$.

Так как $C_1 > 0$, то обозначив $2C_1$ через C^2, будем иметь $x^2 + y^2 = C^2$. Это уравнение задает семейство концентрических окружностей (рис.9.2) с центром в начале координат и радиусом C.

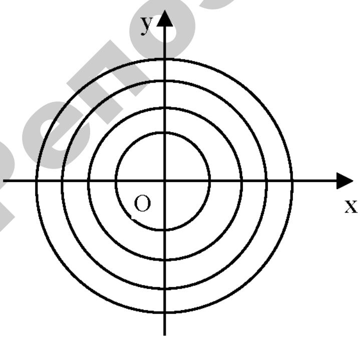


Рис. 9.2

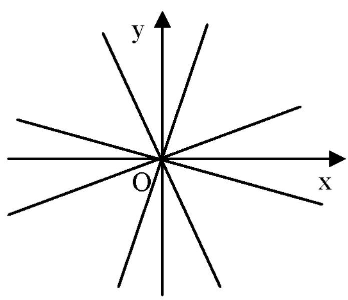


Рис.9.3

Пример 9. 5. Решить уравнение $xdy = ydx$.

Решение. Разделяя переменные, получим $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя последнее уравнение, будем иметь: $\ln y = \ln x + \ln C$. Строго говоря, мы должны писать $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, где $C > 0$. Однако допущенная в последнем уравнении вольность не отразится на окончательном варианте, если после потенцирования произвольную постоянную C считать действительным числом. Потенцируя последнее уравнение, получим общее решение данного дифференциального уравнения: $y = Cx$. Это семейство прямых, проходящих через начало координат (рис. 9.3).

Пример 9.6. Найти кривую, проходящую через точку А(-1,1), чтобы тангенс угла наклона касательной в любой ее точке был равен квадрату ординате точки касания.

Решение. В любой точке $M(x, y)$ искомой кривой угловой коэффициент касательной равен квадрату ординаты точки касания. Исходя из геометрического смысла первой производной, получаем следующее дифференциальное уравнение: $\frac{dy}{dx} = y^2$. Решаем это уравнение: $\frac{dy}{y^2} = dx;\ -\frac{1}{y} = x + C;\ y = -\frac{1}{x + C}$.

Полученное общее решение представляет семейство кривых. Из этого семейства необходимо выделить ту кривую, которая проходит через заданную точку. Подставив в общее решение начальные условия, получим:
$1 = -\frac{1}{-1 + C} \Rightarrow -1 + C = -1 \Rightarrow C = 0$. Следовательно,

$y = -\frac{1}{x}$ - уравнение искомой кривой.

Пример 9.7. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100^0 до 60^0. Через сколько времени с момента начала охлаждения температура тела понизится до 30^0, если температура окружающей среды составляет 20^0?

Решение. Пусть x - температура тела в момент времени t. Охлаждение – процесс неравномерный. С изменением разности температур в течение процесса меняется также и скорость охлаждения тела. Переменная величина x зависит от переменной величины t. Скорость изменения величины x есть производная $\frac{dx}{dt}$. Согласно условию задачи, дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемый процесс охлаждения, имеет вид: $\frac{dx}{dt} = k(x-20)$, где k – некоторый коэффициент пропорциональности.

Решим это уравнение: $\frac{dx}{x-20} = kdt \Rightarrow \ln|x-20| = kt + \ln C \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\frac{x-20}{C} = kt \Rightarrow \frac{x-20}{C} = e^{kt} \Rightarrow x = Ce^{kt} + 20$.

Произвольную постоянную C определим из начального условия: при $t_0 = 0$, температура тела $x_0 = 100^0$. Имеем: $100 = Ce^0 + 20 \Rightarrow C = 80$. Следовательно, $x = 80e^{kt} + 20$ (*) есть частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

В задаче дано еще одно дополнительное условие: при $t_1 = 20$ мин, температура тела $x_1 = 60^0$. Используя эти данные, находим величину e^k. Подставив в (*) x_1 и t_1, получим: $60 = 80e^{20k} + 20;\quad e^{20k} = \frac{1}{2};\quad e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$. Подставив в (*) выражение для e^k, получим: $x = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} + 20$ (**). Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти то значение переменной t, которое соответствует значению переменной $x = 30^0$. Подставляя в (**) $x = 30^0$, будем иметь: $30 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} + 20 \Rightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{e}{20}} \Rightarrow 3 = \frac{t}{20} \Rightarrow t = 60$.

Таким образом, температура тела понизится до 30^0 через 1 час после начала охлаждения.

3. Однородное ДУ.

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию $f(tx, ty) = f(x, y)$, где t – параметр.

Однородное ДУ сводится к ДУ с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$y = u(x) \cdot x = u \cdot x, \quad y' = u' \cdot x + u,$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример 9.8. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}.$$

Решение. Обозначив правую часть уравнения $f(x, y) = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$,

находим $$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} + \sin\frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} = f(x, y).$$

Следовательно, данное уравнение является однородным.

Для решения этого уравнения применим подстановку $y = u(x) \cdot x = ux$, $y' = u'x + u$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

Уравнение примет вид

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + \sin\frac{ux}{x}, \qquad u'x + u = u + \sin u, \qquad u'x = \sin u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \sin u, \qquad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{du}{\sin u} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\ln\left|tg\frac{u}{2}\right| = \ln|x| + \ln|c|, \qquad tg\frac{u}{2} = cx, \qquad u = 2arctg\ cx.$$

Так как $u = \frac{y}{x}$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = 2x \cdot arctg\ cx$.

Пример 9.9. Записать уравнение кривой, у которой подкасательная равна сумме координат точки касания.

Решение. Если касательная, проведенная к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$, пересекает ось Ox в точке A, а нормаль, проведенная через ту же точку $M(x, y)$, пересекает ось Ox в точке B (рис. 9.4), то отрезок $AM = T$ называется длиной касательной, а отрезок $BM = N$ называется длиной нормали. Проекция отрезка AM на ось Ox, то есть отрезок AP, называется подкасательной и обозначается через S_T. Отрезок PB называется поднормалью и обозначается S_N.

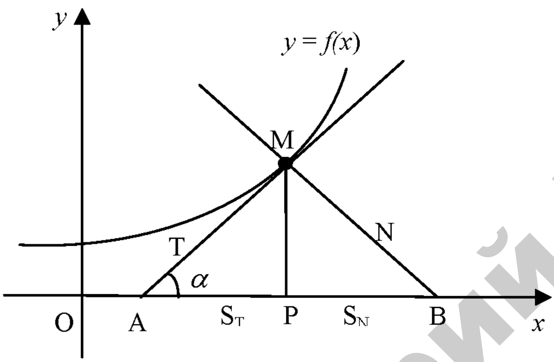


Рис.9.4

Из прямоугольного треугольника AMP следует, что $\dfrac{y}{S_T} = tg\alpha$, где α – угол наклона касательной к оси Ox. Так как $tg\alpha = y'$, то получаем уравнение $\dfrac{y}{S_T} = y'$.

По условию задачи подкасательная $S_T = x + y$. Следовательно, имеем однородное уравнение: $y' = \dfrac{y}{x + y}$.

Положим $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$; $u'x + u = \dfrac{xu}{x + xu}$;

$u'x + u = \dfrac{u}{1+u}$; $u'x = \dfrac{u}{1+u} - u$; $u'x = \dfrac{u - u - u^2}{1+u}$; $u'x = -\dfrac{u^2}{1+u}$;

$\dfrac{(1+u)\,du}{-u^2} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя полученное уравнение с разделенными переменными, имеем: $\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|Cx| \Rightarrow \frac{1}{u}=\ln|Cxu|$. Так как $u=\frac{y}{x}$, то $\frac{x}{y}=\ln|Cy|$ или $x=y\ln|Cy|$ – уравнение искомой кривой.

4. Линейное ДУ.

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{y'+\mathrm{P}(x)y=\mathrm{Q}(x)}, \tag{9.5}$$

где $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$ – заданные функции, называется *линейным ДУ* относительно y и y'.

При решении линейного ДУ можно применить *подстановку Бернулли*

$$y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v,$$

$$y'=u'v+uv', \tag{9.6}$$

где $u=u(x), v=v(x)$ - новые неизвестные функции.

Подставив формулы (9.6) в уравнение (9.5), получим

$$u'v+uv'+\mathrm{P}(x)\cdot u\cdot v=\mathrm{Q}(x). \tag{9.7}$$

Группируем первый и третий члены уравнения и выносим v за скобки: $v(u'+\mathrm{P}(x)\cdot u)+uv'=\mathrm{Q}(x)$.

Выбираем функцию $u(x)$ таким образом, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль. Таким образом, получаем систему:

$$\begin{cases} u'+P(x)\cdot u=0, \\ uv'=Q(x). \end{cases}$$

Решая первое уравнение системы, находим одно из его частных решений $u(x)$ (здесь полагаем $c=0$). Подставляя затем $u(x)$ во второе уравнение системы и решая его, находим функцию $v(x)$.

Пример 9.10. Решить дифференциальное уравнение $xy'-2y-x^2=0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x и перепишем его

$$y' - \frac{2}{x} y = x . \tag{9.8}$$

Получим уравнение вида $y' + \mathrm{P}(x) y = \mathrm{Q}(x)$, где $\mathrm{P}(x) = -\frac{2}{x}$, $\mathrm{Q}(x) = x$. Это линейное ДУ. Применим подстановку

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v , \qquad y' = u'v + uv' , \tag{9.9}$$

где $u = u(x), v = v(x)$ – новые неизвестные функции.

Подставим формулы (9.9) в уравнение (9.8):

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = x .$$

Группируем первый и третий члены и выносим v за скобки:

$$v(u' - \frac{2u}{x}) + uv' = x .$$

Приравняем к нулю выражение, стоящее в скобках, и решаем систему уравнений

$$\begin{cases} u' - \dfrac{2u}{x} = 0, \\ uv' = x. \end{cases} \tag{9.10}$$

Первое уравнение системы (9.10) является уравнением с разделяющимися переменными. Найдем одно из его решений:

$$u' = \frac{2u}{x}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{2u}{x}; \quad \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u} = 2\int \frac{dx}{x}; \ \ln|u| = 2\ln|x|;$$

$\ln|u| = \ln x^2$, $u = x^2$. Подставляя $u = x^2$ во второе уравнение системы (9.10), находим функцию v:

$$x^2 \cdot v' = x; \quad v' = \frac{1}{x}; \quad v = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c .$$

Таким образом, получим общее решение исходного уравнения

$$y = u \cdot v = x^2 (c + \ln|x|).$$

Пример 9. 11. Записать уравнение кривой, которая проходит через точку $A(1,1)$ и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

Решение. Напишем уравнение касательной в виде уравнения прямой $y = kx = b$, где k – угловой коэффициент касательной, b – отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат. Так как угловой коэффициент $k = y'$, то $b = y - xy'$. Согласно условию задачи $b = x$ или $y - xy' = x$. Полученное уравнение $xy' - y = -x$ является линейным. Применяя подстановку $y = u \cdot v$ и выражение $y' = u'v + uv'$,

получаем $x(u'v + uv') - uv = -x$ или, группируя члены и вынося за скобки множитель v, $v(xu' - u) + xuv' = -x$.

Выберем функцию u так, чтобы выполнялось равенство $xu' - u = 0$. Тогда уравнение $v(xu' - u) + xuv' = -x$ примет вид: $xuv' = -x$. Из уравнения $xu' - u = 0$ находим, что $u = x$. Подставляя $u = x$ в $xuv' = -x$, получим: $x^2 v' = -x$. Сократив на x: $x\dfrac{dv}{dx} = -1 \Rightarrow dv = -\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируя последнее уравнение, находим $v = \ln\dfrac{C}{x}$. Тогда

$y = x\ln\dfrac{C}{x}$ - уравнение искомого семейства кривых. Чтобы выделить из этого семейства искомую кривую, используем начальные условия $y(1) = 1$. При этих условиях $1 = \ln C$ или $C = e$. Следовательно, $y = x\ln\dfrac{e}{x}$ - уравнение искомой кривой.

Замечание. Уравнение вида $x' + \mathrm{P}(y)x = \mathrm{Q}(y)$ называется *линейным ДУ* относительно x и x'. При его решении применяют подстановку:

$$x = u(y) \cdot v(y) = u \cdot v, \qquad x' = u'v + uv'.$$

5. Уравнение Бернулли.

Определение. *Уравнением Бернулли* называется ДУ вида

$$\boxed{y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)y^n}, \tag{9.11}$$

где $n \neq 0, n \neq 1$ (при n = 0 уравнение (9.11) является линейным, а при n = 1 – уравнением с разделяющимися переменными).

Так же, как и линейное, уравнение Бернулли можно решать с помощью подстановки $y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$ или свести к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{1-n}$.

Пример 9.12. Найти общее решение ДУ $y' + 4y = e^{-2x}\sqrt{y}$.

Решение. Это уравнение Бернулли вида $y' + \mathrm{P}(x)y = \mathrm{Q}(x)y^n$, где $\mathrm{P}(x) = 4$, $\mathrm{Q}(x) = e^{-2x}$, $n = \dfrac{1}{2}$.

Сделаем подстановку

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v, \qquad y' = u'v + uv'.$$

Уравнение примет вид

$$u'v + uv' + 4uv = e^{-2x}\sqrt{uv}, \qquad v(u' + 4u) + uv' = e^{-2x}\sqrt{uv}.$$

Приравняем выражение в скобках к нулю и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} u' + 4u, \\ uv' = e^{-2x}\sqrt{uv}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы, находим функцию u:

$$u' + 4u = 0, \quad u' = -4u, \quad \frac{du}{dx} = -4u, \quad \frac{du}{u} = -4dx,$$

$$\int \frac{du}{u} = -4dx, \ \Rightarrow \ln|u| = -4x, \quad u = e^{-4x}.$$

Подставив $u = e^{-4x}$ в уравнение $uv' = e^{-2x}\sqrt{uv}$, получим уравнение

$$\sqrt{u}v' = e^{-2x}\sqrt{v}, \ \sqrt{e^{-4x}}v' = e^{-2x}\sqrt{v}, \ e^{-2x}v' = e^{-2x}\sqrt{v}, \ v' = \sqrt{v}.$$

Далее разделяем переменные и находим функцию v:

$$\frac{dv}{dx} = \sqrt{v}, \quad \frac{dv}{\sqrt{v}} = dx \Rightarrow 2\sqrt{v} = x + C,\ v = \frac{1}{4}(x + C)^2.$$

Значит, общее решение уравнения имеет вид

$$y = u \cdot v = \frac{1}{4} e^{-4x} (x + C)^2.$$

Пример 9.13. Определить тип ДУ 1-го порядка и указать метод его решения.

а) $\left(x + xy^2\right)y' = y + x^2 y$; **б)** $2xyy' = x^2 + y^2$; **в)** $x^2 y' = xy + 2$.

Решение.

а) В уравнении $\left(x + xy^2\right)y' = y + x^2 y$ вынесем общие множители за скобки: $x\left(1 + y^2\right)y' = y\left(1 + x^2\right)$.

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. При его решении заменяем $y' = \dfrac{dy}{dx}$, разделяем переменные и интегрируем:

$$x\left(1 + y^2\right)\frac{dy}{dx} = y\left(1 + x^2\right),\ \frac{1 + y^2}{y} dy = \frac{1 + x^2}{x} dx,$$

$$\int \frac{1 + y^2}{y} dy = \int \frac{1 + x^2}{x} dx.$$

б) В уравнении $2xyy' = x^2 + y^2$ правая часть такова, что ее нельзя представить в виде произведения, а затем разделить переменные.

Разрешим уравнение относительно производной

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

Обозначим $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$. Находим

$$f(tx,ty)=\frac{t^2x^2+t^2y^2}{2tx\cdot ty}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=f(x,y).$$

Следовательно, уравнение является однородным ДУ. Для его решения применим подстановку

$$y=u\cdot x,\quad y'=u'\cdot x+u,$$

где $u=u(x)$ – новая неизвестная функция.

Кроме этого, уравнение $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ можно записать в виде

$$y'=\frac{x}{2y}+\frac{y}{2x}\ \text{или}\ \ y'-\frac{y}{2x}=\frac{x}{2y},\qquad (9.12)$$

Уравнение (9.12) является уравнением Бернулли вида $y'+\mathrm{P}(x)y=\mathrm{Q}(x)y^n$, где $\mathrm{P}(x)=-\dfrac{1}{2x}$, $\mathrm{Q}(x)=\dfrac{x}{2}$, $n=-1$.

Это уравнение можно решать с помощью подстановки $y=u\cdot v$, $y'=u'v+uv'$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – новые неизвестные функции.

в) Разрешим уравнение $x^2y'=xy+2$ относительно производной и преобразуем его:

$$y'=\frac{xy+2}{x^2},\quad y'=\frac{y}{x}+\frac{2}{x^2},\quad y'-\frac{y}{x}=\frac{2}{x^2}.\qquad (9.13)$$

Уравнение (9.13) является линейным уравнением $y'+\mathrm{P}(x)y=\mathrm{Q}(x)$, где $\mathrm{P}(x)=-\dfrac{1}{x}$, $\mathrm{Q}(x)=\dfrac{2}{x^2}$.

Это уравнение можно решать с помощью подстановки

$$y=u\cdot v,\ y'=u'v+uv',$$

где $u=u(x), v=v(x)$ - новые неизвестные функции.

§ 3. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. *Дифференциальным уравнением второго порядка* называется уравнение вида

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}, \qquad (9.14)$$

где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, а y', y'' - первая и вторая производные этой функции.

Если уравнение (9.14) разрешимо относительно y'', то его можно записать в виде

$$\boxed{y'' = f(x, y, y')} \qquad (9.15)$$

Определение. *Общим решением ДУ 2-го порядка* называется функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, которая при любых значениях постоянных c_1, c_2 является решением этого уравнения.

Определение. Решение, которое получается из общего решения при фиксированных значениях постоянных c_1, c_2, называется *частным решением ДУ.*

Задача Коши для ДУ 2-го порядка: найти частное решение ДУ (9.14), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Геометрически задача Коши означает, что из множества интегральных кривых выбирается та, которая проходит через точку $(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке угловой коэффициент касательной y'_0.

Теорема Коши (о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка). *Если в ДУ* $y'' = f(x, y, y')$ *функция* $f(x, y, y')$ *и ее частные производные* $f'_y, f''_{y'}$ *непрерывны в некоторой области D пространства, то для любой точки* $(x_0; y_0; y'_0) \in D$ *существует единственное решение y(x) этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА

Рассмотрим некоторые частные случаи дифференциальных уравнений второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$.

1. ДУ второго порядка, не содержащие явно y и y'.

Рассмотрим уравнение

$$\boxed{y'' = f(x)}. \qquad (9.16)$$

Последовательно дважды интегрируя обе части уравнения (9.16), находим общее решение ДУ

$$y' = \int f(x)dx + c_1 = \varphi_1(x) + c_1,$$

$$y = \int \varphi_1(x)dx + c_1 x + c_2 = \varphi_2(x) + c_1 x + c_2 .$$

Пример 9.14. Найти частное решение ДУ $y'' = 4\cos 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
Решение. Дважды интегрируя, находим

$$y' = \int 4\cos 2x dx = 2\sin 2x + c_1,$$

$$y = \int (2\sin 2x + c_1)dx + c_2 = 2\int \sin 2x dx + c_1 \int dx + c_2 = -\cos 2x + c_1 x + c_2$$

Таким образом, получим общее решение ДУ:

$$y = -\cos 2x + c_1 x + c_2 .$$

Используя начальные условия, найдем частное решение уравнения

$$y(0) = -\cos 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 2 ,$$

$$y'(0) = 2\sin 0 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 .$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y = -\cos 2x + x + 2 .$$

2. ДУ второго порядка, не содержащие явно функцию *y*.

Рассмотрим уравнение

$$\boxed{F(x, y', y'') = 0}. \qquad (9.17)$$

Применяя подстановку

$$y' = z(x), \quad y'' = z'(x),$$

получим дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$F(x, z, z') = 0 .$$

Решив это уравнение, найдем функцию $z=\varphi(x,c_1)$ – общее решение.

Затем решаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$y'=\varphi(x,c_1),$$

из которого находим искомую функцию $y=\int\varphi(x,c_1)dx+c_2$.

Пример 9.15. Найти частное решение ДУ $y'-xy''=1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=0,\quad y'(1)=3$.

Решение. Это неполное уравнение второго порядка, не содержащее явно искомую функцию y.

Порядок этого уравнения можно понизить, положив $y'=z(x)\ \Rightarrow\ y''=z'(x)$. Уравнение после подстановки примет вид:

$$z-xz'=1\quad\Leftrightarrow\quad xz'=z-1.$$

Разделим переменные и найдем функцию $z=z(x)$:

$$x\frac{dz}{dx}=z-1,\quad \frac{dz}{z-1}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dz}{z-1}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ \ln|z-1|=\ln|x|+\ln|c_1|$$
$$\Rightarrow\ln|z-1|=\ln|xc_1|\Rightarrow\ z-1=xc_1$$

$$z=xc_1+1.$$

Возвращаясь к переменной y, получим уравнение первого порядка

$$y'=xc_1+1.$$

Прежде чем интегрировать это уравнение, целесообразно определить значение постоянной c_1, используя заданные начальные условия $y'(1)=3$: $\quad 3=1\cdot c_1+1\Rightarrow c_1=3-1=2$.

Подставляя $c_1 = 2$ в уравнение $y' = xc_1 + 1$, получим уравнение $y' = 2x + 1$, откуда находим

$$y = \int (2x+1)dx = \frac{2x^2}{2} + x + c_2 = x^2 + x + c_2 .$$

Наконец, используя начальные условия $y(1) = 0$, определим c_2: $0 = 1 + 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -2$.

Получаем искомое частное решение: $y = x^2 + x - 2$.

Замечание. При отыскании частных решений уравнений высших порядков нет необходимости сначала находить общее решение, а лишь затем определять значение всех постоянных. Лучше определять значения каждой постоянной немедленно после того, как она появляется в процессе решения.

3. ДУ второго порядка, не содержащие явно независимую переменную.

При решении уравнения вида

$$\boxed{F(y, y', y'') = 0} \qquad (9.18)$$

применяем подстановку

$$y' = p(y) = p, \qquad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} . \qquad (9.19)$$

Получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F\left(y, \ p, \ p \cdot \frac{dp}{dy} \right) = 0 .$$

Найдем общее решение этого уравнения $p = \varphi(y, c_1)$ и подставим $p = \frac{dy}{dx}$. Затем решаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $y' = \varphi(y, c_1)$, из которого находим искомую функцию: $\int \frac{dy}{\varphi(y, c_1)} = x + c_2$.

Пример 9.16. Найти частное решение уравнения $2yy'' = (y')^2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(-1) = 4$; $y'(-1) = 1$.

Решение. Данное уравнение второго порядка не содержит явно независимую переменную. Применим подстановку $y' = p(y) = p$, где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция переменной y.

Тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ и уравнение примет вид

$$2yp\frac{dp}{dy} = p^2; \qquad 2yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0; \qquad p\left(2y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0.$$

Если приравнять нулю первый множитель, то получаем: $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$. Но это решение не удовлетворяет начальному условию $y'(-1) = 1$, а значит является посторонним.

Приравняем к нулю второй множитель:

$$2y\frac{dp}{dy} - p = 0; \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y}; \qquad \ln|p| = \frac{1}{2}\ln|y| + \ln|c_1|;$$

$$p = c_1\sqrt{y} \quad \text{или} \quad y' = c_1\sqrt{y}.$$

Используя начальные условия $y = 4,\ y' = 1$ при $x = -1$, находим c_1:

$$1 = c_1\sqrt{4}; \qquad c_1 = \frac{1}{2}.$$

Далее решаем уравнение $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{y}$:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}dx; \qquad 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x + c_2.$$

Теперь определим значение c_2 из условия $y = 4$ при $x = -1$:

$$2\sqrt{4} = \frac{1}{2}(-1) + c_2; \quad 4 = c_2 - \frac{1}{2}; \quad c_2 = \frac{9}{2}.$$

Тогда

$$2\sqrt{y}=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2};\quad \sqrt{y}=\frac{1}{4}(x+9),$$

откуда получаем искомое частное решение

$$y=\frac{1}{16}(x+9)^2.$$

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением* n-го порядка называется уравнение вида

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f(x)}, \tag{9.20}$$

где $a_1(x),\ldots,a_n(x),\ f(x)$ – некоторые заданные функции.

Если $f(x)\neq 0$, то уравнение (9.20) называется *неоднородным*.

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (9.20) называется *однородным*.

Рассмотрим линейное неоднородное ДУ 2-го порядка

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x) \tag{9.21}$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0. \tag{9.22}$$

Будем предполагать, что функции $a_1(x), a_2(x), f(x)$ непрерывны. Это обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши.

Определение. Функции y_1 и y_2 называются *линейно зависимыми* (л. з.) на интервале (a,b), если $\dfrac{y_1}{y_2}\equiv\text{const}$ для любого $x\in(a,b)$.

Определение. Если $\dfrac{y_1}{y_2}\neq\text{const}$ для любого $x\in(a,b)$, то функции y_1 и y_2 называются *линейно независимыми* (л. н. з.) на этом интервале.

Например, функции

1) x и x^2 – л. н. з., т. к. $\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}\neq\mathrm{const}$;

2) x и $2x$ – л. з., т. к. $\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}\equiv\mathrm{const}$;

3) $\sin x$ и $\cos x$ – л. н. з., т. к. $\dfrac{\sin x}{\cos x}=\mathrm{tg}x\neq\mathrm{const}$.

Определение. Любые два линейно независимые решения линейного однородного ДУ 2-го порядка называются *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Теорема 1 (о структуре общего решения линейного однородного ДУ 2-го порядка). *Если y_1 и y_2 – фундаментальная система решений однородного уравнения (9.22), то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y=c_1y_1+c_2y_2,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Теорема 2 (о структуре общего решения линейного неоднородного ДУ). *Общее решение y линейного неоднородного ДУ (9.21) есть сумма общего решения $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения (9.22) и частного решения y^* неоднородного уравнения (9.21), т. е.* $$y=\tilde{y}+y^*.$$

§ 6. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное однородное ДУ 2-го порядка

$$\boxed{y''+py'+qy=0}, \tag{9.23}$$

где p и q – некоторые действительные числа.

Будем искать частное решение ДУ (9.23) в виде $y=\mathrm{e}^{kx}$, где $k=\mathrm{const}$. Тогда $y'=k\mathrm{e}^{kx}$, $y''=k^2\mathrm{e}^{kx}$.

Подставляя y, y', y'' в уравнение (9.23), приходим к уравнению

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 . \qquad (9.24)$$

Разделив обе части (9.24) на e^{kx} $(e^{kx} \neq 0)$, получим *характеристическое уравнение* для данного дифференциального уравнения:

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0} . \qquad (9.25)$$

Квадратное уравнение (9.25) имеет два корня, k_1 и k_2. Рассмотрим три различных случая.

I. Если $\boldsymbol{k_1}$, $\boldsymbol{k_2}$ – *действительные*, причем $\boldsymbol{k_1} \neq \boldsymbol{k_2}$, то общее решение уравнения записывается в виде

$$\boxed{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}} .$$

II. Если $\boldsymbol{k_1} = \boldsymbol{k_2}$, то общее решение ДУ имеет вид

$$\boxed{y = e^{k_1 x}(c_1 + c_2 x)} .$$

III. Если $\boldsymbol{k_1} = \alpha + i\beta$ *и* $\boldsymbol{k_2} = \alpha - i\beta$ – *комплексные числа*, то общее решение имеет вид

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Пример 9.17. Найти общее решение ДУ $y'' - y' - 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - k - 6 = 0$ и найдем его корни:

$$D = 1^2 - 4(-6) = 25 , \; k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} , \; k_1 = -2, k_2 = 3.$$

Так как $k_1 \neq k_2$ – действительные различные, то общее решение ДУ имеет вид $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$.

Пример 9.18. Найти частное решение ДУ

$$4y'' - 4y' + y = 0 , \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$4k^2-4k+1=0$$

и найдем его корни: $D=4^2-4\cdot 4=0, \quad \Rightarrow \quad k_1=k_2=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(c_1+c_2x).$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(c_1+c_2x)+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}c_2,$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{e}^0(c_1+c_2\cdot 0)=2, \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^0(c_1+c_2\cdot 0)+\mathrm{e}^0c_2=4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=2, \\ \frac{1}{2}c_1+c_2=4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=2, \\ c_2=3. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение ДУ имеет вид

$$y=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(2+3x).$$

Пример 9.19. Найти общее решение ДУ

$$y''+4y'+13y=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2+4k+13=0.$$

$$D=4^2-4\cdot 13=16-52=-36<0,$$

$$k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-4\pm 6i}{2}=-2\pm 3i, \quad k_1=-2+3i, \quad k_2=-2-3i.$$

Общее решение ДУ запишется в виде

$$y=\mathrm{e}^{-2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x).$$

Аналогично строится общее решение для однородного дифференциального уравнения порядка $n>2$.

§ 7. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ. (МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ)

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{9.26}$$

где p и q – некоторые действительные числа.

Соответствующее ему однородное ДУ имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{9.27}$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Общее решение уравнения (9.26) на основании теоремы 2 из § 5 будем искать в виде

$$y = \tilde{y} + y^*,$$

где $\tilde{y}$ – общее решение однородного ДУ (9.27), y^* – частное решение неоднородного ДУ (9.26).

Рассмотрим случаи, когда вид правой части $f(x)$ уравнения (9.26) позволяет найти частное решение y^* *методом неопределенных коэффициентов.*

1) Пусть $\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)}$,

где $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ – многочлен степени n.

Частное решение уравнения (9.26) ищем в виде

$$\boldsymbol{y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)},$$

где r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с α ($r = 0$, 1 или 2), $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами:

$$Q_0(x) = A, \quad Q_1(x) = Ax + B, \quad Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C \text{ и т. д.}$$

2) Пусть $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$,
где M и N – некоторые числа.

Частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

где r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с βi ($r = 0$ или 1), A и B – неопределенные коэффициенты.

3) Рассмотрим общий случай, когда

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x),$$

где $P_l(x)$ и $R_m(x)$ – многочлены. Частное решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x),$$

где r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с $\alpha + i\beta$ ($r = 0$ или 1), $Q_n(x), S_n(x)$ – многочлены степени $n = \max(l, m)$ с неопределенными коэффициентами.

Для того, чтобы найти неопределенные коэффициенты, находим $y^{*'}, y^{*''}$ и подставляем $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в левую часть уравнения (9.26). Приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях, составляем систему линейных уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов. Решив полученную систему, найдем решение y^*.

Пример 9.20. Найти общее решение ДУ $y'' - 4y = (4x + 2)e^{2x}$.

Решение. Найдем решение соответствующего, однородного ДУ

$$y'' - 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 4 = 0$ имеет 2 различных действительных корня $k_1 = 2, \quad k_2 = -2$.

Общее решение однородного ДУ имеет вид

$$\widetilde{y} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Найдем частное решение y^* неоднородного ДУ. Правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{2x}(4x+2) = e^{\alpha x}P_n(x),$$

где $\alpha = 2$, $n = 1$. Так как $\alpha = k_1$, $\alpha \neq k_2$, то число совпадений $r = 1$. Поэтому частное решение y^* ищем в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}Q_n(x) = x^1 e^{2x}Q_1(x) = xe^{2x}(Ax+B) \qquad \text{или}$$

$$y^* = e^{2x}(Ax^2 + Bx),$$

$$y^{*\prime} = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx) + e^{2x}(2Ax+B),$$

$$y^{*\prime\prime} = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx) + 2e^{2x}(2Ax+B) + 2e^{2x}(2Ax+B) + e^{2x}2A,$$

Подставив $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ в исходное ДУ, получим уравнение

$$e^{2x}(4Ax + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A) - 4e^{2x}(Ax^2 + Bx) = (4x+2)e^{2x}.$$

Разделив обе части уравнения на e^{2x}, получим

$$4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A - 4Ax^2 - 4Bx = 4x + 2.$$

Приводя подобные члены, приходим к уравнению

$$8Ax + 4B + 2A = 4x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения A и B:

$$\begin{array}{c|l} x & 8A = 4, \\ x^0 & 4B + 2A = 2, \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, частное решение неоднородного ДУ имеет вид

$$y^* = xe^{2x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}xe^{2x}(2x+1).$$

Запишем общее решение неоднородного уравнения

$$y = \tilde{y} + y^* = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}x(2x+1)e^{2x}.$$

Пример 9.21. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = \cos 2x.$$

Решение. Запишем соответствующее однородное ДУ

$$y'' + y = 0 .$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет 2 комплексно-сопряженных корня $k_1 = i, k_2 = -i$.

Общее решение однородного уравнения

$$\overline{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x .$$

Правая часть уравнения $f(x) = \cos 2x = M\cos\beta x + N\sin\beta x$, где $M = 1$, $N = 0$, $\beta = 2$. Так как $\beta i = 2i$ и $\beta i \neq k_1$, $\beta i \neq k_2$, то число совпадений $r = 0$.

Частное решение неоднородного ДУ ищем в виде

$y^* = x^r (A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ или

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x, \qquad {y^*}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$${y^*}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Подставим y^*, ${y^*}''$ в исходное ДУ:

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \cos 2x .$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получим систему

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 2x & -3A = 1 \\ \sin 2x & -3B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{3}, B = 0.$$

Следовательно, $y^* = -\frac{1}{3}\cos 2x$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Общее решение неоднородного ДУ имеет вид:

$$y = \tilde{y} + y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\cos 2x .$$

Пример 9.22. Указать вид частного решения y^* линейного неоднородного ДУ второго порядка $y'' - 4y' = f(x)$, если правая часть уравнения $f(x)$ имеет вид

а) $f(x) = x^2 e^{2x}$; **б)** $f(x) = 3x - 1$; **в)** $f(x) = 2\sin 4x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 4k = 0 \Rightarrow k(k-4) = 0 \Rightarrow$$

$k_1 = 0, k_2 = 4$ – характеристические числа.

Проанализируем правую часть ДУ.

а) $f(x) = x^2 e^{2x} = \mathrm{P}_n(x) e^{\alpha x}$, где $\mathrm{P}_n(x) = x^2$, $n = 2$, $\alpha = 2$.

Поскольку $k_1 \neq \alpha$ и $k_2 \neq \alpha$, то число совпадений $r = 0$. Поэтому частное решение y^* ДУ ищем в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x} \mathrm{Q}_n(x) = x^0 e^{2x} \mathrm{Q}_2(x) = e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right),$$

где A, B, C – действительные числа, которые будут определены далее.

б) $f(x) = 3x - 1 = \mathrm{P}_\mathrm{n}(x) e^{\alpha x}$, где $\mathrm{P}_n(x) = 3x - 1$, $n = 1$, $\alpha = 0$.

Поскольку $k_1 = \alpha = 0$, $k_2 \neq \alpha$, то число совпадений $r = 1$. Следовательно, частное решение y^* ДУ ищем в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x} \mathrm{Q}_n(x) = x^1 e^{0x} \mathrm{Q}_1(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx,$$

где A, B – действительные числа, которые будут определены далее.

в) $f(x) = 2\sin 4x = M\cos\beta x + N\sin\beta x$, где $M = 0$, $N = 2$, $\beta = 4$.

Поскольку $\beta i = 4i$, а $k_1 \neq \beta i$, $k_2 \neq \beta i$, то число совпадений $r = 0$. Следовательно, частное решение y^* ДУ ищем в виде

$$y^* = x^r\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right) = x^0\left(A\cos 4x + B\sin 4x\right) =$$
$$= A\cos 4x + B\sin 4x,$$

где A, B – действительные числа, которые будут определены далее.

§ 8. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение. Система уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

называется *нормальной системой дифференциальных уравнений*.

Определение. Число уравнений, входящих в систему, называется *порядком* этой системы.

Возьмем в качестве независимой переменной t. Пусть $x = x(t), y = y(t)$ – функции этой переменной. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y), \\ \dot{y} = f_2(t, x, y), \end{cases} \tag{9.28}$$

где введены обозначения $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

Определение. *Решением* системы (9.28) на некотором промежутке называется совокупность функций $x(t), y(t)$, которая обращает все уравнения системы на этом промежутке в тождества.

Определение. *Общим решением* системы (9.28) является совокупность функций

$$x = \varphi_1(t, c_1, c_2), \qquad y = \varphi_2(t, c_1, c_2),$$

которая при любых значениях постоянных c_1, c_2 является решением системы.

Определение. Решение, которое получается из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением* системы.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (9.28) состоит в нахождении частного решения этой системы $x(t), y(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$, где t_0, x_0, y_0 – заданные числа.

Система (9.28) имеет физический смысл и называется *динамической системой*. Она определяет скорость $(\dot{x}, \dot{y})$ движущейся в плоскости материальной точки в любой момент времени t. Решение системы (9.28) $x = x(t), y = y(t)$ – это параметрическое уравнение траектории движения точки. Начальные условия задают положение материальной точки в момент времени t_0.

Одним из основных методов решения систем дифференциальных уравнений является *метод исключения неизвестных*, с помощью которого система дифференциальных уравнений (9.28) сводится к дифференциальному уравнению второго порядка от одной неизвестной функции. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 9.23. Найти решение системы ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases} \tag{9.29}$$

Решение. Решение системы будем проводить в несколько этапов.

1) Выразим из первого уравнения системы y:

$$y = 2x - \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = 2\dot{x} - \ddot{x}.. \tag{9.30}$$

2) Подставим (9.30) во второе уравнение системы и преобразуем его: $2\dot{x} - \ddot{x} = -x + 2(2x - \dot{x})$, $2\dot{x} - \ddot{x} = -x + 4x - 2\dot{x}$,

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0 \tag{9.31}$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $x = x(t)$.

3) Решая уравнение (9.31), находим функцию x: $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$,

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1, k_2 = 3,$$

$$x = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{3t} \tag{9.32}$$

– общее решение уравнения (9.31).

4) Подставив (9.32) в формулу (9.30), находим функцию y:

$$y = 2(2c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{3t} - (c_1 \mathrm{e}^t + 3c_2 \mathrm{e}^{3t}) = c_1 \mathrm{e}^t - c_2 \mathrm{e}^{3t}.$$

Таким образом, получим общее решение системы (9.29):

$$\begin{cases} x = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{3t}, \\ y = c_1 \mathrm{e}^t - c_2 \mathrm{e}^{3t}. \end{cases}$$

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Проверить, является ли функция $y = x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$, где C – произвольная постоянная, решением дифференциального уравнения $x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2$?

2. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделенными переменными:

а) $y^2 dy = \sin x dx$; б) $\dfrac{dy}{y} = (x+1)dx$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

а) $xy' = \dfrac{x}{y}$; б) $\dfrac{y'}{\cos x} = y$; в) $xy' = x^2 y + 3x^2$;

г) $6xdx - ydy - xydy + 3xydx = 0$.

4. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

а) $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0$, $y(1) = 1$;

б) $y' - (2y + 1)ctgx = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

5. Дано дифференциальное уравнение $xy' = 3y$.

Найти:

а) общее решение дифференциального уравнения;

б) частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(1)=1$;

в) построить интегральные кривые дифференциального уравнения.

6.* Найти уравнение кривой, проходящей через точку А(0,-2), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке был равен ординате этой точки, увеличенной на 3 единицы.

7.* Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 мин падает от 100^0 до 60^0. Температура воздуха равна 25^0. Через сколько времени от начала охлаждения температура хлеба понизится до 30^0?

8. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения а) $2xyy' = y^2 - 4x^2$, б) $2x^2y' - x^2 - y^2 = 0$.

9. Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений:

а) $y' + y - 2x = 0$; б) $xy' + x^2y - \frac{4}{x} = 0$;

в)* $ydx = (4y^3 + 3y^2 - x)dy$.

10. Найти общее решение дифференциального уравнения Бернулли $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$;

11. Решить задачу Коши:

а) $2xydx + (y - x^2)dy = 0, \quad y(-2) = 4$

б) $y' = 2y - x + e^x$, $y(0) = -1$.

12. Указать типы дифференциальных уравнений и методы их решения

а) $ydx = (x + y)dy$;

б) $y^2dx + (x+2)dy = 0$;

в) $y' = \frac{x-5}{y}$;

г) $x^3y^2y' + x^2y^3 = 1$;

д) $(x+1)y' - 2y = y^2(x+1)^5$;

е) $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2\sqrt{y^3}$;

ж) $y' = e^{2x} - e^x y$;

з) $y'\cos x = \frac{y}{\ln y}$.

13.* Записать уравнение кривой, у которой подкасательная равна среднему арифметическому координат точки касания.

14.* Записать уравнение кривой, которая проходит через точку $A(1,1)$ и обладает тем свойствам, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания.

15. Проинтегрировать уравнения:

а) $y'' = x^2 - \sin x$; б) $y' = y''/x$; в) $yy'' = y'$.

16. Решить задачу Коши:

а) $y'' = \dfrac{\ln x}{x^2}, y(1) = 3, y'(1) = 1$;

б) $\left(1+x^2\right) y'' = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

в) $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

17. Определить, каким способом решаются предложенные д.у.

а) $(y'')^2 + (y')^2 = 1$; б) $xy'' - y' = x^2 + 1$; в) $2yy'' + (y'')^2 = (y')^4$;

г) $\dfrac{y''}{x^2+1} = 1$; д) $(y'')^2 - y'y'' = \left(\dfrac{y'}{x}\right)^2$; е) $\ln x = \dfrac{y''}{x}$.

18. Найти общее решение для следующих однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

а) $y'' - 2y' - 4y = 0$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

в) $y'' - 6y' + 18y = 0$;

г) $y'' - 2y' - 8y = 0$

19. Найти частные решения д.у. при указанных начальных условиях:

а) $y'' + y' - 2y = 0$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 0$;

б) $y'' + 8y' + 16y = 0$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -2$;

в) $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 0$.

20.* Найти общее решение для следующих однородных линейных дифференциальных уравнений высших порядков:

а) $y''' - 5y'' + 16y' - 12y = 0$; б) $y^{IV} - 8y'' + 7y = 0$;

в) $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$; г) $y^{IV} - 3y^{V} + 3y^{IV} = 0$.

21. Найти частные решения следующих неоднородных уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям (решить задачу Коши).

а) $y'' - y = 8e^{2x}, y(0) = -1, y'(0) = 0.$

б) $y'' - y' = -2xe^{6x}, y(0) = 0, y'(0) = 2.$

в) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x), y(0) = 1, y'(0) = -2.$

г) $y'' - 4y' = x + 1, y(0) = 1, y'(0) = -2.$

д) $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\cos x, y(\pi) = e^{\pi}, y'(\pi) = e^{\pi}$

е) $y'' + 9y = 4(\sin 2x + \cos 2x), y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi.$

22. Для каждого из данных неоднородных линейных дифференциальных уравнений определить и записать структуру его частного решения. (Числовых значений неопределенных коэффициентов не находить.)

а) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}(1 - x).$

б) $y'' - 3y' = e^{3x} - 28x.$

в) $y'' + 16y = x\sin 4x.$

г) $y''' + y'' = 2x + e^{-x}.$

д) $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x.$

23. Найти общие решения данных линейных уравнений.

а) $y'' + 4y = \cos^2 x.$

б) $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}.$

в) $y'' + 4y = 1/\sin^2 x$.

г) $y''' + y' = tgx$.

24. Найти общие решения данных однородных систем уравнений, методом исключения:

а) $\begin{cases} \dot{x} = -7x + y, \\ \dot{y} = -2x - 5y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y\ , \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases}$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

1. Найти частное решение д.у.:

а) $(y+3)\,dy = 3x^2dx$, $y(-2) = 0$;

б) $tgxy' = \dfrac{\sin x}{y}$, $y(0) = 2$.

Вариант 2.

2. Найти частное решение д.у.:

а) $4y^3dy = (2x-1)\,dx$, $y(0) = 1$;

б) $ctgxy' = \dfrac{\cos x}{y}$, $y(0) = 2$.

Домашнее задание

1. Дано дифференциальное уравнение $xy' - 2y = 0$.

Найти:

а) общее решение дифференциального уравнения;

б) частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(1) = 1$;

в) построить интегральные кривые дифференциального уравнения.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

1. Решить задачу Коши:

а) $xdy = \left(y + x^3\right)dx$, $y(2) = 4$;

б) $y' + xy - y^3 = 0$, $y(-1) = 0$.

Вариант 2.

2. Решить задачу Коши:

а) $xdy + (y - x + 1)dx = 0$, $y(2) = 3$;

б) $y' - \dfrac{y}{x} = -y^2$, $y(1) = -1$.

Домашнее задание

1. Определить тип предложенных дифференциальных уравнений и решить одно из них:

а) $2x^2 y' - x^2 - y^2 = 0$; **б)** $xy' - 5y = e^x \cdot x^6$;

в) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

1. Проинтегрировать уравнение $x^2 y'' = y'^2$.

2. Решить задачу Коши $2y'^2 = (y-1)y''$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Вариант 2.

1. Проинтегрировать уравнение $xy'' - y' = x^2 e^x$.

2. Решить задачу Коши $y^3 y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Домашнее задание

1. Проинтегрировать уравнение $xy'' + y' = y'^2$.

2. Решить задачу Коши $2y'' = 3y^2$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

1. а) $4y'' + 4y' + y = 0$; б) $y''' + 9y' = 0$.

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющие указанным начальным условиям $y'' - 2y' = 2e^x$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

Вариант 2.

1. а) $y'' - 6y' + 13y = 0$; б) $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$.

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющие указанным начальным условиям $y'' + 4y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \pi/2$.

Домашнее задание

1. а) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; б) $y'' - 9y = 0$; в) $y'' + 3y' + 3y = 0$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющие указанным начальным условиям

а) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3{,}2$

б) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$; $y(0) = -0{,}6$; $y'(0) = 0{,}8$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

Найти общее решение д.у.

1. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

2. $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$

Вариант 2.

Найти общее решение д.у.

1. $y'' + y + ctg^2 x = 0.$

2. $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$

Домашнее задание

1. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$$

2. Найти общее решение д.у. $y'' - 2y' + y = e^x / (x^2 + 1).$

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ № 9

1^0. Укажите дифференциальное уравнение третьего порядка

а) $y'' - y' = 3$;

б) $y''' + x = 0$;

в) $y \cdot y' + 3x = 0$;

г) $y' + \dfrac{y}{x} = y^3$.

2^0. Какая функция является общим решением дифференциального уравнения $y'\left(x^2 + 9\right) = y - 1$?

а) $y = e^{\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}}$;

б) $y = e^{\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}} + 1$;

в) $y = C_1 e^{\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}} + C_2$;

г) $y = Ce^{\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}} + 1$.

3. Укажите ДУ с разделяющимися переменными

а) $(x + y)dx + \cos ydy = 0$; б) $\sin ydy = \left(x^2 + x^2 y^2\right)dx$;

в) $tgydy = \left(x^2 + xy\right)dx$; г) $xdx = (y - 1)dy$.

4. Укажите линейное ДУ первого порядка.

а) $y' = ye^x$; б) $y' = \dfrac{x - y}{3x + 5y}$; в) $y' = y \cdot x^2 + e^x$; г) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{e^y + 5}$.

5. ДУ вида $2(y')^2 = (y - 1)y''$ решается с помощью замены

а) $y' = p(x),\ y'' = \dfrac{dp}{dx}$; б) $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$;

в) $y = u(x) \cdot v(x),\ y' = u'v + uv'$; г) $y = x \cdot u,\ y' = u + xu'$.

6. Запишите характеристическое уравнение ДУ $y'' + 5y = 2x$.

7*. Общий интеграл ДУ $\dfrac{dy}{y+5} = \cos 3x dx$ имеет вид

а) $\ln|y+5| = \dfrac{1}{3}\sin 3x + c$; б) $\dfrac{1}{5}\ln|y+5| = \dfrac{1}{3}\sin 3x + c$;

в) $\ln|y+5| = \sin 3x + c$; г) $\ln|y+5| = \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

8*.Частное решение y^* дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}\left(x^2 + x\right)$ имеет вид:

а) $y^* = e^{3x}$; б) $y^* = e^{3x}\left(\cos x^2 + \sin x\right)$;

в) $y^* = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{3x}$; г) $y^* = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{3x}$.

ИДЗ 9

Задание 1, 2. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

Задание 3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$:

Задание 4. Даны дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Найти частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

Задание 5, 6. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Задание 7. Найти частное решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Вариант 1.

1. а) $x\left(1-y^2\right)dy = y\left(1-x^2\right)dx$; б) $\sin xy' = y\cos x + 2\cos x$.

2. $2x^2y' - x^2 - y^2 = 0$;

3. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x}$; $y(0) = 0$.

4. $xy'' - y' - x^2 = 0, \quad y(1) = 4/3, \quad y'(1) = 3$.

5. а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$; в) $y'' + 3y' + 2y = 0$.

6. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = -3x - y, & y(0) = 2. \end{cases}$

Вариант 2.

1. а) $\left(x - xy^2\right)dx + \left(y - yx^2\right)dy = 0$; б) $\left(xy + x^3y\right)y' = 1 + y^2$.

2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$.

3. $y' - y\text{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0$.

4. $y'' - y'ctgx = \sin x, \quad y(\pi/2) = 1, \quad y'(\pi/2) = \pi/2$.

5. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

6. $y'' + 4y = 3\cos x$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = -6x - 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 3.

1. а) $\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$; б) $\sin y \cos x y' = \cos y \sin x$.

2. $xy' = y(1 + \ln\dfrac{y}{x})$

3. $(x^2 + 2y)dx - xdy = 0.$; $\quad y(1) = 1$.

4. $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$.

5. а) $y''-4y'=0$; б) $y''-4y'+13y=0$; в) $y''-6y'+9y=0$.

6. $y''-y'-2y=3e^{2x}$.

7. $\begin{cases} \dot{x}=x+y, & x(0)=0, \\ \dot{y}=-6x+6y, & y(0)=-1. \end{cases}$

Вариант 4.

1. а) $dy-xy^2dx=0$; б) $(1+x^2)y'=1+y^2$.

2. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

3. $y'+\dfrac{y}{x}=xy^2$; $y(1)=1$.

4. $xy''-2y'=2x^4$, $y(1)=1/5$, $y'(1)=4$.

5. а) $y''-5y'+6y=0$; б) $y''-8y'+16y=0$; в) $y''+2y'+5y=0$.

6. $y''-2y'=2x+1$.

7. $\begin{cases} \dot{x}=-x+8y, & x(0)=6, \\ \dot{y}=x+y, & y(0)=0. \end{cases}$

Вариант 5.

1. а) $2\sqrt{y}dx-dy=0$; б) $y'\cos x-(y+1)\sin x=0$.

2. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$.

3. $y'-y=2xe^x$; $y(0)=1$.

4. $y''=\cos 2x-x^2+1$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

5. а) $y''-2y'+10y=0$; б) $y''+y'-2y=0$; в) $y''-12y'+36y=0$.

6. $y'' - 2y' + y = 2x - 4.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, & x(0) = 3, \\ \dot{y} = -x + y, & y(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 6.

1. а) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$**;** б) $e^y y' = e^{x+y}$**.**

2. $y^2 + x^2 y' = xyy'.$

3. $x^2 y' + xy + 1 = 0, \quad y(1) = 0.$

4. $y'' + y' tgx = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

5. а) $y'' + 10y' + 25y = 0;$ б) $y'' + 2y' + 17y = 0;$ в) $y'' - y' - 12y = 0.$

6. $y'' - 4y' + 4y = 4\sin 2x.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, & x(0) = -2, \\ \dot{y} = -2x + 4y, & y(0) = -3. \end{cases}$

Вариант 7.

1. а) $xdy + dx = y^2 dx$**;** б) $y^2 y' + 2x - 1 = 0$**.**

2. $xy' - y = xtg(y/x).$

3. $xy' - 2y = 2x^4; \qquad y(1) = 1.$

4. $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1 - 4x^2)^3}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

5. а) $y'' + y' - 6y = 0;$ б) $y'' + 6y' + 9y = 0;$
в) $y'' - 4y' + 20y = 0.$

6. $y'' + y' = 3\cos x - \sin x.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, & x(0) = -2, \\ \dot{y} = -3x + 4y, & y(0) = -3. \end{cases}$

Вариант 8.

1. а) $dy - y\cos^2 x dx = 0$ **;** б) $(6 - x)y' = y$ **.**

2. $xy' = y - xe^{y/x}.$

3. $y' + y = -e^{2x}y^2;$ $y(0) = 1.$

4. $xy'' + y' = 4x^3,$ $y(1) = 1/4,$ $y'(1) = 2.$

5. а) $y'' - 49y = 0;$ б) $y'' - 4y' + 5y = 0;$
в) $y'' + 8y' + 16y = 0.$

6. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, & x(0) = 3, \\ \dot{y} = -4x + 4y, & y(0) = -2. \end{cases}$

Вариант 9.

1. а) $(xy + x)dx = dy$ **;** б) $y' - y\cos x = 0$ **.**

2. $xy' - y = (x + y)\ln((x + y)/x).$

3. $(x^3 + 2y)dx - xdy = 0$ **;** $y(1) = 1.$

4. $xy'' - y' = x^2\cos x,$ $y(\pi/2) = 1,$ $y'(\pi/2) = \pi/2.$

5. а) $y'' + 14y' + 49y = 0;$ б) $y'' - 5y' + 4y = 0;$
в) $y'' + 16y = 0.$

6. $y'' - 3y' = 3e^{3x}$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, & x(0) = -2, \\ \dot{y} = x - 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$

Вариант 10.

1. а) $\dfrac{dx}{x(y-1)} = \dfrac{dy}{y(x+2)}$; б) $y' = 3y - 3$.

2. $xy' = y\cos\ln(y/x)$.

3. $xy' + 2y = 3x^2$; $y(-1) = 1$.

4. $x^2 y'' = x^2 - 5x + 3$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 0$.

5. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' + 4y' + 5y = 0$; в) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

6. $y'' - 4y' + 5y = 5x - 4$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, & x(0) = -2, \\ \dot{y} = -x + 5y, & y(0) = 0. \end{cases}$

Вариант 11.

1. а) $x^2 dy - y dx + 2dy = 0$; б) $y' - \dfrac{y+1}{x+1} = 0$.

2. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.

3. $xy' - y = y^2$; $y(1) = 1$.

4. $y'' - yy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. а) $y'' + 12y' + 36y = 0$; б) $y'' - 3y' + 2y = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

6. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = 3x - y, & y(0) = -3. \end{cases}$

Вариант 12.

1. а) $xdy - y^2dx = 0$; б) $y' - x^2y = xy$.

2. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

3. $y = x(y' - x\cos x), y(\pi/2) = 0$.

4. $y'y'' = 2y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5. а) $y'' + 4y' + 20y = 0$; б) $y'' - 3y' - 10y = 0$; в) $y'' - 16y' + 64y =$

6. $y'' - 4y = (3x-1)e^{-x}$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = 3x + 4y, & y(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 13.

1. а) $\dfrac{dy}{e^x} - \dfrac{2dx}{y^3} = 0$; б) $x^2y' = y^2$.

2. $y = x(y' - \sqrt[x]{e^y})$.

3. $y'\sin x - y\cos x = 1$; $y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$.

4. $yy'' = (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

5. а) $9y'' + 6y' + y = 0$; б) $y'' - 4y' - 21y = 0$; в) $y'' - y' - 2y = 0$.

6. $y'' + y = 6\sin 2x$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = 2, \\ \dot{y} = -2x + 3y, & y(0) = -1. \end{cases}$

Вариант 14.

1. а) $dy + ytdxdx = 0$; б) $3^y y' = 3^{x+y}$.

2. $y' = y/x - 1$.

3. $xy' + 2y = 3x^5 y^2$; $\qquad y(1) = -1$.

4. $y^3 y'' = 3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$.

5. а) $2y'' + 3y' + y = 0$; б) $y'' + 4y' + 8y = 0$; в) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

6. $y'' - 5y' = 10x + 3$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, & x(0) = 3, \\ \dot{y} = 8x - y, & y(0) = 2. \end{cases}$

Вариант 15.

1. а) $x^2 dy = \dfrac{dx}{e^y}$; б) $y' = (y+1)tgx$.

2. $y'x + x + y = 0$.

3. $(x^2 + y)dx = xdy, y(0) = 1$.

4. $y'' - 12y^2 = 0, \quad y(0) = 1/2, \quad y'(0) = 1$.

5. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y'' - 18y' + 81y = 0$; в) $y'' + 16y = 0$.

6. $y'' + y' - 2y = -2x + 1$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y, & x(0) = -2, \\ \dot{y} = 9x - y, & y(0) = -9. \end{cases}$

Вариант 16.

1. а) $(x+4)dy = ydx$; б) $e^{x+3y} y' = e^x$.

2. $xdy + (2\sqrt{xy} - y)dx = 0$.

3. $xy' + y = x^2 y^2$; $\qquad y(1) = 1$.

4. $2y'' = e^{4y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2$.

5. а) $9y'' - 6y' + y = 0$; б) $y'' + 10y' + 29y = 0$; в) $y'' - 8y' + 7y = 0$.

6. $y'' - 2y' = 6x^2 - 6x - 2$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, & x(0) = -2, \\ \dot{y} = x + y, & y(0) = 2. \end{cases}$

Вариант 17.

1. а) $(x^2 + x)ydx = (y^2 + 1)dy$; б) $(xy + y)y' = 2$.

2. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$.

3. $x^2y' + xy = 1$; $y(1) = 0$.

4. $(y - 2)y'' - 2(y')^2 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

5. а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' + 6y' = 0$.

6. $y'' - 4y' + 3y = 8e^{3x}$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x + y, & y(0) = -2. \end{cases}$

Вариант 18.

1. а) $e^x \sin ydx + tgydy = 0$; б) $\dfrac{y'}{x + 6} = y$.

2. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$.

3. $(x + 1)y' + y = x^3 + x^2, y(0) = 0$.

4. $2yy'' = 3 + (y')^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

5. а) $y'' + 18y' + 81y = 0$; б) $y'' - 7y' - 8y = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

6. $y'' + 16y = 7\cos 3x.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, & x(0) = 2, \\ \dot{y} = -x + y, & y(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 19.

1. а) $ctgx\cos^2 ydx + \sin^2 xtgydy = 0$ **;** б) $y' = 2xy + x$ **.**

2. $(x - y)ydx - x^2dy = 0.$

3. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^2y^2;$ $\quad y(1) = 1.$

4. $y'' = 3\sqrt{y+1},$ $\quad y(2) = 0,$ $\quad y'(2) = 2.$

5. а) $y'' - 3y' - 4y = 0;$ б) $y'' + 6y' + 13y = 0;$ в) $y'' + 2y' = 0.$

6. $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, & x(0) = -2, \\ \dot{y} = 2x + y, & y(0) = 0. \end{cases}$

Вариант 20.

1. а) $\dfrac{e^{2y}dy}{\sin x} = dx$ **;** б) $xyy' = 1 - x^2$ **.**

2. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$

3. $xy' - y = x^2\cos x;$ $\quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$

4. $(y+2)^2y'' = (y')^3,$ $\quad y(0) = 0,$ $\quad y'(0) = 1.$

5. а) $y'' + 25y = 0;$ б) $y'' - 10y' + 16y = 0;$ в) $y'' - 20y' + 100y = 0.$

6. $y'' + 2y' + y = -2\sin x.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, & x(0) = 5, \\ \dot{y} = 2x, & y(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 21.

1. а) $3^{x^2+y}\,dy = x\,dx$; б) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

2. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2.$

3. $xy' + y = x^2 + 1, \quad y(1) = 0.$

4. $y'' = \sin 4x + 2x - 3, \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$

5. а) $y'' - 3y' - 18y = 0$; б) $4y'' + 4y' + y = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0.$

6. $y'' - 2y' - 8y = -8\cos 2x.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 2x - y, & y(0) = 2. \end{cases}$

Вариант 22.

1. а) $yx^2dx - 2x^2ydy + ydx = 0$; б) $\dfrac{y'}{\cos x} = \dfrac{3}{\sin y}$.

2. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdx = 0.$

3. $y' - 3x^2y - x^2e^{x^3} = 0, y(0) = 0.$

4. $(x+1)y'' = y' - 1, \quad y(-1) = 0, \quad y'(0) = 0.$

5. а) $y'' - 6y' + 13y = 0$; б) $y'' - 2y' - 15y = 0$; в) $16y'' + 8y' + y = 0.$

6. $y'' + 25y = \cos 4x.$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 8y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = -8x + 4y, & y(0) = 1. \end{cases}$

Вариант 23.

1. а) $4dy - y^3dx = 0$; б) $(y+1)y' = xy$.

2. $xy' + y(\ln\frac{y}{x} - 1) = 0$.

3. $y' - 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

4. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5. а) $y'' + 2y' + y = 0$; б) $y'' + 6y' + 25y = 0$; в) $y'' - 4y' = 0$.

6. $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 3y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -8x - 5y, & y(0) = 7. \end{cases}$

Вариант 24.

1. а) $\frac{dy}{\sin 2x} - \frac{dx}{y} = 0$; б) $y' = 2 - 2y$.

2. $(x^2 + y^2 \_ dx + 2xydy = 0$.

3. $y' - y = e^x, y(0) = 1$.

4. $y'' = 7x + e^x - \sin 4x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$

5. а) $y'' + 36y = 0$; б) $y'' - 6y' + 8y = 0$; в) $y'' + 20y' + 100y = 0$.

6. $y'' + 3y' - 4y = e^x$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y, & x(0) = \frac{3}{2}, \\ \dot{y} = x - 6y, & y(0) = 0. \end{cases}$

Вариант 25.

1. а) $\frac{ydy}{1 + e^x} = dx$; б) $xy' = x^2 - 3$.

2. $(y^2 - 2xy)dx - x^2 dy = 0.$

3. $x^2 y' + xy + 1 = 0, y(1) = 0.$

4. $xy'' + y' + x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. а) $y'' - 2y' + 17y = 0$; б) $25y'' - 10y' + y = 0$; в) $y'' + 5y' = 0.$

6. $2y'' + 5y' = 29\cos x$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x - 5y, \\ \dot{y} = -x - 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = \dfrac{6}{5}.$

Вариант 26.

1. а) $xydx = (x-6)dy$; б) $\cos xy' = y\sin x + 2\sin x$.

2. $(x + 2y)dx + xdy = 0.$

3. $x(y' - y) = e^x, y(1) = 0.$

4. $y'' = 2y^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$; б) $25y'' + 10y' + y = 0$; в) $y'' - 8y' = 0.$

6. $y'' + 4y' + 4y = x^2 - 3x$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y, \\ \dot{y} = x + 4y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = \dfrac{3}{4}.$

Вариант 27.

1. а) $(xy + x)dy - x^2 dx = 0$; б) $y' + y\sin x = 0$.

2. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0.$;

3. $(xy' - 2y + x^2 = 0, y(1) = 0.$

4. $y'' = e^{5x} + \cos x - 2x^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. а) $16y'' - 8y' + y = 0$; б) $4y'' + 8y' - 5y = 0$; в) $y'' - 6y' + 10y = 0$.

6. $y'' + y = e^{-x}$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x + 3y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = -\dfrac{3}{2}$.

Вариант 28.

1. а) $e^{x+y}dy = dx$; б) $(xy - x)y' = x^2 - x^3$.

2. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.

3. $(x+1)y' - y = x^2 + 1$, $y(0) = 0$.

4. $xy'' - y' - 1 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5. а) $y'' + 8y' + 25y = 0$; б) $y'' - 2y' + y = 0$; в) $9y'' + 3y' - 2y = 0$.

6. $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = 5x + 4y, \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\ y(0) = \dfrac{8}{3}$.

Вариант 29.

1. а) $(x^2 + 1)dy = y^3dx$; б) $y' = \dfrac{x+2}{y-3}$.

2. $x^2y' = y(x + y)$.

3. $(1 - x^2)y' + xy = 1, y(0) = 1$.

4. $y'' = y'\left(1 + (y')^2\right)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

5. а) $6y''+7y'-3y=0$; б) $4y''-4y'+y=0$; в) $y''+36y=0$.

6. $y''-2y'+y=(x+1)e^{x}$.

7. $\begin{cases} \dot{x}=3x+y, & x(0)=1, \\ \dot{y}=x+3y, & y(0)=2. \end{cases}$

Вариант 30.

1. а) $\dfrac{dy}{e^{3x}}=dx$ **;** б) $y'=\dfrac{x^2-2}{e^{2y}}$**.**

2. $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

3. $(x+2)y'-y=(x+2)^2$, $y(0)=1$.

4. $y''=x+\cos 2x-\dfrac{1}{x^2}$**,** $y(0)=1$**,** $y'(0)=0$

5. а) $36y''-12y'+y=0$ **,** б) $y''+12y'+37y=0$; в) $y''-2y'=0$.

6. $y''-9y=\sin 3x-\cos 3x$

7. $\begin{cases} \dot{x}=6x-y, & x(0)=1, \\ \dot{y}=3x+2y, & y(0)=3. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание № 1. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

а) $\cos^2 x dy=(1+y^2)dx$; б) $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$

Решение.

а) $\cos^2 x dy=(1+y^2)dx$; Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{\cos^2 x}; \qquad \int\frac{dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+C\,;$$

$arctgy = tgx + C$. – общий интеграл.

б) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$;

Уравнение является Д.У. с разделяюшимися переменными. Перепишем его в дифференциальной форме. $\dfrac{ydy}{dx} = \dfrac{1-2x}{y} \Rightarrow y^2dy = (1-2x)dx \Rightarrow \int y^2 dy = \int (1-2x)dx$;

$\dfrac{y^3}{3} = x + x^2 + C$ или $y^3 = 3x + 3x^2 + 3C$.

Задание № 2. Найти частное решение уравнения $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$.

Решение. Данное уравнение является однородным, так как обозначив правую часть уравнения $f(x,y) = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$, находим $f(tx,ty) = \dfrac{ty}{tx} + \sin\dfrac{ty}{tx} = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x} = f(x,y)$.

Для решения данного уравнения применим подстановку $y = u(x)\cdot x = ux$, $y' = u'x + u$, где $u = u(x)$ – неизвестная функция.

Уравнение примет вид: $u'x + u = \dfrac{ux}{x} + \sin\dfrac{ux}{x}$;

$u'x + u = u + \sin u$; $u'x = \sin u$.

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим $\dfrac{du}{dx}\cdot x = \sin u$; $\dfrac{du}{\sin u} = \dfrac{dx}{x}$; $\int\dfrac{du}{\sin u} = \int\dfrac{dx}{x}$;

$\ln\left|tg\dfrac{u}{2}\right| = \ln|x| + \ln|C|$; $tg\dfrac{u}{2} = Cx$; $u = 2arctg\,Cx$.

Так как $u=\dfrac{y}{x}$, то получим общее решение дифференциального уравнения $y=2x\cdot arctg\,Cx$.

Задание № 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'=y+2\sqrt{x}$, $y(1)=0$

Решение. Разделим левую и правую часть этого дифференциального уравнения на x. Получим: $y'=\dfrac{y+2\sqrt{x}}{x}$ или $y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ – линейное дифференциальное уравнение. Следовательно, введем подстановку $y=u\cdot v$, где u и v - некоторые функции переменной x. Дифференцируя, получим $y'=u'v+uv'$. Тогда заданное уравнение примет вид:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}} \text{ или } u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Получаем совокупность уравнений: $v'-\dfrac{v}{x}=0$ и $u'v=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Из уравнения $v'-\dfrac{v}{x}=0$ с разделяющимися переменными находим v. $v'=\dfrac{v}{x}\Rightarrow\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v}{x}\Rightarrow\dfrac{dv}{v}=\dfrac{dx}{x}\Rightarrow\int\dfrac{dv}{v}=\int\dfrac{dx}{x}\Rightarrow\ln|v|=\ln|x|\Rightarrow v=x$.

Интегрируя $u'v=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, при условии $v=x$ получим:

$u'x=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\Rightarrow u'=\dfrac{2}{x\sqrt{x}}\Rightarrow\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}\Rightarrow du=\dfrac{2dx}{x^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow\int du=\int\dfrac{2dx}{x^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow$

$u=2\int x^{\frac{-3}{2}}dx+C\Rightarrow u=\dfrac{-4}{\sqrt{x}}+C$.

Так как $y = u \cdot v$, то получаем $y = \left(\frac{-4}{\sqrt{x}} + C\right)x$. Находим частное решение при условии, что $y(1) = 0$. $0 = \left(\frac{-4}{\sqrt{1}} + C\right) \cdot 1 \Rightarrow C = 4$. Частное решение имеет вид $y = \left(\frac{-4}{\sqrt{x}} + 4\right)x$.

Задание № 4. Дано уравнение $2yy'' = (y')^2$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(-1) = 4$; $y'(-1) = 1$.

Решение. Данное уравнение второго порядка не содержит явно независимую переменную. Применим подстановку $y' = p(y) = p$, где p - новая неизвестная функция переменной y. Тогда $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = p\frac{dp}{dy}$, и уравнение примет вид

$$2yp\frac{dp}{dy} = p^2; \qquad 2yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0; \qquad p\left(2y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0.$$

Если приравнять нулю первый множитель, то получаем: $p = 0;\quad y' = 0;\quad y = C$.

Приравняем нулю второй множитель:

$$2y\frac{dp}{dy} - p = 0; \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y}; \qquad \ln|p| = \frac{1}{2}\ln|y| + \ln|c_1|;$$

$p = c_1\sqrt{y}$ или $y' = c_1\sqrt{y}$.

Используя начальные условия $y = 4$, $y' = 1$ при $x = -1$, находим c_1:

$$1 = c_1\sqrt{4}; \qquad c_1 = \frac{1}{2}.$$

Далее решаем уравнение $y' = \frac{1}{2}\sqrt{y}$:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}dx; \qquad 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x + c_2.$$

Теперь определим значение c_2 из условия $y = 4$ при $x =$ -1:

$$2\sqrt{4} = \frac{1}{2}(-1) + c_2; \qquad 4 = c_2 - \frac{1}{2}; \quad c_2 = \frac{9}{2}.$$

Тогда

$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$; $\sqrt{y} = \frac{1}{4}(x+9)$ и $y = \frac{1}{16}(x+9)^2$ – искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

Задание № 5. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка.

а) $y'' - 7y' + 6y = 0$, **б)** $y'' - y' + 0{,}25y = 0$ **, в)** $y'' + 12y' + 37y = 0.$

Решение. а) $y'' - 7y' + 6y = 0$ **.**

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$k^2 - 7k + 6 = 0,\ D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 = 49 - 24 = 25,$

$k_1 = \frac{7 - \sqrt{25}}{2} = 1, k_2 = \frac{7 + \sqrt{25}}{2} = 6.$

Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

б) $y'' - y' + 0{,}25y = 0$ **.**

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$k^2 - k + 0{,}25 = 0,\ D = (-1)^2 - 4 \cdot 0{,}25 = 1 - 1 = 0,$

$k_1 = k_2 = \frac{1}{2}.$

Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 x e^{\frac{x}{2}}$.

в) $y'' + 12y' + 37y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$k^2 + 12k + 37 = 0, k_{1,2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 148}}{2} =$

$= \dfrac{-12 \pm 2i}{2} = -6 \pm i,$

Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = e^{-6t}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Задание № 6. Найти общее решение уравнения:

$$y'' + 16y = (x^2 + 1)e^{3x}.$$

Решение. Вначале находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 16y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 16 = 0$ имеет 2 комплексно-сопряженных корня $k_1 = 4i, \quad k_2 = -4i$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x.$$

Далее находим частное решение y^* данного неоднородного уравнения. Так как правая часть заданного уравнения имеет вид:

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right)e^{3x} = P_n(x)e^{\alpha x},$$

где $\alpha = 3, \quad n = 2$ и корни характеристического уравнения не совпадают с $\alpha = 3$, то частное решение ищем в виде:

$$y^* = Q_2(x)e^{3x} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Вычисляя первую и вторую производные этого выражения и подставляя в дифференциальное уравнение, получим:

$$\left(9(Ax^2+Bx+C)+6(2Ax+B)+2A+9(Ax^2+Bx+C)\right)e^{3x}=$$
$$=(x^2+1)e^{3x}.$$

Разделив обе части уравнения на e^{3x} и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, будем иметь систему:

$$\begin{cases} 9A=1, \\ 9B=0, \\ 2A+9C=1, \end{cases}$$

Решая, которую находим

$$A=\frac{1}{9},\ B=0,\ C=\frac{7}{81}.$$

Следовательно, частным решением является функция:

$$y^*=\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{7}{81}\right)e^{3x}.$$

Общее решение заданного уравнения определяется функцией вида:

$$y=\tilde{y}+y^*=c_1\cos 4x+c_2\sin 4x+(\frac{1}{9}x^2+\frac{7}{81})e^{3x}.$$

Задание № 7. Найти частное решение системы ДУ

$$\begin{cases} \dot{x}=x+3y, & x(0)=2, \\ \dot{y}=-x+5y, & y(0)=0. \end{cases}$$

Решение. Решение системы будем проводить в несколько этапов.

5) Выразим из первого уравнения системы y:

$$y=\frac{1}{3}(\dot{x}-x)\quad \Rightarrow \dot{y}=\frac{1}{3}(\ddot{x}-\dot{x}). \qquad (9.33)$$

6) Подставим (9.33) во второе уравнение системы и преобразуем его: $\frac{1}{3}(\ddot{x}-\dot{x})=-x+\frac{5}{3}(\dot{x}-x)$, $\quad \ddot{x}-\dot{x}=-3x+5\dot{x}-5x$,

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = 0\,. \qquad (9.34)$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $x = x(t)$.

7) Решая уравнение (2), находим функцию x:

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 8x = 0\,,$$

$$k^2 - 6k + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2,\, k_2 = 4,$$

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \qquad (9.35)$$

– общее решение уравнения (9.33).

8) Подставив (9.35) в формулу (9.33), находим функцию y:

$$y = \frac{1}{3}(\dot{x} - x) = \frac{1}{3}(2c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{4t} - (c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t})) =$$

$$= \frac{1}{3}(c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{4t}) = \frac{1}{3}c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}.$$

Таким образом, получим общее решение системы :

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}, \\ y = \dfrac{1}{3}c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}. \end{cases}$$

9) Найдем частное решение системы, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Составим систему для определения c_1 и c_2:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 2, \\ y(0) = \dfrac{1}{3}c_1 + c_2 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 2, \\ c_1 = -3c_2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = -1, \\ c_1 = 3. \end{cases}$$

Следовательно, искомое частное решение

$$\begin{cases} x = 3e^{2t} - e^{4t}, \\ y = e^{2t} - e^{4t}. \end{cases}$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1985. – Т. 1.
2. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. – М.:Наука, 1985.
3. Гусак А. А. Высшая математика. – Мн.: Тетра Системс, 1998.
4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Мн.: Вышейшая школа, 1986. – Ч. 1.
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А., Марченко А. И., Унукович В. Т. Общий курс высшей математики. – Орша,1996.
6. Лихолетов И. И., Мацкевич И. П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Вышейшая школа, 1976.
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике:Ч. 2. Учебное пособие/Под. ред.А.П.Рябушко–Мн.: Вышейшая школа, 2000.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс

В четырех частях

Часть 2

Составители:
Морозова Инна Михайловна,
Хвощинская Людмила Аркадьевна,
Тиунчик Александр Александрович и др.

Ответственный за выпуск И. М. Морозова
Компьютерная верстка А. И. Стебули

Подписано в печать 20.12.2011. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 10,93. Уч.-изд. л. 9,54. Тираж 300 экз. Заказ 1145.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
ЛИ № 02330/0552984 от 14.04.2010.
ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.
Пр. Независимости, 99-2, 220023, Минск.