УДК 511.42

Морозова И.М., к.ф.-м.н., доцент, Кемеш О.Н.
УО «Белорусский государственный аграрный технический университет», г. Минск

МЕТОДЫ ДИОФАНТОВОГО АНАЛИЗА В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Ключевые слова: математическое моделирование, теория игр, диофантов анализ.
Key words: mathematical modeling, game theory, Diophantine analysis.
Аннотация: в статье рассмотрено одно из приложений теории диофантовых приближений в задачах математического моделирования
Summary: the article deals with one of the applications of the theory of Diophantine approximations in problems of mathematical modeling

Экономический анализ явлений и процессов неразрывно связан с экономико-математическим моделированием. Его методы и модели дают возможность получить четкое представление об исследуемом объекте, охарактеризовать и количественно описать его внутреннюю структуру и внешние связи [1]. Процесс моделирования условно можно подразделить на следующие этапы: анализ теоретических закономерностей, свойственных изучаемому явлению или процессу и эмпирических данных о его структуре и особенностях; определение методов, с помощью которых можно решить задачу; анализ полученных результатов. Каждый из перечисленных выше этапов моделирования требует применения особых методов и методик.

В настоящей работе мы рассмотрим некоторые особенности моделей потребительского выбора и метод определения количества решений одной из них.

В теории потребительского выбора одним из основных является уравнение Слуцкого.

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i}{\partial D} x_j$$

Это уравнение связывает действие эффекта замены и эффекта дохода с результатами изменения спроса.

При решении которого имеем уравнение $\sum_j \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right] p_j + \left[\frac{\partial x_i}{\partial D}\right] D = 0$,

где $u = u(x_1, x_2, ... x_n)$ — целевая функция потребителя, x_i — количество определенного блага, $p_i = (p_1, p_2, ... p_n)$ — вектор цен, D — доход.

Для решения задачи применяются алгебраические методы, основанные на системе линейных уравнений и неравенств, итерационные методы, а также сведение задачи к некоторой системе дифференциальных уравнений. Решая задачу оптимизации целевой функции, надо установить количество решений на интервале, например временном. На данном этапе исследования экономического явления полезным может быть диофантов анализ.

В настоящее время к диофантовым приближениям относят проблемы совместных покоординатных приближений векторов точками с рациональными, алгебраическими координатами. Эти результаты представляют обобщения теоремы Хинчина [2], которую мы приведем в виде теоремы, называемой теоремой Хинчина-Грошева.

Далее через $\|x\| = \min(x - [x], [x] - x)$ будем обозначать расстояние до ближайшего к x целого числа. Пусть $x \in R^n$, $a = \in (a_0, a_1, ... a_n) \in Z^{n+1}$, μB — мера Лебега в R^n, $\psi(s)$ — монотонно убывающая функция, определенная для s >0.

Теорема (Хинчина-Грошева). Обозначим через $L_n(\psi)$ множество точек некоторого параллелепипеда $T \subset R^n$, для которых неравенство

$$\|a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + ... + a_1 x_1\| < \psi(H) \tag{1}$$

имеет бесконечное множество решений, где $H = \max_{1<j<n} |a_j|$. Тогда

$$\mu L_n = \begin{cases} 0, \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1} \psi(H) < \infty, \\ \mu T, \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1} \psi(H) = \infty, \end{cases}$$

Результат обобщен на приближения на невырожденных кривых в многообразиях. Так в работах [3-6] были доказаны случаи сходимости и расходимости теоремы типа Хинчина-Грошева. Естественно при этом получать оценки мер решений (1) с явной зависимостью от n и $Q > 1$, являющимся границей для $H \leq Q$.

В данной работе такие оценки получены в теореме для квадратичных форм, однако оценка по Q не достигает оценки Дирихле.

Теорема. В квадрате со стороной $c_6 Q^{1-\gamma}$ не может быть боле чем $2^{n+5}\delta^{-1}c_6 Q^{n-1-2\gamma}$ алгебраических точек, порожденных полиномами $P(t) \in \mathrm{P}_n(\mathrm{Q})$.

В начале получим оценку сверху для количества алгебраических точек в квадрате М со стороной $c_6 Q^{-\gamma}$. Предположим, что их количество превосходит $c_7 Q^{n+1-2\gamma}$. Пусть $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ одна из таких точек, а α_1, α_2 — корни некоторого полинома $P(t) \in \mathrm{P}_n(Q)$. Оценим значение этого полинома в любой точке (x,y) квадрата М. Из $(\alpha_1, \alpha_2) \in M$ и $(x,y) \in$ M следует $|x - \alpha_1| < c_6 Q^{-\gamma}$, $|y - \alpha_2| < c_6 Q^{-\gamma}$.

Разложим полином $P(t)$ в ряд Тейлора по переменной x в окрестности точки α_1. Имеем

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j \tag{2}$$

Так как $\alpha \in [0,1)$ то из (2) получаем $|P'(\alpha_1)(x - \alpha_1)| < c_6 n^2 Q^{1-\gamma}$.

При достаточно большом Q все остальные члены разложения в (2) оцениваются величиной $c_6 n Q^{1-\gamma}$ и поэтому

$$|P(x)| < 0 + c_6 n^2 Q^{1-\gamma} + n \cdot c_6 n Q^{1-\gamma} = 2 c_6 n^2 Q^{1-\gamma}$$

Аналогичную оценку мы можем получить и для $P(y)$, $|P(y)| < 2 c_7 n^2 Q^{1-\gamma}$. Так количество точек $\overline{\alpha}$, а значит и полиномов $P(t) \in \mathrm{P}_n(Q)$ превосходит $c_7 Q^{n+1-2\gamma}$. То среди них по принципу ящиков Дирихле найдется не менее $\dfrac{c_7}{(2n+1)^{n-1}} Q^{2-2\gamma}$ многочленов, у которых коэффициенты при $x^n, \ldots, x^2$ совпадают.

Обозначим эти многочлены $K_0(t), K_1(t), \ldots K_s(t)$, где $s > 2^{-n-1} c_7 Q^{2-2\gamma}$. Образуем новые s многочленов

$R_1(t) = K_1(t) - K_0(t), ..., R_s(t) = K_s(t) - K_0(t)$. Все многочлены $R_j(t)$ имеют степень $\deg R_j \leq 1$. Для всех $(x, y) \in M$.

$$\left|R_j(x)\right| < 4c_6 Q^{1-\gamma}, \quad \left|R_j(y)\right| < 4c_6 Q^{1-\gamma} \tag{3}$$

Подсчитаем сейчас количество многочленов первой степени $R_j(t), \quad 1 \leq j \leq s$ удовлетворяющих условиям (3).

Пусть $R_j(t) = b_1 t + b_0, \quad |b_1| < 2Q, \quad |b_0| < 2Q$. Тогда из (3) имеем

$$\begin{gathered} |b_1 x + b_0| < 2c_6 Q^{1-\gamma} \\ |b_1 y + b_0| < 2c_6 Q^{1-\gamma} \end{gathered}$$

Перепишем систему неравенств в виде системы уравнений

$$\begin{gathered} |b_1 x + b_0| = Q_1(x) c_6 Q^{1-\gamma} \\ |b_1 y + b_0| = Q_2(y) c_6 Q^{1-\gamma}, \quad |Q_k(t)| \leq 2 \end{gathered} \tag{4}$$

Решим ее по правилу Крамера относительно неизвестных b_0, b_1. Определитель системы уравнений (4) равен $\Delta = x - y$, а определитель $\Delta(b_1)$ и $\Delta(b_0)$ могут быть оценены

$$\left|\Delta(b_l)\right| = c_6 Q^{1-\gamma} \left|Q_1(x) - Q_2(y)\right| < 4c_6 Q^{1-\gamma}, \quad l = 0, 1$$

Так как $|\Delta| > \delta$, то $|b_0| < 4\delta^{-1} c_6 Q^{1-\gamma}, \quad |b_1| < 4\delta^{-1} c_6 Q^{1-\gamma}$ и количество многочленов первой степени с условием не превосходит $L = 2^4 \delta^{-1} c_6 Q^{2-2\gamma}$.

Имеем

$$2^{-n-1} c_7 Q^{2-2\gamma} < L < 2^4 \delta^{-1} c_6 Q^{2-2\gamma} \tag{5}$$

При $c_7 > 2^{n+5} \delta^{-1} c_6$ неравенство (5) противоречиво. Мы доказали справедливость теоремы.

Доказанная теорема может быть применима для определения количества решений в моделях теории игр и ряде других.

Список использованной литературы

1. Замков, О.О. Математические методы в экономике.— М.: Издательство «Дело и Сервис», 2011.— 368 с.

2. Спринджук — Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, Наука и техника, 1967.

3. Пяртли, А.С. Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства, Функц. Анализ и его прил., 3:4, 1969. — С. 59–62.

4. Bernik, I.V., Kleinbock, D., Margulis, G.A.. Khintchine-type theorems on manifokls the convergence case for standard and multiplicative versions, Internet. Marh. Res. Notices. — 2001. — P. 453–486.

5. Beresnevich, V.V. Groshew type theorem for convergence on manifolds, Acta Math. Hungar. 94. — 2002. — no. 1-2. — P. 99–130.

6. Beresnevich, V.V., Bernik, I.V., Kleinbork, D.Y., Margulis, G.A. Metrie Diophantine approximation the Khintechine Groshev theorem for nondegenerate manifolds. Dedicated to Yuri I. Manin on the occasion of his 65th birthday. Mosc. — Math. J. 2. — 2002. — no. 2. — P. 203–225.

7. Гетце, Ф., Коледа, Д.В., Королев, М.А. О числе квадратичных многочленов с ограниченными дискриминантами. (в печати) Препринт: http://arxiv org/abs/130s. 2091.3.4.6

УДК 004:33

Сапун О.Л., к.пед.н., доцент
УО «Белорусский государственный аграрный технический университет», г. Минск
Крошинская Л.И., доцент
ЧУО «Белорусский институт правоведения», г. Минск

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОННОГО БИЗНЕСА

Ключевые слова: электронный бизнес, бизнес-модель, виртуальное предприятие, сетевое предприятие.
Keywords: e-business, business model, electronic companies, virtual companies, the enterprise network.

Аннотация: Современное предприятие, функционирующее на рынке Интернет-услуг, представляет собой сложный комплекс, динамизм и слаженность работы которого обеспечивается механизмом управления.