

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СЖАТЫХ СТЕРЖНЯХ БОЛЬШОЙ ГИБКОСТИ

*Студент – Мартынюк В.А., 29 тс, 2 курс, ФТС
 Чaucный руководитель – Мисуно О.И., к.т.н., доцент
 УО «Белорусский государственный аграрный технический
 университет», г. Минск, Республика Беларусь*

Длинный стержень, изготовленный из материала одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, надежно работающий при действии растягивающей нагрузки, может разрушиться при действии такой же, но сжимающей нагрузки. При этом нормальные напряжения в поперечном сечении стержня, обусловленные продольной силой в момент когда происходит разрушение, будут намного меньше предела прочности материала. Объяснение такого явления заключается в том, что при действии сжимающей нагрузки стержень не может сохранить прямолинейную форму равновесия. В этом случае в сечениях стержня наряду с продольной силой действует и изгибающий момент, интенсивно возрастающий при увеличении нагрузки сверх критической. Изгибающий момент вызывает резкое увеличение напряжений, перемещений и часто может являться причиной разрушения сжатых стержней.

Нормальные напряжения в поперечном сечении прямого стержня при воздействии сжимающей силы F , значение которой меньше критической силы определяются как

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (1)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

В реальных конструкциях неизбежны некоторые отклонения оси стержня от прямолинейного направления и эксцентричное приложение сжимающей силы. Если в ненагруженном состоянии стержень имеет слегка изогнутую ось с наибольшим прогибом a и сжимающая сила приложена с эксцентриситетом e , то с самого начала нагружения в сечениях возникает изгибающий момент $M = Fy_0$ (рисунок 1). В стержне возникают наибольшие нормальные напряжения равные

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{Fy_{\max}}{W_{\min}} = \sigma \left(1 + \frac{Ay_{\max}}{W_z} \right), \quad (2)$$

где W_{\min} – наименьший осевой момент сопротивления поперечного сечения стержня;

y_{\max} – наибольший прогиб стержня.

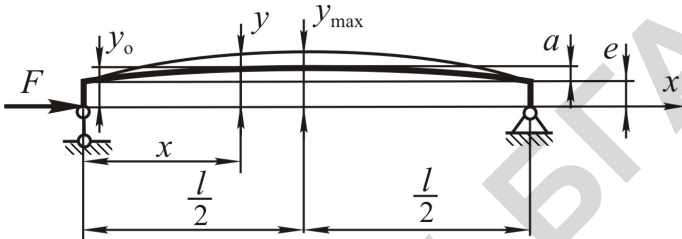


Рисунок 1 – Расчетная схема сжатого стержня

Для определения наибольшего прогиба стержня рассмотрим уравнение изогнутой оси стержня, которое в деформированном состоянии принимает вид

$$\frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} = -\frac{Fy}{EI_{\min}}, \quad (3)$$

где I_{\min} – наименьший осевой момент инерции поперечного сечения стержня;

E – модуль упругости материала.

Приняв, что изогнутая ось стержня до нагружения представляется уравнением

$$y_0 = e + a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (4)$$

из выражения (3) введя обозначение $k^2 = F / EI_{\min}$ получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = -a \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (5)$$

Отсюда с учетом начальных условий $y(0) = y(l) = e$ получаем

$$y = e \frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\left(1 - 2\frac{x}{l}\right)\right)}{\cos\frac{kl}{2}} + \frac{a}{1 - \left(\frac{kl}{\pi}\right)^2} \sin\frac{\pi x}{l}. \quad (6)$$

Известно, что критическая сила для сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами определяется по формуле Эйлера

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l^2}. \quad (7)$$

Тогда, наибольший прогиб, возникающий в среднем сечении стержня, когда $x = l/2$, будет равен

$$y_{\max} = \frac{e}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{F}{F_k}}\right)} + \frac{a}{1 - \frac{F}{F_k}}. \quad (8)$$

Зависимость $\frac{y_{\max}}{l} = f\left(\frac{F}{F_k}\right)$ при заданных относительных зна-

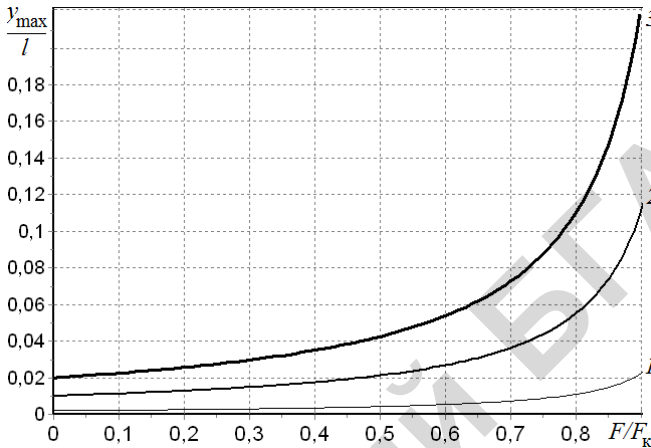
чениях эксцентриситета приложения силы e/l и начальной кривизны a/l стержня показана на рисунке 2. В отличие от идеально прямого центрально нагружаемого стержня перемещения появляются с самого начала действия сжимающей силы. При приближении величины силы F к критическому значению F_k прогибы резко возрастают. По мере увеличения эксцентриситета приложения силы и начальной кривизны интенсивность роста прогибов также увеличивается.

С учетом найденного наибольшего прогиба, возникающие в стержне максимальные напряжения можно найти в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma \left(1 + \frac{A}{W_{\min}} \left(\frac{e}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{F}{F_k}}\right)} + \frac{a}{1 - \frac{F}{F_k}} \right) \right). \quad (9)$$

Как видно из формулы (9) наибольшие напряжения в стержне возникают с самого начала действия сжимающей силы, причем

возрастают не пропорционально силе. При приближении величины силы F к критическому значению F_k наибольшие напряжения в стержне, как и прогибы резко возрастают.



1 – $e/l = 0,01$; $a/l = 0,01$;
 2 – $e/l = 0,02$; $a/l = 0,02$;
 3 – $e/l = 0,03$; $a/l = 0,03$

Рисунок 2 – Зависимость наибольшего прогиба стержня от величины сжимающей силы

Таким образом, если элемент конструкции в виде стержня в процессе работы будет испытывать действие сжимающей силы, то необходимо стремиться к тому, что бы его ось была идеально прямой, а линия действия силы проходила как можно ближе к оси.

Список использованных источников

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: учебник / М.Д. Подскребко. – Минск : Выш. шк., 2007. – 797 с.: ил.