МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области сельского хозяйства в качестве учебно-методического комплекса для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 1-74 06 02 Техническое обеспечение процессов сельскохозяйственного производства, 1-74 06 02 Техническое обеспечение процессов хранения и переработки сельскохозяйственной продукции, 1-74 06 03 Ремонтно-обслуживающее производство в сельском хозяйстве, 1-36 12 01 Проектирование и производство сельскохозяйственной техники

Минск
БГАТУ
2011

УДК 531.1(07)
ББК 22.2я7
Т33

Составители:
кандидат физико-математических наук, доцент *Ю. С. Биза*,
кандидат технических наук, доцент *Н. Л. Ракова*,
ассистент *И. А. Тарасевич*

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент кафедры «Сопротивление материалов и деталей машин» Учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет» *В. А. Агейчик*;
кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории «Виброзащита механических систем» «Объединенного института машиностроения» НАН Беларуси *А. М. Гоман*

Т33 **Теоретическая механика. Кинематика** : учебно-метод. комплекс / сост. : Ю. С. Биза, Н. Л. Ракова, И. А. Тарасевич. – Минск : БГАТУ, 2011. – 124 с.
ISBN 978-985-519-488-1.

В учебно-методическом комплексе представлены материалы по изучению раздела «Кинематика», входящего в состав дисциплины «Теоретическая механика». Включает курс лекций, основные материалы по выполнению практических занятий, задания и образцы выполнения заданий для самостоятельной работы и контроля учебной деятельности студентов очной и заочной форм обучения.

УДК 531.1(07)
ББК 22.2я7

ISBN 978-985-519-488-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика — наука о законах механического движения, равновесия и взаимодействия материальных тел.

Это одна из фундаментальных общенаучных физико-математических дисциплин. Она является теоретической основой современной техники.

Изучение теоретической механики, наряду с другими физико-математическими дисциплинами, способствует расширению научного кругозора, формирует способности к абстрактному мышлению и повышению общей технической культуры будущего специалиста.

Теоретическая механика, являясь научной базой всех технических дисциплин, способствует развитию навыков рациональных решений инженерных задач, связанных с эксплуатацией, ремонтом и конструированием сельскохозяйственных и мелиоративных машин и оборудования.

Дисциплина состоит из трех разделов: «Статика твердого тела, пространственная и плоская система сил», « Кинематика точки и твердого тела. Сложное движение точки», «Динамика материальной точки и механической системы. Общие теоремы динамики», «Принципы механики».

В учебно-методическом комплексе (УМК) представлены материалы по изучению раздела «Кинематика», который включает курс лекций, основные материалы для проведения практических работ, задания и образцы выполнения для самостоятельных работ и контроля учебной деятельности студентов очной и заочной форм обучения.

В результате изучения раздела «Кинематика» студент должен *знать* способы задания точки и их характеристики, *уметь* конспектировать, применять полученные теоретические знания к решению задач прямых и обратных задач кинематики;

Учебной программой дисциплины «Теоретическая механика» предусмотрено общее количество аудиторных часов —136, в т.ч. 35 часов на изучение раздела «Кинематика».

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА

1.1. Глоссарий

Статика — раздел механики, в котором излагается общее учение о силах, изучается приведение сложных систем сил к простейшему виду и устанавливаются условия равновесия различных систем сил.

Кинематика — это раздел теоретической механики, в котором изучают движение материальных объектов вне зависимости от причин, вызывающих это движение, т. е. вне зависимости от сил, действующих на эти объекты.

Динамика — раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел (точек) под действием приложенных сил.

Материальное тело — тело, имеющее массу.

Материальная точка — материальное тело, различие в движении точек которого является несущественным.

Инертность — свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.

Масса тела — это скалярная положительная величина, зависящая от количества вещества, содержащегося в данном теле, и определяющая его меру инертности при поступательном движении.

Система отсчета — система координат, связанная с телом, по отношению к которому изучается движение другого тела.

Инерциальная система — система, в которой выполняются первый и второй законы динамики.

Импульс силы — векторная мера действия силы в течение некоторого времени.

Количество движения материальной точки — векторная мера ее движения, равная произведению массы точки на вектор ее скорости

Кинетическая энергия — скалярная мера механического движения.

Кинетическая энергия материальной точки — скалярная положительная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Осевые моменты инерции — скалярные величины, равные сумме произведений масс всех точек (системы) на квадраты расстояний их до соответствующих координатных осей

Работа силы — скалярная мера действия силы.

Элементарная работа силы — это бесконечно малая скалярная величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор бесконечного малого перемещения точки приложения силы.

Кинетическая энергия — скалярная мера механического движения.

Кинетическая энергия материальной точки — скалярная положительная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, т. е. $\frac{mv^2}{2}$.

Кинетическая энергия механической системы — арифметическая сумма кинетических энергий всех материальных точек этой системы

Равновесие — состояние покоя тела по отношению к другому телу, выбранному за неподвижное, или его равномерное прямолинейное движение.

Сила — мера механического взаимодействия тел, характеризующая его интенсивность и направленность.

Скорость — векторная величина, характеризующая быстроту изменения радиус—вектора точки с течением времени.

Ускорение точки — векторная величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости точки с течением времени.

Поступательное движение — движение твердого тела, при котором любая прямая, неизменно связанная с телом, остается параллельной самой себе.

Вращательное движение — движение твердого тела, при котором какие—либо две его точки остаются неподвижными.

Плоское движение — движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Мгновенный центр скоростей (МЦС) — точка плоской фигуры, скорость которой в рассматриваемый момент времени равна нулю.

Мгновенный центр ускорений — точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

1.2. Темы лекций и их содержание

Тема 1. Кинематика точки

Основные понятия и определения кинематики точки. Векторный, координатный и естественный способы задания движения. Определение скорости, ускорения и траектории точки при соответствующих способах задания движения.

Литература: [1], стр. 31-57; [2], стр. 15-33.

Тема 2. Поступательное движение твердого тела

Определение поступательного движения. Теорема о скоростях, ускорениях и траекториях точек твердого тела при поступательном движении.

Литература: [1], стр. 62-69; [2], стр. 35-49.

Тема 3. Вращательное движение твердого тела

Определение вращательного движения. Закон вращательного движения. Определение угловой скорости, углового ускорения. Определение линейной скорости, линейного ускорения. Определение скоростей и ускорений в случаях, когда вращающееся тело входит в состав различных механизмов.

Литература: [1], стр. 88-94; [2], стр. 50-56.

Тема 4. Плоское движение твердого тела

Определение скоростей при плоскопараллельном движении. Определение мгновенного центра скоростей точки тела. Определение скоростей точек тела. Определение ускорений при плоскопараллельном движении. Определение мгновенного центра ускорений точки тела.

Литература: [1], стр. 98-119; [2], стр. 58-66.

Тема 5. Сложное движение твердого тела.

Абсолютное, относительное, переносное движение, скорость и ускорение точки. Теоремы о сложении скоростей и ускорений.

Литература: [1], стр. 163-196; [2], стр. 103-127.

Тема 1. **КИНЕМАТИКА ТОЧКИ**

1.1. Основные понятия и определения кинематики

Кинематика — это раздел теоретической механики, в котором изучают движение материальных объектов вне зависимости от причин, вызывающих это движение, т. е. вне зависимости от сил, действующих на эти объекты.

Задачи кинематики: изучение видов движения материальных объектов — материальной точки и тел; выбор способа описания их движения при помощи уравнений, которые определяли бы положение этих объектов относительно системы отсчета в любой момент времени; вывод зависимостей между различными кинематическими величинами — скоростями, ускорениями точек и тел в целом.

Традиционно кинематику делят на кинематику точки и твердого тела. Существуют следующие способы задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

1.2. Векторный способ задания движения точки

Положение некоторой движущейся точки M (рис. 1) в каждый данный момент времени можно определить при помощи вектора r, проведенного из неподвижной точки O в точку M, который называют *радиусом-вектора* точки M. Каждому моменту времени соответствует свое значение радиуса-вектора. Следовательно, радиус-вектор — функция времени:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют *уравнением движения точки M в векторной форме.*

Пусть точка M в момент времени t_1 находится в положении M_1, определяемом вектором $\bar{r}_1$ (рис. 2). Перемещение точки M за время

$$t = t_2 - t_1$$

определяется вектором $\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\vec{r}$.

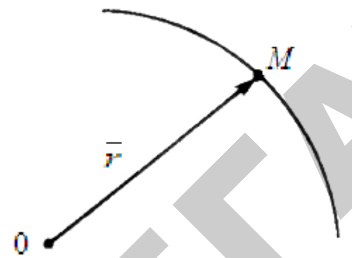


Рис. 1

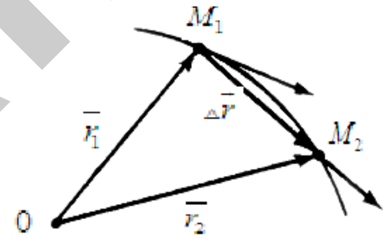


Рис.2

Вектор $\Delta\vec{r}$ направлен по хорде, если точка движется по кривой линии, и по прямой, если она движется прямолинейно. Из векторного треугольника OM_1M_2 видно, что

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \overrightarrow{M_1M_2},$$

откуда

$$\overrightarrow{M_1M_2} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}$$

Средняя скорость движения точки

$$\bar{\vartheta}_{\text{ср}} = \frac{M_1M_2}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

Направления векторов $\bar{\vartheta}_{\text{ср}}$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\vec{r}$ совпадают.

В пределе, когда $\Delta t \to 0$, получим скорость $\bar{\vartheta}$ (м/с) точки M в данный момент времени t:

$$\bar{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\vartheta}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Таким образом, скорость точки при векторном способе задания движения равна первой производной от радиуса-вектора точки по времени:

$$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (2)$$

Так как предельным направлением секущей $\overrightarrow{M_1M_2}$ является касательная, то вектор скорости $\vec{\vartheta}$ точки M в данный момент времени t направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения (рис. 3).

Ускорением точки называют векторную величину, характеризующую быстроту изменения вектора скорости точки с течением времени.

Отношения и изменения скорости $\Delta\overline{\vartheta}$ за время Δt к Δt есть среднее ускорение точки (рис. 4).

$$\overline{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\overline{\vartheta}}{\Delta t}.$$

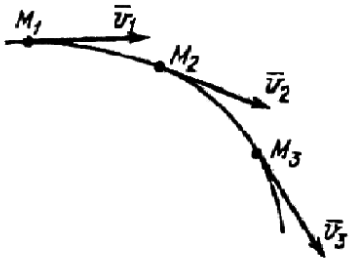


Рис. 3

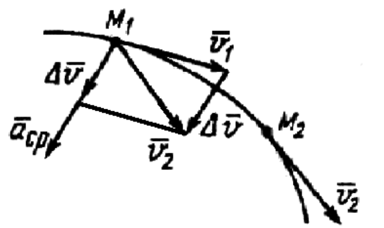


Рис. 4

Направлен вектор $\overline{a}_{\text{ср}}$ по направлению вектора $\Delta\overline{\vartheta}$. В пределе при $\Delta t \to 0$ получим вектор $\overline{a}$ — ускорение точки в данный момент времени:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{\vartheta}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}. \qquad (3)$$

При прямолинейном движении вектор $\overline{a}$ направлен вдоль этой прямой. При криволинейном движении в плоскости вектор $\vec{a}$, как и вектор $\overline{a}_{\text{ср}}$, направлен в сторону вогнутости кривой. Если траектория — пространственная кривая, то вектор $\overline{a}_{\text{ср}}$ направлен в сторону вогнутости кривой и лежит в плоскости $П$, проходящей через касательную T_1 в точке M_1 и прямую, параллельную касательной T_2 в соседней точке M_2 (рис. 5).

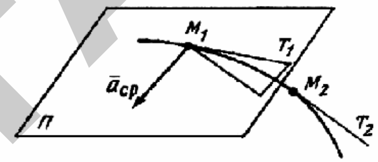


Рис. 5

В пределе, когда $\Delta t \to 0$ и $M_2 \to M_1$, плоскость $П$ занимает положение, при котором она соприкасается с кривой M_1 M_2 в точке M_1 и поэтому называется *соприкасающейся плоскостью.*

Следовательно, в общем случае вектор $\overline{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

При координатном способе движение точки описывается уравнениями, представляющими собой зависимости координат точки M от времени:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t). \qquad (4)$$

Разложим радиус-вектор $\overline{r}$ точки по осям координат на составляющие:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}. \qquad (5)$$

Так как $\overline{\vartheta} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$, с учетом того, что орты $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ — постоянные, имеем

$$\overline{\vartheta} = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k}. \qquad (6)$$

С другой стороны, скорость как вектор можно также разложить на составляющие (рис. 6):

$$\bar{\vartheta} = \vartheta_x \bar{i} + \vartheta_y \bar{j} + \vartheta_z \bar{k}\ . \qquad (7)$$

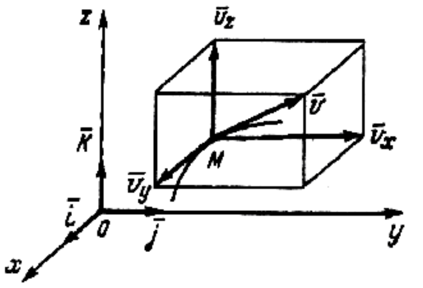


Рис. 6

Сопоставляя равенства (6) и (7), получим:

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt};\ \ \vartheta_y = \frac{dy}{dt};\ \ \vartheta_z = \frac{dz}{dt}\ . \qquad (8)$$

По проекциям скорости на оси координат определим ее модуль:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}\ . \qquad (9)$$

Направление вектора $\vec{\vartheta}$ по отношению к осям координат задают углами $\alpha_\vartheta = \left(\bar{\vartheta},\ \bar{i}\right)$ и $\gamma_\vartheta = \left(\bar{\vartheta},\ \bar{k}\right)$, косинусы которых вычисляют по формулам:

$$\cos\alpha_\vartheta = \frac{\vartheta_x}{\vartheta};\ \ \cos\beta_\vartheta = \frac{\vartheta_y}{\vartheta};\ \ \cos\gamma_\vartheta = \frac{\vartheta_z}{\vartheta}. \qquad (10)$$

Чтобы представить ускорение точки в координатной форме, в уравнение

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\vartheta}}{dt}$$

подставим скорость из выражения (6):

$$\bar{a} = \frac{d\vartheta_x}{dt}\bar{i} + \frac{d\vartheta_y}{dt}\bar{j} + \frac{d\vartheta_z}{dt}\bar{k}\,. \qquad (11)$$

С другой стороны, разложение вектора ускорения *a* по осям координат имеет вид

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}\,. \qquad (12)$$

Сопоставляя (11) и (12), получим:

$$a_x = \frac{d\vartheta_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};\quad a_y = \frac{d_{\vartheta y}}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};\quad a_z = \frac{d\vartheta_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (13)$$

т. е. *проекции ускорения на оси координат вычисляют как первые производные от соответствующих проекций скорости или как вторые производные от координат тонки по времени.*

Модуль вектора ускорения находят по формуле, аналогичной (9):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \qquad (14)$$

а направляющие косинусы — по формулам

$$\cos\alpha_a = a_x / a;\ \cos\beta_a = a_y / a;\ \cos\gamma_a = a_z / a. \qquad (15)$$

Естественным способом задания движения точки удобно пользоваться в том случае, когда траектория движущейся точки заранее известна. На этой траектории отмечают начало отсчета 0 с указанием положительного (+) и отрицательного (–) направлении отсчета (рис. 7). При естественном способе задания движения положение точки *M* на траектории однозначно определяется дуговой координатой *s*, т. е. расстоянием по траектории от начала отсчета до точки *M*. Отсюда следует, что для определения положения точки *M* в любой момент времени необходимо задать функцию

$$s = s\left(t\right). \qquad (16)$$

Уравнение (16) выражает закон движения точки по траектории.

Перейдем к определению скорости точки при естественном способе задания ее движения. Пусть *AB* — траектория точки и $s = s\left(t\right)$ — закон ее движения (рис. 8).

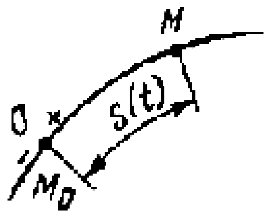


Рис. 7

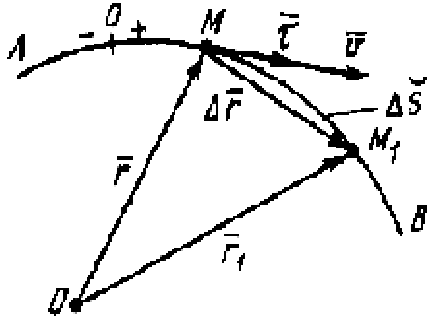


Рис. 8

Полагаем, что за промежуток времени t точка переместилась по кривой из положения M в положение M_1 по дуге $\Delta\breve{s} = \breve{MM}_1$.

Зададим положения точки радиусами-векторами $\bar{r}$ и $\bar{r}_1$ и покажем приращение радиуса-вектора $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$. Воспользуемся формулой скорости точки при векторном способе задания ее движения

$$\bar{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta\breve{s}}{\Delta s} \right) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta\breve{s}} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\breve{s}}{\Delta t},$$

где $\lim\limits_{\Delta\breve{s} \to 0} \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta\breve{s}}$ — предел отношения хорды к стягивающей дуге.

При стремлении дуги к нулю этот предел по модулю равен единице, а предельное положение хорды — касательная к траектории в точке M. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta s} = \bar{\tau}$ есть единичный вектор, направленный по касательной (орт касательной).

Модуль $|\bar{\tau}| = 1$, но его направление меняется, так как меняется направление касательной к траектории движения точки M. Направлен вектор $\bar{\tau}$ в положительную сторону отсчета дуговой координаты.

Второй предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\breve{s}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Таким образом,

$$\bar{\vartheta} = \dot{s}\bar{\tau}.$$

Вектор скорости точки $\vec{\vartheta}$ *равен произведению скалярной величины* $\dot{s}$ *на единичный вектор* $\bar{\tau}$. Причем скалярная величина $\dot{s}$ является проекцией вектора скорости точки на касательную к ее траектории. Обозначим эту проекцию как

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \vartheta_\tau. \tag{17}$$

Величина ϑ_τ — алгебраическое значение скорости. Если вектор скорости направлен в положительную сторону (совпадает по направлению с ортом $\bar{\tau}$), то ϑ_τ положительно, в противном случае — отрицательно.

Итак,

$$\bar{\vartheta} = \vartheta_\tau \bar{\tau}. \tag{18}$$

1.3. Касательное, нормальное и полное ускорение точки

При векторном способе задания движения точки ее ускорение $\bar{a}$ определяется по известной уже формуле

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\vartheta}}{dt}. \tag{19}$$

Подставим в это выражение скорость $\bar{\vartheta} = \vartheta_\tau \bar{\tau}$ и продифференцируем по *t*. Получим

$$\bar{a} = \frac{d\vartheta_\tau \bar{\tau}}{dt} = \frac{d\vartheta_\tau}{dt} + \vartheta_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \qquad (20)$$

Вектор, выраженный первым слагаемым, направлен по касательной, о чем свидетельствует орт $\bar{\tau}$. Сомножитель $d\vartheta_\tau / dt$ является в таком случае проекцией вектора $\bar{a}$ на касательную. Обозначим первое слагаемое через $\overline{a_\tau}$, т. е.

$$\bar{a}_\tau = a_\tau \bar{\tau} = \frac{d\vartheta_\tau}{dt} \bar{\tau}, \qquad (20а)$$

и назовем его *касательным или тангенциальным ускорением.* Касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине. Алгебраическая величина касательного ускорения

$$a_\tau = \frac{d\vartheta_\tau}{dt}. \qquad (20б)$$

Если величина $\overline{a_\tau}$ положительная, то касательное ускорение совпадает по направлению с ортом $\bar{\tau}$. В противном случае оно направлено в сторону, противоположную орту $\bar{\tau}$.

Преобразуем второе слагаемое в уравнении (20) с учетом выражения $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n}$:

$$\vartheta_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}\frac{ds}{ds} = \vartheta_\tau \frac{ds}{dt}\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \vartheta_\tau^2 \frac{1}{\rho}\bar{n}.$$

Следовательно, второе слагаемое направлено по нормали в сторону вогнутости кривой к центру ее кривизны, о чем говорит орт

нормали $\bar{n}$, а также то, что ϑ_τ^2 — величина сугубо положительная и поэтому далее можно опустить индекс τ. Обозначим второе слагаемое как

$$\bar{a}_n = a_n \bar{n} = \frac{\vartheta_\tau^2}{\rho}\bar{n} = \frac{\vartheta^2}{\rho}\bar{n} \qquad (21а)$$

и назовем его *нормальным ускорением.* Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению. Величина нормального ускорения

$$a_n = \vartheta^2 / \rho. \qquad (21б)$$

Полное ускорение точки равно векторной сумме касательного и нормального ускорений (рис. 9):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = a_\tau \bar{\tau} + \frac{\vartheta^2}{\rho}\bar{n}. \qquad (22)$$

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad (23)$$

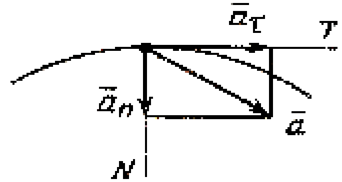


Рис. 9

Из выражения (22) следует, что проекция полного ускорения точки на бинормаль равна нулю:

$$a_b = 0.$$

Вопросы для повторения

1. Что изучает кинематика?
2. Какие существуют способы задания движения точки?
3. Как определить скорость точки при разных способах задания движения?
4. Как определить ускорение при разных способах задания движения точки?
5. Что характеризует нормальное, касательное ускорения?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. По заданным уравнениям движения точки M $x = x(t)$, $y = y(t)$ установить вид ее траектории, и для момента времени t = ½ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = -2t^2 + 2, \;\; y = -5t\,.$$

2. По заданным уравнениям движения точки M $x = x(t)$, $y = y(t)$ установить вид ее траектории, и для момента времени $t = 1$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = 4\cos^2\frac{\pi}{3}t + 2, \;\; y = 4\sin^2\frac{\pi}{3}t\,.$$

3. По заданным уравнениям движения точки M $x = x(t)$, $y = y(t)$ установить вид ее траектории, и для момента времени $t = 1$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = -\cos^2\frac{\pi}{3}t + 3, \;\; y = \sin^2\frac{\pi}{3}t - 1\,.$$

4. По заданным уравнениям движения точки M $x = x(t)$, $y = y(t)$ установить вид ее траектории, и для момента времени $t = 2$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное

и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = 4t + 4, \;\; y = -\frac{4}{t+1}\,.$$

5. По заданным уравнениям движения точки M $x = x(t)$, $y = y(t)$ установить вид ее траектории, и для момента времени $t = 1$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = 2\sin\frac{\pi}{3}t, \;\; y = -3\cos\frac{\pi}{3}t + 4\,.$$

6. По заданным уравнениям движения точки M $x = x(t)$, $y = y(t)$ установить вид ее траектории, и для момента времени t = ½ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = 3t^2 + 2, \;\; y = -4t\,.$$

7. По заданным уравнениям движения точки M $x = x(t)$, $y = y(t)$ установить вид ее траектории, и для момента времени $t = 1$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = 3t^2 - t + 1, \;\; y = 5t^2 - \frac{5}{3}t - 2\,.$$

8. По заданным уравнениям движения точки M $x = x(t)$, $y = y(t)$ установить вид ее траектории, и для момента времени $t = 0$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = 2 - 3t - 6t^2, \;\; y = 3 - \frac{3}{2}t - 3t^2\,.$$

9. По заданным уравнениям движения точки M $x = x(t)$, $y = y(t)$ установить вид ее траектории, и для момента времени $t = 1$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = -4\cos\frac{\pi}{3}t - 1, \quad y = -4\sin\frac{\pi}{3}t \cdot$$

10. По заданным уравнениям движения точки M $x = x(t)$, $y = y(t)$ установить вид ее траектории, и для момента времени $t = 1/4$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

$$x = 7t^2 - 3, \quad y = 5t\,.$$

Тема 2. **ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Поступательным называют такое *движение* твердого тела, при котором любая прямая, неизменно связанная с телом, остается параллельной самой себе.

Теорема о поступательном движении твердого тела. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и имеют равные скорости и ускорения. Обратимся к рис. 10.

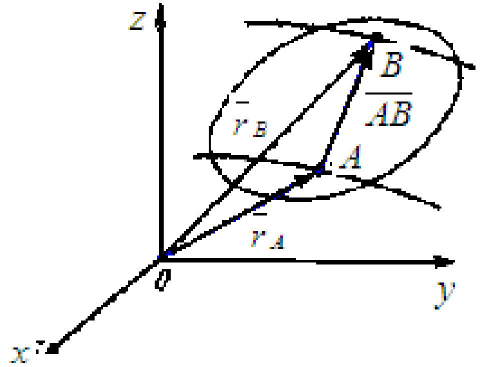


Рис. 10

Пусть показанное на нем твердое тело совершает поступательное движение.

При этом связанный ним вектор $\overrightarrow{AB}$ остается параллельным самому себе, т. е. $\overrightarrow{AB} = \overline{\text{const}}$ в любой момент времени. Проведем в точки A и B радиусы-векторы $\bar{r}_A$ и $\bar{r}_B$ и запишем векторное равенство

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overrightarrow{AB}\,. \qquad (24)$$

Из уравнения (24) следует, что положение точки B при любом положении тела можно получить, сместив точку A на величину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Продифференцируем выражение (24) по времени:

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt}.$$

Так как $\frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt} = 0$ вследствие того, что $\overrightarrow{AB} = \overline{\text{const}}$, а также $\frac{dr_B}{dt} = \overline{\vartheta}_B$ и $\frac{dr_A}{dt} = \overline{\vartheta}_A$, имеем

$$\overline{\vartheta}_A = \overline{\vartheta}_B. \qquad (25)$$

Дифференцируя (26) по времени, получим

$$\overline{a}_A = \overline{a}_B. \qquad (26)$$

Теорема доказана.

Из теоремы вытекает вывод о том, что поступательное движение твердого тела можно изучать по движению какой-либо одной его точки.

Тема 3. **ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ**

Вращательным называют такое *движение* твердого тела, при котором какие-либо две его точки остаются неподвижными.

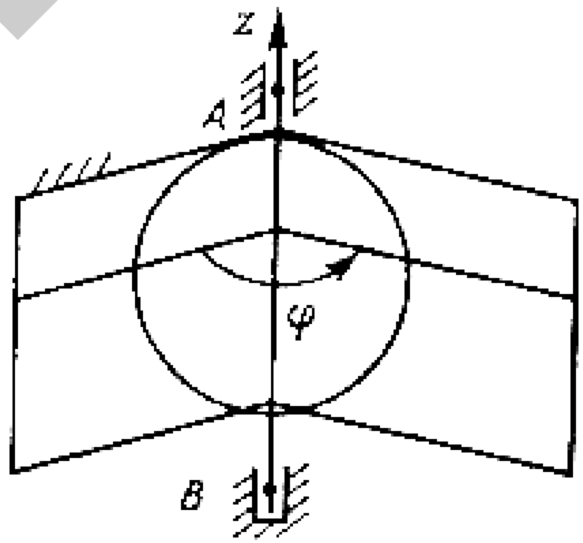


Рис. 11

Прямую, проходящую через эти точки A и B (рис. 11), называют осью вращения. Известно, что точки тела при вращении описывают траектории в виде окружностей. Точки же, лежащие на оси вращения, остаются неподвижными.

Условимся считать положительным отсчет угла φ при повороте тела против часовой стрелки и отрицательным — в противоположном направлении. За уравнение вращательного движения тела примем зависимость

$$\varphi = \varphi(t). \tag{27}$$

Единицей измерения угла в системе СИ служит радиан.

Введем оценку быстроты изменения угла φ. Пусть в момент времени 1 угол поворота тела был φ, а в момент времени $t + \Delta t$ будет $\varphi + \Delta\varphi$. Отношение приращения угла поворота к промежутку времени, за который оно происходит, называют средней угловой скоростью (рад/с):

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{28}$$

Для получения угловой скорости в данный момент времени перейдем в выражении (28) к пределу:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

или

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{29}$$

Единица измерения в системе СИ — радиан в секунду (рад/с), 1/с или c^{-1}, соотношение между угловой скоростью ω (рад/с) и числом оборотов *n* (об/мин).

$$\omega = \frac{\pi n}{30}\cdot \tag{30}$$

Введем оценку быстроты изменения угловой скорости. Если в момент времени *t* тело имело угловую скорость ω, а в момент времени $t + \Delta t$ будет $\omega + \Delta\omega$, то отношение приращения угловой скорости к соответствующему промежутку времени называют средним угловым ускорением (рад/с^2):

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{31}$$

Переходя в выражении (31) к пределу при $\Delta t \to 0$, получим значение мгновенного углового ускорения (рад/с^2, 1/с^2, с$^{-2}$)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{32}$$

Как и угловая скорость, угловое ускорение — величина алгебраическая, т. е. может принимать положительное или отрицательное значение.

Если знаки ω и ε совпадают (оба положительные или оба отрицательные), то вращение будет ускоренным, если противоположны друг другу — замедленным.

Рассмотрим некоторые частные случаи вращения тела.

Вращение тела с постоянной угловой скоростью ($\omega = \mathrm{const},\ \varepsilon = 0$) называют *равномерным.* Найдем закон вращения, исходя из определения (29). Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\int_{\varphi 0}^{\varphi} d\varphi = \int_{0}^{t} \omega dt\cdot$$

Отсюда

$$\varphi + \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 — начальное значение угла поворота тела.

Вращение тела с постоянным угловым ускорением (ε = const) называют *равнопеременным.* Определим зависимости угла поворота тела и угловой скорости от времени при этом виде движения.

Согласно формуле (32)

$$\int_{\omega 0}^{\omega} d\varphi = \int_{0}^{t} \varepsilon dt,$$

где ω_0 — начальное значение угловой скорости.

Отсюда получаем

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t\,.$$

Далее, записав $\omega = d\varphi/dt$, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int_{\varphi 0}^{\varphi} d\varphi = \int_{0}^{t} (\omega_0 + \varepsilon t)dt\,.$$

Взяв интегралы, окончательно получим

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}\,.$$

3.1. Скорости и ускорения точек тела при его вращении

Траекторией какой-либо точки M тела (рис. 12), совершающего вращательное движение, служит окружность радиуса R, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения. Положение точки на этой окружности определяется дуговой координатой s, отсчитываемой от начала отсчета, т.е. от нуля.

Согласно геометрии окружности дуга, центральный угол, на который она опирается, и радиус связаны зависимостью

$$S = R\varphi. \tag{33}$$

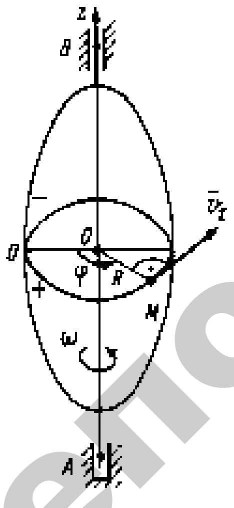


Рис. 12

Алгебраическая скорость точки определяется как производная от дуговой координаты по времени:

$$\vartheta_\tau = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Таким образом,

$$\vartheta_\tau = R\omega. \tag{34}$$

Вектор скорости ϑ_τ направлен по касательной к окружности в сторону вращения и перпендикулярен к радиусу R.

Ускорение точки, движущейся по криволинейной траектории, равно геометрической сумме касательного и нормального ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a_\tau} + \overline{a_n}.$$

Касательное ускорение $a_\tau = d\vartheta_\tau / dt$. Подставив значение скорости из выражения (34), получим

$$a_\tau = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon\,. \tag{35}$$

Направлено касательное ускорение по касательной к траектории согласно направлению углового ускорения тела.

Нормальное ускорение

$$a_n = \vartheta^2 / \rho.$$

Так как $\vartheta^2 = \vartheta_\tau^2$, $\rho = R = \text{const}$ и $\vartheta_\tau = R\omega$, нормальное ускорение

$$a_n = R\omega^2\,. \tag{36}$$

Направлено нормальное ускорение по радиусу R от точки к центру окружности. Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,.$$

Имеем

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ . \qquad (37)$$

Пример 4. Точка *A*, лежащая на ободе диска, имеет скорость ϑ_A = 40 см/с. Точка *B*, принадлежащая диску, имеет скорость ϑ_B = 10 см/с (рис. 13). Определить угловую скорость диска и его радиус, если расстояние *AB* = 15 см.

Решение. Применим формулу (8):

$$\vartheta_A = \omega OA,\ OA = R,$$

$$\vartheta_B = \omega OB,\ OB = R - AB.$$

Тогда $\omega = \dfrac{V_A}{OA} = \dfrac{V_B}{OB}$,

Или

$$\omega = \frac{\vartheta_A}{R} = \frac{\vartheta_B}{R - AB}.$$

Откуда

$$\vartheta_A(R - AB) = \vartheta_B R;$$

$$\vartheta_A R - \vartheta_B R = \vartheta_A AB;$$

$$R = \frac{\vartheta_A AB}{\vartheta_A - \vartheta_B} = \frac{40\cdot 15}{40-10} = \frac{40\cdot 15}{30} = 20 \text{ см};$$

$$\omega = \frac{\vartheta_A}{R} = \frac{40}{20} = 2 \text{ рад/с.}$$

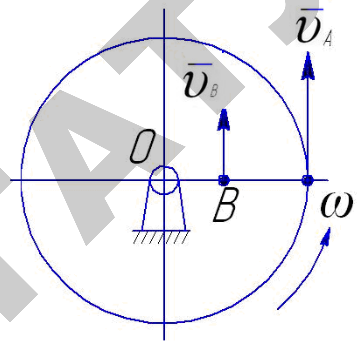


Рис. 13

Ответ: *R* = 20 см, $\omega = 2$ рад/с.

3.2. Векторы угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела. Векторы скорости и ускорения точки тела

Введем понятие вектора угловой скорости вращающегося тела $\bar{\omega}$. Этот вектор направим по оси вращения в ту сторону, чтобы, глядя навстречу ему, мы видели вращение твердого тела происходящим против хода часовой стрелки (рис. 14).

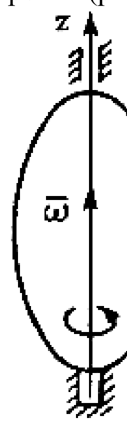


Рис. 14

Тем самым вектор $\bar{\omega}$ определит своим модулем модуль угловой скорости, а также направление и ось вращения. Вектор углового ускорения определим как

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \tag{38}$$

Вектор скорости определим как

$$\bar{\vartheta} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{39}$$

По направлению вектор $\bar{\omega} \times \bar{r}$ согласно определению векторного произведения двух векторов направлен перпендикулярно к плоскости векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$ в сторону, откуда поворот вектора $\bar{\omega}$ к $\bar{r}$ в сторону кратчайшего совмещения виден против хода часовой стрелки.

Формулу (39) называют формулой Эйлера.

Для определения ускорения точки M воспользуемся полученной ранее формулой (3), подставив в нее выражение (39):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\vartheta}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \times \bar{\omega} \times \bar{\vartheta}. \tag{40}$$

Вектор $\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ — касательное ускорение точки и направлен по касательной к ее траектории. При ускоренном вращении и, следовательно, ускоренном движении точки по траектории векторы $\bar{a}_\tau$ и $\bar{\vartheta}$ направлены в одну сторону, а при замедленном — в противоположные.

Вектор $\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{\vartheta} = \bar{\omega} \times \left(\bar{\omega} \times \bar{r}\right)$ является нормальным ускорением точки и направлен от точки M по перпендикуляру к оси вращения.

Пример 5. Груз *1* опускается по закону $x = 2,\ 4t^2 - 4t$, м. Определить угловую скорость, угловое ускорение барабана, скорость и ускорение точки M в момент времени t = 1 с, если $R = 3r = 0,6$ м (рис. 15).

Решение. Определим скорость груза:

$$\vartheta = \frac{dx}{dt} = 4,8t - 4.$$

Находим угловую скорость и угловое ускорение:

$$\omega = \frac{\vartheta}{r} = \frac{4,8t - 4}{0,2} = 24t - 20;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 24 \text{ рад/с}^2; \ \omega = 24 - 20 = 4 \text{ рад/с}.$$

Скорость точки M равна:

$$\vartheta_M = \omega R = 4 \cdot 0,6 = 24 \text{ м/с}.$$

Тангенциальное ускорение точки M:

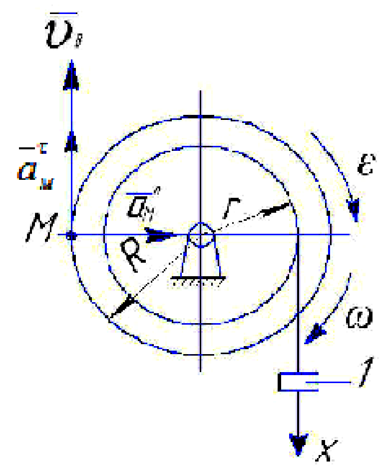


Рис. 15

$$a_\tau = \varepsilon R = 24 \cdot 0,6 = 14,4 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки *M*:

$$a_n = \omega^2 R = 4^2 \cdot 0,6 = 9,6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^\tau\right)^2 + \left(a_M^n\right)^2} = \sqrt{14,4^2 + 9,6^2} = 17,31 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки *M* можно найти по формуле:

$$a_M = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \; h = R = 0,6м,$$

$$a_M = 0,6\sqrt{24^2 + 4^4} = 17,31 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:

$$\omega = 4 \text{ рад/с}, \; \varepsilon = 24 \text{ рад/с}^2, \; \vartheta_M = 2,4 \text{ м/с}, \; a_M = 17,31 \text{ м/с}^2.$$

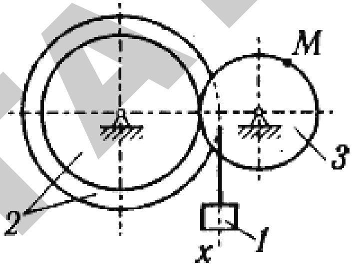
Вопросы для повторения

1. Какое движение твердого тела называют поступательным?
2. Сформулируйте основную теорему поступательного движения твердого тела.
3. Какое движение твердого тела называют вращательным?
4. Как определить угловые скорость и ускорения твердого тела?
5. Как направлены векторы угловые скорости и ускорения при ускоренном и замедленном вращении?
6. Имеет ли точка твердого тела ускорение при равномерном вращении?

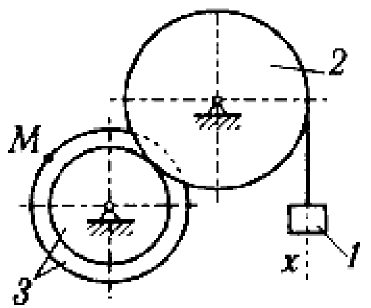
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* определить скорость, а также тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки *M* механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен *s*. Схемы механизмов показаны на рисунке, необходимые для расчета данные:

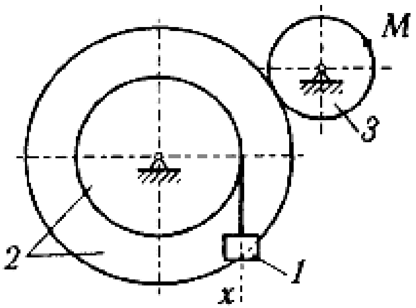
$R_2 = 60$ см, $r_2 = 45$ см, $R_3 = 36$ см, уравнение движения груза *1* $x = 10 + 100t^2 (x - \text{см}, \; t - \text{с})$, $s = 0,5$ м.



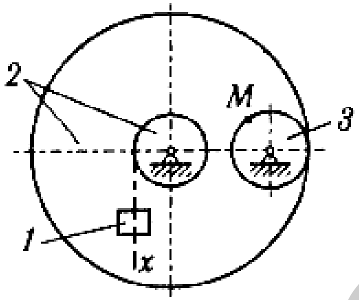
2. По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* $x = 80t^2 (x - \text{см}, \; t - \text{с})$ определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки *M* механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен $s = 0,1$ м. Схемы механизмов показаны на рисунке, необходимые для расчета данные: $R_2 = 80$ см, $R_3 = 60$ см, $r_3 = 36$ см.



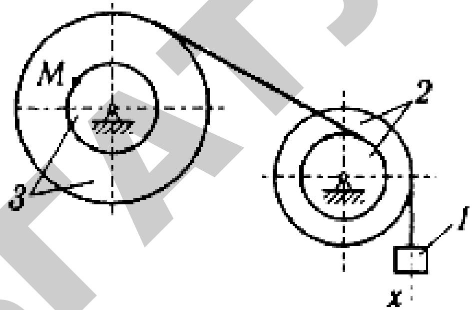
3. По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* $x = 5 + 60t^2 (x - \text{см}, \; t - \text{с})$ определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки *M* механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен $s = 0,5$ м. Схемы механизмов показаны на рисунке, необходимые для расчета данные: $R_2 = 100$ см, $r_2 = 60$ см, $R_3 = 30$ см.



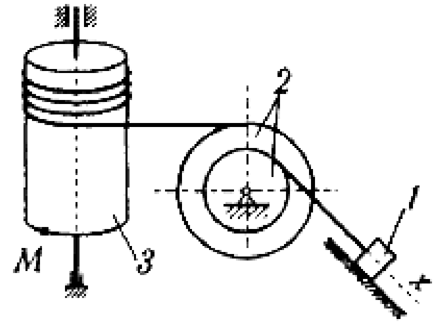
4. По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* $x = 4 + 30t^2 (x - \text{см},\ t - \text{с})$ определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки M механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен $s = 0{,}5$ м. Схемы механизмов показаны на рисунке, необходимые для расчета данные: $R_2 = 35$ см, $r_2 = 10$ см, $R_3 = 10$ см.



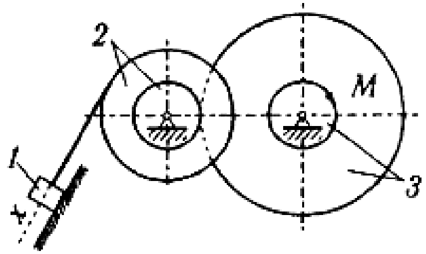
5. По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* $x = 90t^2 (x - \text{см},\ t - \text{с})$ определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки M механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен $s = 0{,}2$ м. Схемы механизмов показаны на рисунке, необходимые для расчета данные: $R_2 = 30$ см, $r_2 = 15$ см, $R_3 = 40$ см, $r_3 = 20$ см.



6. По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* $x = 5 + 60t^2 (x - \text{см},\ t - \text{с})$ определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки M механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен $s = 0{,}2$ м. Схемы механизмов показаны на рисунке, необходимые для расчета данные: $R_2 = 30$ см, $r_2 = 15$ см, $R_3 = 20$ см.

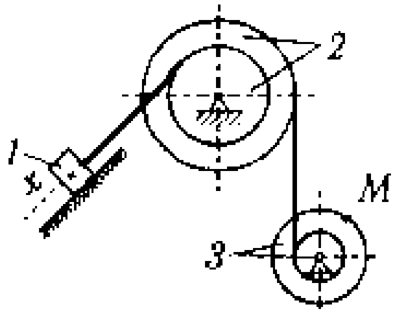


7. По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* $x = 3 + 30t\ (x - \text{см},\ t - \text{с})$ определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки M механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен $s = 0{,}6$ м. Схемы механизмов показаны на рисунке, необходимые для расчета данные: $R_2 = 25$ см, $r_2 = 20$ см, $R_3 = 50$ см, $r_3 = 25$ см.



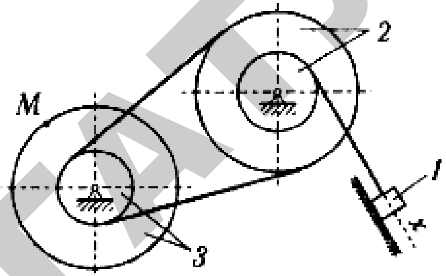
8. По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* $x = 7 + 40t$ (x – см, t – с) определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки *M* механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен $s = 0{,}6$ м. Схемы механизмов показаны на рисунке, необходимые для расчета данные:

$R_2 = 40$ см, $r_2 = 30$ см, $R_3 = 30$ см, $r_3 = 15$ см.

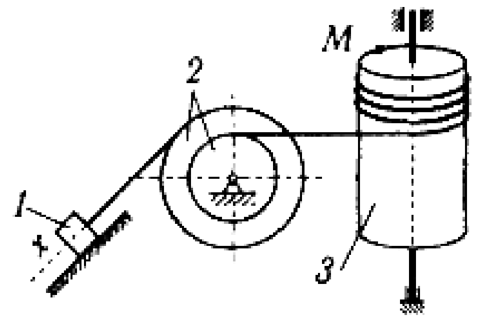


9. По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* $x = 50t^2$ (x – см, t – с) определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки *M* механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен $s = 0{,}4$ м. Схемы механизмов показаны на рисунке, необходимые для расчета данные:

$R_2 = 40$ см, $r_2 = 20$ см, $R_3 = 40$ см, $r_3 = 15$ см.



10. По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза *1* $x = 2 + 50t$ (x – см, t – с) определить скорость, а также касательное, нормальное и полное ускорения точки *M* механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен $s = 0{,}5$ м. Схемы механизмов показаны на рисунке, необходимые для расчета данные: $R_2 = 50$ см, $r_2 = 20$ см, $R_3 = 60$ см.



3.3. Определение скоростей и ускорений в случаях, когда вращающееся тело входит в состав различных механизмов

Рассмотрим механизмы с поступательным и вращательным движением звеньев. Решение задачи начинают с определения скоростей точек того звена, для которого движение задано. Затем рассматривают звено, которое присоединено к первому звену и т. д. В результате определяют скорости точек всех звеньев механизма. В такой же последовательности определяют и ускорения точек.

Передача вращения от одного вращающегося тела, называемого ведущим, к другому, называемому ведомым, может осуществляться при помощи фрикционной или зубчатой передачи (рис. 16).

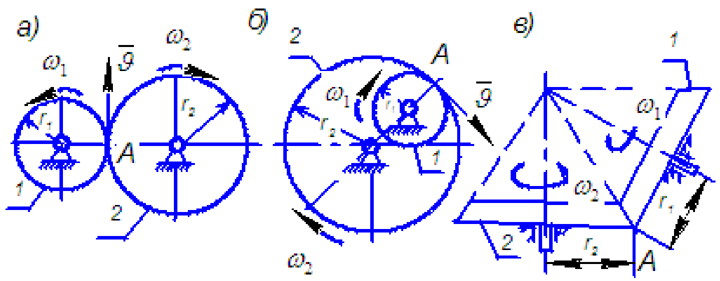


Рис. 16

Во фрикционной передаче вращение передается вследствие действия силы трения в месте контакта соприкасающихся колес, в зубчатой передаче – от зацепления зубьев. Оси вращения ведущего и ведомого колес могут быть параллельными (рис. 16, *а*, *б*) или пересекаться (рис. 16, *в*). В рассмотренных случаях линейные скорости точек *А* соприкасания колес одинаковы, их модули определяются так:

$$\upsilon = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2. \tag{41}$$

Отсюда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{42}$$

То есть угловые скорости колес фрикционной или зубчатой передачи обратно пропорциональны радиусам колес.

При преобразовании вращательного движения в поступательное (или наоборот) часто используют зацепление зубчатого колеса с зубчатой рейкой (рис. 17). Для этой передачи выполняется условие: $\upsilon = \omega r$.

Кроме фрикционной и зубчатой передач, существует передача вращения при помощи гибкой связи (ремня, троса, цепи) (рис. 18).

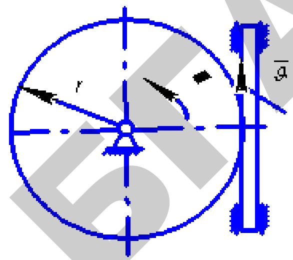


Рис. 17

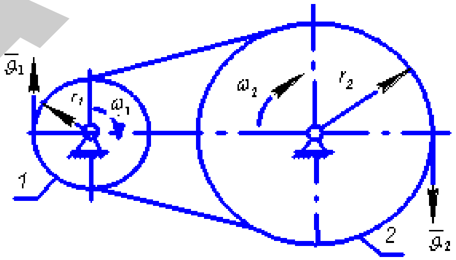


Рис. 18

Так как модули скоростей всех точек ремня одинаковы и ремень не скользит по поверхностям шкивов, то соотношения (41) и (42) относятся и к ременной передаче.

Задача 1

В механизме домкрата при вращении рукоятки *ОА* шестерни *1*, *2*, *3*, *4*, *5* приводят в движение зубчатую рейку *ВС* домкрата (рис. 19).

Определить скорость рейки, если рукоятка *ОА* делает 30 оборотов в минуту (n = 30 об/мин). Числа зубцов шестерен: Z_1 = 6, z_2 = 24, z_3 = 8, z_4 = 32; радиус пятой шестерни R_5 = 4 см.

Решение. Так как рукоятка *ОА* жестко соединена с шестерней *1*, то последняя делает тоже 30 об/мин или

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 30}{30} = \pi\ [1/\text{с}].$$

Модули скоростей точек соприкасания зубчатых колес *1* и *2* одинаковы для точек обоих колес и определяются по формуле (42).

$$\upsilon_{1,2} = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \cdot$$

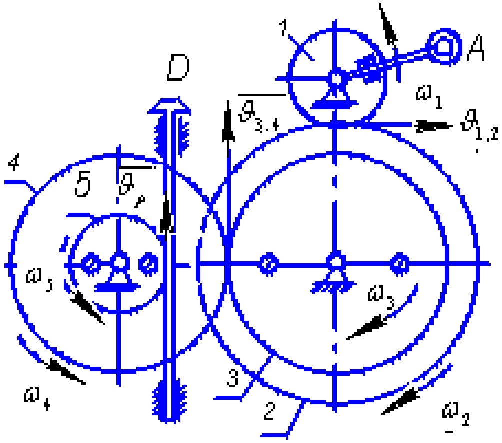


Рис. 19

Отсюда $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1}$ (см. также (42)).

Так как числа зубьев пропорциональны радиусам колес, то $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Отсюда $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{z_1}{z_2}$.

Шестерни *2* и *3* жестко соединены между собой, поэтому

$$\omega_3 = \omega_2 = \omega_1 \frac{z_1}{z_2}.$$

Для находящихся в зацеплении колес *3* и *4* на основании (2.9) можно записать

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{z_3}{z_4}.$$

Отсюда

$$\omega_4 = \omega_3 \frac{z_3}{z_4} = \omega_1 \frac{z_1}{z_2}\frac{z_3}{z_4}.$$

Шестерни *4* и *5* жестко соединены между собой, поэтому

$$\omega_5 = \omega_4 = \omega_1 \frac{z_1}{z_2}\frac{z_3}{z_4}.$$

Модули скоростей точек соприкосновения зубчатой рейки *BC* и шестерни *5* одинаковы, поэтому

$$\vartheta_p = \omega_5 r_5 = \omega_1 \frac{z_1}{z_2}\frac{z_3}{z_4} r_5,$$

или

$$\vartheta_p = \pi \frac{6}{24}\frac{8}{32} 4 = 0,78 \text{ см/с}.$$

Тема 4. **ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

4.1. Уравнения плоского движения твердого тела

Плоским называют такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Из определения следует, что траектории всех точек тела находятся в параллельных плоскостях, которые, в свою очередь, параллельны одной и той же неподвижной плоскости. Поэтому плоское движение тела называют также плоскопараллельным. Плоское движение твердого тела имеет большое значение в технике, так как звенья многих механизмов и машин совершают движение этого вида. Рассмотрим в качестве примера кривошипно-ползунный механизм (рис. 20).

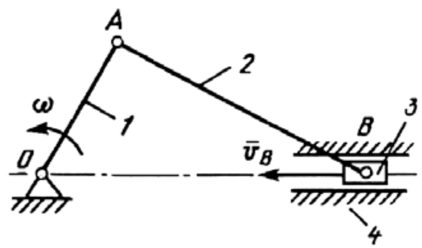


Рис. 20

Звено *1* — кривошип совершает вращательное движение; звено *2* — шатун совершает плоское движение; звено *3* — ползун совершает поступательное движение; звено *4* — стойка остается неподвижной.

При изучении плоского движения, как и любого другого, необходимо рассмотреть способы задания этого движения, а также приемы вычисления скоростей и ускорений точек тела.

Плоское движение твердого тела можно изучать по движению одного лишь сечения — плоской фигуры S в ее плоскости.

Зададим положение плоской фигуры S относительно системы координат xOy, лежащей в плоскости этой фигуры (рис. 21).

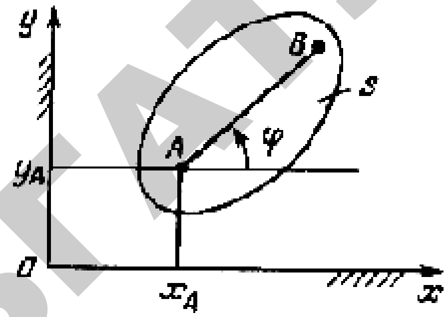


Рис. 21

Оно вполне определяется положением отрезка AB, скрепленного с фигурой S. В свою очередь, положение отрезка AB зависит от координат точки A (x_A, y_A) и угла φ, который составляет с осью x отрезок AB. Точку A плоской фигуры S, выбранную для определения положения отрезка AB, называют полюсом.

Таким образом, необходимо задать три функциональные зависимости:

$$x_A = x_A(t);\ y_A = y_A(t);\ \varphi = \varphi(t), \tag{42}$$

которые и будут уравнениями движения плоской фигуры или уравнениями плоского движения твердого тела.

Из уравнений (42) следует, что плоское движение фигуры в ее плоскости может быть осуществлено сочетанием поступательного движения ее полюса с вращательным движением вокруг полюса.

Заметим, что поступательная часть движения плоской фигуры зависит от выбора полюса, а угловая скорость и угловое ускорение тела не зависят от выбора полюса.

4.2. Определение скоростей точек твердого тела при плоском его движении

Зависимость между скоростями точек плоской фигуры, определяющей плоское движение твердого тела, устанавливается следующей теоремой.

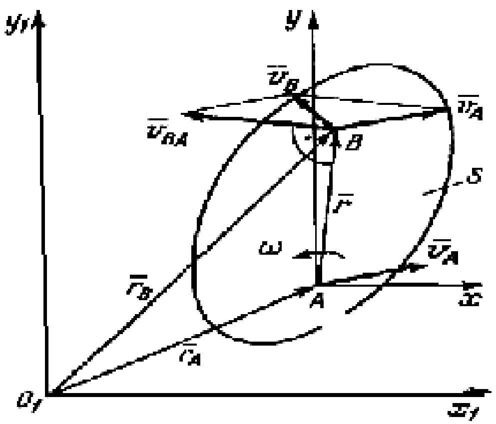


Рис. 22

Теорема о скоростях точек плоской фигуры. Скорость любой точки плоской фигуры при ее плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки во вращательном е движении этой фигуры вокруг полюса.

Рассмотрим перемещение плоской фигу ры S плоскости неподвижной системы координат $O_1\,x_1y_1$ (рис. 22)

Примем в качестве полюса произвольную точку A, в которую поместим начало подвижной системы координат Axy. Подвижная система координат перемещается поступательно вместе с полюсом — точкой A относительно неподвижной системы координат. Положение точки A зададим с помощью радиуса-вектора $\bar{r}_A$. Радиус-вектор $\bar{r}_B$, определяющий положение произвольной точки B плоской фигуры, скорость которой требуется найти, можно задать при помощи суммы двух векторов:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}. \qquad (43)$$

Эта зависимость сохраняется во все время движения. Возьмем производную по времени от левой и правой частей векторного равенства (43):

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}.$$

Очевидно, что $\dfrac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{\vartheta}_A;\quad \dfrac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{\vartheta}_B$.

Вектор $\overline{AB}$ соединяет две точки A и B плоской фигуры и, следовательно, при движении фигуры S не изменяется по величине, т. е. $\overline{AB} = \text{const}$. Значит, стоит задача отыскать производную от радиуса-вектора, изменяющего лишь свое направление. Решение задачи дается формулой Эйлера (40):

$$\frac{d\,\overline{AB}}{dt} = \bar{\omega} \times \overline{AB},$$

где $\bar{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения вектора $\overline{AB}$, следовательно, и плоской фигуры, с которой скреплен вектор $\overline{AB}$.

Окончательно

$$\vec{\vartheta}_B = \bar{\vartheta}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}. \qquad (44)$$

Рис. 23

Если ввести обозначение $\overline{\omega} \times \overline{r} = \overline{\vartheta}_{BA}$, то

$$\overline{\vartheta}_B = \overline{\vartheta}_A + \overline{\vartheta}_{BA}, \tag{45}$$

где $\overline{\vartheta}_{BA}$ — скорость точки *B* во вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса *A*.

Модуль вектора $\overline{\vartheta}_{BA}$

$$\vartheta_{BA} = \omega \cdot AB.$$

Вектор $\overline{\vartheta}_{BA}$ перпендикулярен к отрезку *AB*, который является радиусом для точки *B* в ее вращательной составляющей плоского движения и направлен согласно направлению вращения точки *B* по отношению к полюсу *A* (рис. 23).

Пример 3. Колесо радиуса $R = 0,4$ м катится по горизонтальному рельсу с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с (рис. 24). Определить скорость точки *M* обода колеса, если центр колеса имеет постоянную скорость $\omega_C = 0,8$ м/с.

Решение. Применим формулу (3). За полюс примем точку *C*, скорость которой известна:

$$\vec{\vartheta}_M = \vec{\vartheta}_c + \vec{\vartheta}_{MC}.$$

Вращательная скорость точки *M* относительно полюса *C* равна:

$$\vec{\vartheta}_{MC} = \omega MC = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с}.$$

Вектор $\vec{\vartheta}_{MC}$ перпендикулярен отрезку *MC* и направлен в соответствии с угловой скоростью. Поэтому вектор $\vec{\vartheta}_{MC}$ относительно полюса *C* должен показывать направление угловой скорости (рис. 24).

Так как $\vec{\vartheta}_{MC} \perp \vec{\vartheta}_C$, то

$$\vartheta_M = \sqrt{\vartheta_c^2 + \vartheta_{MC}^2} = \sqrt{(0,8)^2 + (0,8)^2} = 1,13 \text{ м/с};$$

$$\cos\left(\vec{\vartheta}_M, \hat{\ } \vec{\vartheta}_c\right) = \frac{\vartheta_c}{\vartheta_M} = \frac{0,8}{1,13} = 0,707;$$

$$< \vec{\vartheta}_M, \vec{\vartheta}_c >= 45^\circ.$$

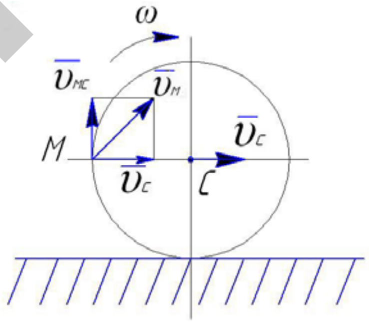


Рис. 24

Ответ: $\vartheta_M = 1,13$ м/с.

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела. Исходя из теоремы (11.4) можно получить ряд других, более простых и удобных методов определения скоростей точек плоской фигуры (или тел). Один из таких методов предлагает следующая теорема:

Проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

Рассмотрим какие-нибудь две точки *A* и *B* плоской фигуры (или тела).

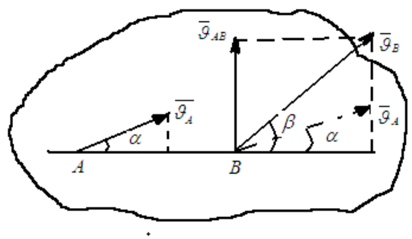


Рис. 25

Принимая точку A за полюс (рис. 25) получаем по формуле (45), что $\overline{\vartheta}_B = \overline{\vartheta}_A + \overline{\vartheta}_{AB}$. Отсюда, проектируя обе части равенства на ось, направленную на AB, и, учитывая, что вектор $\overline{\vartheta}_{AB}$ перпендикулярен AB находим

$$\overline{\vartheta}_B \cos\beta = \overline{\vartheta}_A \cos\alpha . \tag{46}$$

Откуда, если знаем $\overline{\vartheta}_B$, $\overline{\vartheta}_A$ определяем по формуле

$$\overline{\vartheta}_B = \frac{\overline{\vartheta}_A \cos\alpha}{\cos\beta}. \tag{47}$$

4.3. Мгновенный центр скоростей

Другой простой и наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

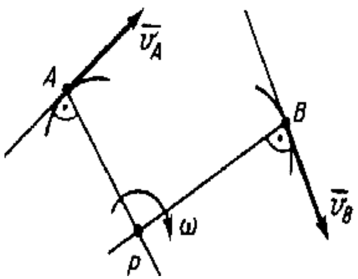


Рис. 26

Легко убедиться, что если фигура движется не поступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$, не параллельные друг другу (рис. 26). Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров

A_a к вектору $\overline{\vartheta}_A$ и B_b к вектору $\overline{\vartheta}_B$, b и будет мгновенным центром скоростей, так что $\overline{\vartheta}_P = 0$. В самом деле, если допустить, что $\overline{\vartheta}_P \neq 0$, то по теореме о проекциях скоростей вектор $\overline{\vartheta}_P$ должен быть одновременно перпендикулярен и AP (так как $\overline{\vartheta}_A \perp AP$), и BP (так как $\overline{\vartheta}_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю (например, для точки a проекция $\overline{\vartheta}_B$ на линию B_a не равна нулю и, следовательно, $\overline{\vartheta}_a \neq 0$ и т.д.).

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то по формуле (45) скорость точки A будет $\overline{\vartheta}_A = \overline{\vartheta}_P + \overline{\vartheta}_{PA} = \overline{\vartheta}_{PA}$, так как $\overline{\vartheta}_P = 0$. Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры. Следовательно, *скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей.* При этом

$$\vartheta_A = \omega \cdot PA\,(\overline{\vartheta}_A \perp PA);$$

$$\vartheta_B = \omega \cdot PB \quad (\overline{\vartheta}_B \perp PB) \text{ и т. д.} \tag{48}$$

Из равенства (48) следует еще, что

$$\frac{\vartheta_A}{PA} = \frac{\vartheta_B}{PB}, \tag{49}$$

т. е. что *скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.*

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. *Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры* (или траектории этих точек); мгновенный

центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2. *Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой ее точки B*. Тогда, восстановив из точек A и B перпендикуляры к $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$, построим мгновенный центр скоростей P и по направлению $\overline{\vartheta}_A$ определим направление поворота фигуры. После этого, зная $\overline{\vartheta}_A$, найдем по формуле(49) скорость $\overline{\vartheta}_M$ любой точки M плоской фигуры. Направлен вектор $\overline{\vartheta}_M$ перпендикулярно PM в сторону поворота фигуры.

3. *Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей P*:

$$\omega = \frac{\vartheta_B}{PB}, \qquad (50)$$

что видно из формул (48).

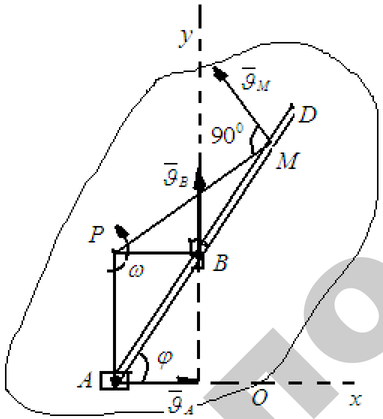


Рис. 27

Найдем еще другое выражение для ω.

Из равенств следует, что $\vartheta_{BA} = \left|\overline{\vartheta}_B\right| - \left|\overline{\vartheta}_A\right|$ и $\vartheta_{BA} = \omega \cdot AB$, откуда

$$\omega = \frac{\left|\overline{\vartheta}_B - \overline{\vartheta}_A\right|}{AB} = \frac{\left|\overline{\vartheta}_B + (-\overline{\vartheta}_A)\right|}{AB}. \qquad (51)$$

Когда $\vartheta_A = 0$ (точка A — мгновенный центр скоростей), формула (51) переходит в (50).

Равенства (50) и (51) определяют одну и ту же величину, так как по доказанному поворот плоской фигуры вокруг точки A или точки P происходит с одной и той же скоростью ω.

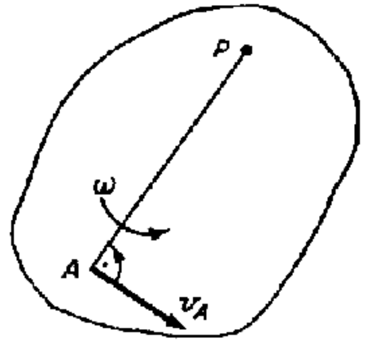


Рис. 28

Рассмотрим частные случаи определения положения мгновенного центра скоростей.

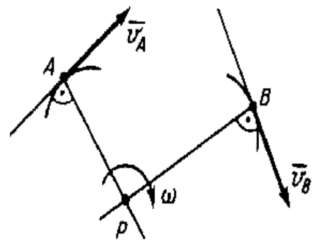


Рис. 29

1. Известна скорость одной из точек плоской фигуры ϑ_A и угловая скорость этой фигуры ω (рис. 28).

В этом случае мгновенный центр скоростей находят следующим образом. Восставим в точке *A* перпендикуляр к вектору скорости $\overline{\vartheta}_A$ и отложим на нем отрезок *AP*, длину которого определим по формуле (48).

2. Известны направления линий действия векторов скоростей $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$ (рис. 28). Проводя перпендикуляры через точки *A* и *B* к этим направлениям, на пересечении перпендикуляров находим мгновенный центр скоростей. Направление и модуль угловой скорости можно определить, зная модуль и направление скорости хотя бы одной точки. Например, $\omega = \vartheta_A / AP$.

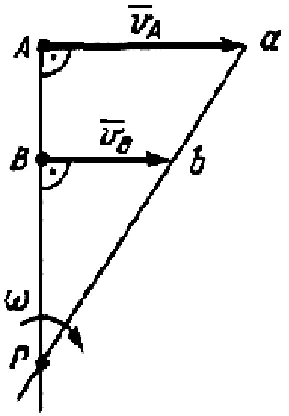


Рис. 30

3. Известны скорости двух точек плоской фигуры $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$, причем векторы $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$ параллельны один другому, направлены в одну сторону и перпендикулярны к линии, соединяющей точки *A* и *B* (рис. 30). Ранее была установлена пропорция $\overline{\vartheta}_A / \overline{\vartheta}_B = AP / BP$, которая показывает возможность определения мгновенного центра скоростей из подобия треугольников *AaP* и *BaP*, получаемых, если через концы векторов скоростей *a* и *b* провести прямую до пересечения с продолжением прямой *AB*.

4. Известны скорости двух точек плоской фигуры $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$, причем векторы $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$ параллельны один другому, направлены в противоположные стороны и перпендикулярны к линии, соединяющей точки *A* и *B* (рис. 31). Этот случай сводится к предыдущему (3).

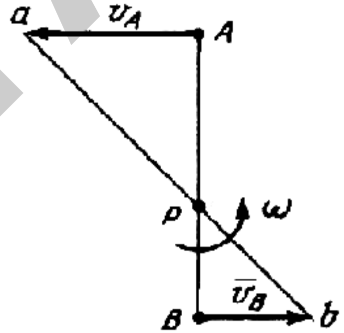


Рис. 31

5. Известны скорости $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$ двух точек плоской фигуры, причем векторы $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$ параллельны один другому и неперпендикулярны к линии, соединяющей точки *A* и *B* (рис. 32).

Точка пересечения перпендикуляров к векторам $\overline{\vartheta}_A$ и $\overline{\vartheta}_B$ находится в бесконечности, т. е. $AP = \infty$.

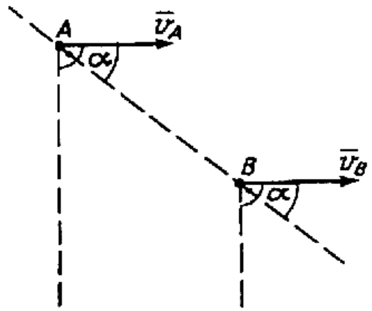


Рис. 32

Отсюда

$$\omega = \frac{\overline{\vartheta}_A}{AP} = \frac{\overline{\vartheta}_A}{\infty} = 0.$$

Далее запишем основную формулу для определения скорости точки B, выбрав за полюс точку A:

$$\overline{\vartheta}_B = \overline{\vartheta}_A + \overline{\vartheta}_{BA},$$

и поскольку

$\vartheta_B = \omega \cdot AB = 0$, то $\overline{\vartheta}_A = \overline{\vartheta}_B$.

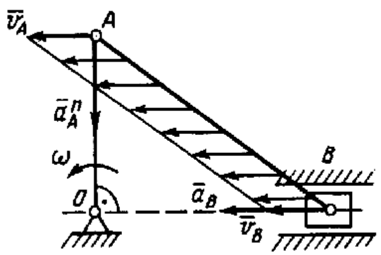


Рис. 33

Аналогичный результат можно получить с использованием теоремы о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на линию, соединяющую эти точки.

Скорости всех точек плоской фигуры в рассматриваемом случае одинаковы для данного момента времени. Такое ее движение называют мгновенно поступательным. Например, при положении шатуна AB кривошипно-ползунного механизма OAB, показанном на рис. 33, скорости всех точек шатуна одинаковы, что легко устанавливается из теоремы о проекциях этих скоростей на линию AB. Ускорения же точек шатуна различны. Действительно, при ω=const ускорение точки A равно $a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot OA$ и направлено от точки A к точке O. Ускорение же точки B в любом случае направлено по горизонтали. Траектория точки A — окружность, траектория точки B — прямая.

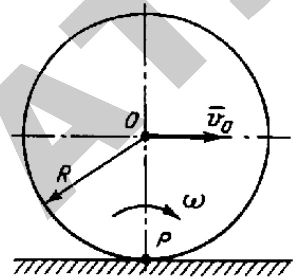


Рис. 34

6. При качении плоской округлой фигуры по некоторой линии без проскальзывания мгновенный центр скоростей находится в точке их контакта. На рис. 34 показано колесо, перекатывающееся без скольжения по прямой. Мгновенный центр скоростей находится в точке P.

При известной скорости центра колеса $\overline{\vartheta}_0$ его угловая скорость определится по формуле

$$\omega = \vartheta_0 / R.$$

Дифференцируя эту формулу по времени, получаем угловое ускорение колеса

$$\varepsilon = a_0 / R,$$

где $a_0 = d\vartheta_0 / dt$.

Пример 12. В положении механизма, схема которого приведена на рис. 35, определить угловую скорость шатуна AB и скорости точек B и C, если $\omega_{OA} = 2$ рад/с, $OA = 0{,}2$ м, $AB = 1{,}6$ м, $BC = 0{,}8$ м, $h = 0{,}8$ м.

Решение. Найдем скорость точки A:

$$\vartheta_A = \omega_{OA} = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4 \text{ м/с}, \ \overline{\vartheta_A} \perp \overline{OA}.$$

Скорость ползуна B должна быть направлена по прямой KB.

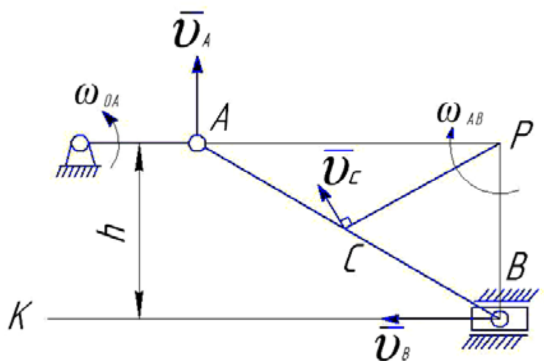


Рис. 35

Мгновенный центр шатуна *AB* находится в точке *P* пересечения перпендикуляров, восстановленных к направлениям векторов скоростей точек *A* и *B*. Угловая скорость шатуна *AB* равна:

$$\omega_{AB} = \frac{\bar{\vartheta}_A}{AP} = \frac{\bar{\vartheta}_c}{CP} = \frac{\vartheta_B}{BP}.$$

Определим величины *AP*, *BP*, *CP*.

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{1{,}6^2 - 0{,}8^2} = 1{,}39 \text{ м}; \;\; BP = h = 0{,}8 \text{ м};$$

$$\cos\angle PBC = \frac{h}{AB} = \frac{0{,}8}{1{,}6} = 0{,}5, \;\; \angle PBC = 60^\circ.$$

Тогда ΔPBC равносторонний:

$$CP = BP = BC = 0{,}8 \text{ м.}$$

Находим:

$$\omega_{AB} = \frac{\vartheta_A}{AP} = \frac{0{,}4}{1{,}39} = 0{,}29 \text{ рад/с};$$

$$\vartheta_B = \omega_{AB} BP = 0{,}29 \cdot 0{,}8 = 0{,}23 \text{ м/с};$$

$$\vartheta c = \omega_{AB} CP = 0{,}29 \cdot 0{,}8 = 0{,}23 \text{ м/с}.$$

Направление угловой скорости шатуна ω_{AB} определяется по направлению вращения вектора ϑ_A скорости точки *A* относительно мгновенного центра скоростей. Угловая скорость шатуна *AB* на-

правлена по часовой стрелке. Скорости точек *B* и *C* должны показывать такое же направление. Для построения вектора ϑ_C восстанавливаем перпендикуляр к отрезку *CP* и направляем вектор ϑ_C в соответствии с направлением ω_{AB}.

Ответ: $\omega_{AB} = 0{,}29$ рад/с, $\vartheta_B = \vartheta_C = 0{,}23$ м/с.

4.4. Ускорения точек тела при плоском его движении

Рассмотрим движение плоской фигуры в плоскости координатных осей $Ox_1 y_1 м$ (рис. 36).

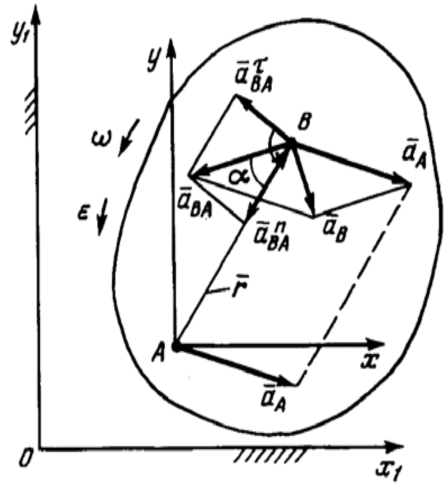


Рис. 36

Примем в качестве полюса точку *A,* ускорение которой $\bar{a}_A$ известно. В точке *A* поместим начало подвижной системы координат *Axy*, движущейся поступательно.

Кинематические параметры вращательной части движения фигуры вокруг полюса также известны: $\omega = \dot{\varphi}, \; \varepsilon = \ddot{\varphi}$, где $\varphi = \varphi(t)$.

Таким образом, известны ускорение полюса $\bar{a}_A$, угловая скорость ω и угловое ускорение фигуры ε. Требуется рассчитать ускорение некоторой точки *B*, расстояние которой до полюса *A* также известно.

По теореме о скоростях точек плоской фигуры скорость точки B в соответствии с формулой (44) составляет

$$\overline{\vartheta}_B = \overline{\vartheta}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB}.$$

Дифференцируя ее по времени и учитывая изменения векторных величин относительно неподвижной системы отсчета Ox_1y_1, получим

$$\frac{d\overline{\vartheta}_B}{dt} = \frac{d\overline{\vartheta}_A}{dt} + \frac{d\left(\overline{\omega} \times AB\right)}{dt} = \frac{d\overline{\vartheta}_A}{dt} + \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times AB + \overline{\omega} \times \frac{AB}{dt},$$

где

$$\frac{d\overline{\vartheta}_B}{dt} = \overline{a}_B; \quad \frac{d\overline{\vartheta}_A}{dt} = \overline{a}_A; \quad \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{\varepsilon}; \quad \frac{dAB}{dt} = \overline{\vartheta}_{BA}.$$

Таким образом,

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{AB} + \overline{\omega} \times \overline{\vartheta}_{BA}. \qquad (50)$$

Два последних слагаемых в формуле (50) представляют собой составляющие полного ускорения точки B во вращательном движении фигуры вокруг полюса A, а именно:

$\overline{\varepsilon} \times AB = \overline{a}^{\tau}_{BA}$ — касательное ускорение точки B во вращательном движении фигуры вокруг точки A;

$\overline{\omega} \times \overline{\vartheta}_{BA} = \overline{a}^{n}_{BA}$ — нормальное ускорение точки B во вращательном движении фигуры вокруг точки A.

Окончательно

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} = \overline{a}_A + \overline{a}^{\tau}_{BA} + \overline{a}^{n}_{BA}, \qquad (51)$$

где $\overline{a}_{BA}$ — ускорение точки B во вращательном движении фигуры вокруг точки A;

$$\overline{a}_{BA} = \overline{a}^{\tau}_{BA} + \overline{a}^{n}_{BA}.$$

Таким образом,

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} \qquad (52)$$

т. е. имеет место следующая теорема.

Теорема об ускорении точек плоской фигуры. Ускорение какой-либо точки плоской фигуры при плоском ее движении равно векторной сумме ускорения некоторой другой точки, принятой за полюс, и ускорения рассматриваемой точки в вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса. Модуль касательного ускорения, как известно, вычисляют по формуле

$$\left|\overline{a}^{\tau}_{BA}\right| = \varepsilon r.$$

Касательное ускорение $\overline{a}^{\tau}_{BA}$ направлено перпендикулярно к отрезку AB (так как $\left|AB\right| = \text{const}$) в сторону, определяемую угловым ускорением ε.

Модуль нормального ускорения

$$\left|\overline{a}^{n}_{BA}\right| = \omega^2 r.$$

Направлено нормальное ускорение по линии BA от точки B к точке A как к центру вращения.

Возвратимся к рис. 36 и покажем слагаемые векторного уравнения (52) с целью определения ускорения точки B. Модуль ускорения $\overline{a}_{BA}$ равен:

$$a_{BA} = \sqrt{\left(a^{\tau}_{BA}\right)^2 + \left(a^{n}_{BA}\right)^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Вектор ускорения $\overline{a}_{BA}$ составляет с отрезком AB угол α, тангенс которого

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\left|\vec{a}^{\,\tau}_{BA}\right|}{a^n_{BA}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (53)$$

Из формулы (53) следует, что угол α для всех точек плоской фигуры одинаков и не зависит от выбора полюса. Ускорение $\bar{a}_B$ можно определить по уравнению (51) геометрическим и аналитическим методами.

Пример 13. В положении механизма, схема которого приведена на рис. 34, определить ускорение точек *B* и *C*, если $\omega_{OA} = 2$ рад/с, $OA = 0{,}2$ м, $AB = 1{,}6$ м, $BC = 0{,}8$ м, $h = 0{,}8$ м.

Решение. За полюс выберем точку *A*, так как ускорение этой точки можно найти:

$$\vec{a}_A = \vec{a}^{\,\tau}_A + \vec{a}^{\,n}_A,$$

$$a^\tau_A = \varepsilon AO = 0.$$

Так как кривошип *OA* вращается равномерно, то ω = const = ε = = ω = 0.

$$a^n_A = \omega^2_{OA} OA = 2^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overrightarrow{a^n_A}$ направлен по *AO* от точки *A* к точке *O*.

$$\vec{a}_B = \overrightarrow{a_A} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA} + \vec{a}^{\,n}_{BA}. \; (*)$$

Находим $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$ и $\vec{a}^{\,n}_{BA}$:

$$\vec{a}^{\,\tau}_{BA} = \left|\varepsilon_{AB}\right| AB.$$

Так как ε_{AB} неизвестно, то зададим направление вектору $\overrightarrow{a^\tau_{BA}}$ учитывая, что $\overrightarrow{a^\tau_{BA}} \perp \overrightarrow{BA}$.

$$a^n_{BA} = \omega^2_{AB} AB = 0{,}29^2 \cdot 1{,}6 = 0{,}135 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\overrightarrow{a^n_A}$ направлен по *BA* от точки *B* к полюсу *A*. Проектируем выражение (*) на выбранные оси (*X*, *Y*).

$$\text{Ось } X\text{: } a_B \cos 30^\circ = a^n_A \cos 30^\circ + a^n_{BA}.$$

$$\text{Ось } Y\text{: } -a_B \cos 60^\circ = a^\tau_{BA} - a^n_A \cos 60^\circ.$$

Находим

$$a_B = \frac{a^n_A \cos 30^\circ + a^n_{BA}}{\cos 30^\circ} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}87 + 0{,}135}{0{,}87} = 0{,}96 \text{ м/с}^2;$$

$$a^\tau_{BA} = -a_B \cos 60^\circ + a^n_A \cos 60^\circ = -0{,}96 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 = -0{,}08 \text{ м/с}^2.$$

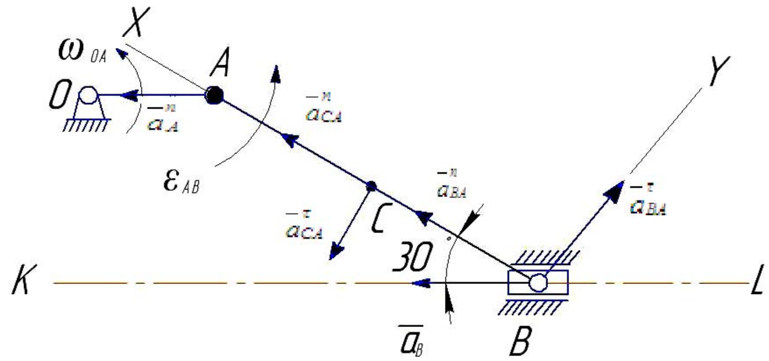


Рис. 37

Минус показывает, что вектор $\overrightarrow{a_{BA}^{\tau}}$ направлен в сторону, противоположную направлению, выбранному на рис. 37. Определим угловое ускорение шатуна AB:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{BA}^{\tau}\right|}{AB} = \frac{0,08}{1,6} = 0,05 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ε_{AB} будет по часовой стрелке. Определим ускорение точки C, выбрав за полюс точку A. Вектор $\vec{a}_c$ разложим по выбранным осям координат:

$$\overrightarrow{a_C} = \vec{a}_{cx} + \vec{a}_{cy} = \vec{a}_A + \vec{a}_{ca}^{\,\tau} + \vec{a}_{ca}^{\,n}. \ (**)$$

Находим $\overrightarrow{a_{CA}^{вр}}$ и $\overrightarrow{a_{CA}^{ц}}$:

$$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} AC = 0,05 \cdot 0,8 = 0,04 \text{ м/с}^2, \ \vec{a}_{CA}^{\,\tau} \perp \overline{CA}$$

и направлен в соответствии с ε_{AB};

$$a_{CA}^{n} = \omega_{AB}^2 AC = 0,29^2 \cdot 0,8 = 0,068 \text{ м/с}^2,$$

вектор $\overrightarrow{a_{CA}^{n}}$ направлен по CA от точки C к полюсу A.

Проектируем выражение (**) на оси координат:

$$a_{CX} = a_A^n \cos 30^\circ + a_{CA}^n = 0,8 \cdot 0,87 + 0,068 = 0,764 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CY} = -a_A^n \cos 60^\circ - a_{CA}^{\tau} = -0,8 \cdot 0,5 - 0,04 = -0,44 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} = \sqrt{(0,764)^2 + (-0,44)^2} = 0,88 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_в = 0,96$ м/с^2, $a_c = 0,88$ м/с^2.

4.5. Мгновенный центр ускорений

Мгновенным центром ускорений называют точку плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Обозначим эту точку через Q.

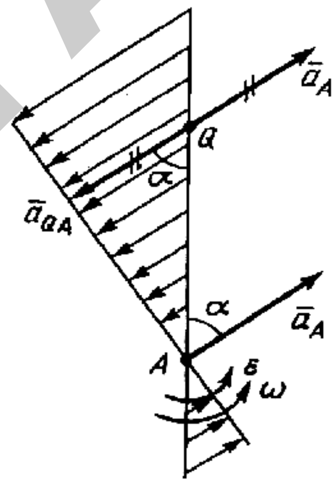


Рис. 38

Докажем существование и определим положение мгновенного центра ускорений. Пусть известно ускорение одной из точек плоской фигуры $\bar{a}_A$, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращения плоской фигуры. Обратимся к рис. 38.

Выбрав за полюс точку A, ускорение которой известно, запишем основную векторную формулу для определения ускорения точки Q:

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA}.$$

По определению $\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{a}_{QA}$, следовательно,

$$\bar{a}_A = -\bar{a}_{QA} \text{ и } a_A = a_{QA} \qquad (54)$$

Вектор $\bar{a}_{QA}$ — это ускорение точки Q (мгновенный центр ускорений) во вращательном движении фигуры вокруг полюса A. Следовательно, модуль этого вектора

$$a_{QA} = QA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$

По направлению вектор $\bar{a}_{QA}$ составляете с линией AQ угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Для выполнения условий (54) вектор $\bar{a}_A$ также должен составлять угол α с направлением AQ.

Так как $a_A = a_{QA} = QA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, то

$$QA = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}\,. \qquad (55)$$

Таким образом, для определения положения мгновенного центра ускорений (точки Q) необходимо вектор $\bar{a}_A$ ускорения точки A повернуть в сторону углового ускорения на угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ и на этом направлении отложить отрезок QA. Из доказательства следует, что мгновенный центр ускорений — единственная точка плоской фигуры, ускорение которой в рассматриваемый момент времени равно нулю.

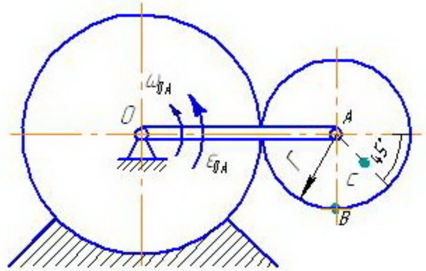
Вопросы для повторения

1. Какое движение плоского тела называется плоским?
2. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?

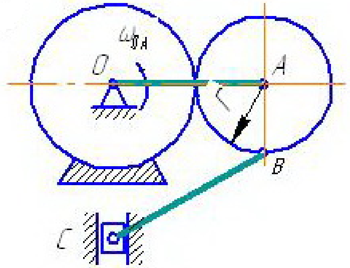
3. Что называется мгновенным центром скоростей?
4. Как определить ускорение любой точки плоской фигуры?
5. Сформулируйте теорему об ускорении точек плоской фигуры.
6. Какая точка называется мгновенным центром ускорения?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, если OA = 40 см, r = 15 см, AC = 8 см, $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 2$ с$^{-2}$, где ε_{OA}, ω_{OA} — угловое ускорение и угловая скорость кривошипа OA. Качение колес происходит без скольжения.

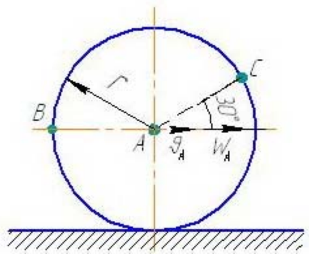


2. Найти для заданного положения механизма скорости точек A, B, C и угловые скорости всех его звеньев, если известны угловая скорость кривошипа $\omega_{OA} = 2{,}5$ с$^{-1}$, OA = 27 см, BC = 34 см, r = 12 см. Качение колес происходит без скольжения.



3. Определить скорость и ускорение точек B и C для заданного механизма.

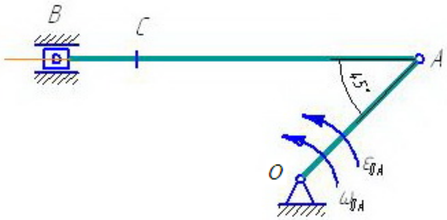
r = 50 см, $\vartheta_A = 50$ см/с, $a_A = 100$ см/с^2, где υ_A, a_A — скорость и ускорение точки A, r — радиус колеса. Качение колес происходит без скольжения.



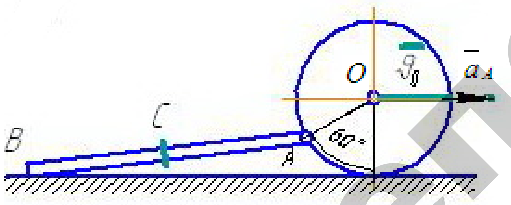
4. Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C.

$OA = 35$ см, $AB = 75$ см, $AC = 60$ см, $\omega_{OA} = 5\ \text{с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 10\ \text{с}^{-2}$.

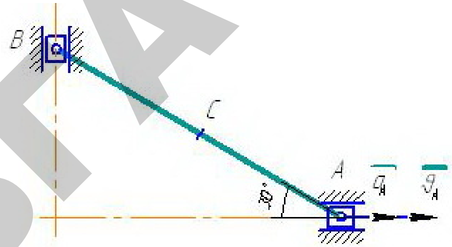
ε_{OA}, ω_{OA} — угловое ускорение и угловая скорость кривошипа OA.



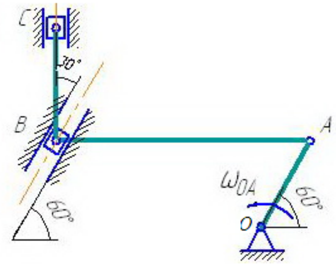
5. Определить скорости точек A, B, C механизма, изображенного на рисунке, и угловые скорости всех его звеньев, если $OA = 15$ см, $AB = 50$ см, $BC = 25$см, $\upsilon_O = 80$ см/с, где υ_O — скорость центра O. Качение колеса происходит без скольжения.



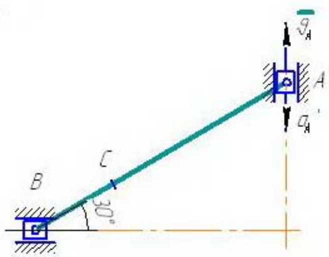
6. Для шатуна AB определить скорости и ускорения точек B и C, если известно, что $AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $\vartheta_A = 40$ см/с, $a_A = 20$ см/с^2. Где ϑ_A, a_A — скорость и ускорение точки A.



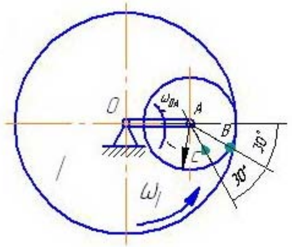
7. Найти скорости точек A, B, C данного механизма и угловые скорости всех его звеньев. $OA = 20$ см, $AB = 50$ см, $BC = 24$ см, угловая скорость кривошипа OA $\omega_{OA} = 1\ \text{с}^{-1}$.



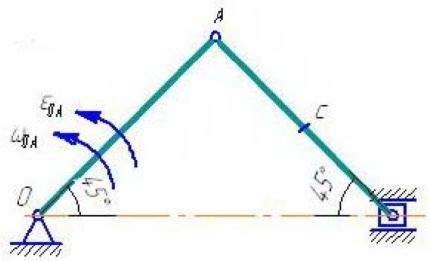
8. Для заданного механизма определить скорости и ускорения точек B и C, если $AB = 45$ см, $AC = 30$ см, $\vartheta_A = 20$ см/с, $a_A = 10$ см/с^2, ϑ_A, a_A — скорость и ускорение точки A.



9. Определить скорости и ускорения точек B и C колеса I, если угловая скорость колеса $\omega_I = 2{,}5$ см/с$^{-1}$, радиус колеса r равен 15 см, OA = 20 см, AC = 10 см, $\omega_{OA} = 1$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 0$ с$^{-2}$. Качение колес происходит без скольжения.



10. Для механизма, изображенного на рисунке определить скорости и ускорения точек B и C, если OA = 10 см, AB = 10 см, AC = 5 см, угловая скорость кривошипа OA $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, угловое ускорение кривошипа OA равно $\varepsilon_{OA} = 6$ с$^{-2}$.



Тема 5. **СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ**

5.1. Разложение сложного движения точки на составляющие

Во многих задачах механики приходится рассматривать движение точки по отношению к системе координат $Oxyz$, которая, в свою очередь, движется по отношению к другой системе координат $O_1x_1y_1z_1$, условно принятой за неподвижную (рис. 39). Обычно каждую из указанных систем координат связывают с некоторым телом и при этом получают две системы отсчета: подвижную и неподвижную. Введем следующие определения.

Движение точки относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1$ назовем *абсолютным*.

Движение точки относительно подвижной системы координат Oxy назовем относительным.

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной назовем переносным. Таким образом, переносное движение точки происходит вследствие движения самой подвижной системы координат.

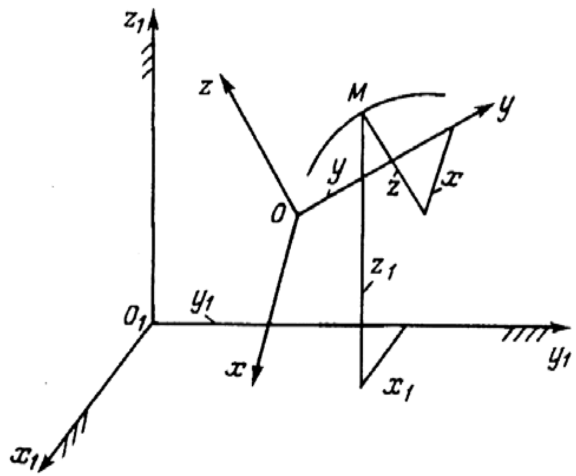


Рис. 39

Сложное движение называют еще составным, так как оно состоит из двух движений — относительного и переносного. Каждое из отмеченных движений обозначают соответствующим индексом: a — абсолютное движение, r — относительное, e — переносное. Соответственно, скорости и ускорения обозначают так: $\overline{\vartheta}_a$, $\overline{a}_a$, $\overline{\vartheta}_r$, $\overline{a}_r$, $\overline{\vartheta}_e$, $\overline{a}_e$. При абсолютном ускорении индекс a обычно опускают.

5.2. Теорема о сложении скоростей (правило параллелограмма скоростей)

Докажем следующую теорему о скоростях точки при сложном ее движении.

Теорема о сложении скоростей. При сложном движении точки ее абсолютная скорость равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей. Обратимся к рис. 40.

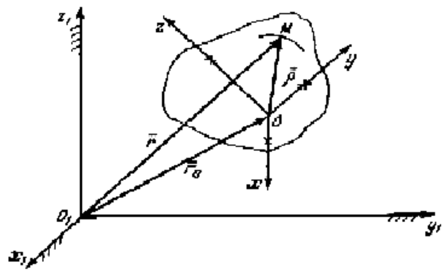


Рис. 40

Положение точки M, совершающей сложное движение, определим радиусом-вектором $\overline{r}$, который, в свою очередь, равен сумме двух векторов:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{\rho}, \tag{56}$$

где $\overline{r}$ — радиус-вектор точки M в неподвижной системе координат;

$\overline{r}_0$ — радиус-вектор начала подвижной системы координат;

$\overline{\rho}$ — радиус-вектор точки M в подвижной системе координат.

Продифференцируем соотношение (56) по времени. Имеем

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}_0}{dt} + \frac{d\overline{\rho}}{dt}.$$

Здесь абсолютная производная по времени от радиуса-вектора $\overline{r}$ представляет собой абсолютную скорость $\overline{\vartheta}_a$, $\frac{d\overline{r}_0}{dt}$ есть вектор скорости $\overline{\vartheta}_0$ начала O относительно системы координат. Второе слагаемое справа — производная по времени от относительного радиуса-вектора в абсолютном движении (абсолютная производная). Она состоит из производной по времени от радиуса-вектора в относительном движении (относительная производная) и векторного произведения вектора угловой скорости вращения относительной системы координат на дифференцируемый вектор $\overline{\rho}$.

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{\rho}}{dt} + \left(\overline{\omega}_e \times \overline{\rho}\right).$$

Первое слагаемое в правой части — относительная производная по времени от относительного радиуса-вектора $\overline{\rho}$ — представляет собой относительную скорость точки $\overline{\vartheta}_r$.

Тогда

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}_0}{dt} + \left(\overline{\omega}_e \times \overline{\rho}\right) + \frac{\tilde{d}\overline{\rho}}{dt}.$$

Но сумма первых двух слагаемых справа (т. е. $\overline{\vartheta}_0 + \left(\overline{\omega}_e \times \overline{\rho}\right)$) по известной формуле для скоростей точек твердого тела в общем случае его движения (в частности, в случае плоского движения) представляет собой скорость той неизменно связанной с относительной (подвижной) системой координат точки m, через которую в данный момент проходит движущаяся точка M. А это по определению — переносная скорость $\overline{\vartheta}_e$, равная

$$\overline{\vartheta}_e = \overline{\vartheta}_o + \left(\overline{\omega}_e \times \overline{\rho}'\right).$$

Итак, окончательно получим

$$\overline{\vartheta}_a = \overline{\vartheta}_e + \overline{\vartheta}_r, \qquad (57)$$

т. е. теорема доказана.

Иногда теорему о сложении скоростей называют правилом параллелограмма скоростей (рис. 41). Абсолютная скорость по модулю

$$\vartheta_a = \sqrt{\vartheta_e^2 + \vartheta_r^2 + 2\vartheta_e\vartheta_r\cos\alpha} \qquad (58)$$

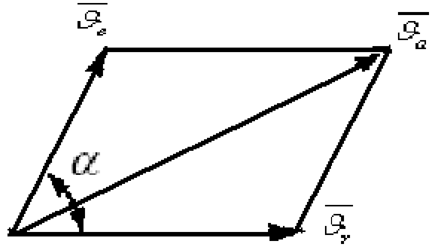


Рис. 41

При следующих частных значениях угла α абсолютную скорость подсчитывают по выражениям:

При α = 0 $\quad \vartheta_a = \vartheta_e + \vartheta_r$;

при α = π/2 $\quad \vartheta_a = \sqrt{\vartheta_e^2 + \vartheta_r^2}$;

при α = π $\quad \vartheta_a = \vartheta_e - \vartheta_r$ или $\vartheta_a = \vartheta_r - \vartheta_e$.

В последнем случае вектор абсолютной скорости направлен в сторону большей скорости.

Теорема Кориолиса. В общем случае сложного движения точки ее абсолютное ускорение равно геометрической сумме переносного относительного и добавочного (кориолисова) ускорений.

Из выражения (57) видно, что *абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного ускорения, относительного,*

а также ускорения $2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{\vartheta}_r\right)$. Эта последняя составляющая носит название *ускорения Кориолиса* (а также добавочного или поворотного). Обозначив ее через $\overline{a}_c$, получим формулу разложения абсолютного ускорения на слагаемые:

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c. \qquad (59)$$

Итак, ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению угловой (переносной) скорости подвижной системы отсчета $\overline{\omega}_e$ на относительную скорость точки $\overline{\vartheta}_r$:

$$\overline{a}_c = 2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{\vartheta}_r\right).$$

Согласно данной формуле, модуль ускорения Кориолиса подсчитывают по формуле

$$a_c = 2\omega_e\vartheta_r \sin\left(\overline{\omega}_e,\ \overline{\vartheta}_r\right). \qquad (60)$$

Направление ускорения $\overline{a}_c$ перпендикулярно к плоскости, проходящей через векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\vartheta}_r$, в ту сторону, чтобы, глядя навстречу ему, мы видели бы поворот вектора $\overline{\omega}_e$ к вектору $\overline{\vartheta}_r$ на наименьший угол происходящим против часовой стрелки (рис. 42).

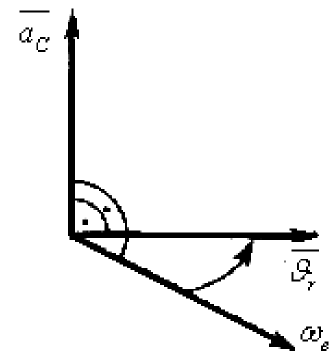


Рис. 42

Направление ускорения Кориолиса можно также определить по правилу, предложенному Н. Е. Жуковским, проведя плоскость *П*, перпендикулярную к угловой скорости переносного вращательного движения (рис. 43).

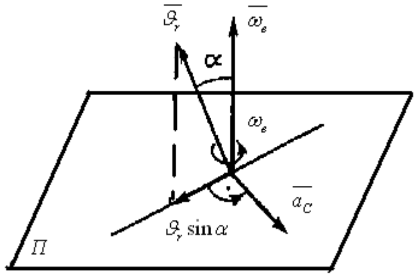


Рис. 43

Правило Жуковского. Для определения направления ускорения Кориолиса необходимо вектор относительной скорости точки $\overline{\vartheta}_r$ спроецировать на плоскость *П* и проекцию затем повернуть в направлении переносного вращения на 90°.

Пусть $a_c = 2\omega_e \vartheta_r \sin\left(\overline{\omega}_e,\ \overline{\vartheta}_r\right)$. Это может быть в следующих случаях:

1) $\omega_e = 0$, т. е. подвижная система отсчета движется поступательно;

2) $\upsilon_r = 0$, т. е. относительная скорость точки равна нулю (точка находится в относительном покое);

3) $\sin\left(\overline{\omega}_e,\ \overline{\vartheta}_r\right)$, т. е. угол между векторами $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\vartheta}_r$ равен 0 и 180° (рис. 44, *а* или *б* соответственно).

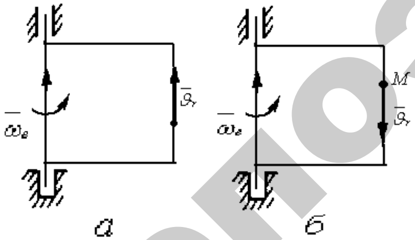


Рис. 44

Пример 1. Диск радиуса *R* = 50 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 3t^3 - 6t^2$ рад. По ободу движется точка *М* по закону $OM = S = \frac{\pi}{2}R\left(2t^2 - t^3\right)$, см (рис. 45, *а*). Определить абсолютную скорость точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

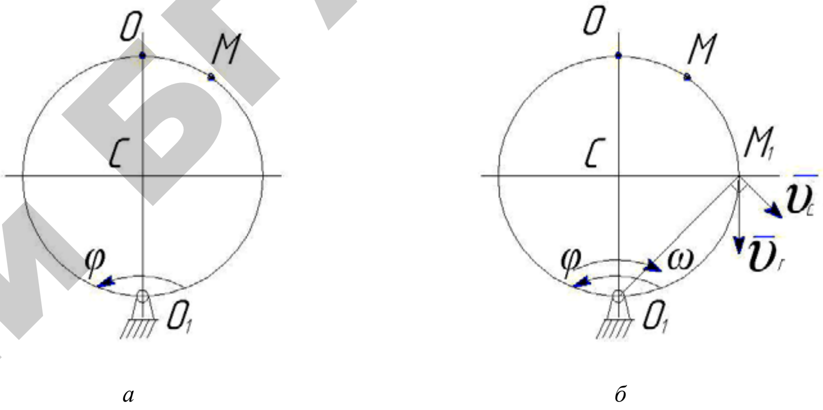


Рис. 45

Решение. Точка *М* совершает сложное движение. Движение точки *М* по ободу диска будет относительным, а движение диска — переносным. Абсолютную скорость точки *М* находим по формуле (57).

Определим положение точки *М* на траектории относительного движения.

При *t* = 1 с

$$OM_1 = S = \frac{\pi R}{2}\left(2t^2 - t^3\right) = \frac{\pi R}{2}.$$

Находим угол

$$\angle OCM_1 = \frac{OM_1}{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Находим скорость относительного движения

$$\vartheta_r = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi R}{2}\left(4t - 3t^2\right).$$

При $t = 1$ с

$$\vartheta_r = \frac{50\pi}{2}\left(4-3\right) = 25\pi = 78{,}5 \text{ см/с}.$$

Так как $\vartheta_r > 0$, то вектор ϑ_r направлен по касательной к окружности в точке *M* в сторону увеличения дуги *OM* (рис. 45). Находим скорость переносного движения

$$\vartheta_e = \left|\omega\right| h,$$

где $\omega = \dot{\varphi} = 9t^2 - 12t$.

При $t = 1$ с ω = -3 рад/с. Минус показывает, что направление ω противоположно направлению положительного отсчета угла φ.

Так как

$$h = O_1M_1 = R\sqrt{2} = 50\sqrt{2} = 70{,}5 \text{ см},$$

то

$$\vartheta_e = \left|-3\right| \cdot 70{,}5 = 211{,}5 \text{ см/с}.$$

Вектор ϑ_e перпендикулярен вектору M_1O_1 и направлен в соответствии с угловой скоростью (рис. 45, *б*). Так как $< \overline{\vartheta}_{e,} \overline{\vartheta}_r > = 45^\circ$, то

$$\vartheta_{\text{аб}} = \sqrt{\vartheta_e^2 + \vartheta_r^2 + 2\vartheta_e\vartheta_r \cos 45^\circ} =$$

$$\sqrt{211{,}5^2 + 78{,}5^2 + 2 \cdot 211{,}5 \cdot 78{,}5 \cdot 0{,}71} = 272{,}89 \text{ см/с}.$$

Ответ: $\vartheta_{\text{аб}} = 272{,}89$ см/с.

Пример 2. Используя условие примера 1, определить абсолютное ускорение точки.

Решение. Ускорение находим по формуле (6), определяя величины, входящие в нее.

Нормальное переносное ускорение

$$a_e^n = \omega^2 h = 3^2 \bullet 70{,}5 = 634{,}5 \text{ см/с}^2.$$

Вращательное переносное ускорение

$$a_e^\tau = \varepsilon h,$$

где

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d}{dt}\left(9t^2 - 12t\right) = 18t - 12.$$

При $t_1 = 1$ с $\varepsilon = 6$ рад/с^2,

$$a_e^\tau = 6 \cdot 70{,}5 = 423 \text{ см/с}^2.$$

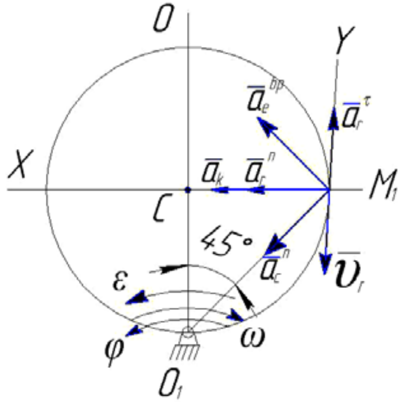


Рис. 46

Угловое ускорение направлено противоположно угловой скорости (рис. 46), так как производная имеет другой знак. Вектор $\overline{a_e^n}$ направлен по M_1O_1 к оси переносного вращения. Вектор $\overline{a_e^\tau}$ перпендикулярен M_1O_1 и направлен в соответствии с угловым ускорением.

Тангенциальное относительное ускорение

$$a_r^\tau = \frac{d\vartheta_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi R}{2}\left(4t - 3t^2\right)\right) = \frac{\pi R}{2}\left(4 - 6t\right).$$

При $t_1 = 1$ с

$$a_r^\tau = -\pi R = -50\pi = -157 \ \text{см/с}^2 \ .$$

Нормальное относительное ускорение

$$a_r^n = \frac{\vartheta_r^2}{R} = \frac{(25\pi)^2}{50} = 123{,}25 \ \text{см/с}^2 .$$

Вектор $\overrightarrow{a_r^n}$ направлен по M_1C от точки M_1 к точке C. Вектор $\overrightarrow{a_r^\tau}$ направлен противоположно вектору $\overrightarrow{\vartheta_r}$, так как $\overrightarrow{a_r^\tau}$ меньше нуля.

Находим ускорение Кориолиса:

$$a_k = 2\left|\vec{\omega} \times \overrightarrow{\vartheta_r}\right| = 2\left|\vec{\omega}\right|\left|\overrightarrow{\vartheta_r}\right| \sin\left(\vec{\omega}, \wedge \overrightarrow{\vartheta_r}\right);$$

$$< \vec{\omega}, \ \overrightarrow{\vartheta_r} > = 90^\circ;$$

$$a_k = 2 \cdot 2 \cdot 78{,}5 = 471 \ \text{м/с}^2.$$

Направление $\overrightarrow{a_k}$ находим по правилу Жуковского. Так как вектор ϑ_r находится в плоскости, перпендикулярной переносной оси вращения, то повернем ϑ_r на 90° в направлении ω, т. е. по ходу часовой стрелки. Вектор $\overrightarrow{a_k}$ будет направлен от M_1 к C.

Проектируем (6) на выбранные координатные оси:

$$a_x = a_e^\tau \cos 45^\circ + a_e^n \cos 45^\circ + a_r^n + a_k =$$
$$423 \cdot 0{,}707 + 634{,}5 \cdot 0{,}707 + 123{,}25 + 471 = 1341{,}9 \ \text{см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^\tau \cos 45^\circ - a_e^n \cos 45^\circ + a_r^\tau =$$
$$423 \cdot 0{,}707 - 634{,}5 \cdot 0{,}707 + 157 = 7{,}47 \ \text{см/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1341{,}9^2 + 7{,}47^2} = 1341{,}92 \ \text{см/с}^2.$$

Ответ: $a = 1341{,}92$ см/с^2.

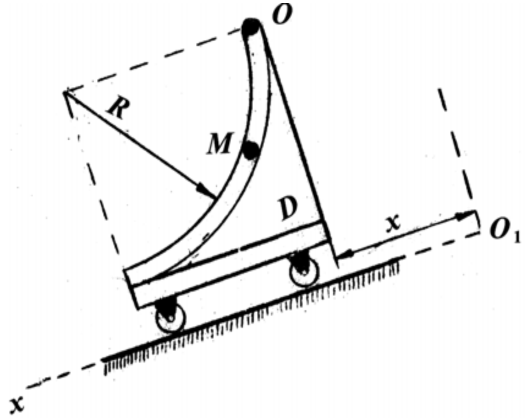
Вопросы для повторения

1. Какое движение точки называется сложным?
2. Какое движение точки называют абсолютным, переносным, относительным?
3. Сформулировать и записать теорему о сложении скоростей.
4. Сформулировать и записать теорему о сложении ускорений.
5. Сформулировать правило Жуковского.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. По заданным уравнениям переносного и относительного движения определить для момента времени t скорость и ускорение точки M, если

$$x = t^2 + 4t \ (\text{см}), \ OM = 4\pi t^2 (\text{см}), \ t = 2 \ \text{с}, \ R = 48 \ \text{см}.$$



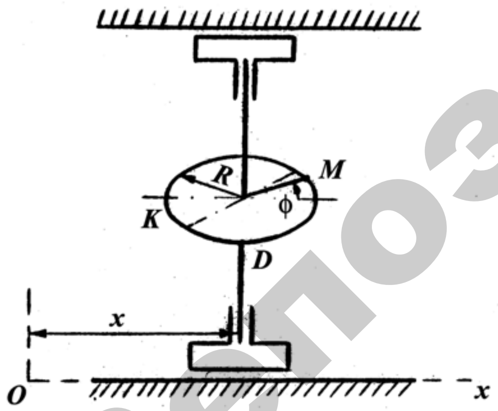
2. По заданным уравнениям переносного и относительного движения определить для момента времени t скорость и ускорение точки M, если

$x = 2t^3$ (см),

$\varphi = \frac{1}{12}\pi t^2$ (рад),

$t = 2$ с,

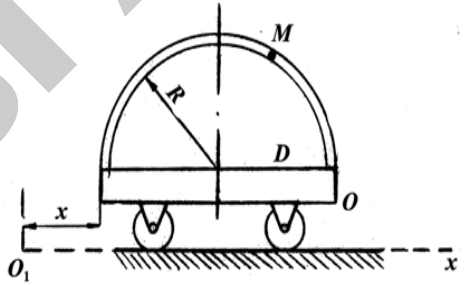
$R = 20$ см.



3. По заданным уравнениям переносного и относительного движения определить для момента времени t скорость и ускорение точки M, если

$$x = 7t + 4t^2 \text{ (см)},\ \ OM = 20\pi t^2 \text{ (см)},$$

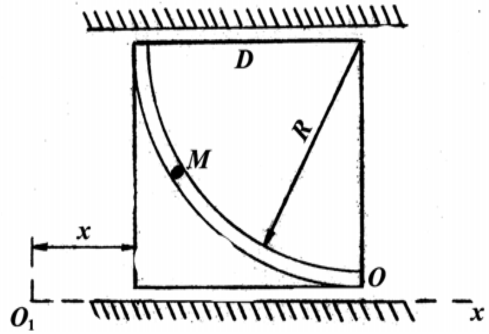
$$t = \frac{1}{2} \text{ с},\ \ R = 30 \text{ см}.$$



4. По заданным уравнениям переносного и относительного движения определить для момента времени t скорость и ускорение точки M, если

$x = 20\sin\frac{\pi}{3}t$ (см), $OM = \pi(2t^3 + 3t)$ (см),

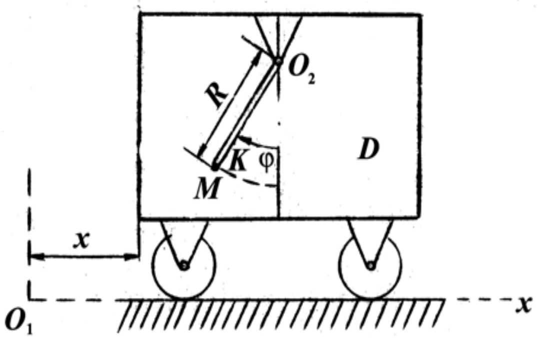
$t = 1$ с, $R = 30$ см.



5. По заданным уравнениям переносного и относительного движения определить для момента времени t скорость и ускорение точки M, если

$x = 20t^2 + 15t$ (см), $\varphi = \frac{1}{3}\pi\cos 2\pi t$ (рад)

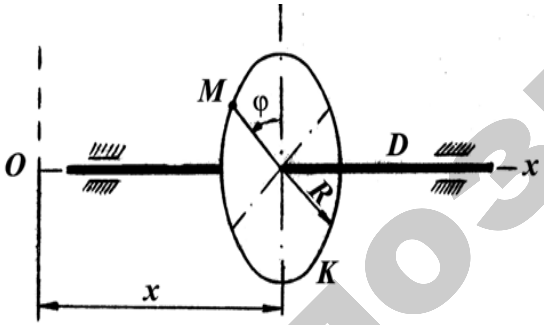
$t = \frac{1}{6}$ с, $R = 15$ см.



6. По заданным уравнениям переносного и относительного движения определить для момента времени t скорость и ускорение точки M, если

$x = 20t^2 + 15t$ (см), $\varphi = \frac{2}{3}\pi t^2$ (рад),

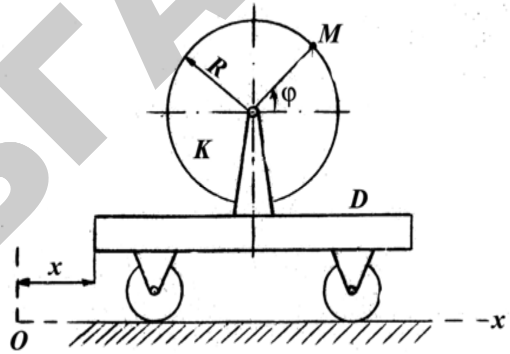
$t = 1$ с, $R = 40$ см.



7. По заданным уравнениям переносного и относительного движения определить для момента времени t скорость и ускорение точки M, если

$x = 20(1 + \sin\frac{\pi}{2}t)$ (см), $\varphi = 36\pi t^2$ (рад),

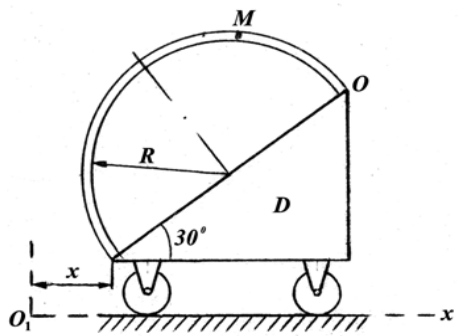
$t = 5/6$ с, $R = 50$ см.



8. По заданным уравнениям переносного и относительного движения определить для момента времени t скорость и ускорение точки M, если

$x = 10t^2 - 0,6t^3$ (см), $OM = 2\pi t^2$ (см),

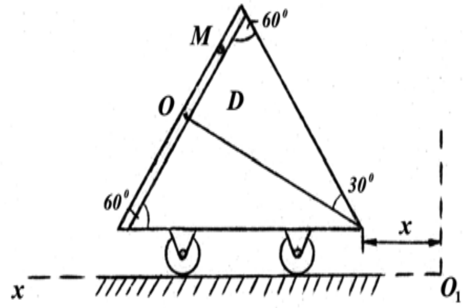
$t = 3$ с, $R = 36$ см.



9. По заданным уравнениям переносного и относительного движения определить для момента времени t скорость и ускорение точки M, если

$x = -8t + 3t^2$ (см), $OM = 4\sin\frac{\pi}{3}t$ (см),

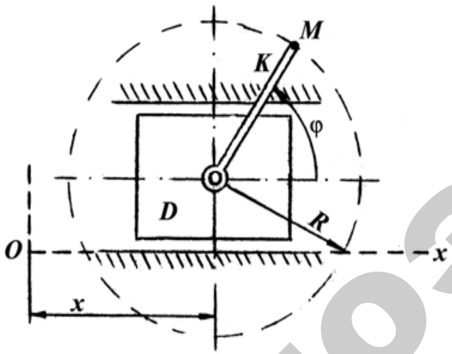
$t = 0{,}5$ с.



10. По заданным уравнениям переносного и относительного движения определить для момента времени t скорость и ускорение точки M, если

$x = 10 + 3\sin\frac{\pi}{2}t$ (см), $\varphi = 0{,}12\pi t^2$ (рад),

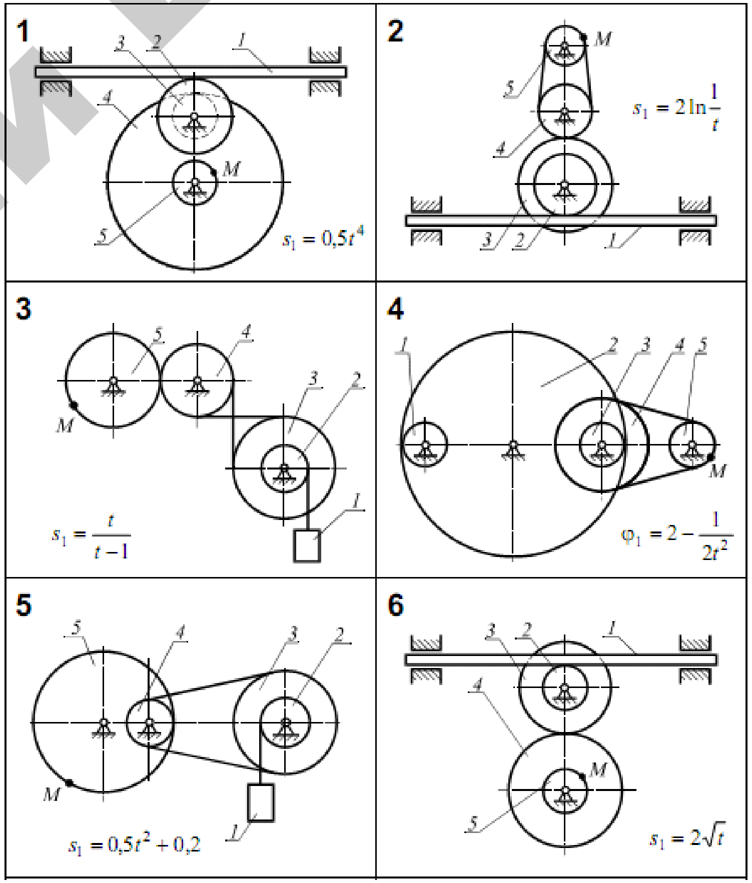
$t = 5/3$ с, $R = 50$ см.

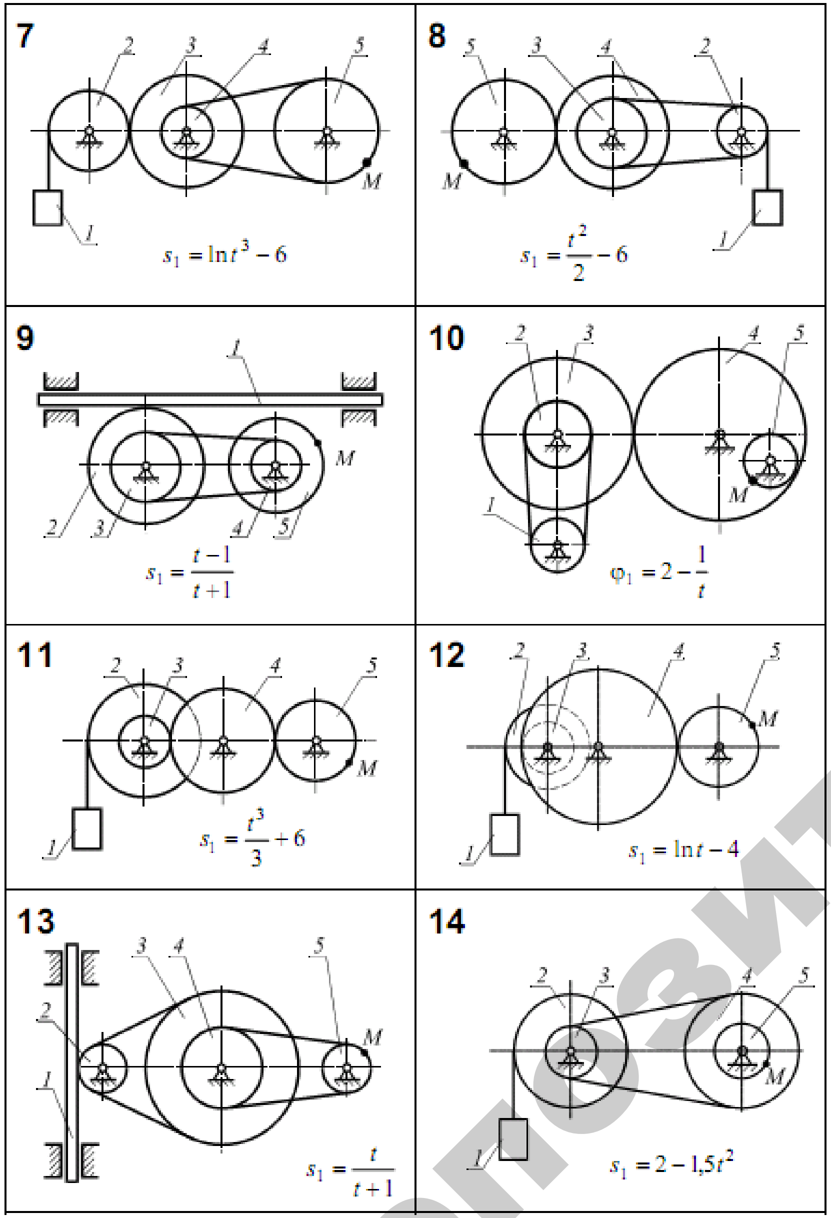


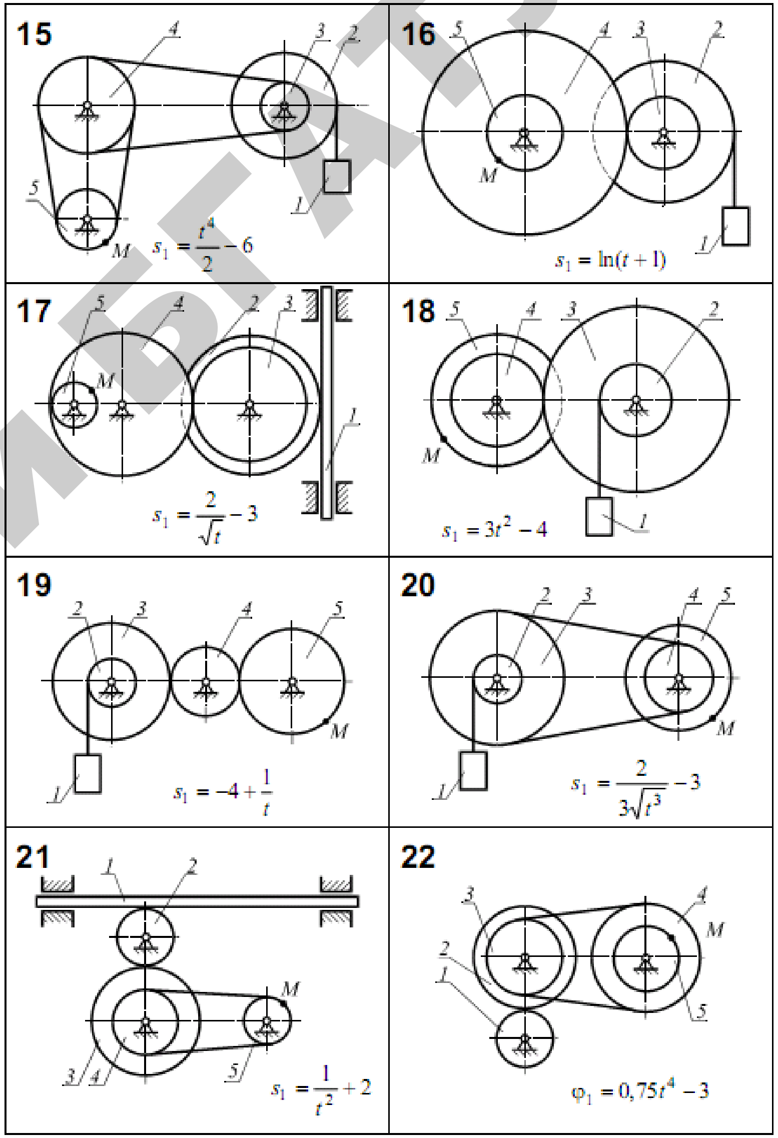
МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАЧЕТА

Задание 1. *Преобразование движений в зубчатых, цепных и ременных передачах.*

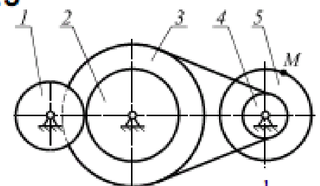
По заданному уравнению движения тела *1* рассчитать, по какому закону изменяются угловая скорость и угловое ускорение звена *5*, а также линейные скорость и ускорение точки *M*. Радиусы всех колес считать известными.




7
$s_1 = \ln t^3 - 6$
8
$s_1 = \frac{t^2}{2} - 6$
9
$s_1 = \frac{t-1}{t+1}$
10
$\varphi_1 = 2 - \frac{1}{t}$
11
$s_1 = \frac{t^3}{3} + 6$
12
$s_1 = \ln t - 4$
13
$s_1 = \frac{t}{t+1}$
14
$s_1 = 2 - 1{,}5t^2$

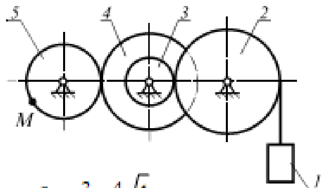

15
$s_1 = \frac{t^4}{2} - 6$
16
$s_1 = \ln(t+1)$
17
$s_1 = \frac{2}{\sqrt{t}} - 3$
18
$s_1 = 3t^2 - 4$
19
$s_1 = -4 + \frac{1}{t}$
20
$s_1 = \frac{2}{3\sqrt{t^3}} - 3$
21
$s_1 = \frac{1}{t^2} + 2$
22
$\varphi_1 = 0{,}75t^4 - 3$

23



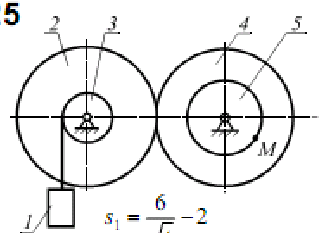
$\varphi_1 = \frac{1}{2}\ln t^4$

24



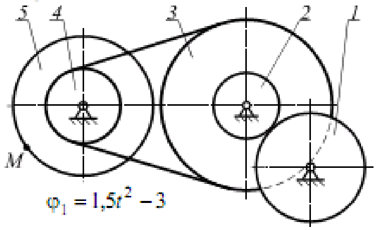
$s_1 = 3 - 4\sqrt{t}$

25



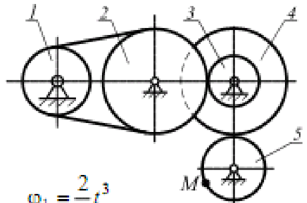
$s_1 = \frac{6}{\sqrt{t}} - 2$

26



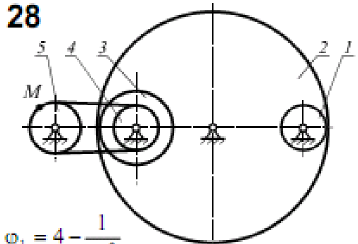
$\varphi_1 = 1{,}5t^2 - 3$

27



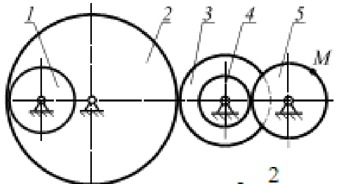
$\varphi_1 = \frac{2}{3}t^3$

28



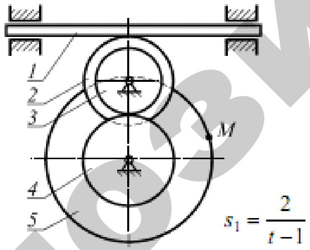
$\varphi_1 = 4 - \frac{1}{2t^2}$

29



$\varphi_1 = 5 - \frac{2}{t}$

30

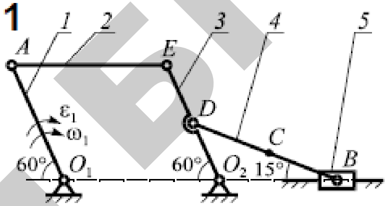


$s_1 = \frac{2}{t-1}$

Задание 2. *Определение скоростей и ускорений в плоском механизме.*

Для изображенного на рисунке положения плоского механизма определить линейные скорости и ускорения точек *B* и *C*, а также угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

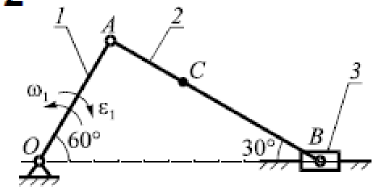
1



$\omega_1 = 3\,\frac{рад}{с}$; $\varepsilon_1 = 5\,\frac{рад}{с^2}$; $DC = CB$;

$O_1A = O_2E = 20$ см; $O_2D = ED$

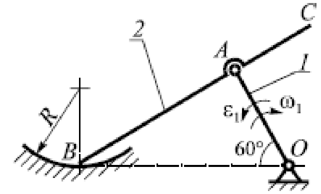
2



$\omega_1 = 1\,\frac{рад}{с}$; $\varepsilon_1 = 3\,\frac{рад}{с^2}$; $OA = 20$ см;

$AC = 12$ см

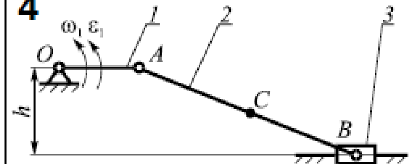
3



$\omega_1 = 1\,\frac{рад}{с}$; $\varepsilon_1 = 2\,\frac{рад}{с^2}$; $OA = 15$ см;

$OB = 30$ см; $BC = 40$ см; $R = 25$ см

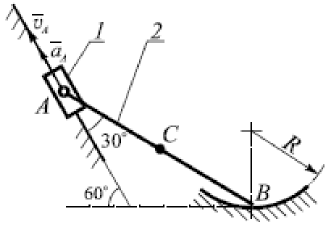
4



$\omega_1 = 2\,\frac{рад}{с}$; $\varepsilon_1 = 5\,\frac{рад}{с^2}$; $OA = 10$ см;

$AB = 30$ см; $AC = 15$ см; $h = 12$ см

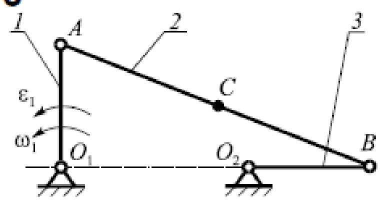
5



$v_A = 30\,\frac{см}{с}$; $a_A = 20\,\frac{см}{с^2}$;

$AB = 30$ см; $BC = 15$ см; $R = 20$ см

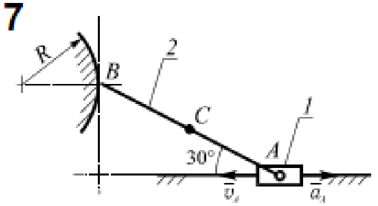
6



$\omega_1 = 1\,\frac{рад}{с}$; $\varepsilon_1 = 1\,\frac{рад}{с^2}$; $AB = 50$ см;

$O_1A = O_2B = 20$ см; $BC = 25$ см

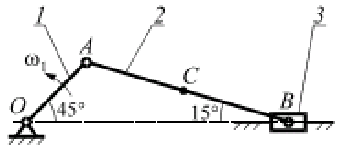
7



$v_A = 20\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$; $a_A = 30\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$;

$AB = 50$ см; $BC = 25$ см; $R = 40$ см

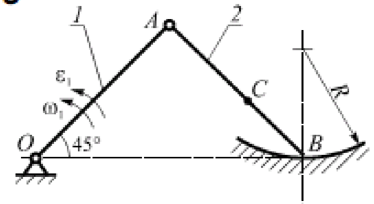
8



$\omega_1 = 4\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 0$; $OA = 10$ см;

$AC = BC$

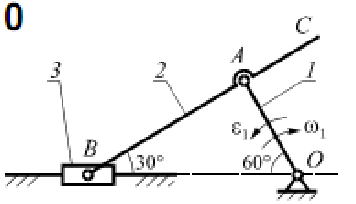
9



$\omega_1 = 3\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 4\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OB = 40$ см;

$BC = 12$ см; $R = 20$ см

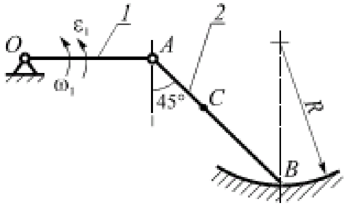
10



$\omega_1 = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 4\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $AB = 30$ см;

$BC = 45$ см

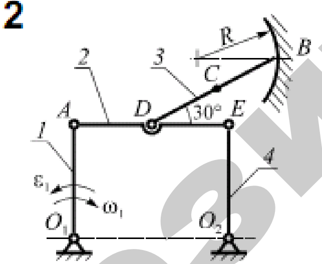
11



$\omega_1 = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 25$ см;

$AB = 35$ см; $BC = 20$ см; $R = 30$ см

12

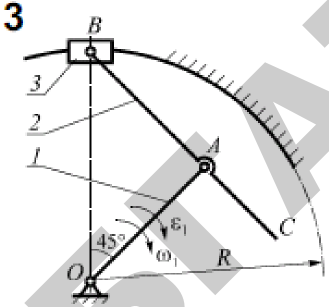


$\omega_1 = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $BC = 15$ см;

$O_1A = O_2E = 25$ см; $BD = 30$ см;

$R = 20$ см

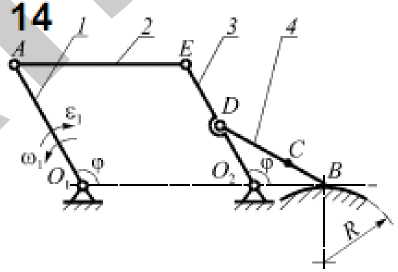
13



$\omega_1 = 1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 4\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = AB$;

$BC = 60$ см; $R = 50$ см

14

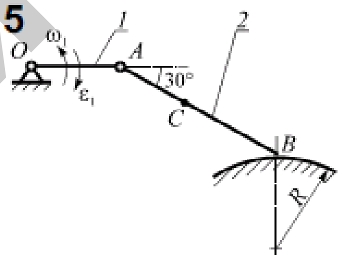


$\omega_1 = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 3\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $BC = 12$ см;

$O_1A = O_2E = 40$ см; $\varphi = 120°$;

$O_2D = DE = O_2B$

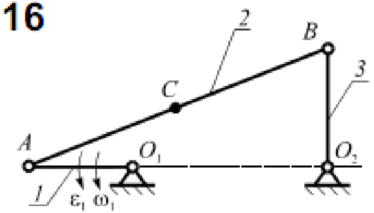
15



$\omega_1 = 3\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 6\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 15$ см;

$AB = 25$ см; $BC = 15$ см; $R = 20$ см

16

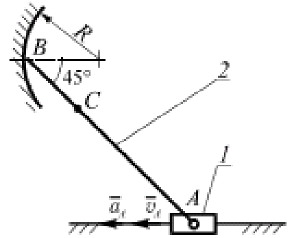


$\omega_1 = 3\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 7\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $O_1A = 15$ см;

$O_2B = 20$ см; $O_2A = 40$ см;

$AC = BC$

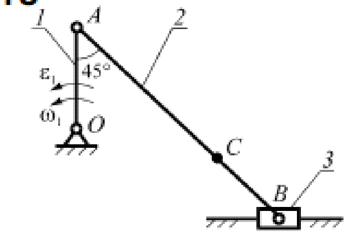
17



$v_A = 40\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$; $a_A = 25\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$;

$AB = 30$ см; $AC = 20$ см; $R = 10$ см

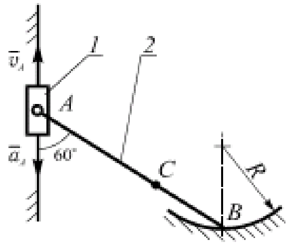
18



$\omega_1 = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 12$ см;

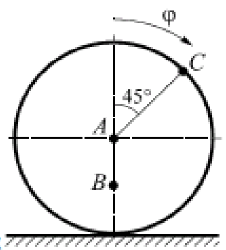
$AB = 30$ см; $BC = 10$ см

19



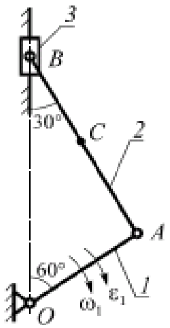
$v_A = 10\,\dfrac{\text{см}}{\text{с}}$; $a_A = 15\,\dfrac{\text{см}}{\text{с}^2}$; $AB = 15$ см;
$BC = 5$ см; $R = 8$ см

20



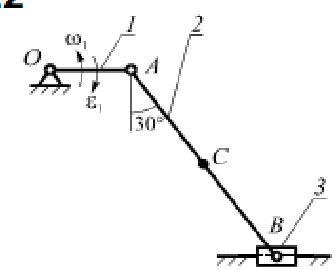
$\varphi = \pi t^3$ рад;
$t = 1$ с; $AB = 12$ см; $AC = 25$ см

21



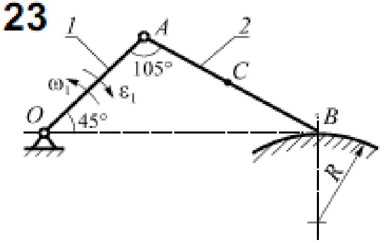
$\omega_1 = 2\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 1\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 20$ см;
$BC = 15$ см

22



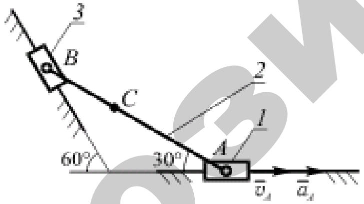
$\omega_1 = 4\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 6\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 10$ см;
$AB = 30$ см; $BC = 15$ см

23



$\omega_1 = 1\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon_1 = 2\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$; $OA = 25$ см;
$AC = BC$; $R = 15$ см

24



$v_A = 30\,\dfrac{\text{см}}{\text{с}}$; $a_A = 10\,\dfrac{\text{см}}{\text{с}^2}$; $AB = 25$ см;
$AC = 15$ см

ЗАДАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Задача К1

Точка B движется в плоскости xy (рис. К1.0–К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показано условно). Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t — в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с. Определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x = f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0–2 — в столбце 2, для рис. 3–6 — в столбце 3, для рис. 7–9 — в столбце 4). Номер рисунка выбирается по последней цифре шифра зачетной книжки, а номер условия в табл. К1 — по предпоследней.

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяется скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1 = 1$ с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Таблица К1:

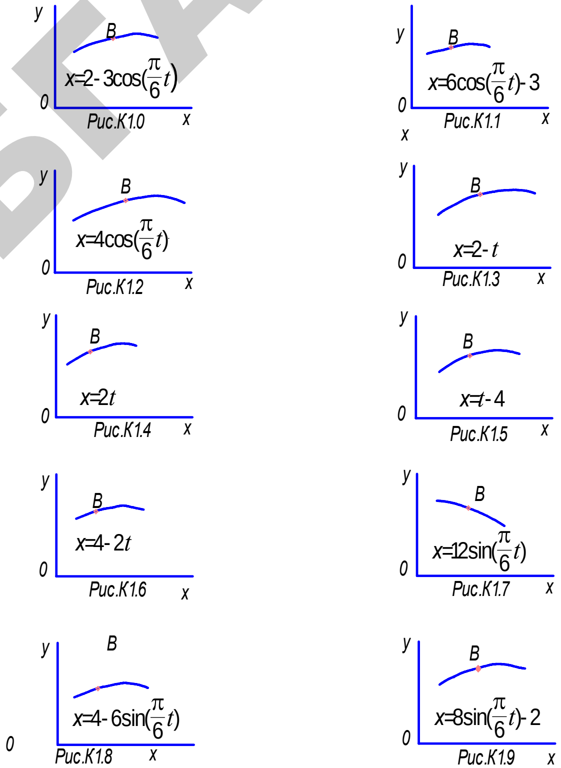
Номер условия	$y = f(t)$		
	Рис. 0–2	Рис. 3–6	Рис. 7–9
1	2	3	4
0	$12\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$
1	$-4-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$14-16\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-4$	$2t^3$	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	$2+2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$-10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$8-12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$2-6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
7	$2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	$(t+1)^3$	$6-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+5$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-3$
9	$3-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

Пример К1. Даны уравнения движения точки в плоскости *xy*:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+3;\quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)-1$$

(*xy* — в сантиметрах, *t* — в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.



Решение. 1. Для определения траектории уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время *t*. Поскольку *t* входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \qquad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)=\frac{3-x}{2},\quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)=\frac{y+1}{2};$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2}=1-2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы рис. К1):

$$x=(y+1)^2+1 \qquad (2)$$

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$\vartheta_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$\vartheta_y=\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$\vartheta=\sqrt{\vartheta_x^2+\vartheta_y^2},$$

и при $t_1 = 1$ с

$\vartheta_{1x}=1{,}11$ см/с, $\vartheta_{1y}=0{,}73$ см/с, $\vartheta_1=1{,}33$ см/с.

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x=\frac{d\vartheta_x}{dt}=\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right);\quad a_y=\frac{d\vartheta_y}{dt}=-\frac{\pi}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2},$$

и при $t_1 = 1$ с

$a_{1x}=0{,}87$ см/с^2, $a_{1y}=0{,}12$ см/с^2, $a_1=0{,}88$ см/с^2.

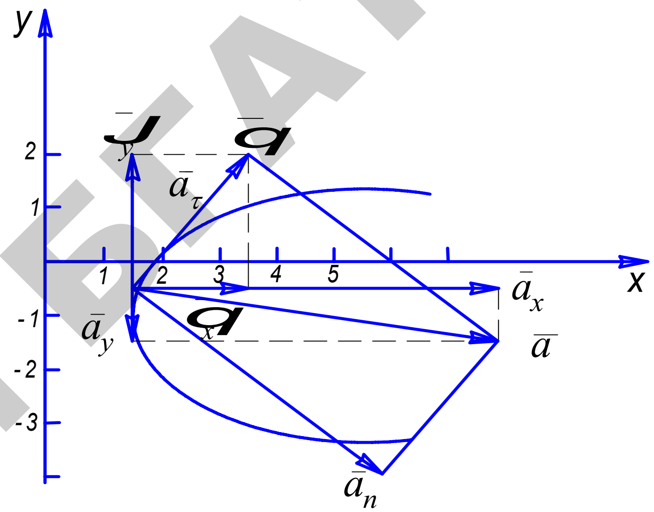


Рис.К1

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $\vartheta^2=\vartheta_x^2+\vartheta_y^2$. Получим:

$$(3)\qquad 2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}=2\vartheta_x\frac{d\vartheta_x}{dt}+2\vartheta_y\frac{d\vartheta_y}{dt}$$

и

$$a_\tau=\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\vartheta_x a_x+\vartheta_y a_y}{\vartheta}. \qquad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau}=0{,}66$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = \vartheta^2 / a_n$. Подставляя сюда числовые значения ϑ_1 и a_{1n}, найдем, что при $t_1 = 1$ с $\rho = 3{,}05$ см. Ответ: $\vartheta_1 = 1{,}33$ см/с, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2, $\rho = 3{,}05$ см/с.

Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колес *1–3*, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки *4* и груза *5*, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К2.0–К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 — $r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см, у колеса *2* — $r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см, у колеса *3* — $r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободьях колес расположены точки *A*, *B* и *C*.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ — закон вращения колеса *1*, $s_4(t)$ — закон движения рейки *4*, $\omega_2(t)$ — закон изменения угловой скорости колеса *2*, $\vartheta_5(t)$ — закон изменения скорости груза *5* и т.д. (везде φ — выражено в радианах, *s* — в сантиметра, *t* — в секундах). Положительное направление для φ и ω — против хода часовой стрелки, для s_4, s_5 и ϑ_4, ϑ_5 — вниз.

Определить в момент времени $t_1 = 1$ с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (υ — линейные, ω – угловые) и ускорения (*a* — линейные, ε — угловые) соответствующих точек или тел (ϑ_5 — скорость груза *5* и т. д.).

Указания. Задача К2 — на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорость всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Пример К2. Рейка *1*, ступенчатое колесо *2* с радиусами R_2 и r_1 и колесо *3* с радиусом R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находится в зацеплении; на вал намотана нить с грузом *4* на конце (рис. К2). Рейка движется по закону $S_1 = f(t)$.

Дано: $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $S_1 = 3t^3$ (*S* — в сантиметрах, *t* — в секундах), *A* — точка обода колеса *3*, $t_1 = 3$ с.

Определить: ω_3, υ_4, ε_3, a_A в момент времени $t = t_1$.

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через υ_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), — через u_i.

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени *t*. Зная закон движения рейки *1*, находим ее скорость.

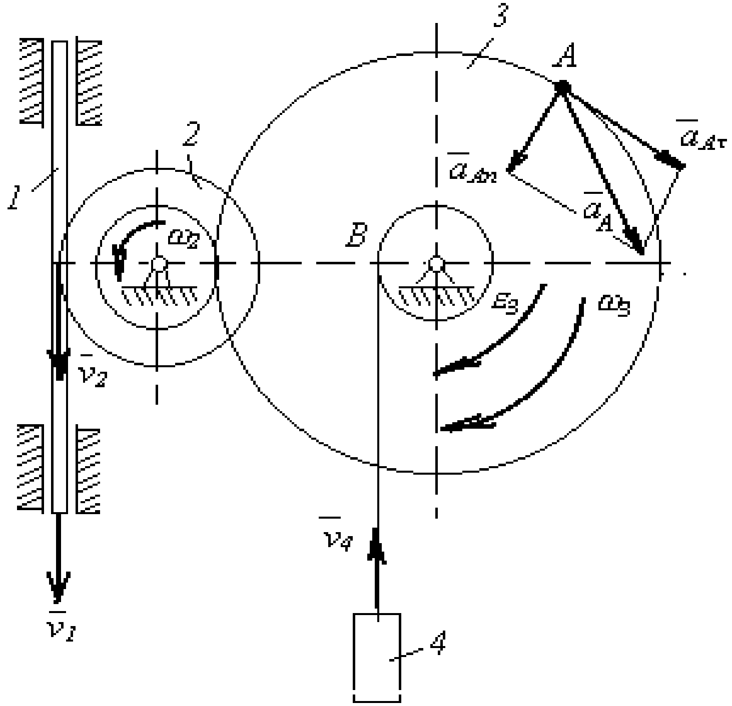
$$\vartheta_1 = \frac{dS_1}{dt} = 9t^2.$$

Так как рейка и колесо *2* находятся в зацеплении, то $\vartheta_2 = \vartheta_1$ или $\omega_2 R_2 = \upsilon_1$.

Но колеса *2* и *3* тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = \vartheta_3$ или $\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$.

Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{\vartheta_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2. \qquad (2)$$



Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с получим $\omega_3 = 6{,}75$ с$^{-1}$.

2. Определим ϑ_4. Так как $\vartheta_4 = \vartheta_B = \omega_3 r_3$, то при $t_1 = 3$ с $\vartheta_4 = 20{,}25$ см/с.

3. Определяем ε_3. Учитывая второе из равенств (2) получим $\varepsilon_3 = \omega_3 = 1{,}5t$. Тогда при $t_1 = 3$ с $\varepsilon_3 = 4{,}5$ с$^{-2}$.

4. Определяем a_A. Для точки A $\overline{a}_A = \overline{a}_{A\tau} + \overline{a}_{An}$, где численно $a_{A\tau} = R_3\varepsilon_3$, $a_{An} = R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с имеем

$$a_{A\tau} = 36\ \text{см/с}^2, \quad a_{An} = 364{,}5\ \text{см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{a_{a\tau}^2 + a_{An}^2} = 366{,}3\ \text{см/с}^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К2.

Ответ: $\omega_3 = 6{,}75$ с$^{-1}$, $\vartheta_4 = 20{,}25$ см/с, $\varepsilon_3 = 4{,}5$с$^{-2}$, $a_A = 366{,}3$ см/с^2.

Таблица К2

Номер условия	Дано	Найти	
		Скорости	Ускорение
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	ϑ_B, ϑ_C	$\varepsilon_2,\ a_A,\ a_5$
1	$\vartheta_5 = 2(t^2 - 3)$	ϑ_A, ϑ_C	$\varepsilon_3,\ a_B,\ a_4$
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	ϑ_4, ω_2	$\varepsilon_2,\ a_C,\ a_5$
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	ϑ_5, ω_3	$\varepsilon_2,\ a_A,\ a_4$
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	ϑ_4, ω_1	$\varepsilon_1,\ a_B,\ a_5$
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	ϑ_5, ϑ_B	$\varepsilon_2,\ a_C,\ a_4$
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	ϑ_4, ω_1	$\varepsilon_1,\ a_C,\ a_5$
7	$\vartheta_4 = 3t^2 - 8$	ϑ_A, ω_3	$\varepsilon_3,\ a_B,\ a_5$
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	ϑ_4, ω_2	$\varepsilon_1,\ a_C,\ a_4$
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	ϑ_5, ω_B	$\varepsilon_2,\ a_A,\ a_4$

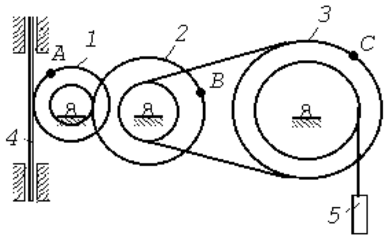


Рис. К2.0

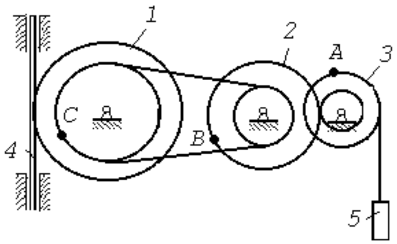


Рис. К2.1

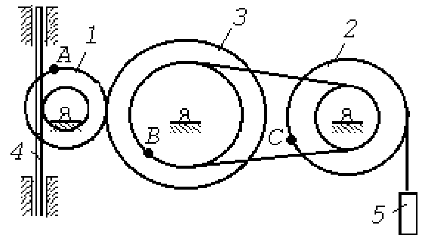


Рис. К2.2

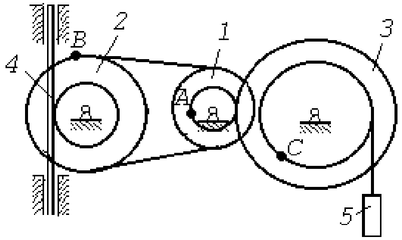


Рис. К2.3

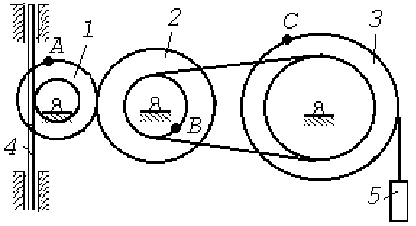


Рис. К2.4

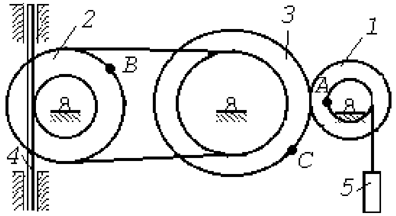


Рис. К2.5

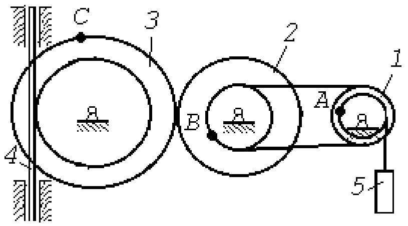


Рис. К2.6

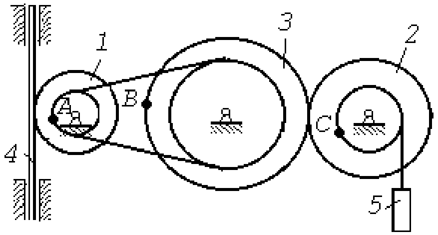


Рис. К2.7

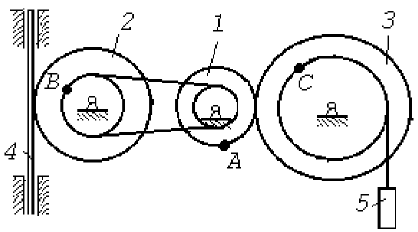


Рис. К2.8

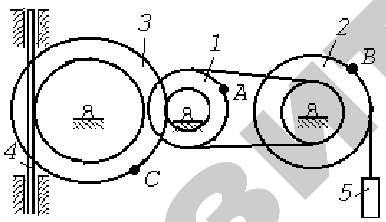


Рис. К2.9

Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней *1*, *2*, *3*, *4* и ползуна *B* или *E* (рис. К3.0–К3.7) или из стержней *1*, *2*, *3* и ползунов *B* и *E* (рис. К3.8, К3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка *Д* находится в середине стержня

AB. Длины стержней равны соответственно: $\ell_1 = 0{,}4$ *м*, $\ell_2 = 1{,}2$ м, $\ell_3 = 1{,}4$ м, $\ell_4 = 0{,}6$ м.

Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис. 0–4) или в табл. К3б (для рис. 5–9); при этом в табл. К3а ω_1 и ω_4 — величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от *ДB* по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 — против часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К3 (рис. К3, *б*).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорости v_B и ускорение a_B — от точки *B* к *b* (на рис. 5–9).

Указания. Задача К3 — на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства a $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{\tau}_{BA} + \bar{a}^{n}_{BA}$, где *A* — точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка *A* движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}^{\tau}_A + \bar{a}^{n}_A$); *B* — точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить (если точка *B* движется по дуге окружности радиуса ℓ, то $\bar{a}_B = \bar{a}^{\tau}_B + \bar{a}^{n}_B$, где численно $a^n_B = v^2_B / \ell$. Входящая сюда скорость v_B определяется так же, как и скорости других точек механизма, ℓ — длина звена).

Пример К3. Механизм (рис. К3, *а*) состоит из стержней *1*, *2*, *3*, *4* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, $AД = ДB$, $\ell_1 = 0{,}4$ м, $\ell_2 = 1{,}2$ м, $\ell_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 — против хода часовой стрелки).

Определить: v_B, v_E, ω_2, a_B, ε_3.

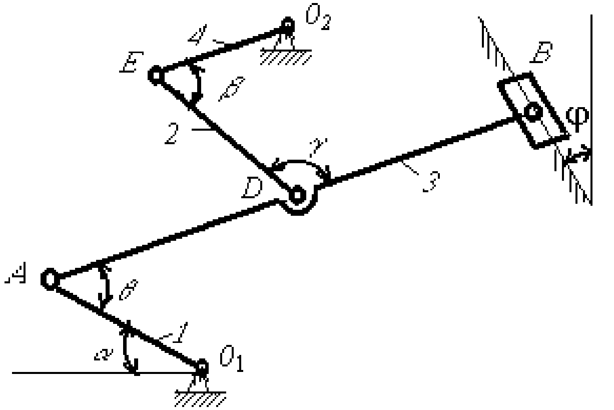


Рис. К3, а

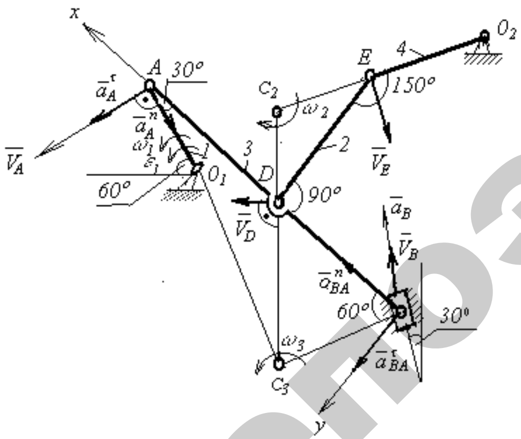


Рис. К3, б

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К3, *б*).

2. Определяем V_B. Точка *B* принадлежит стержню *AB*. Чтобы найти V_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\overline{V}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\overline{V}_A$ численно:

$$V_A = \omega_1 \ell_1 = 0{,}8 \text{ м/с}; \ \overline{V}_A \perp O_1A. \tag{1}$$

Направление $\overline{V}_B$ найдем, учтя, что точка *B* принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\overline{V}_A$ и направление $\overline{V}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня *AB*) на прямую, соединяющую эти точки (прямая *AB*).

Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\overline{V}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим:

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ \ \text{ и } \ V_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \tag{2}$$

3. Определяем V_E. Точка *E* принадлежит стержню *ДЕ*. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить V_E, надо сначала найти скорость точки *Д*, принадлежащей одновременно стержню *AB*. Для этого, зная $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, строим мгновенный вектор скоростей *(МЦС)* стержня *AB*; эта точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, восстановленных из точек *A* и *B* (к $\overline{V}_A$ перпендикулярен стержень *1*). По направлению вектора $\overline{V}_A$ определяем направление поворота стержня *AB* вокруг *МЦС* C_3. Вектор $\overline{V}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки *D* и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину V_D найдем из пропорции

$$\frac{V_D}{C_3D} = \frac{V_B}{C_3B}. \tag{3}$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B — прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB \sin 30° = 0{,}5\, AB = ВД$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$.

В результате равенство (3) дает

$$V_D = V_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \ \overline{V}_D \perp C_3D. \qquad (4)$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню C_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\overline{V}_E \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\overline{V}_E$ и $\overline{V}_D$, построим *МЦС* C_2 стержня *ДЕ*. По направлению вектора $\overline{V}_D$ определяем направление поворота стержня *ДЕ* вокруг центра C_2.

Вектор $\overline{V}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К3, *б* видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{V_E}{C_2E} = \frac{V_D}{C_2D}, \ V_E = V_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (5)$$

4. Определим ω_2. Так как *МЦС* стержня *2* известен (точка C_2) и

то

$$C_2D = \frac{\ell_2}{2\cos 30^\circ} = 0{,}69, \quad \omega_2 = \frac{V_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}. \qquad (6)$$

5. Определяем $\overline{a}_B$. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\overline{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\overline{a}_A = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \ell_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2; \quad a_A^n = \omega_1^2 \ell_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2. \qquad (7)$$

Вектор $\overline{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1, а $\overline{a}_A^\tau$ — перпендикулярно; AO_1. Изображаем эти векторы на чертеже.

Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\overline{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор a_B на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\overline{V}_B$.

Для определения $\overline{a}_B$ воспользуемся векторным равенством

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n + \overline{a}_{BA}^\tau + \overline{a}_{BA}^n. \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\overline{a}_{BA}^n$ (вдоль AB от B к A) и $\overline{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно BA); численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 \ell_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного *МЦС* C_3 стержня *3*, получим

$$\omega_3 = \frac{V_A}{C_3A} = \frac{V_A}{\ell_3 \cos 30^\circ} = 0{,}66 \text{ с}^{-1} \ \text{ и } \ a_{BA}^n = 0{,}61 \text{ м/с}^2. \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (8) на направление AB (ось X), перпендикулярное неизвестному вектору $\overline{a}_{BA}^\tau$. Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \text{ м/с}^2. \qquad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\bar{a}_B$ направлен так, как показано на рис. К3, *б*.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a^{τ}_{BA}. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное *AB* (ось *Y*). Тогда получим

$$a_B \sin 30^\circ = a^{\tau}_A \sin 60^\circ + a^n_A \sin 30^\circ + a^{\tau}_{BA}. \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a^{\tau}_{BA} = -3{,}58$ м/с^2. Знак указывает, что направление $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ противоположно показанному на рис. К3, *б*.

Теперь из равенства $a^n_{BA} = \omega_3^2 \ell_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{|a^{\tau}_{BA}|}{\ell_3} = 2{,}56 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $V_B = 0{,}46$ м/с; $V_E = 0{,}46$ м/с; $\omega_2 = 0{,}67$ с; $a_B = 0{,}72$ м/с^2; $\varepsilon_3 = 2{,}56$ с$^{-2}$.

Таблица К3а (к рис. К3.0–К3.4)

Номер условия	Углы, градусы					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	*V* точек	ω звена	*a* точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	-	B,E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30	-	4	A,E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	-	B,E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30	-	5	A,E	DE	A	AB
4	30	30	60	0	150	4	-	D,E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	-	6	A,E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	-	B,E	DE	B	AB
7	0	60	60	0	120	-	2	A,E	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	-	D,E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60	-	8	A,E	DE	A	AB

Таблица К3б (к рис. К3.5–К3.9)

Номер условия	Углы градусы					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1, 1/с^2	V_B, м/с	a_B, м/с^2	*V* точек	ω звена	*a* точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	-	-	B,E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	-	-	4	6	A,E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	-	-	B,E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	-	-	6	8	A,E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	-	-	B,E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	-	-	8	10	D,E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	-	-	B,E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	-	-	2	5	A,E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	-	-	B,E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	-	-	5	4	D,E	AB	A	AB

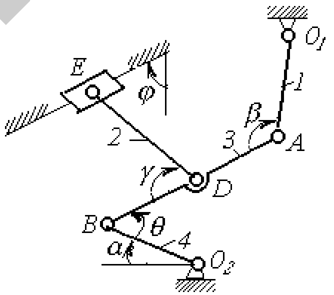


Рис. К3.0

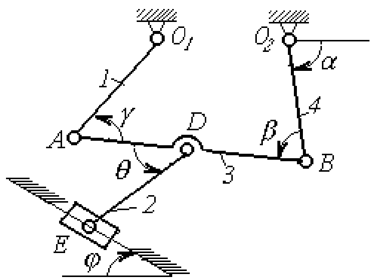


Рис. К3.1

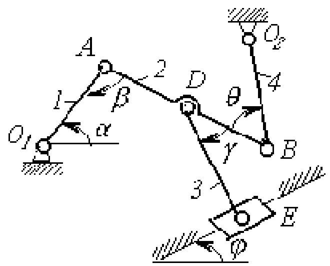


Рис. К3.2

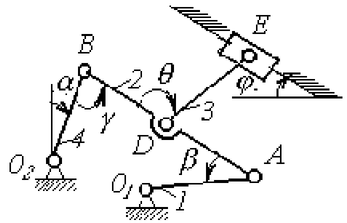


Рис. К3.3

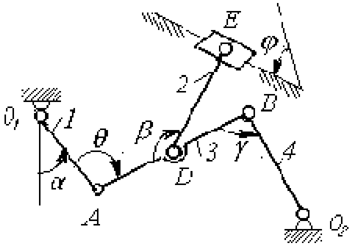


Рис. К3.4

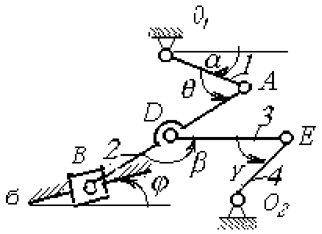


Рис. К3.5

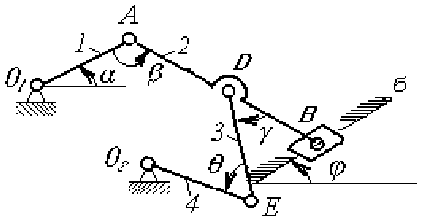


Рис. К3.6

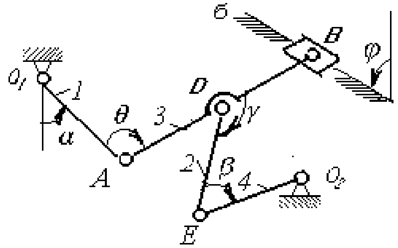


Рис. К3.7

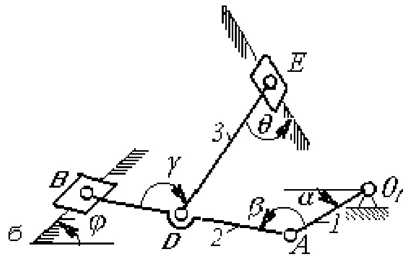


Рис. К3.8

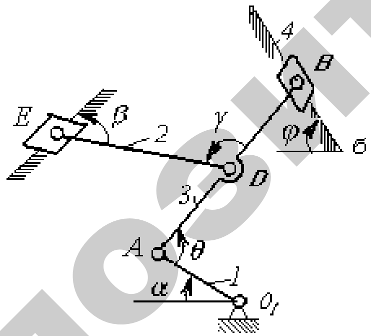


Рис. К3.9

Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0–К4.4) или круглая пластина радиуса R = 60см (рис. К4.5–К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в таблице К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 0–4) или по окружности радиуса R (рис. 5–9) движется точка M; закон ее относительного движения, т.е. зависимость $S = AM = f_2(t)$ (S выражено в сантиметрах, t — в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 0–4 и для рис. 5–9; там же даны размеры b и ℓ. На рисунках точка M показана в положении, при котором $S = AM > 0$ (при $S < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1 с.

Указания. Задача К4 — на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде, чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени t_1 = 1 с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. 5–9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени t_1 = 1 с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 0–4		Для рис. 5–9	
		t, см	$s = AM = f_2(t)$	ℓ	$s = AM = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^3 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(5t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

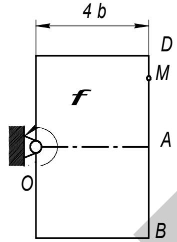


Рис. К4.0

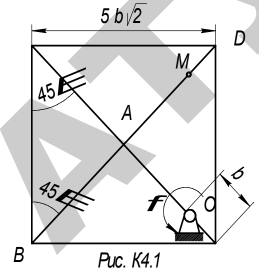


Рис. К4.1

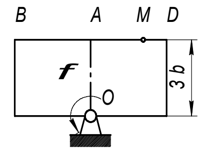


Рис. К4.2

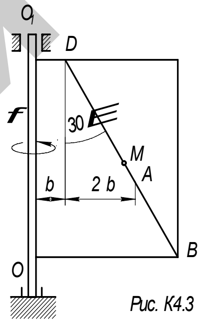


Рис. К4.3

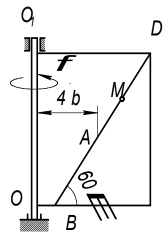


Рис. К4.4

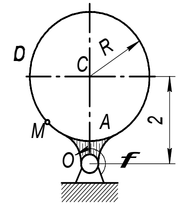


Рис. К4.5

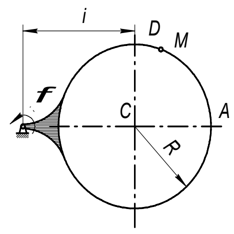


Рис. К4.6

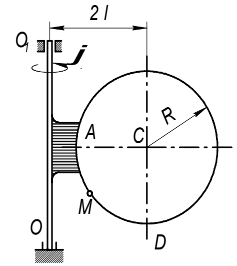


Рис. К4.7

Пример К4. Шар радиуса R (рис. К4, *а*) вращается вокруг своего диаметра AB по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4, *а* дуговой стрелкой). По дуге большого круга («меридиану») ADB движется точка M по закону $S = AM = f_2(t)$; положительное направление отсчета s от A к D.

Дано: R = 0,5 м, $\varphi = 2t^3 - 4t^2$, $s = \left(\frac{\pi R}{6}\right)\left(7t - 2t^2\right)$ (φ — в радианах, s — в метрах, t — в секундах).

Определить: $\vartheta_{\text{аб}}$ и $a_{\text{аб}}$ в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки М как сложное, считая ее движение по дуге ADB относительным (AB — относительная траектория точки), а вращение шара — переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{\vartheta}_{\text{аб}}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{\text{аб}}$ точки определятся по формулам:

$$\bar{\vartheta}_{\text{аб}} = \bar{\vartheta}_{\text{от}} + \bar{\vartheta}_{\text{пер}}, \quad \bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}, \tag{1}$$

где, в свою очередь, $\bar{a}_{\text{от}} = \bar{a}^{\tau}_{\text{от}} + \bar{a}^{n}_{\text{от}}$, $\bar{a}_{\text{пер}} = \bar{a}^{\tau}_{\text{пер}} + \bar{a}^{n}_{\text{пер}}$.

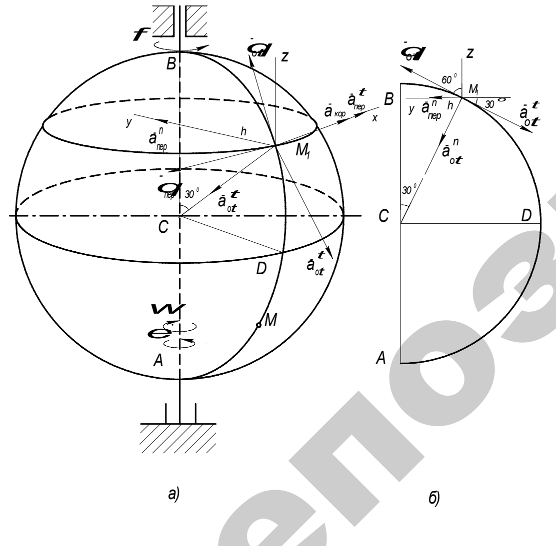


Рис.К4

Направление $\bar{a}_{\text{кор}}$ найдем, спроектировав вектор $\bar{\vartheta}_{\text{аб}}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как вектор $\bar{a}^{n}_{\text{пер}}$), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т. е. по ходу часовой стрелки, на 900. Иначе направление $\bar{a}_{\text{кор}}$ можно найти, учтя, что $\bar{a}_{\text{кор}} = 2\left(\bar{\omega} \times \bar{\vartheta}_{\text{от}}\right)$. Изображаем вектор $\bar{a}_{\text{кор}}$ на рис. К4, *а*.

Теперь можно вычислить значения $\upsilon_{\text{аб}}$ и $a_{\text{аб}}$.

4. Определение $\upsilon_{\text{аб}}$. Так как $\bar{\vartheta}_{\text{аб}} = \bar{\vartheta}_{\text{от}} + \bar{\vartheta}_{\text{пер}}$, а векторы $\bar{\vartheta}_{\text{от}}$ и $\bar{\vartheta}_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны (см. рис. К4, *а*), то в момент времени $t_1 = 1$ с

$$\vartheta_{\text{аб}} = \sqrt{\vartheta^2_{\text{от}} + \vartheta^2_{\text{пер}}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0{,}5)^2} = 0{,}93 \text{ м/с.}$$

5. Определение $a_{\text{аб}}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}^{\tau}_{\text{от}} + \bar{a}^{n}_{\text{от}} + \bar{a}^{\tau}_{\text{пер}} + \bar{a}^{n}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}. \tag{7}$$

Для определения $a_{\text{аб}}$ проведем координатные оси M_1xyz (см. рис. К4, а) и вычислим проекции вектора $\bar{a}_{\text{аб}}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\bar{a}^{\tau}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}_{\text{кор}}$ лежат в проведенной оси x, а векторы $\bar{a}^{\tau}_{\text{от}}$, $\bar{a}^{n}_{\text{от}}$, $\bar{a}^{n}_{\text{пер}}$ расположены в плоскости дуги ADB, т.е. в плоскости M_1yz (см. рис. К4, *б*). Тогда, проектируя обе части равенства (7) на координатные оси и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени $t_1 = 1$ с

$$a_{\text{аб}x} = a^{\tau}_{\text{пер}} + a_{\text{кор}} = 1 + 2{,}72 = 3{,}72 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{\text{аб}y} = a^{n}_{\text{пер}} + a^{n}_{\text{от}}\cos 60^\circ - \left|a^{\tau}_{\text{от}}\right|\cos 30^\circ = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\sqrt{3}}{6} = 0{,}71 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{абz} = -\left|a_{от}^{\tau}\right|\cos 60° - a_{от}^{n}\cos 30° = -\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi\sqrt{3}}{16}\right) = -1{,}59 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{аб}$ в момент времени $t_1 = 1$ с:

$$a_{аб} = \sqrt{a_{абx}^2 + a_{абy}^2 + a_{абz}^2} = 4{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\vartheta_{аб} = 0{,}93$ м/с; $a_{аб} = 4{,}1$ м/с^2.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

1. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр (шифр зачетной книжки), группа.

При чтении текста каждой задачи необходимо учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам — вертикальными. Это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми; нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице все величины, относящиеся к ним, должны иметь соответствующие номера.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т. е. к номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера — разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

2. Решение каждого задания обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй). Перед выполнением задания необходимо записать его условие, выбранные в соответствии с вариантом исходные данные, изобразить расчетную схему. Расчетная схема должна быть вычерчена в масштабе, с указанием всех размеров, числовых данных и осей, используемых в расчете. Нагрузки следует показать в соответствии с их действительными направлениями.

3. При выполнении задания сначала надо наметить ход решения и те допущения, которые могут быть положены в его основу, а затем произвести расчет; при этом все необходимые вычисления (по возможности) сначала проделать в общем виде, обозначая все данные и искомые величины буквами, после чего вместо буквенных обозначений поставить их числовые значения и найти результат. Везде необходимо придерживаться стандартных обозначений. Расчеты должны быть выполнены в определенной последовательности, теоретически обоснованы и сопровождены пояснительным текстом.

Решение записывается подробно и аккуратно со всеми вычислениями, вспомогательными чертежами и пояснениями. При выполнении расчетов необходимо указывать литературу с отметкой страниц и таблиц, откуда взяты расчетные формулы, расчетные напряжения и другие величины.

4. Все расчеты должны производиться в единицах СИ. Вычисления следует вести с обычной в технических расчетах точностью (до трех значащих цифр после запятой).

5. Выполненные контрольные работы должны быть высланы в университет на рецензирование. Работы, поступившие на рецензирование позже установленного срока, рассмотрению не подлежат.

6. После рецензирования контрольной работы необходимо внести в соответствии с замечаниями рецензента требуемые исправления (не в тексте решения, а в конце тетради на чистых листах после заголовка «Исправления к заданию»).

7. Если количество замечаний невелико и ошибки, допущенные студентом при выполнении контрольной работы, несущественны, т.е. требуется незначительная ее доработка, рецензент делает на обложке запись «К защите допускается».

В противном случае, если требуется существенно переработать контрольную работу или переписать ее заново, рецензент делает на

обложке запись «К защите не допускается» (с соответствующим комментарием).

8. Запрещается стирать или заклеивать отмеченные преподавателем ошибки.

9. Работы, оформленные небрежно и без соблюдения предъявляемых к ним требований, а также работы, выполненные не по своему варианту, не рассматриваются и не засчитываются, возвращаются для переделки. К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

Выбор варианта

Студент выбирает *номер рисунка* по предпоследней цифре учебного шифра, а *номер условия* в таблице — по последней.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ (ЗАЧЕТУ) СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ

1. Введение в кинематику. Способы задания движения точки.
2. Векторы скорости и ускорения точки.
3. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения.
4. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения.
5. Частные случаи движения точки.
6. Поступательное движение твердого тела (теорема).
7. Вращательное движение твердого тела вокруг оси. Угловая скорость и угловое ускорение.
8. Скорость и ускорение точек вращающегося тела.
9. Уравнения плоскопараллельного движения.
10. Определение скоростей и теорема о скоростях точек плоской фигуры.
11. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.
12. Определение ускорений точек плоской фигуры.
13. Сложное движение точки. Теорема о сложении скоростей.
14. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса).

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Воронков, И. М.* Курс теоретической механики / И. М. Воронков. – 16-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1996. – 494 с.
2. *Тарг, С. М.* Краткий курс теоретической механики : учебник для студентов втузов / С. М Тарг. – Москва : Высшая школа, 2008. – 416 с.
3. *Бать, М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Статика и кинематика : учеб. пособие для втузов / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 10-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Политехника, 1995. – 670 с.
4. *Аркуша, А. И.* Руководство к решению задач по теоретической механике : учеб. пособие для студ. машиностроительных специальностей средних спец. учеб. заведений / А. И. Аркуша. – 4-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 1999. – 336 с.
5. *Лачуга, Ю. Ф.* Теоретическая механика : учебник для студентов вузов по агроинженерным специальностям / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. – Москва: Колос, 2000. – 576 с.
6. *Мещерский, И. В.* Задачи по теоретической механике : учеб. пособие для студентов вузов, обуч. по техническим специальностям / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – 37-е изд., испр. – СПб. : ЛАНЬ, 1998. – 448 с.
7. *Руденок, Е. Н.* Техническая механика. Сборник заданий : учебное пособие / Е. Н. Руденок, В. П. Соколовская. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 238 с.
8. Сборник задач по теоретической механике с решениями. Статика. Кинематика : учеб. пособие для студентов втузов. – В 2-х ч. Ч. 1 / В. А. Акимов [и др.]. – Минск : УП «Технопринт», 2001. – 366 с.
9. Сборник задач по теоретической механике с решениями. Динамика : учебное пособие для студентов втузов. – В 2-х ч. Ч. 2 / В. А. Акимов [и др.]. – Минск : УП «Технопринт», 2001. – 576 с.

10. *Федута, А. А.* Теоретическая механика и методы математики : учеб. пособие для студентов втузов / А. А. Федута, А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. – Минск : УП «Технопринт», 2000. – 504 с.

Дополнительная

1. Кинематика : методические указания по теоретической механике для студ. АМФ по спец. С.03.01.00 «Механизация сельского хозяйства» / сост. : Н. Н. Филиппова [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2002. – 30 с.
2. Статика, кинематика : методические указания по теоретической механике для студ. после техникума АМФ по спец. 1-74 06 01 «Технич. обеспеч. процессов с.-х. пр-ва», 1-74 06 02 «Технич. обеспеч. процессов хранения и перераб. с.-х. продукции», 1-74 06 03 «Ремонтно-обслуж. пр-во в с.х.», 1-74 06 06 «Матер.-технич. обеспеч. АПК» / сост. : Н. Н. Филиппова [и др.]. – Минск, 2003. – 45 с. – (200).
3. Теоретическая механика : методические указания и задания к вып. контр. работ для студ. заочн. отд. по спец.: 1-74 06 01 «Технич. обеспеч. процессов с.-х. пр-ва», 1-74 06 02 «Технич. обеспеч. процессов хранения и перераб. с.-х. продукции» / сост. : И. С. Крук, Ю. С. Биза, Т. В. Смагина. – Минск : БГАТУ, 2006. – 76 с. – (300).
4. Теоретическая механика : методические указания и контрольные задания к вып. контр. работ для студ. заочн. отд. по спец.: 1-74 06 01 «Технич. обеспеч. процессов с.-х. пр-ва» (НИСПО), 1-74 06 03 «Ремонтно-обслуж. пр-во в сельском хозяйстве» / сост. : И. С. Крук, Т. А. Рубинова. – Минск : БГАТУ, 2006. – 50 с. – (300).

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс

Составители:
Биза Юльян Степанович,
Ракова Нина Леонидовна,
Тарасевич Ирина Антоновна

Ответственный за выпуск *А. Н. Орда*
Редактор *Н. А. Антипович*
Компьютерная верстка *А. И. Стебули*

Подписано в печать 28.12.2011 г. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 5,63. Тираж 170 экз. Заказ 1156.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный аграрный технический университет».
ЛИ № 02330/0552984 от 14.04.2010.
ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.
Пр. Независимости, 99–2, 220023, Минск.