ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М.А. Прищепов, д.т.н., доцент;
И.Г. Рутковский, ст. преподаватель (УО БГАТУ, г.Минск).

Значительный круг задач сельскохозяйственного производства сводится к задачам линейного программирования (ЗЛП). При обучении студентов целесообразно показать основополагающие методы, на которых основывается решение такого рода задач. Наиболее простым и наглядным методом решения ЗЛП является графический метод. Однако его удобно применять только для задач с двумя оптимизируемыми параметрами x_1 и x_2, либо когда через какие-то два оптимизируемые параметра можно выразить остальные. При трех оптимизируемых параметрах его использование усложняется, а при четырех и более становится невозможным. Для углубленного изучения целесообразно изучить основы симплекс-метода.

Исходя из этого, для учебных целей выбраны примеры с двумя и тремя оптимизируемыми параметрами. Эти примеры первоначально решаются графическим методом. Для закрепления знаний задача анализируется при использовании симплекс-метода. Освоенная методика легко адаптируется к реальным задачам с десятками оптимизируемых параметров, решение которых необходимо проводить в пакетах прикладных программ.

Рассмотрим некоторые особенности, которые встречаются при решении ЗЛП. Например, наличие вырожденности не свидетельствует о какой-либо “опасности” при решении ЗЛП. С практической точки зрения специфика ситуации целиком объясняется наличием в модели, по крайней мере, одного избыточного ограничения.

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1$$
$$x_1 \le 0{,}5$$
$$x_2 \le 0{,}5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 0{,}2$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0$$

$$S = 10x_1 + 7x_2 + 5x_3 \to \max$$

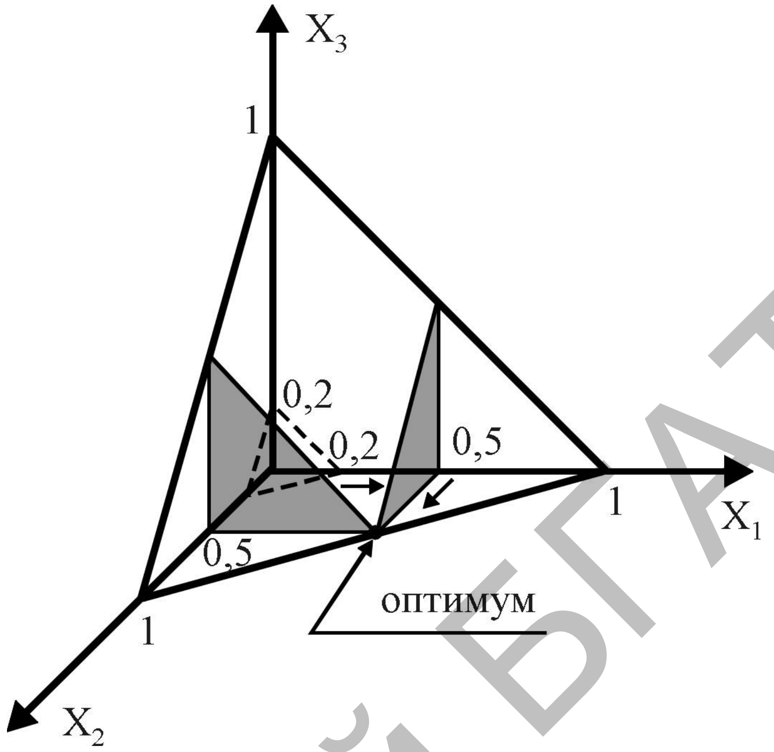

Рисунок 1 − Графическое решения задания при наличии вырожденности

Таблица 1 − Пример решения задания симплекс-методом с вырожденным оптимальным решением

Итерация	Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Решение
0	S	-10	-7	-5	0	0	0	0	0
	x_4	1	1	1	1	0	0	0	1
	x_5	1	0	0	0	1	0	0	0,5
	x_6	0	1	0	0	0	1	0	0,5
	x_7	-1	-1	-1	0	0	0	1	-0,2
1	S	0	-7	-5	0	10	0	0	5
	x_4	0	1	1	1	-1	0	0	0,5
	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0,5
	x_6	0	1	0	0	0	1	0	0,5
	x_7	0	-1	-1	0	1	0	1	0,3
2	S	0	0	2	7	3	0	0	8,5
	x_2	0	1	1	1	-1	0	0	0,5
	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0,5
	x_6	0	0	-1	-1	1	1	0	0
	x_7	0	0	0	1	0	0	1	0,8

Когда прямая или плоскость (гиперплоскость), представляющая целевую функцию, параллельна прямой или плоскости (гиперплоскости), соответствующей связывающему ограничению (которое в точке оптимума выполняется как точное равенство), целевая функция принимает одно и то же оптимальное значение в некоторой совокупности точек пространства решений. Такие решения называются альтернативными оптимальными решениями.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 \le 1\\
&x_1 \le 0{,}5\\
&x_2 \le 0{,}5\\
&x_1 - x_2 + 4x_3 \le 0{,}8\\
&x_1 + x_2 + x_3 \ge 0{,}2\\
&x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$S = 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 \to \max$$

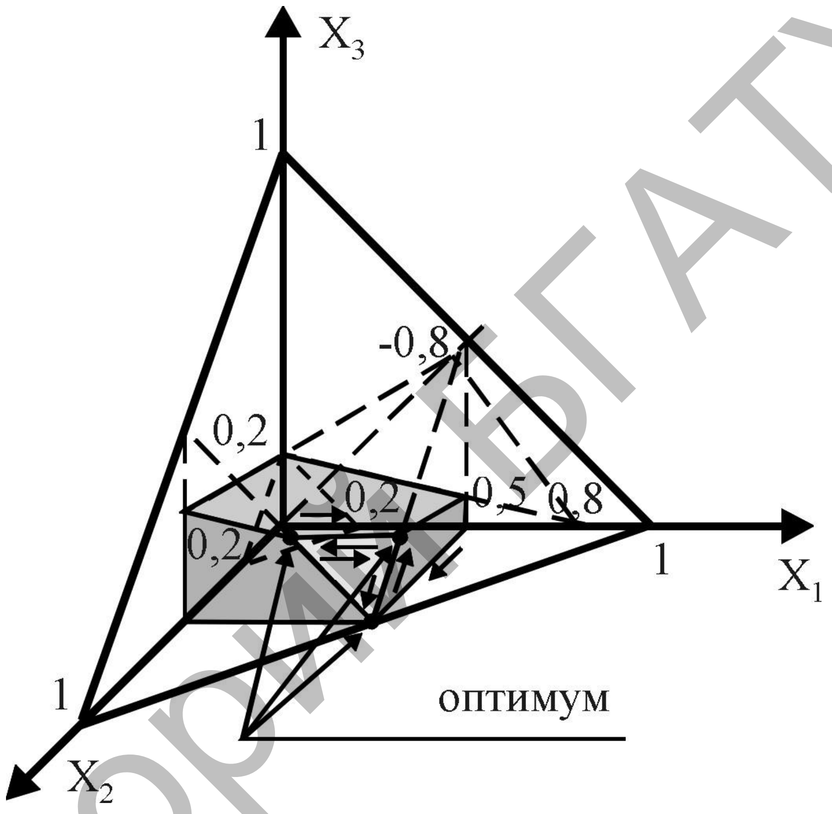

Рисунок 2 − Графическое решения задания при наличии бесконечного множества решений

Информация о наличии альтернативных оптимумов оказывается очень полезной при решении практических задач, так как лицо, принимающее решение, получает возможность выбора альтернативного варианта, в наибольшей степени отвечающего сложившейся производственной ситуации, и при этом нет необходимости исследовать изменение целевой функции. Бесконечное множество решений в примере (рисунок 2) объясняется тем, что плоскость целевой функции S коснется всей плоскости симплекса идентифицированной точками (0,5;0,5;0), (0,5;0,34;0,16), (0,23;0,5;0,27).

Таблица 2 – Пример решения задания симплекс-методом с бесконечным множеством решений

Итерация	Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение
0	S	-10	-10	-10	0	0	0	0	0	0
	x_4	1	1	1	1	0	0	0	0	1
	x_5	1	0	0	0	1	0	0	0	0,5
	x_6	0	1	0	0	0	1	0	0	0,5
	x_7	1	-1	4	0	0	0	1	0	0,8
	x_8	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	-0,2
1	S	0	-10	-10	0	10	0	0	0	5
	x_4	0	1	1	1	-1	0	0	0	0,5
	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0	0,5
	x_6	0	1	0	0	0	1	0	0	0,5
	x_7	0	-1	4	0	-1	0	1	0	0,3
	x_8	0	-1	-1	0	1	0	0	1	0,3
2	S	0	0	0	10	0	0	0	0	10
	x_2	0	1	1	1	-1	0	0	0	0,5
	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0	0,5
	x_6	0	0	-1	-1	1	1	0	0	0
	x_7	0	0	5	1	-2	0	1	0	0,8
	x_8	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8
3	S	0	0	0	10	0	0	0	0	10
	x_2	0	1	0	0,8	-0,6	0	-0,2	0	0,34
	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0	0,5
	x_6	0	0	0	-0,8	0,6	1	0,2	0	0,16
	x_3	0	0	1	0,2	-0,4	0	0,2	0	0,16
	x_8	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8
4	S	0	0	0	10	0	0	0	0	10
	x_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0,5
	x_1	1	0	0	1,33	0	-1,67	-0,33	0	0,23
	x_5	0	0	0	-1,33	1	1,67	0,33	0	0,27
	x_3	0	0	1	-0,33	0	0,67	0,33	0	0,27
	x_8	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8
5	S	0	0	0	10	0	0	0	0	10
	x_2	0	1	0	0,8	-0,6	0	-0,2	0	0,34
	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0	0,5
	x_6	0	0	0	-0,8	0,6	1	0,2	0	0,16
	x_3	0	0	1	0,2	-0,4	0	0,2	0	0,16
	x_8	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8
6	S	0	0	0	10	0	0	0	0	10
	x_2	0	1	1	1	-1	0	0	0	0,5
	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0	0,5
	x_6	0	0	-1	-1	1	1	0	0	0
	x_7	0	0	5	1	-2	0	1	0	0,8
	x_8	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8

Условия некоторых ЗЛП могут допускать бесконечное увеличение значений переменных без нарушения наложенных ограничений. Это свидетельствует о том, что пространство решений, по крайней мере, в одном направлении не ограничено. Следовательно, в таких случаях целевую функцию можно сделать сколь угодно большой (задача максимизации) или сколь угодно малой (задача минимизации). Характеризуя такую ситуацию обычно говорят, что и пространство решений, и оптимальные значения целевой функции не ограничены.

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \le 1\\
&x_1 \le 0{,}5\\
&x_2 \le 0{,}5\\
&x_1 + x_2 + x_3 \ge 0{,}2\\
&x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0\\
\\
&S = x_1 + 12x_2 + 10x_3 \to \max
\end{aligned}
$$

Таблица 3 − Пример решения задания симплекс-методом с неограниченной целевой функцией

Итерация	Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Решение
0	S	-1	-12	-10	0	0	0	0	0
	x_4	1	1	0	1	0	0	0	1
	x_5	1	0	0	0	1	0	0	0,5
	x_6	0	1	0	0	0	1	0	0,5
	x_7	-1	-1	-1	0	0	0	1	-0,2

Неограниченность решения ЗЛП свидетельствует только об одном: разработанная модель недостаточно точна. Бессмысленность использования модели, прогнозирующей “бесконечную” прибыль, вполне очевидна. Наиболее типичные ошибки, приводящие к построению моделей такого рода, состоят в том, что

1) не учтено одно ограничение (или несколько);
2) неточно оценены параметры (постоянные), фигурирующие в некоторых ограничениях.

Во всех ограничениях коэффициенты при x_3 либо отрицательные, либо равны 0. Это означает, что x_3 можно бесконечно увеличивать, не нарушая ни одного ограничения модели и бесконечно увеличивая значение целевой функции.

Также необходимо рассмотреть случай, когда область допустимых решений неограниченно большая, а целевая функция не может увеличиваться до бесконечности, т.е. когда она конечна. Например, во всех ограничениях коэффициенты при x_3 либо отрицательные, либо равны 0, но значение стоимостного показателя при x_3 положительно.

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_2 \le 1 \\
& x_1 \le 0{,}5 \\
& x_2 \le 0{,}5 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \ge 0{,}2 \\
& x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$S = 5x_1 + 12x_2 - 10x_3 \to \max$$

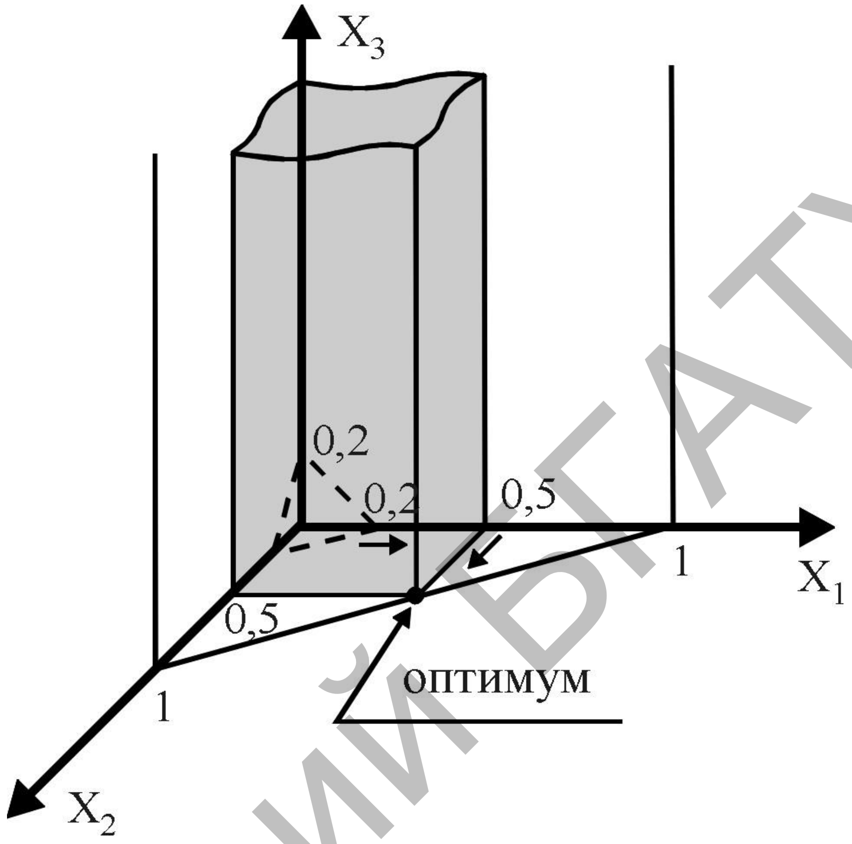

Рисунок 3 − Графическое решения задания, в котором пространство решений не ограничено, а оптимальное значение целевой функции конечно

Отсутствие допустимых решений, с практической точки зрения, следует рассматривать как свидетельство того, что модель построена некорректно, так как введенные ограничения оказались противоречивыми. Возможно также, что эти ограничения на самом деле и не должны выполняться одновременно. В этом случае необходимо построить модель, имеющую совершенно иную структуру и не предполагающую одновременного выполнения всех ограничений.

Информация о особенностях решении ЗЛП является весьма актуальной, она позволяет правильно оценить как решаемую задачу так и полученные результаты. При обучении студентов повышается заинтересованность обучаемых. Примеры графического решения задач, с тремя оптимизируемыми параметрами, обладают высокой наглядностью, что улучшает усвоение материала.

Таблица 4 − Решения задания симплекс-методом, в котором пространство решений не ограничено, а оптимальное значение целевой функции конечно

Итерация	Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Решение
0	S	-5	-12	10	0	0	0	0	0
	x_4	1	1	0	1	0	0	0	1
	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0,5
	x_6	0	1	0	0	0	1	0	0,5
	x_7	-1	-1	-1	0	0	0	1	-0,2
1	S	0	-12	10	0	5	0	0	2,5
	x_4	0	1	0	1	-1	0	0	0,5
	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0,5
	x_6	0	1	0	0	0	1	0	0,5
	x_7	0	-1	-1	0	1	0	1	0,3
2	S	0	0	10	12	-7	0	0	8,5
	x_2	0	1	0	1	-1	0	0	0,5
	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0,5
	x_6	0	0	0	-1	1	1	0	0
	x_7	0	0	-1	1	0	0	1	0,8
3	S	0	0	10	5	0	7	0	8,5
	x_2	0	1	0	0	0	1	0	0,5
	x_1	1	0	0	1	0	-1	0	0,5
	x_5	0	0	0	-1	1	1	0	0
	x_7	0	0	-1	-1	0	0	1	0,8

Литература

1. Таха, Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Кн.1. Пер. с англ. / Таха Х. – М.: Мир, 1985. – 479с.
2. Сергованцев, В.Т. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах: Учебник. – 3-е изд., перераб. и доп. / Сергованцев В.Т., Бледных В.В. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 214 с.: ил.
3. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций в экономике / Конюховский П.В. – СПб.: Издательство “Питер”, 2000. – 208с.