УДК 517.512.6

Н.Я.Козловский

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ С ДАННЫМ ВЕСОМ

В теории интерполирования и теории квадратурных формул большую роль играют системы тригонометрических полиномов вида

$$J_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{r=1}^{n}(a_r\cos rx+b_r\sin rx)$$

ортогональных друг к другу по данному весу на отрезке $[0,2\pi]$. Пусть

$$L_\kappa f(x)=f''(x)+\kappa^2 f(x),$$

$$u_n(x)=\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{\alpha+n},$$

тогда

$$J_n(x)=C_n\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^{-\alpha}L_0L_1\dots L_{n-1}u_n(x) \qquad (\mathrm{I})$$

($\alpha\in R$, $\alpha>-\frac{1}{2}$, C_n – постоянный множитель) есть четный тригонометрический полином порядка n. Заметим, что полином $J_n(x)$ ортогонален по весу $\rho(x)=\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{\alpha}$ на $[0,2\pi]$ по всякому тригонометрическому полиному порядка не выше n-1. Исходя из (I), можно получить следующее выражение:

$$J_n(x)=C_n\Big[(-1)^n\frac{(\alpha+n)\Gamma(\alpha+2n)}{2^{2n-1}\Gamma(\alpha+1)}\cos nx+(-1)^{n-1}\frac{\alpha n(\alpha+n)}{2^{2n-2}\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+2n-1)\cos(n-1)x+\dots\Big].$$

Пусть $\tilde{J}_n(x)$ есть полином $J_n(x)$, у которого старший коэффициент равен единице. Для указанных полиномов справедлива следующая рекуррентная формула

$$\tilde{J}_{n+1}(x)=(2\cos x-\beta_n)\tilde{J}_n(x)-\gamma_n\tilde{J}_{n-1}(x),$$

где

$$\beta_n=\frac{\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+2n)^2-1},$$

$$\gamma_n=\frac{4n(2n-1)(2\alpha+2n-1)(\alpha+n-1)}{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)(\alpha+2n-1)^2}$$

В некоторых частных случаях можно найти явное выражение для $J_n(x)$, так для $\alpha = m \in N$ имеем

$$J_n(x) = C_n \frac{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{-2m}}{2^{2m+2n-1}} \times$$

$$\times \sum_{r=n}^{m+n} (-1)^r C_{2m+2n}^{m+n-r} \frac{r(r+n-1)!}{(r-n)!} \cos rx.$$