

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по аграрному техническому образованию
в качестве учебно-методического пособия для студентов
учреждений высшего образования по специальностям
1-74 06 01 «Техническое обеспечение процессов
сельскохозяйственного производства»,
1-74 06 02 «Техническое обеспечение процессов хранения
и переработки сельскохозяйственной продукции»,
1-74 06 03 «Ремонтно-обслуживающее производство
в сельском хозяйстве», 1-36 12 01 «Проектирование
и производство сельскохозяйственной техники»*

В двух частях

Часть 1

Минск
БГАТУ
2023

УДК 539.3/6
ББК 30.121
М55

Составители:

кандидат технических наук, доцент *О. И. Мисуно*,
кандидат технических наук, доцент *Д. Н. Колоско*

Рецензенты:

кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»
Белорусского национального технического университета
(доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой *Ю. В. Василевич*);
кандидат технических наук, доцент,
заместитель генерального директора по научной работе
РУП «НПЦ НАН Беларуси по механизации
сельского хозяйства» *Н. Г. Бакач*

Механика материалов в примерах и задачах : учебно-методическое
М55 пособие : в 2 ч. / сост.: О. И. Мисуно, Д. Н. Колоско. – Минск :
БГАТУ, 2023. – Ч. 1. – 196 с.
ISBN 978-985-25-0222-1.

Подготовлено в соответствии с теоретическим курсом «Механика материалов».
Содержит основные теоретические сведения и задачи по всем разделам, предусмотренным учебной программой.

Предназначено для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям: 1-74 06 01 «Техническое обеспечение процессов сельскохозяйственного производства», 1-74 06 02 «Техническое обеспечение процессов хранения и переработки сельскохозяйственной продукции», 1-74 06 03 «Ремонтно-обслуживающее производство в сельском хозяйстве», 1-36 12 01 «Проектирование и производство сельскохозяйственной техники».

УДК 539.3/6
ББК 30.121

ISBN 978-985-25-0222-1 (ч. 1)
ISBN 978-985-25-0221-4

© БГАТУ, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Общие для всех задач данные	5
1. Растяжение и сжатие	6
2. Основы теории напряженного и деформированного состояния. Теории прочности.....	22
3. Геометрические характеристики плоских сечений	38
4. Прямой поперечный изгиб.....	54
5. Кручение.....	75
6. Сложное нагружение.....	86
7. Перемещения в упругой системе при произвольной нагрузке	122
8. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил.....	140
9. Продольный изгиб прямых стержней.....	152
10. Расчет на прочность при циклически изменяющихся напряжениях.....	165
11. Динамические нагружения	179
Список использованной литературы	194

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов – это базовая техническая учебная дисциплина, развивающая у студентов инженерное мышление и творческую интуицию, изучающая методы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Изучение курса «Механика материалов» должно сопровождаться решением задач, что будет способствовать пониманию и закреплению теоретического материала, развитию у студентов инженерного мышления и интуиции, освоению методов расчета элементов конструкций и деталей машин на прочность, жесткость и устойчивость.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с теоретическим курсом «Механика материалов» и является его неотъемлемым дополнением, главная цель которого помочь изучающим глубже понять теоретический материал, выработать необходимые навыки решения прикладных задач, развивать способность анализировать и обосновывать полученные результаты соответствующими теоретическими положениями, а также облегчить студентам изучение тем, выносимых на управляемую самостоятельную работу. Отличительная особенность издания – его практическая направленность. Постановка некоторых задач способствует вовлечению студентов в научно-исследовательскую работу, предполагающую поиск рационального решения.

Представленные в учебно-методическом пособии иллюстрации оформлены в соответствии с требованиями ЕСКД.

ОБЩИЕ ДЛЯ ВСЕХ ЗАДАЧ ДАННЫЕ

При отсутствии в условиях задач специальных указаний следует принять следующие значения указанных величин:

Модуль упругости стали при растяжении или сжатии	$E = 2 \cdot 10^5$ МПа
Модуль упругости алюминия и дуралюмина	$E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа
Модуль упругости чугуна	$E = 1,1 \cdot 10^5$ МПа
Модуль упругости меди	$E = 10^5$ МПа
Модуль упругости дерева вдоль волокон	$E = 10^4$ МПа
Модуль упругости стали при сдвиге	$G = 0,8 \cdot 10^4$ МПа
Коэффициент Пуассона стали	$\mu = 0,30$
Объемный вес стали	$\gamma = 7,8 \cdot 10^4$ Н/м ³
Температурный коэффициент линейного расширения стали	$\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}$
Температурный коэффициент линейного расширения меди	$\alpha = 16,5 \cdot 10^{-6}$

Размеры и геометрические характеристики прокатных профилей принимаются в соответствии с ГОСТами: двутавры стальные горячекатаные – ГОСТ 8239–89, швеллеры стальные горячекатаные – ГОСТ 8240–89; уголки стальные горячекатаные равнополочные – ГОСТ 8509–93.

1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Теоретические сведения

Растяжением (сжатием) называется вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор – продольная сила N (рис. 1.1).

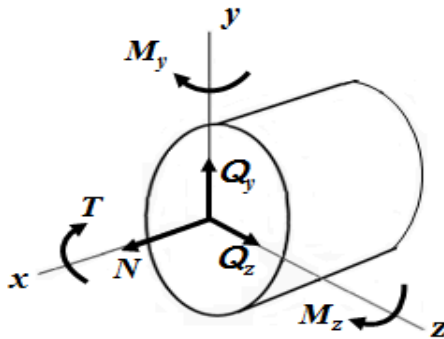


Рис. 1.1. Внутренние силовые факторы

Для определения опасного сечения бруса строится эпюра продольных сил. Эпюрой называется график изменения внутреннего силового фактора по длине бруса.

Правило знаков для продольных сил:

- если продольная сила направлена от сечения и вызывает растяжение отсеченной части бруса, то она положительна;
- если продольная сила направлена к сечению и вызывает сжатие отсеченной части бруса, то она отрицательна.

Это правило знаков схематично представлено на рис. 1.2.

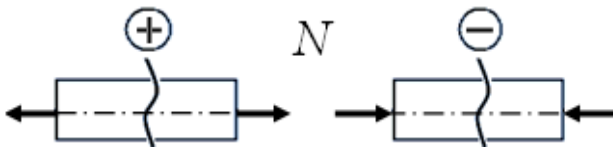


Рис. 1.2. Схематизация правила знаков для продольных сил

При растяжении или сжатии в поперечном сечении бруса возникают нормальные напряжения σ , равномерно распределенные по площади сечения и определяемые по расчетной формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.1)$$

где A – площадь поперечного сечения.

Из выражения (1.1) следует, что правило знаков для касательных напряжений совпадает с правилом знаков для продольных сил.

Для определения опасной точки в опасном сечении, строится эпюра нормальных напряжений σ . Выражению (1.1) соответствует эпюра напряжений, показанная на рис. 1.3. Во всех точках по высоте сечения напряжения одинаковы, каждая точка по высоте сечения является опасной.

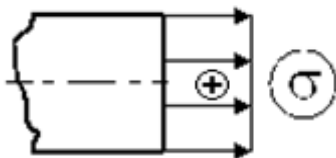


Рис. 1.3. Эпюра нормальных напряжений при растяжении

Удлинение (укорочение) стержня Δl при растяжении (сжатии) определяется по закону Гука в абсолютных единицах:

$$\Delta l = \frac{N l}{E A}, \quad (1.2)$$

где N – продольная сила на данном участке стержня;

l – начальная длина участка;

A – площадь поперечного сечения;

E – модуль упругости первого рода или модуль Юнга.

Из формулы (1.2) следует, что чем больше произведение модуля Юнга на площадь поперечного сечения, тем меньше изменение

длины стержня. Произведение EA называется жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении или сжатии.

Отношение удлинения стержня к начальной длине называется относительной продольной деформацией, обозначается ε и является величиной безразмерной:

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon. \quad (1.3)$$

По закону Гука в относительных единицах нормальные напряжения прямо пропорциональны относительной деформации:

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (1.4)$$

Взятое по модулю отношение относительной поперечной деформации ε' к относительной продольной ε называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона:

$$\left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \mu. \quad (1.5)$$

Для всех материалов μ изменяется в интервале от 0 до 0,5; для сталей – от 0,25 до 0,35.

Условие прочности при растяжении (сжатии) выражает требование, чтобы максимальные расчетные напряжения в стержне не превышали значения допускаемых напряжений, и записывается в виде неравенства:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A_{\min}} \leq [\sigma]. \quad (1.6)$$

Условие жесткости при растяжении (сжатии) выражает требование, чтобы максимальное расчетное удлинение стержня не превышало допускаемого, и записывается в виде неравенства:

$$\Delta l_{\max} = \frac{N_{\max} l}{E A_{\min}} \leq [\Delta l]. \quad (1.7)$$

Условия прочности и жесткости позволяют выполнять три вида расчетов:

- 1) конструкторский или проектный расчет;
- 2) проверочный расчет;
- 3) расчет грузоподъемности или несущей способности.

Статически неопределимыми называются системы, для определения внутренних усилий в стержнях которых недостаточно уравнений статики (равновесия). Для расчета таких систем необходимо составлять дополнительные уравнения перемещений, учитывающие условия деформирования элементов системы.

В статически неопределимых системах (СНС) количество наложенных связей (ограничений деформации) больше числа возможных независимых уравнений равновесия. Разность между числом наложенных на систему связей и числом уравнений статики называется степенью статической неопределимости.

Свойства статически неопределимых систем:

- 1) для расчета статически неопределимых систем необходимо задать отношение жесткостей (EA) стержней системы;
- 2) чем больше жесткость стержня, тем большую часть внешней нагрузки он воспринимает на себя;
- 3) при неточном изготовлении длин стержней (расположении опор) в процессе сборки даже при отсутствии внешних воздействий в элементах системы появляются монтажные напряжения;
- 4) в стержнях СНС при изменении температуры появляются температурные напряжения.

Пример 1.1. При испытании разность показаний тензометра, размещенного на одном из элементов стальной фермы моста, оказалась равной 12 мм. База тензометра (длина, на которой производится измерение деформации) равна 20 мм, коэффициент увеличения равен 1000. Определить напряжения в исследуемом элементе.

Решение. Напряжения определяются по закону Гука в относительных единицах. Абсолютная деформация равна разности показаний тензометра, деленной на его увеличение:

$$\Delta l = \frac{\Delta}{k} = \frac{12}{1000} = 0,012 \text{ мм.}$$

Относительная деформация равна отношению абсолютной деформации к базе тензометра:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,012}{20} = 0,0006.$$

Напряжения будут равны: $\sigma = \varepsilon E = 0,0006 \cdot 2 \cdot 10^5 = 120$ МПа.

Пример 1.2. Определить напряжения в правом и левом участках и полное удлинение стального стержня, изображенного на рис. 1.4, если площадь поперечного сечения равна 400 мм^2 .

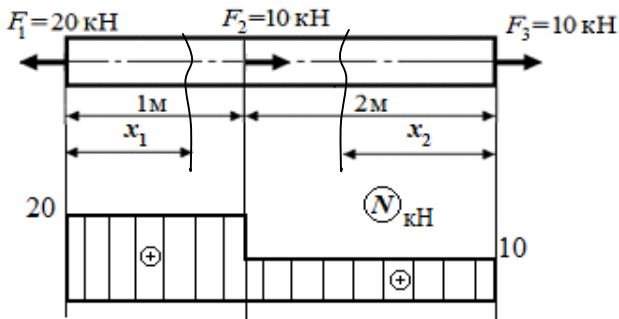


Рис. 1.4

Решение. Для построения эпюры продольных сил разбиваем стержень на два участка, проводим сечения x_1 с левой стороны и x_2 с правой. Рассекаем стержень сечением x_1 на две части. Отбрасываем одну из частей стержня (обычно отбрасывается та часть, на которую действуют больше сил). Действие отброшенной части на оставшуюся заменяем внутренним силовым фактором – продольной силой N_{x_1} . Аналогично рассматриваем сечение x_2 (рис. 1.5).

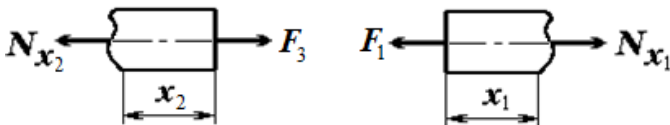


Рис. 1.5

Из условия равновесия отсеченной части стержня определяем величину внутреннего силового фактора с учетом правила знаков для продольной силы:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}; & & 0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}; \\ N_{x_1} = F_1 = 20 \text{ кН}; & & N_{x_2} = F_3 = 10 \text{ кН}. \end{aligned}$$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил N (рис. 1.4). Сила F_2 не попала ни в один из выделенных участков, но в том сечении, где она приложена, на эпюре N происходит скачок на величину этой силы.

Определяем напряжения в участках как отношение действующей на соответствующем участке силы, выраженной в ньютонах, к площади поперечного сечения:

$$\sigma_{x_1} = \frac{F_1}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{400} = 50 \text{ МПа}; \quad \sigma_{x_2} = \frac{F_2}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{400} = 25 \text{ МПа}.$$

Полную деформацию получаем алгебраическим суммированием деформаций каждого участка:

$$\begin{aligned} \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 &= \frac{N_1 l_1}{EA} + \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} + \\ &+ \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 2000}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 0,25 + 0,25 = 0,5 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Пример 1.3. Груз подвешен на двух стальных стержнях BC и BD , которые образуют с осью y углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 40^\circ$. Определить допускаемую нагрузку G , если стержни имеют одинаковые диаметры $d = 60$ мм и допускаемые напряжения $[\sigma] = 120$ МПа (рис. 1.6).

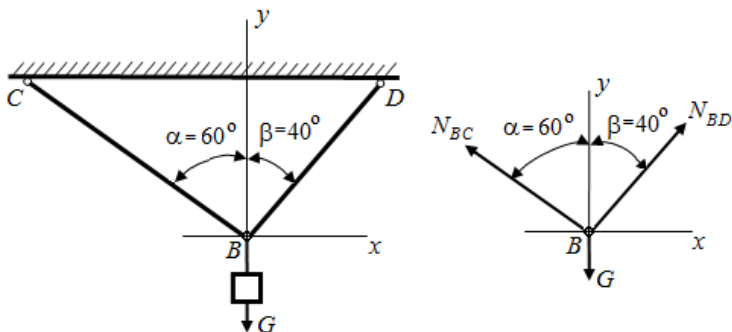


Рис. 1.6

Решение. Так как стержни имеют шарнирное закрепление с обеих сторон, возникающие в них усилия от действия внешней силы будут продольные силы N_{BC} и N_{BD} . Для определения этих усилий вырежем узел B и составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0; & -N_{BC} \sin 60^\circ + N_{BD} \sin 40^\circ &= 0; \\ \Sigma F_y &= 0; & N_{BC} \cos 60^\circ + N_{BD} \cos 40^\circ - G &= 0. \end{aligned}$$

Из уравнений равновесия определяем

$$N_{BD} = \frac{1}{\frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} + \cos 40^\circ} G = 0,88G;$$

$$N_{BC} = N_{BD} \frac{\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} = 0,88 \frac{0,643}{0,886} G = 0,653G.$$

Наибольшее усилие возникает в стержне BD . Величина допускаемой нагрузки будет равна

$$N_{BD} = 0,88G = A[\sigma];$$

$$G = \frac{A[\sigma]}{0,88} = \frac{3,14 \cdot 60^2}{4} \frac{120}{0,88} = 385\,400 \text{ Н} = 385 \text{ кН}.$$

Пример 1.4. Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров. Площадь поперечного сечения первого стержня равна A , второго – $2A$. Материал стержней – сталь, $[\sigma] = 160$ МПа. Определить усилия в стержнях и подобрать их диаметры (рис. 1.7).

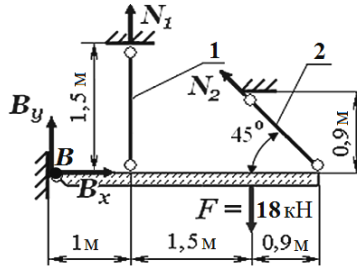


Рис. 1.7

Решение. Обозначаем опорные реакции и составляем возможные уравнения статики (равновесия):

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0; & \quad B_x - N_2 \cdot \cos 45^\circ = 0; \\ \Sigma F_y = 0; & \quad B_y + N_1 + N_2 \cdot \sin 45^\circ - F = 0; \\ \Sigma M_B = 0; & \quad N_1 \cdot 1 + N_2 \cdot \sin 45^\circ (1 + 1,5 + 0,9) - F \cdot 2,5 = 0. \end{aligned}$$

или

$$N_1 + N_2 \cdot 2,404 = 45. \quad (a)$$

Уравнений статики три, неизвестных сил четыре – задача (система) один раз статически неопределимая.

Для составления дополнительного уравнения перемещений вычерчиваем положение системы после приложения внешней силы F (рис. 1.8).

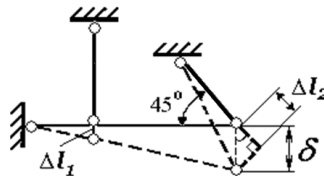


Рис. 1.8

Из подобия треугольников следует: $\frac{\Delta l_1}{1} = \frac{\delta}{3,4}$, где $\delta = \frac{\Delta l_2}{\cos 45^\circ}$.

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{3,4 \cdot \cos 45^\circ} = 0,416 \cdot \Delta l_2 \text{ – уравнение перемещений.}$$

Уравнение перемещений должно связывать между собой перемещения стержней, усилия в которых неизвестны. По закону Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} \quad \text{и} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA}; \quad \frac{N_1 l_1}{EA} = 0,416 \frac{N_2 l_2}{EA},$$

где $l_1 = 1 \text{ м}$, $l_2 = \frac{0,9}{\cos 45^\circ} = 1,27 \text{ м}$.

Сокращая жесткости EA , получаем

$$1,5N_1 = 0,416 \frac{N_2 \cdot 1,27}{2}$$

или

$$N_1 = 0,176N_2. \quad (\text{б})$$

Решая совместно уравнения (а) и (б), определяем неизвестные силы:

$$\left. \begin{array}{l} N_1 + 2,404 N_2 = 45 \\ N_1 = 0,176 N_2 \end{array} \right\} \Rightarrow N_1 = 3,07 \text{ кН}, N_2 = 17,44 \text{ кН}.$$

Определяем диаметры стержней из условия прочности при растяжении (сжатии):

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A_{\min}} \leq [\sigma]; \quad A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{3,07 \cdot 10^3}{160} = 19 \text{ мм}^2;$$
$$A_2 = \frac{17\,440}{160} = 109 \text{ мм}^2.$$

Учитывая заданное соотношение жесткостей стержней $EA_2 = 2EA_1$, принимаем:

$$A_1 = \frac{A_2}{2} = \frac{109}{2} = 54,5 \text{ мм}^2.$$

Тогда

$$d_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 54,5}{3,14}} = 8,3 \text{ мм} \approx 8,5 \text{ мм},$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 109}{3,14}} = 11,38 \text{ мм} \approx 12 \text{ мм}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Чугунная колонна высотой 3 м имеет кольцевое поперечное сечение с наружным диаметром 250 мм и внутренним диаметром 200 мм. Она нагружена сжимающим усилием 500 кН. Определить напряжения в поперечном сечении, абсолютное и относительное укорочения колонны, приняв модуль упругости $1,5 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $-28,3$ МПа; $0,71$ мм; $2,36 \cdot 10^{-4}$.

1.2. Стальной стержень круглого сечения растягивается усилием 100 кН. Относительное удлинение не должно превышать $5 \cdot 10^{-4}$, а напряжения не должны быть более 120 МПа. Рассчитать наименьший диаметр стержня, удовлетворяющий этим условиям.

Ответ: 35,7 мм.

1.3. Построить эпюры продольных сил и перемещений без учета собственного веса стержня, определить напряжения на всех участках стержня (рис. 1.9). Принять $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_{мед} = 1 \cdot 10^5$ МПа, $E_{чуг} = 1,6 \cdot 10^5$ МПа; $A_{ст} = 250 \text{ мм}^2$, $A_{мед} = 350 \text{ мм}^2$, $A_{чуг} = 400 \text{ мм}^2$; $F_1 = 12$ кН и сила F_2 индивидуальна для каждого студента и равна номеру по списку в журнале.

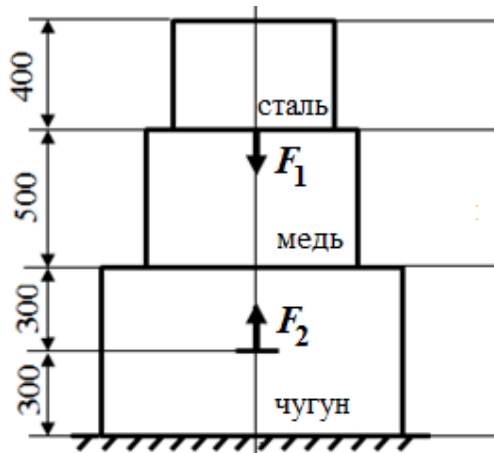


Рис. 1.9

1.4. Рабочее давление в цилиндре двигателя $q = 1$ МПа; внутренний диаметр цилиндра 350 мм (рис. 1.10). Какое количество болтов диаметром 18 мм необходимо для того, чтобы прикрепить крышку к стенке цилиндра, если допускаемые напряжения для материала болтов равны 40 МПа?

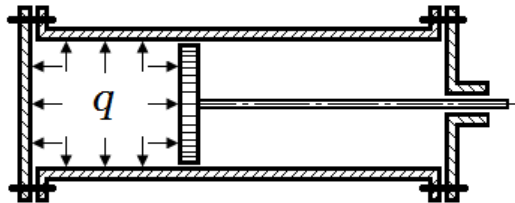


Рис. 1.10

Ответ: 10 болтов.

1.5. Изображенный на рис. 1.11 стальной стержень имеет в правой части сплошное круглое сечение, в левой части – кольцевое сечение. Определить напряжения в обеих частях стержня и полное его удлинение.

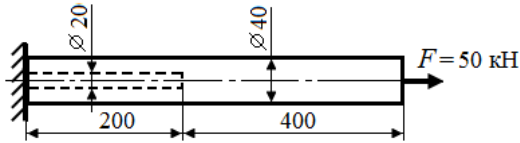


Рис. 1.11

Ответ: в левой части 53,1 МПа, в правой части 39,8 МПа, $\Delta l = 0,132$ мм.

1.6. Стержень квадратного поперечного сечения растягивается силами $F = 1500$ Н (рис. 1.12), ослаблен сквозным отверстием диаметром 2 мм. Определить размер квадратного поперечного сечения a при допускаемом напряжении для материала стержня 100 МПа?

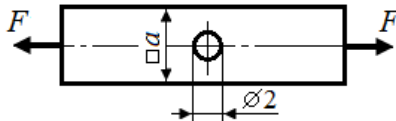


Рис. 1.12

Ответ: 5 мм.

1.7. В изображенном на рис. 1.13 кронштейне стержень BD стальной, стержень CD деревянный. Допускаемые напряжения для стали равны 160 МПа, для дерева – 4 МПа. Подобрать диаметр d круглого сечения стального стержня и сторону a квадратного деревянного сечения; определить горизонтальное, вертикальное и полное смещение узла D .

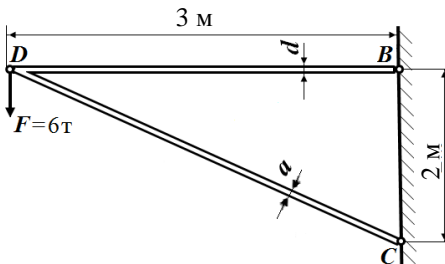


Рис. 1.13

Ответ: $d = 27$ мм, $a = 164$ мм, $\Delta_{\text{гор}} = 2,4$ мм, $\Delta_{\text{верт}} = 6,2$ мм, $\Delta = 6,64$ мм.

1.8. Трос растянут усилием 75 кН. Он состоит из проволок диаметром 2 мм. Допускаемые напряжения для троса с учетом наклона проволок равно 300 МПа. Определить число проволок в тросе.

Ответ: 80 проволок.

1.9. Стержень прямоугольного поперечного сечения 20×30 мм нагружен силой, как показано на рис. 1.14. Определить, какие размеры будет иметь стержень, если его нагрузить силой $F = 60$ кН при $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,25$. Можно ли определить его размеры, если нагрузка достигнет величины 200 кН при пределе пропорциональности материала, равном 300 МПа.

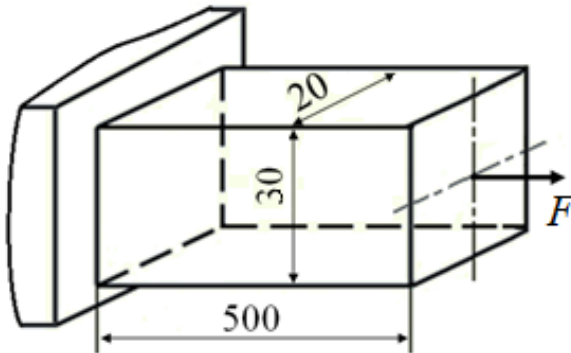


Рис. 1.14

Ответ: 500,25 мм, 19,988×29,996 мм, невозможно.

1.10. Железобетонная колонна сечением 300×300 мм имеет четыре стальных стержня арматуры диаметром 20 мм каждый (рис. 1.15). Колонна нагружена продольной сжимающей силой 280 кН. Определить напряжения в бетоне и арматуре, приняв $E_{\text{ст}} = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $E_{\text{бетон}} = 2 \cdot 10^4$ МПа.

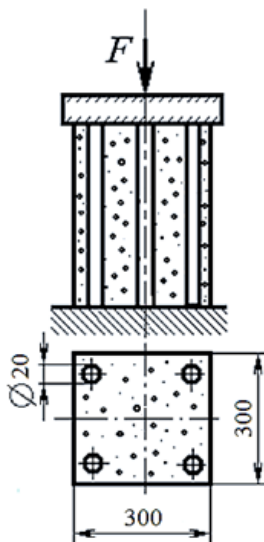


Рис. 1.15

Ответ: $-2,75$ МПа, $-28,84$ МПа.

1.11. Определить напряжения в стержнях 1 и 2, которые поддерживают жесткую балку, нагруженную силой $F = 150$ кН (рис. 1.16). Стержень 1 площадью поперечного сечения 1800 мм² изготовлен из меди, стержень 2 из стали площадью 900 мм², принять $E_{\text{мед}} = 1 \cdot 10^5$ МПа и $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^5$ МПа.

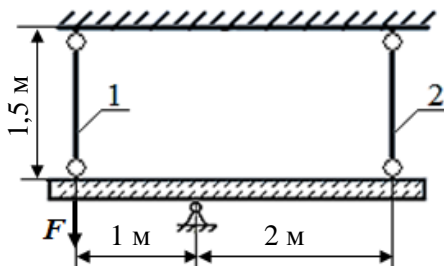


Рис. 1.16

Ответ: $16,7$ МПа, $-66,7$ МПа.

1.12. Стержни, изображенные на рис. 1.17, нагреваются на температуру $45\text{ }^{\circ}\text{C}$. Стенки, между которыми расположены стержни, абсолютно неподвижны. Определить напряжения на всех участках стержней, приняв модули упругости $E_{\text{чуг}} = 1 \cdot 10^5\text{ МПа}$ и $E_{\text{мед}} = 0,8 \cdot 10^5\text{ МПа}$, площади поперечных сечений $A_{\text{чуг}} = 1600\text{ мм}^2$ и $A_{\text{мед}} = 1000\text{ мм}^2$. Коэффициенты линейного расширения $\alpha_{\text{чуг}} = 10,7 \cdot 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, $\alpha_{\text{мед}} = 17,1 \cdot 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

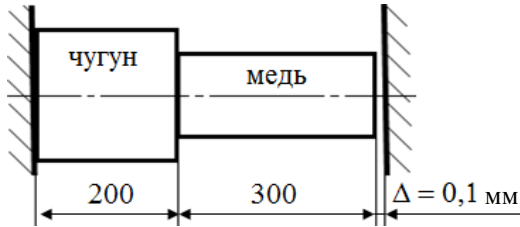


Рис. 1.17

Ответ: $\sigma_{\text{чуг}} = -30,4\text{ МПа}$, $\sigma_{\text{мед}} = -46,7\text{ МПа}$.

1.14. Стальные рельсы длиной $12,5\text{ м}$ укладываются при температуре $+10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Между рельсами оставляется зазор $a = 4\text{ мм}$. При какой температуре зазор исчезает? Каким будет зазор зимой при температуре $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$? Какие напряжения возникнут летом при температуре $+50\text{ }^{\circ}\text{C}$? Коэффициент линейного расширения для стали $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Ответ: $+35,6\text{ }^{\circ}\text{C}$, $11,8\text{ мм}$, -36 МПа .

1.15. При испытании стальной фермы моста разность показаний тензометра, установленного на одном из элементов фермы, оказалась равной 12 мм . База тензометра (дина, на которой производится измерение деформации) равна 20 мм , коэффициент увеличения 1000 . Определить напряжения в исследуемом элементе.

Ответ: 120 МПа .

1.16. Во время испытания образца проволоки диаметром $1,2\text{ мм}$ при помощи тензометра с базой 100 мм под нагрузкой 10 кг было

измерено удлинение 0,08 мм. Чему равен модуль упругости материала проволоки?

Ответ: $1,1 \cdot 10^5$ МПа.

1.13. Биметаллический стержень нагружен силой F , приложенной в плоскости сая (рис. 1.18). Модуль упругости верхней части стержня E_1 , нижней E_2 . Каким должно быть соотношение толщин h_1 и h_2 верхней и нижней частей стержня, чтобы он не искривлялся под действием силы?

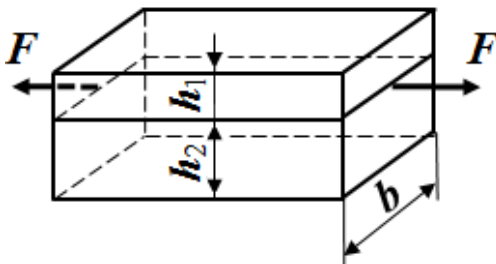


Рис. 1.18

Ответ: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{E_2}{E_1}$.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Теоретические сведения

Напряженным состоянием в точке называется совокупность нормальных σ и касательных τ напряжений, действующих по различным секущим плоскостям (площадкам), проходящим через данную точку.

Виды напряженного состояния (рис. 2.1):

- 1) объемное (трехосное) – через данную точку нельзя провести ни одной площадки, на которой одновременно $\sigma = \tau = 0$;
- 2) плоское (двухосное) – через данную точку можно провести только одну площадку, на которой одновременно $\sigma = \tau = 0$;
- 3) линейное (одноосное) – через данную точку можно провести две площадки, на которых одновременно $\sigma = \tau = 0$.

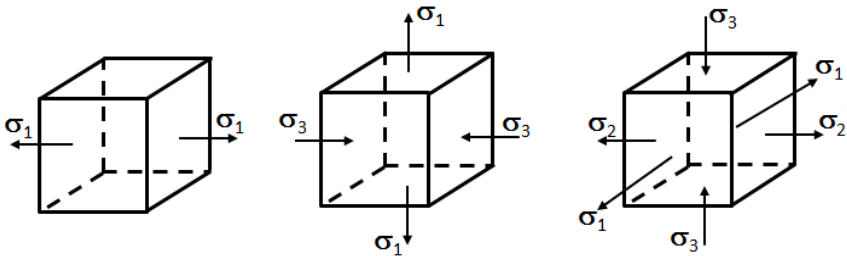


Рис. 2.1. Виды напряженного состояния: линейное, плоское, объемное

В теории упругости доказывается, что через любую точку напряженного тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называются главными. Нормаль (перпендикуляр) к главной площадке называется главной осью напряжений.

Нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются главными напряжениями и обозначаются σ_1 , σ_2 и σ_3 . Нумеруются главные напряжения так, чтобы: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (алгебраически).

Материал бруса, работающего на растяжение или сжатие, находится в линейном напряженном состоянии. На площадке, наклоненной под углом α к поперечному сечению (рис. 2.2), возникают нормальные и касательные напряжения.

Они определяются по формулам:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \quad (2.1)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (2.2)$$

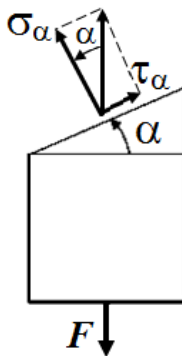


Рис. 2.2. Нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке при линейном напряженном состоянии

Из выражения (2.1) следует, что $\sigma = \sigma_{\max}$ при $\alpha = 0$ – максимальные нормальные напряжения возникают в поперечных сечениях стержня. Из выражения (2.2) следует, что $\tau = \tau_{\max}$ при $\alpha = 45^\circ$ – максимальные касательные напряжения действуют по площадкам, повернутым под углом 45° к главным площадкам.

Правило знаков для касательных напряжений:

- если относительно центра рассматриваемого элемента касательные напряжения создают момент, направленный по часовой стрелке, то они положительны;

- если относительно центра элемента касательные напряжения создают момент, направленный против часовой стрелки, то они отрицательны.

Это правило знаков схематично представлено на рис. 2.3.

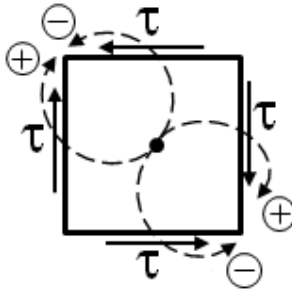


Рис. 2.3. Схематизация правила знаков для касательных напряжений

Частным случаем плоского напряженного состояния является чистый сдвиг, когда на гранях элементарного параллелепипеда действуют только касательные напряжения (рис. 2.4).

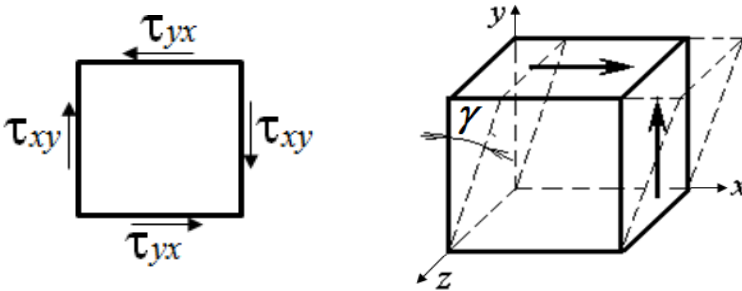


Рис. 2.4. Чистый сдвиг

Согласно закону парности касательных напряжений касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках, равны по величине и противоположны по знаку:

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}. \quad (2.3)$$

Площадки, на которых действуют экстремальные касательные напряжения, называются площадками сдвига. Угол γ является мерой искажения формы элемента при сдвиге и называется углом

сдвига. Между касательными напряжениями и углом сдвига (угловой деформацией) существует зависимость:

$$\tau = G\gamma, \quad (2.4)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ называется модулем сдвига.

Выражение (2.4) называется законом Гука при сдвиге и формулируется: касательные напряжения прямо пропорциональны углу сдвига.

При плоском напряженном состоянии нормальные и касательные напряжения, действующие на наклонной площадке, нормаль к которой составляет угол α с осью x , определяются выражениями:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha; \quad (2.5)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha. \quad (2.6)$$

Если угол α откладывается против часовой стрелки, он принимается положительным, по часовой стрелке – отрицательным.

Для удобства применения правила знаков для нормальных и касательных напряжений объединены в одну схему на рис. 2.5.

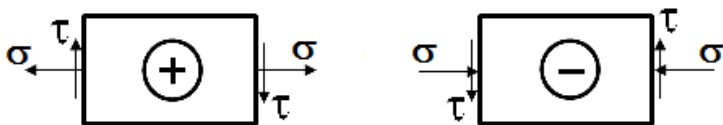


Рис. 2.5. Схематизация правила знаков для нормальных и касательных напряжений

Сумма нормальных напряжений $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y$ на взаимно перпендикулярных площадках постоянна, касательные напряжения

равны и противоположны по знаку. Положение главных площадок определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (2.7)$$

Величины главных напряжений рассчитываются по формуле:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (2.8)$$

Относительные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ в направлении главных осей при действии на элемент главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ согласно обобщенному закону Гука равны

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases} \quad (2.9)$$

Так как относительные линейные деформации не зависят от касательных напряжений, то уравнения (2.9) справедливы для произвольных координатных осей x, y, z :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \end{cases} \quad (2.10)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения на площадках, перпендикулярных к осям x, y, z соответственно.

При линейном напряженном состоянии проверка прочности материала осуществляется с помощью условия прочности при растяжении (сжатии):

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A_{\min}} \leq [\sigma], \quad (2.11)$$

где $[\sigma]$ – допускаемые нормальные напряжения:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{[n]}, \quad (2.12)$$

σ_0 – опасные напряжения,

$[n]$ – допускаемый коэффициент безопасности.

При опасных напряжениях невозможна нормальная эксплуатация детали, наблюдается переход материала в опасное состояние, то есть появляются трещины в хрупких материалах или значительные деформации в пластичных. Опасные напряжения равны пределу прочности для хрупких материалов и пределу текучести для пластичных.

Для одного материала сравнение напряженных состояний можно производить по числовой характеристике одного (простого) напряженного состояния, выбранного в качестве эталона. За такой эталон (эквивалент) удобнее принять растяжение с главным эквивалентным напряжением $\sigma_{\text{эkv}}$.

Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{эkv}}$ – напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равно опасным заданному сложному напряженному состоянию.

Для проверки прочности материала при сложном (плоском или объемном) напряженном состоянии применяются теории прочности – гипотезы об основной причине наступления опасного состояния. В практических расчетах применяются четыре теории прочности.

II теория прочности предполагает, что основной причиной наступления опасного состояния материала являются относительные деформации, которые следует ограничить.

Условие прочности по II теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (2.13)$$

III теория прочности предполагает, что основной причиной опасного состояния материала являются касательные напряжения τ .

Условие прочности по III теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (2.14)$$

IV теория прочности – энергетическая – предполагает, что основной причиной перехода материала в опасное состояние является накопленная в нем удельная потенциальная энергия формообразования.

Условие прочности по IV теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]. \quad (2.15)$$

Теория прочности Мора исходит из того, что прочность в общем случае напряженного состояния зависит главным образом от величины и знака σ_1 и σ_3 .

Условие прочности по теории прочности Мора:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{M}} = \sigma_1 - m\sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (2.16)$$

Для проверки прочности деталей, изготовленных из пластичных материалов, используются III и IV теории прочности; для деталей из хрупких материалов применяется теория прочности Мора (реже II).

Пример 2.1. В опасной точке детали действуют напряжения: $\sigma_x = 22,5$ МПа, $\sigma_y = -52,5$ МПа, $\tau_{xy} = 65$ МПа (рис. 2.6).

Требуется: 1) определить главные напряжения и положения площадок, по которым они действуют; 2) проверить прочность материала детали, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

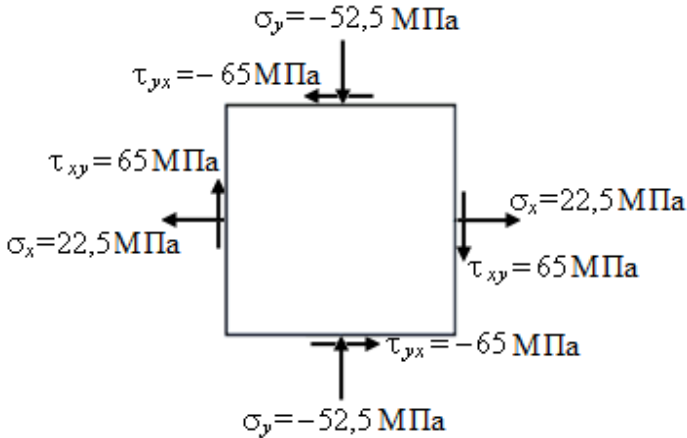


Рис. 2.6

Решение. Определяем главные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max/\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{22,5 - 52,5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(22,5 + 52,5)^2 + 4 \cdot 65^2} = -15 \pm 75 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = -15 + 75 = 60 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = -15 - 75 = -90 \text{ МПа}.$$

Учитывая, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, $\sigma_1 = 60 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -90 \text{ МПа}$.

Определяем положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 65}{22,5 - (-52,5)} = -1,73;$$

$$2\alpha_0 = \operatorname{arctg}(-1,73) = -60^\circ, \quad \alpha_0 = -30^\circ.$$

Знак « \leftarrow » означает, что данные площадки нужно повернуть по часовой стрелке для совмещения их с главными площадками (рис. 2.7).

Для проверки прочности деталей из пластичных материалов используются III и IV теории прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 60 - (-90) = 150 \text{ МПа} < [160];$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3} = \sqrt{60^2 + 90^2 - 60(-90)} = 130,77 \text{ МПа} < [160].$$

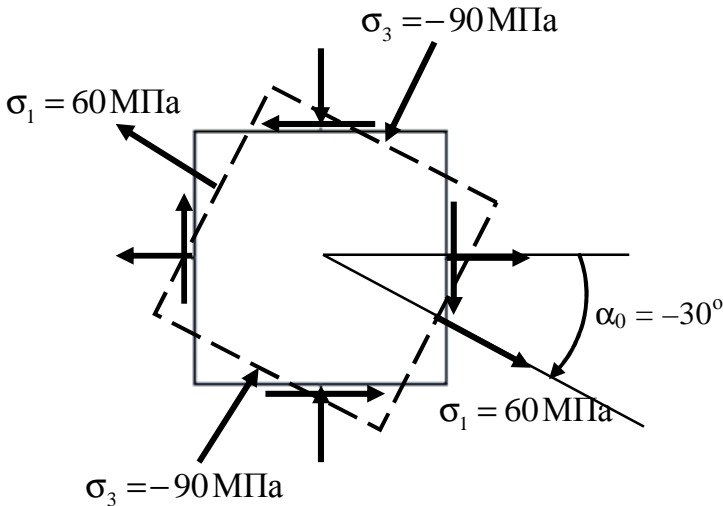


Рис. 2.7

Прочность материала детали обеспечена.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Для линейного напряженного состояния на рис. 2.8 определить нормальные и касательные напряжения в сечении I-I, если $\sigma_x = 10 \text{ МПа}$.

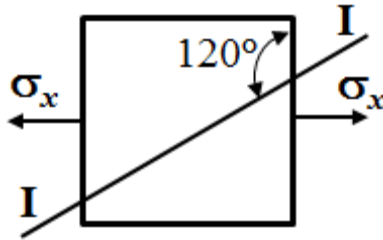


Рис. 2.8

Ответ: $\sigma = 2,5$ МПа, $\tau = -4,33$ МПа.

2.2. Стержень растягивается силами F . При этом в наклонном сечении нормальные напряжения (σ_α) равны 70 МПа, касательные (τ_α) – 70 МПа. Определить нормальные напряжения σ_x и угол α между наклонным и поперечным сечениями (рис. 2.9).

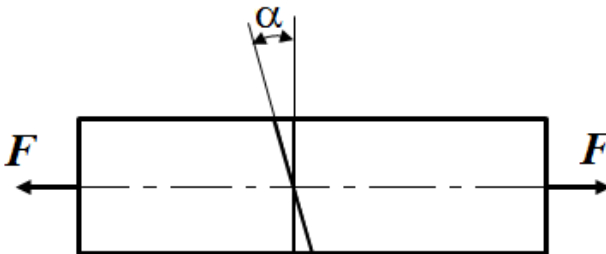


Рис. 2.9

Ответ: $\sigma_x = 105,6$ МПа, $\alpha = 35^\circ 30'$.

2.3. Брус прямоугольного поперечного сечения сжимается силой $F = 12$ кН (рис. 2.10). По наклонному сечению под углом α он соединен клеем с пределом прочности на срез 1,5 МПа. Определить, какое значение угла должно быть, чтобы коэффициент запаса прочности на срез этого соединения составил величину, равную 2.

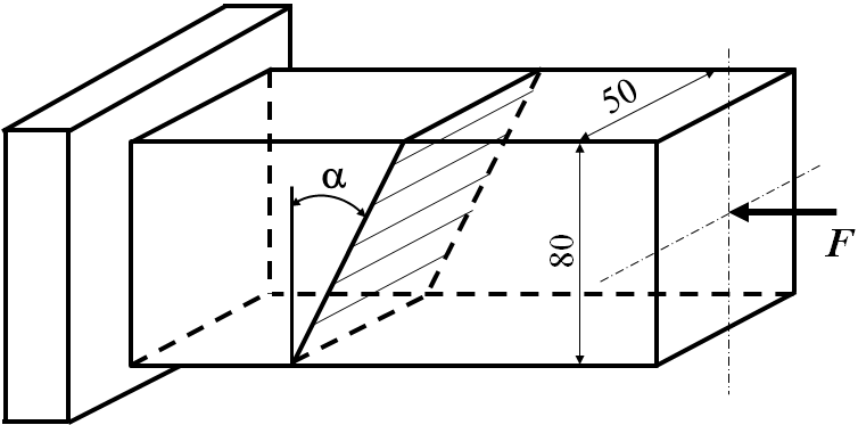


Рис. 2.10

Ответ: $\alpha = 15^\circ$.

2.4. Для представленного на рис. 2.11 напряженного состояния определить нормальные и касательные напряжения в сечении I-I, если $\sigma_x = 80$ МПа, $\sigma_y = 50$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа.

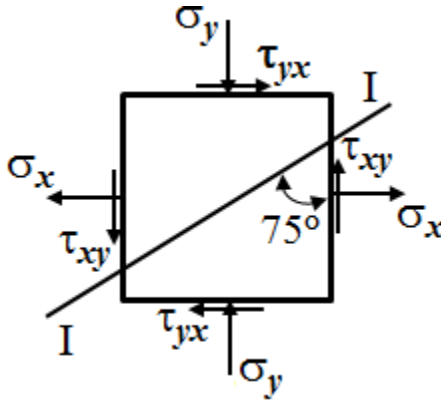


Рис. 2.11

Ответ: $\sigma = -51,29$ МПа, $\tau = 15,18$ МПа.

2.5. Элемент, вырезанный из стальной детали, испытывает плоское напряженное состояние. Определить изменение длины диагонали BC (рис. 2.12).

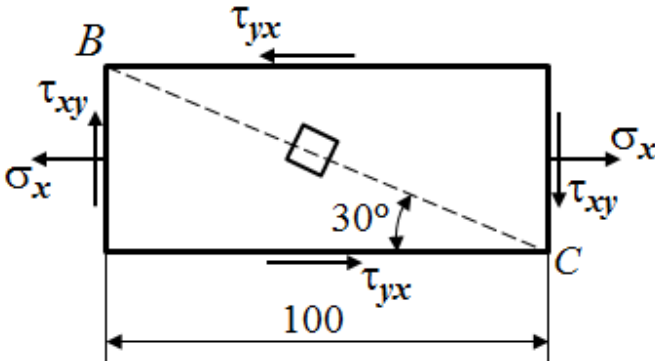


Рис. 2.12

Ответ: $\Delta l = 0,024$ мм.

2.6. По заданным в таблице значениям напряжений σ_α , σ_β и τ_α определить величину и направление главных напряжений и изобразить положение главных площадок (рис. 2.13).

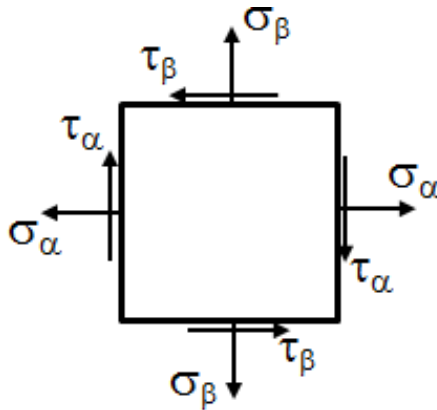


Рис. 2.13

Исходные данные и ответы

Вариант	Заданные величины, МПа			Ответ
	σ_α	σ_β	τ_α	σ_{\max} , МПа
1	40	20	10	44,1
2	50	30	-20	62,3
3	-20	30	20	37,0
4	-40	20	-30	32,4
5	-10	-20	10	-38,0
6	-20	0	-40	-11,2
7	50	0	20	57,0
8	0	60	30	72,4
9	-40	0	20	8,3
10	0	-80	25	7,2

2.7. Стальной параллелепипед опирается на жесткую плиту. Сверху действует равномерно распределенная по грани сила $F = 30$ кН (рис. 2.14). Определить, какой объем будет иметь параллелепипед после нагружения, приняв $\mu = 0,3$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

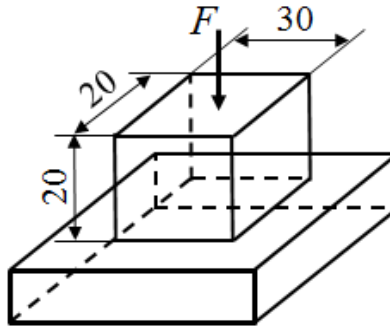


Рис. 2.14

Ответ: $V = 11998,8 \text{ мм}^3$.

2.8. Чугунный параллелепипед размерами $20 \times 30 \times 40$ мм опирается тремя гранями на стенки недеформируемой плиты. На остальные

границы действуют силы $F_1 = 78$ кН, $F_2 = 80$ кН, $F_3 = 60$ кН, равномерно распределенные по граням (рис. 2.15). Определить, какими будут размер по высоте и объем параллелепипеда после нагружения, если $\mu = 0,24$, $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа.

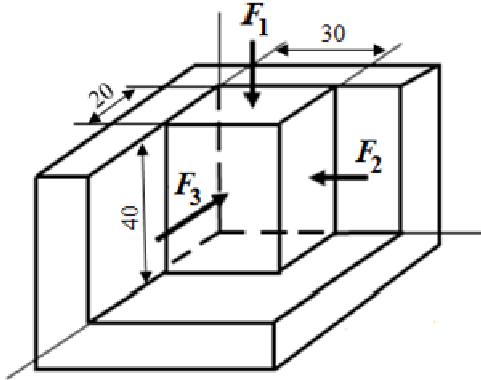


Рис. 2.15

Ответ: $h = 39,969$ мм, $V = 23970,7$ мм³.

2.9. В толстой недеформируемой плите высверлено на некоторую глубину цилиндрическое гнездо диаметром 100 мм. В гнездо плотно без зазоров вставлен резиновый стержень (рис. 2.16). Затем стержень нагружается сжимающей силой $F = 20$ кН. Определить главные напряжения в стержне, если $\mu = 0,47$.

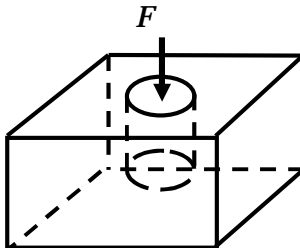


Рис. 2.16

Ответ: $\sigma_1 = -2,55$ МПа, $\sigma_2 = -7,09$ МПа, $\sigma_3 = -7,09$ МПа.

2.10. В недеформируемой плите сделан сквозной паз шириной и глубиной по 10 мм. В паз плотно без зазора вставлен дюралюминиевый параллелепипед размером в плане (вид сверху) 10×10 мм, который нагружается равномерно распределенной силой $F = 8$ кН (рис. 2.17). Какой должна быть высота параллелепипеда до нагружения, чтобы после деформирования его верхняя грань была заподлицо с верхней поверхностью плиты. Определить главные напряжения в параллелепипеде, если $\mu = 0,33$.

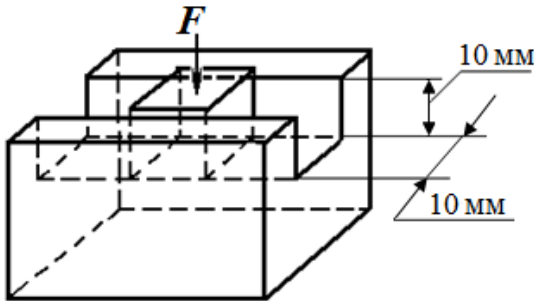


Рис. 2.17

Ответ: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -26,4$ МПа, $\sigma_3 = -80$ МПа, $h = 10,01$ мм.

2.11. Алюминиевый кубик со стороной $a = 50$ мм без зазоров вставлен в прорезь массивной недеформируемой плиты и сжат силой $F = 180$ кН (рис. 2.18). Определить главные напряжения и главные деформации, вычислить абсолютное и относительное изменение объема кубика. Принять $\mu = 0,36$, $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.

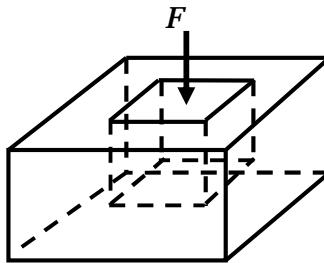


Рис. 2.18

Ответ: $\sigma_1 = -40,5$ МПа, $\sigma_2 = -40,5$ МПа, $\sigma_3 = -72$ МПа;
 $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = -61,2 \cdot 10^{-5}$;
 $\Delta V = -76,5$ мм³, $\Theta = -61,2 \cdot 10^{-5}$.

2.12. Проверить прочность материала чугуновой детали, если главные напряжения равны: -60 МПа, -40 МПа и 15 МПа. Допускаемые напряжения принять $[\sigma_p] = 30$ МПа, $[\sigma_c] = 100$ МПа.

Ответ: прочность не обеспечена.

2.13. На грани элементарного кубика, вырезанного из стального ствола орудия, действуют напряжения: 550 Н/мм², 420 Н/мм² и -350 Н/мм². Определить наибольшие касательные напряжения и расчетные напряжения по III и IV теориям прочности.

Ответ: $\tau = 450$ Н/мм², $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = 900$ Н/мм², $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = 840$ Н/мм².

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Теоретические сведения

К геометрическим характеристикам плоских сечений относятся: площадь; статические моменты сечений; осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения; осевые и полярный моменты сопротивления.

Статическим моментом сечения называется взятая по всей площади сечения сумма произведений элементарных площадок на расстояние до оси:

$$S_z = \int_A y \cdot dA, \quad S_y = \int_A z \cdot dA. \quad (3.1)$$

Размерность статических моментов сечения см^3 , мм^3 . В зависимости от положения оси статические моменты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Ось, относительно которой статический момент сечения равен нулю, называется центральной осью. Пересечение двух центральных осей дает точку, которая является центром тяжести сечения.

Статический момент сечения относительно оси равен произведению площади сечения на координату центра тяжести сечения (рис. 3.1):

$$S_z = y_c \cdot A, \quad S_y = z_c \cdot A. \quad (3.2)$$

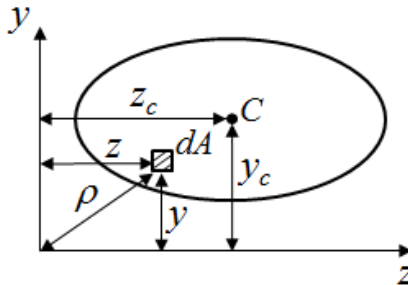


Рис. 3.1

Координаты центра тяжести сложного сечения определяются по формулам:

$$y_c = \frac{\sum S_z}{\sum A} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2}, \quad z_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2}. \quad (3.3)$$

Моменты инерции сечения определяются интегралами:

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA \text{ – осевые моменты инерции;} \quad (3.4)$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \text{ – полярный момент инерции;} \quad (3.5)$$

$$I_{zy} = \int_A zy dA \text{ – центробежный момент инерции.} \quad (3.6)$$

Свойства моментов инерции сечения:

1. Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны и никогда не равны нулю.

2. Центробежный момент инерции сечения может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

3. Сумма осевых моментов инерции относительно двух координатных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат:

$$I_p = I_z + I_y. \quad (3.7)$$

4. При повороте координатных осей сумма осевых моментов инерции не изменяется, так как не изменяется полярный момент инерции сечения (рис. 3.2):

$$I_z + I_y = I_{z_1} + I_{y_1} = I_p. \quad (3.8)$$

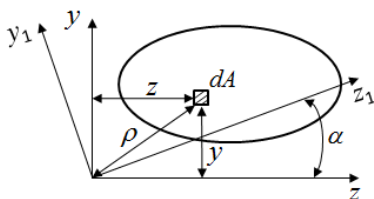


Рис. 3.2

При параллельном переносе осей (рис. 3.3) моменты инерции определяются согласно выражениям:

$$I_{z_1} = I_{z_c} + a^2 A, \quad I_{y_1} = I_{y_c} + b^2 A, \quad (3.9)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{z_c y_c} + abA, \quad (3.10)$$

где I_{z_c} , I_{y_c} , $I_{z_c y_c}$ – осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно осей, проходящих через центр тяжести.

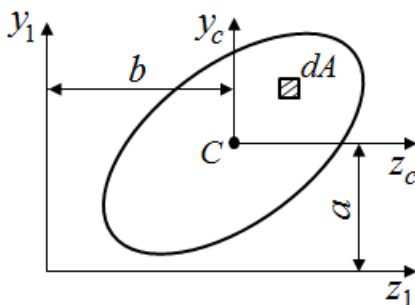


Рис. 3.3

При повороте осей на угол α (рис. 3.2) моменты инерции сечения рассчитываются по формулам:

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha; \quad (3.11)$$

$$I_{y_1} = I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha. \quad (3.12)$$

Оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения равен нулю, называются главными. Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются главными центральными осями. Главные центральные – оси, проходящие через центр тяжести сечения, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, осевые моменты инерции принимают

экстремальные значения. Осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей называются главными моментами инерции сечения.

Положение главных центральных осей относительно исходных определяется углом α_0 :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}. \quad (3.13)$$

Положительный угол α_0 откладывается от оси z против хода часовой стрелки, отрицательный – по ходу часовой стрелки.

Значения главных моментов инерции можно определить по формуле

$$I_{\max/\min} = \frac{I_{z_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{z_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{zy}^2}. \quad (3.14)$$

Единицы измерения моментов инерции – мм⁴, см⁴.

Радиусы инерции рассчитываются по формулам

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}. \quad (3.15)$$

Величина, равная отношению осевого момента инерции к максимальному удалению от оси, называется осевым моментом сопротивления поперечного сечения и обозначается W_z или W_y :

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \quad (3.16)$$

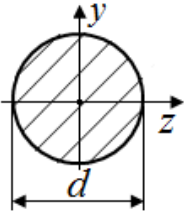
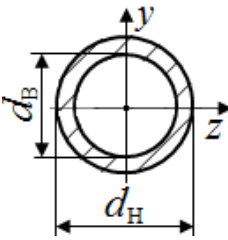
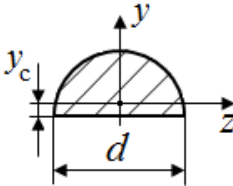
Величина равная отношению полярного момента инерции к максимальному удалению от центра тяжести сечения называется полярным моментом сопротивления поперечного сечения и обозначается W_p .

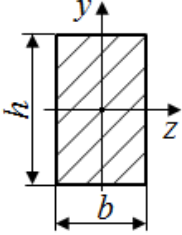
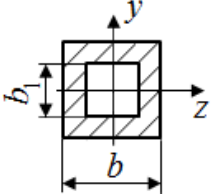
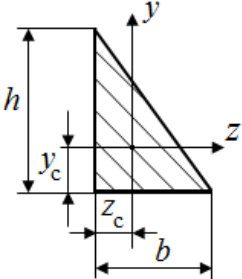
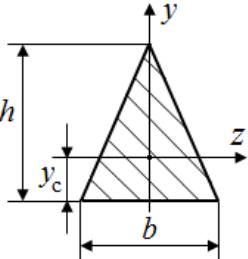
$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (3.17)$$

Единицы измерения моментов сопротивления – мм³, см³.

Таблица 3.1

Геометрические характеристики некоторых плоских сечений

Схема и размеры поперечного сечения	Характеристики сечения
	<p>Круг</p> $A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32};$ $W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}$
	<p>Кольцо</p> $A = \frac{\pi d_H^2}{4}(1 - c^2); \quad c = \frac{d_B}{d_H};$ $I_z = I_y = \frac{\pi d_H^4}{64}(1 - c^4); \quad I_p = \frac{\pi d_H^4}{32}(1 - c^4);$ $W_z = W_y = \frac{\pi d_H^3}{32}(1 - c^4); \quad W_p = \frac{\pi d_H^3}{16}(1 - c^4)$
	<p>Полукруг</p> $A = \frac{\pi d^2}{8}; \quad y_c = 0,2122d;$ $I_z = 0,00686d^4; \quad I_y = \frac{\pi d^4}{128}$

<p>Схема и размеры поперечного сечения</p>	<p>Характеристики сечения</p>
	<p>Прямоугольник</p> $A = bh; \quad I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{b^3h}{12};$ $W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2h}{6}$
	<p>Квадратная труба</p> $A = b^2 - b_1^2; \quad I_z = I_y = \frac{b^4 - b_1^4}{12};$ $I_p = \frac{b^4 - b_1^4}{6}$
	<p>Прямоугольный треугольник</p> $A = \frac{1}{2}bh; \quad I_z = \frac{bh^3}{36};$ $I_y = \frac{b^3h}{12}; \quad I_{zy} = \frac{b^2h^2}{72}$
	<p>Равнобедренный треугольник</p> $A = \frac{1}{2}bh; \quad I_z = \frac{bh^3}{36}; \quad I_y = \frac{b^3h}{48}$

Для сечений, имеющих оси симметрии (рис. 3.4), справедливы положения:

а) если сечение имеет одну ось симметрии, то эта ось и ось ей перпендикулярная, проходящая через центр тяжести, являются главными центральными осями;

б) если сечение имеет две оси симметрии, то они обе будут главными центральными осями;

в) если сечение имеет более трех осей симметрии, то любая центральная ось является главной и все главные центральные моменты инерции будут равны.

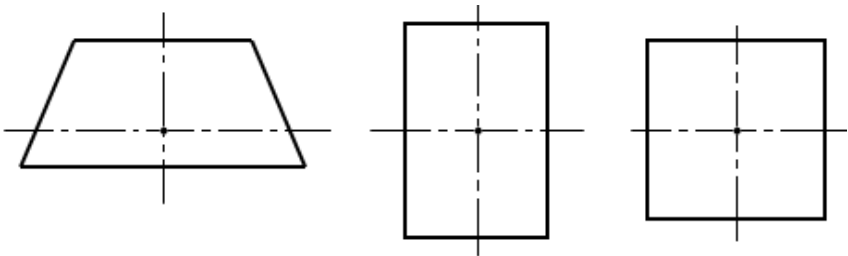


Рис. 3.4

Пример 3.1. Вычислить осевые и центробежный моменты инерции квадрата относительно осей z_1 и y_1 , образующих угол α с осями z и y (рис. 3.5).

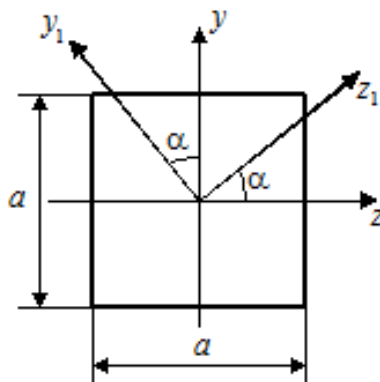


Рис. 3.5

Решение. Определяем моменты инерции квадрата относительно исходных осей z и y . Квадрат рассматриваем как прямоугольник с одинаковыми сторонами:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{aa^3}{12} = \frac{a^4}{12}, \text{ аналогично } I_y = \frac{a^4}{12}, I_{zy} = 0.$$

Используя формулы изменения осевых моментов инерции при повороте осей, находим:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha = \frac{a^4}{12} \cos^2 \alpha + \frac{a^4}{12} \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{a^4}{12} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{a^4}{12}; \end{aligned}$$

$$I_{y_1} = I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha = \frac{a^4}{12} \sin^2 \alpha + \frac{a^4}{12} \cos^2 \alpha = \frac{a^4}{12};$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{a^4}{12} - \frac{a^4}{12} \right) \sin 2\alpha = 0.$$

Так как угол α произвольный, можно сделать заключение, что осевые моменты инерции квадрата относительно любых центральных осей остаются постоянными, а центробежный момент инерции равен нулю. Что подтверждает справедливость положения, изображенного на рис. 3.4.

Пример 3.2. Сравнить величины главных моментов инерции и главных радиусов инерции трубчатого прямоугольного сечения, спроектированного в двух вариантах (рис. 3.6): а) с круглым и б) квадратным отверстием трубы одинаково расположенным по высоте сечения. Вычислить наименьшие моменты сопротивления сечений относительно центральной оси z_c .

Решение

Вариант а). Площадь поперечного сечения будет равна

$$A = A_1 - A_2 = 8a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = 7,215a^2.$$

Расстояние от центральной оси прямоугольника z до центра тяжести трубчатого сечения:

$$y_c = \frac{S_{z_2}}{A_2} = -\frac{\pi a^3}{8 \cdot 7,215a^2} = -0,55a,$$

где $S_{z_2} = y_{c_2} \cdot A = \frac{a}{2} \left(-\frac{\pi a^2}{4} \right) = -\frac{\pi a^3}{8}$.

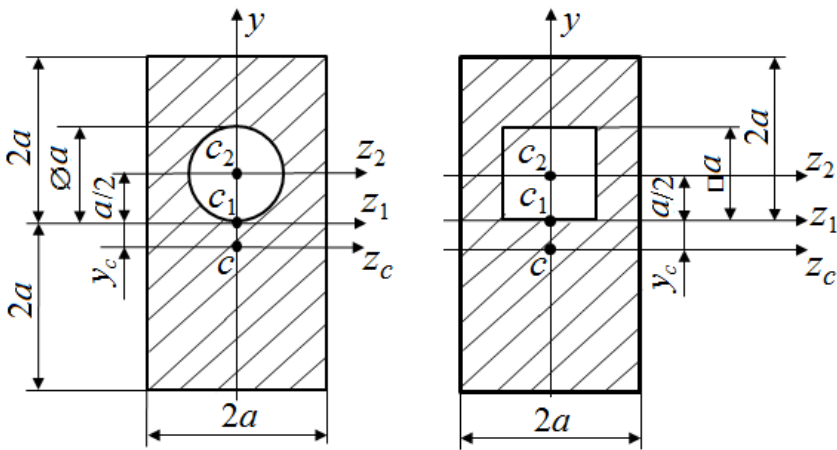


Рис. 3.6

Момент инерции сечения относительно центральной оси z_c определяем по формуле (3.9) изменения моментов инерции при параллельном переносе осей:

$$I_{z_c} = [I_{z_1} + y_c^2 A_1] - \left[I_{z_2} + \left(\frac{a}{2} + y_c \right) A_2 \right] = \left[\frac{2a(4a)^3}{12} + 8a^2 (0,55a)^2 \right] - \left[\frac{pa^4}{64} + \frac{pa^2}{4} \left(\frac{a}{2} + 0,55a \right)^2 \right] \approx 10,33a^4.$$

Относительно вертикальной оси y момент инерции будет равен

$$I_y = \frac{4a(2a)^3}{12} - \frac{\pi a^4}{64} = 2,62a^4.$$

Главные радиусы инерции:

$$i_{z_c} = \sqrt{\frac{I_{z_c}}{A}} = \sqrt{\frac{10,33a^4}{7,215a^2}} = 1,2a, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{2,62a^4}{7,215a^2}} = 0,6a.$$

Момент сопротивления относительно оси z_c :

$$W_{z_c} = \frac{I_{z_c}}{y_{\max}} = \frac{10,33a^4}{2,055a} = 5,027a.$$

Вариант б). Площадь поперечного сечения будет равна

$$A = A_1 - A_2 = 8a^2 - a^2 = 7a^2.$$

Расстояние от центральной оси прямоугольника z до центра тяжести трубчатого сечения:

$$y_c = \frac{S_{z_2}}{A_2} = -\frac{a^3}{2 \cdot 7a^2} = -0,07a,$$

где $S_{z_2} = y_{c_2} \cdot A = \frac{a}{2}(-a^2) = -\frac{a^3}{2}$.

Момент инерции сечения относительно центральной оси z_c :

$$I_{z_c} = \left[I_{z_1} + y_c^2 A_1 \right] - \left[I_{z_2} + \left(\frac{a}{2} + y_c \right) A_2 \right] = \left[\frac{2a(4a)^3}{12} + 8a^2(0,07a)^2 \right] - \left[\frac{pa^4}{64} + \frac{pa^2}{4} \left(\frac{a}{2} + 0,07a \right)^2 \right] \approx 10,3a^4.$$

Момент инерции сечения относительно центральной оси y :

$$I_y = \frac{4a(2a)^3}{12} - \frac{a^4}{12} = 2,59a^4.$$

Главные радиусы инерции:

$$i_{z_c} = \sqrt{\frac{I_{z_c}}{A}} = \sqrt{\frac{10,3a^4}{7a^2}} = 1,22a; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{2,59a^4}{7a^2}} = 0,61a.$$

Момент сопротивления относительно оси z_c :

$$W_{z_c} = \frac{I_{z_c}}{y_{\max}} = \frac{10,3a^4}{2,07a} = 4,976a.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Вычислить осевые и центробежный моменты инерции прямоугольника размерами $b = 24$ см и $h = 30$ см относительно осей z и y , совпадающих с двумя его сторонами.

Ответ: $I_z = 216 \cdot 10^3 \text{ см}^4$, $I_y = 138,2 \cdot 10^3 \text{ см}^4$, $I_{zy} = 129,6 \cdot 10^3 \text{ см}^4$.

3.2. Определить величину главных моментов инерции и моментов сопротивления сечения прямоугольного бруса, ослабленного круглым отверстием (рис. 3.7), при заданных размерах: $b = 12$ см, $h = 20$ см, $d = 5$ см.

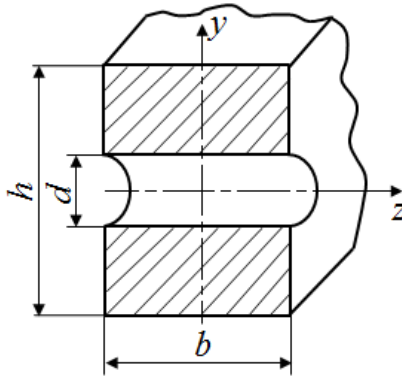


Рис. 3.7

Ответ: $I_z = 7875 \text{ см}^4$, $I_y = 2160 \text{ см}^4$, $W_z = 737,5 \text{ см}^3$, $W_y = 360 \text{ см}^3$.

3.3. Выяснить, как изменятся момент инерции и момент сопротивления квадрата со стороной a относительно оси z , если сечение повернуть на угол 45° , оставив ось z горизонтальной (рис. 3.8).

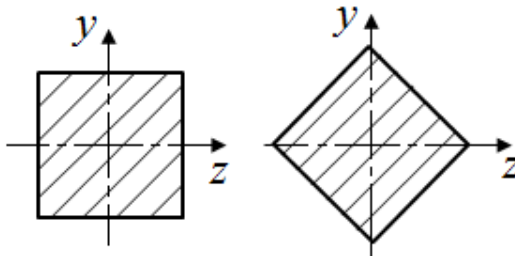


Рис. 3.8

Ответ: I_z не изменится, W_z уменьшится на 41 %.

3.4. Вычислить главные моменты инерции, главные радиусы инерции и моменты сопротивления полого прямоугольного сечения (рис. 3.9) с размерами $b = 12 \text{ см}$, $h = 20 \text{ см}$, $a = 6 \text{ см}$. Как изменятся эти геометрические характеристики сечения, если внутренняя квадратная полость будет повернута на угол 45° ?

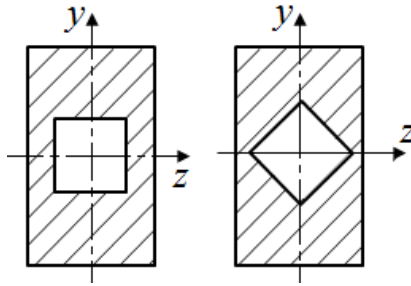


Рис. 3.9

Ответ: $I_z = 7892 \text{ см}^4$, $I_y = 2722 \text{ см}^4$, $i_z = 6,16 \text{ см}$, $i_y = 3,64 \text{ см}$,
 $W_z = 789,2 \text{ см}^3$, $W_y = 462 \text{ см}^3$.

3.5. Сравнить величины моментов инерции относительно центральной оси z сечений прямоугольника, квадрата и круга при условии, что площади A всех трех сечений одинаковы (рис. 3.10), выразив моменты инерции фигур через площадь сечения.

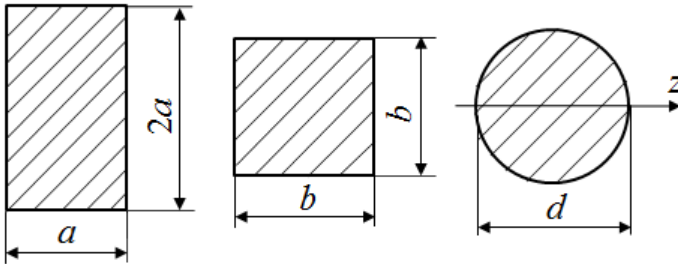


Рис. 3.10

Ответ: $I_{z_1} = 0,167A^2$, $I_{z_2} = 0,0833A^2$, $I_{z_3} = 0,0797A^2$.

3.6. Вычислить главные центральные моменты инерции двухканальной трубы прямоугольного очертания, запроектированной в двух вариантах: а) с двумя круглыми отверстиями диаметром $d = 100 \text{ мм}$; б) с двумя квадратными отверстиями размером $100 \times 100 \text{ мм}$ каждое (рис. 3.11).

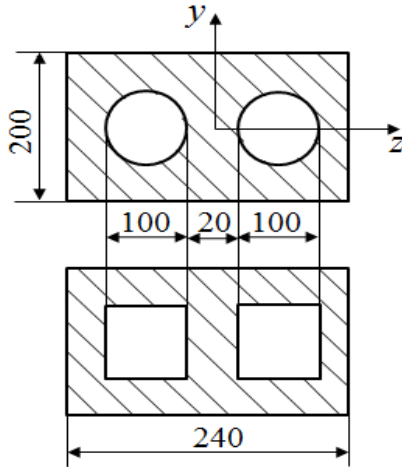


Рис. 3.11

Ответ: а) $I_z \approx 150 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$, $I_y \approx 164 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$;
 б) $I_z \approx 143 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$, $I_y \approx 142 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$.

3.7. Определить величину момента инерции заданного сечения площадью A относительно оси z_2 , если задан момент инерции его относительно оси z_1 (рис. 3.12). Расстояния от центра тяжести сечения до осей z_1 и z_2 соответственно равны a_1 и a_2 .

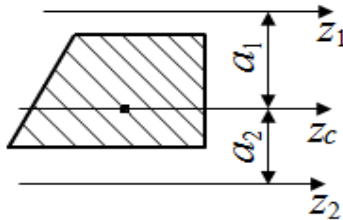


Рис. 3.12

Ответ: $I_{z_1} = I_{z_2} + A(a_2^2 - a_1^2)$.

3.8. Деревянная балка составлена из трех одинаковых досок, склеенных между собой в виде двутавра (рис. 3.13). Определить

величину главных центральных моментов инерции и моментов сопротивления сечения, если размеры каждой доски 50×240 мм.

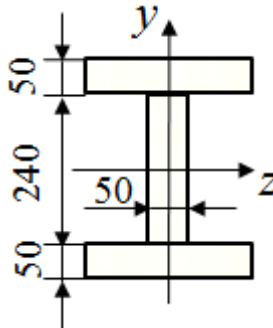


Рис. 3.13

Ответ: $I_z = 566,6 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$, $I_y = 117,7 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$,
 $W_z = 333 \cdot 10^4 \text{ мм}^3$, $W_y = 98 \cdot 10^4 \text{ мм}^3$.

3.9. Для двутавра с полками различной ширины (рис. 3.14) определить положение центра тяжести сечения и вычислить момент инерции и наименьший момент сопротивления относительно центральной оси z .

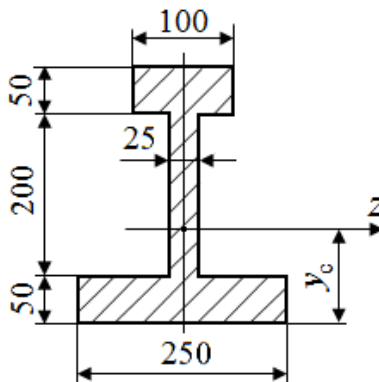


Рис. 3.14

Ответ: $y_c = 108 \text{ мм}$, $I_z = 254,7 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$, $W_{z \text{ min}} = 133 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$.

3.10. Вычислить главные моменты инерции и радиусы инерции равностороннего треугольника (рис. 3.15).

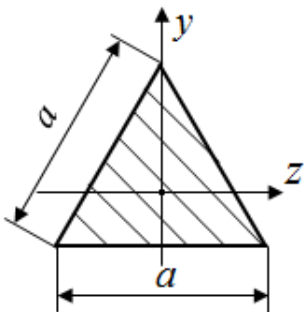


Рис. 3.15

Ответ: $I_z = I_y = \frac{a^4 \sqrt{3}}{96} \approx 0,018 a^4$; $i_z = i_y = \frac{a}{2\sqrt{6}} \approx 0,204 a$.

4. ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Теоретические сведения

Изгибом называется вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает внутренний силовой фактор – изгибающий момент M (рис. 4.1).

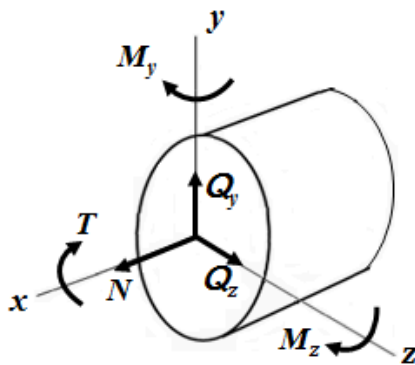


Рис. 4.1. Внутренние силовые факторы

Различают виды изгиба:

1) чистый изгиб – в поперечных сечениях бруса возникает единственный внутренний силовой фактор M_z или M_y ;

2) плоский поперечный изгиб – в поперечных сечениях бруса возникают изгибающий момент и поперечная сила (M_z и Q_y в вертикальной плоскости; M_y и Q_z в горизонтальной плоскости);

3) косоу изгиб – в поперечных сечениях бруса одновременно возникают M_y и M_z .

Стержень, работающий на изгиб, называется балкой.

Правило знаков для поперечных сил:

– если сила стремится повернуть отсеченную часть балки относительно проведенного сечения по часовой стрелке, она считается положительной;

– если сила стремится повернуть отсеченную часть балки относительно проведенного сечения против часовой стрелки, то отрицательной.

Это правило знаков схематично представлено на рис. 4.2.

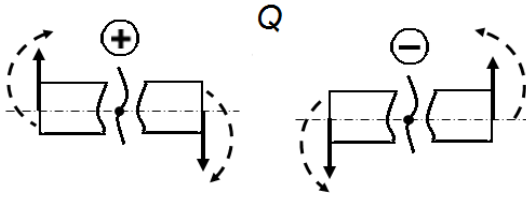


Рис. 4.2. Схематизация правила знаков для поперечных сил

Правило знаков для изгибающих моментов:

- если действующий на отсеченную часть балки момент сжимает относительно проведенного сечения верхние волокна, то изгибающий момент в данном сечении положителен; если сжимает нижние волокна – отрицателен;

- если действующий на отсеченную часть балки момент сжимает относительно проведенного сечения нижние волокна, то изгибающий момент в данном сечении отрицателен.

Это правило знаков схематично представлено на рис. 4.3.

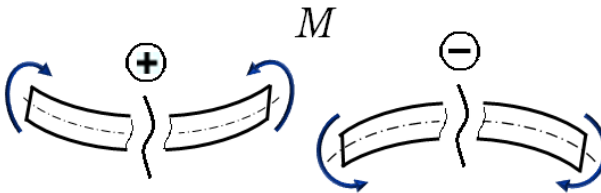


Рис. 4.3. Схематизация правила знаков для изгибающих моментов

Изгиб является сочетанием растяжения и сжатия, при этом в поперечных сечениях возникают нормальные напряжения σ , определяемые по формуле

$$\sigma = \frac{My}{I_z}, \quad (4.1)$$

где y – расстояние от оси z до рассматриваемой точки сечения;

I_z – осевой момент инерции сечения относительно оси z .

Выражению (1.1) соответствует эпюра напряжений, показанная на рис. 4.4. Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (оси z).

Кривизна нейтрального слоя $\frac{1}{\rho}$ связана с изгибающим моментом выражением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}, \quad (4.2)$$

где ρ – радиус кривизны нейтрального слоя.



Рис. 4.4. Эпюра нормальных напряжений при изгибе

Произведение $E I_z$ характеризует способность балки сопротивляться изгибу и называется жесткостью при изгибе (E – модуль Юнга материала).

Условие прочности при изгибе выражает требование, чтобы максимальные расчетные напряжения в опасных точках не превышали значения допускаемых напряжений, и записывается в виде неравенства:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (4.3)$$

где $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$ – осевой момент сопротивления.

Если материал неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условия прочности при растяжении и сжатии должны выполняться отдельно:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_{\min} \leq [\sigma_c],$$

где $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие соответственно.

Касательные напряжения в поперечном сечении балки определяются по формуле Д. И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q S_z^*}{b I_z}, \quad (4.4)$$

где Q – величина поперечной силы в рассматриваемом сечении балки;

S_z^* – статический момент относительно нейтральной оси z части площади поперечного сечения, расположенной выше слоя, в котором вычисляются касательные напряжения;

b – ширина сечения в слое, где определяются напряжения.

Из формулы (4.4) следует, что касательные напряжения изменяются по квадратичной зависимости и эпюра напряжений представляет собой параболу (рис. 4.5). В крайних точках касательные напряжения равны нулю, в точке на нейтральной оси напряжение имеет максимальное значение.

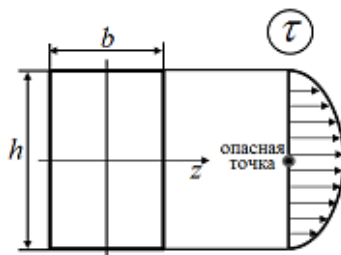


Рис. 4.5. Эпюра касательных напряжений при изгибе

Физически касательные напряжения обуславливают силовую связь между продольными слоями балки, препятствуя их сдвигу относительно друг друга.

Условие прочности при изгибе по касательным напряжениям имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{z_{\max}}^*}{b_{\min} I_z} \leq [\tau]. \quad (4.5)$$

При изгибе возникают деформации двух видов – линейные и угловые (рис. 4.6). Ось балки в деформированном состоянии называется изогнутой осью или упругой линией.

Расстояние, на которое перемещается центр тяжести сечения по направлению, перпендикулярному первоначальному положению балки, называется прогибом y . Угол, на который поворачивается при изгибе нормаль, проведенная к оси балки в сечении по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения Θ .

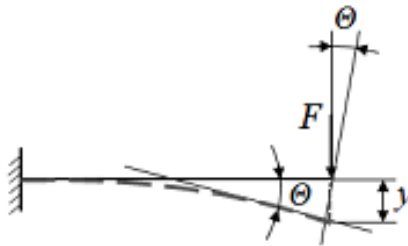


Рис. 4.6. Деформации при изгибе

Для определения перемещений прямолинейных упругих систем (балок) постоянной жесткости по длине применяется метод начальных параметров.

При помещении начала координат в крайней левой точке балки и отсчета от нее x (рис. 4.7); продлении обрывающейся распределенной нагрузки до конца балки и компенсации нагрузкой противоположного направления (именно продленной нагрузкой – штриховые линии на рис. 4.7), линейные перемещения определяются по уравнению прогибов:

$$EI_z y = EI_z y_0 + EI_z \Theta_0 + \sum M \frac{(x-a)^2}{2} + \sum F \frac{(x-b)^3}{6} + p \frac{(x-c)^4}{24}, \quad (4.6)$$

угловые перемещения определяются по уравнению углов поворота сечений:

$$EI_z \Theta = EI_z \Theta_0 + \sum M (x-a) + \sum F \frac{(x-b)^2}{3} + p \frac{(x-c)^3}{6}, \quad (4.7)$$

где Θ_0 и y_0 – угол поворота сечения и прогиб в начале координат (крайней левой точке), которые называются начальными параметрами;

x – координата сечения, в котором определяется перемещение;

a и b – расстояния от начала координат до сечений приложения моментов или сил соответственно;

c и d – расстояния от начала координат до сечений начала или окончания приложения равномерно распределенных нагрузок.

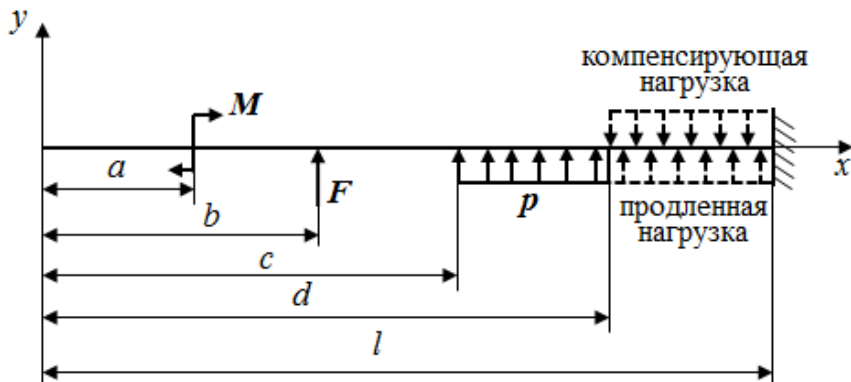


Рис. 4.7. Схема для определения перемещений методом начальных параметров

Начальные параметры Θ_0 и y_0 определяются из условий закрепления балки (вида и расположения опор).

Рекомендуемая методика расчета балок:

- 1) вычертить схему балки с указанием ее размеров и заданными внешними нагрузками;
- 2) обозначить опорные реакции;
- 3) составить уравнения равновесия (статики) и определить опорные реакции, выполнив их проверку;
- 4) разделить балку на участки;
- 5) составить уравнения для определения поперечных сил Q и изгибающих моментов M на каждом участке (расстояния до сечений откладываются от концов балки или узлов рамы);
- 6) вычислить значения внутренних силовых факторов на каждом участке и построить эпюры Q и M . Провести проверку правильности построения эпюр;
- 7) определить по эпюрам опасное сечение балки, подставить в условие прочности при изгибе максимальное значение внутреннего силового фактора и рассчитать размеры поперечного сечения, максимальной нагрузки или произвести проверку прочности;
- 8) провести координатные оси y и x , расположив начало координат в крайней левой точке;
- 9) если распределенная нагрузка обрывается, продлить ее до правого конца балки, компенсируя ее такой же нагрузкой противоположного направления;
- 10) провести сечение на расстоянии x от начала координат так, чтобы охватить почти всю длину балки (за исключением крайней правой точки). Записать уравнения (4.6) и (4.7) для данного сечения с соответствующими знаками (по правилу знаков для изгибающих моментов) и расстояниями a, b, c, d . Вычислить начальные параметры Θ_0 и y_0 ;
- 11) определить искомые перемещения, записывая в уравнениях (4.6) и (4.7) только те нагрузки, которые расположены на промежутке от начала координат до сечения, в котором определяется перемещение;
- 12) по вычисленным значениям y и Θ построить изогнутую ось балки.

Пример 4.1. Для заданной балки построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и определить опасное сечение (рис. 4.8).

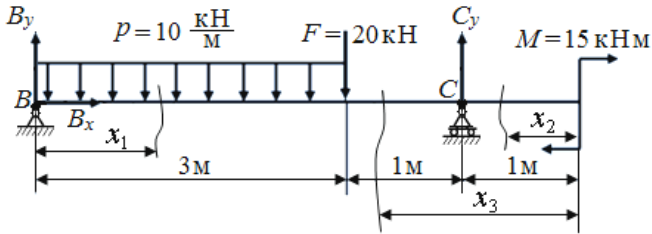


Рис. 4.8

Решение. Обозначаем опорные реакции и определяем их с помощью уравнений статики: $\Sigma F_x = 0$; $B_x = 0$.

$\Sigma F_y = 0$; $B_y - p \cdot 3 - F + C_y = 0$ – это уравнение используется для проверки.

$$\Sigma M_B = 0; -p \cdot 3 \cdot 1,5 - F \cdot 3 + C_y \cdot 4 - M = 0 \Rightarrow$$

$$C_y = \frac{p \cdot 3 \cdot 1,5 + F \cdot 3 + M}{4} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 20 \cdot 3 + 15}{4} = \frac{45 + 60 + 15}{4} = 30 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_C = 0; -M + F \cdot 1 + p \cdot 3 \cdot 2,5 - B_y \cdot 4 = 0 \Rightarrow$$

$$B_y = \frac{-M + F \cdot 1 + p \cdot 3 \cdot 1,5}{4} = \frac{-15 + 20 \cdot 1 + 10 \cdot 3 \cdot 2,5}{4} = \frac{-15 + 20 + 75}{4} = 20 \text{ кН.}$$

Выполняем проверку, подставляя значения опорных реакций с полученными знаками:

$$\Sigma F_y = B_y - p \cdot 3 - F + C_y = 20 - 10 \cdot 3 - 20 + 30 = 0.$$

Разбиваем балку на участки: $0 \leq x_1 \leq 3 \text{ м}$; $0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}$; $1 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$.

Составляем уравнения по соответствующему правилу знаков (рис. 4.2) и строим эпюру поперечных сил Q .

$$0 \leq x_1 \leq 3 \text{ м, } Q_{x_1} = B_y - p x_1;$$

$$x_1 = 0, Q_{x_1} = B_y = 20 \text{ кН};$$

$$x_1 = 3 \text{ м, } Q_{x_1} = B_y - p \cdot 3 = 20 - 10 \cdot 3 = -10 \text{ кН.}$$

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м, } Q_{x_2} = 0.$$

$$1 \leq x_3 \leq 2 \text{ м, } Q_{x_3} = -C_y = -30 \text{ кН.}$$

Определяем положение сечения, в котором поперечная сила равна нулю (меняет знак):

$$Q_{x_1} = B_y - p \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{B_y}{p} = \frac{20}{10} = 2 \text{ м.}$$

В этом сечении изгибающий момент будет принимать экстремальное значение.

Составляем уравнения по соответствующему правилу знаков (см. рис. 4.3). Отсеченная часть балки на первом участке показана на рис. 4.9.

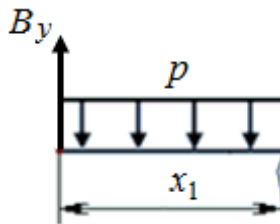


Рис. 4.9

$$0 \leq x_1 \leq 3 \text{ м, } M_{x_1} = B_y \cdot x_1 - p \frac{x_1^2}{2};$$

$$x_1 = 0, M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 2 \text{ м, } M_{x_1} = 20 \cdot 2 - 10 \frac{2^2}{2} = 20 \text{ кНм};$$

$$x_1 = 3 \text{ м, } M_{x_1} = 20 \cdot 3 - 10 \frac{3^2}{2} = 15 \text{ кНм.}$$

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м, } M_{x_2} = -M = -15 \text{ кНм};$$

$$1 \leq x_3 \leq 2 \text{ м, } M_{x_3} = -M + C_y(x_3 - 1);$$

$$x_3 = 1 \text{ м, } M_{x_3} = -15 \text{ кНм};$$

$$x_3 = 2 \text{ м, } M_{x_3} = 15 \text{ кНм.}$$

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 4.10).

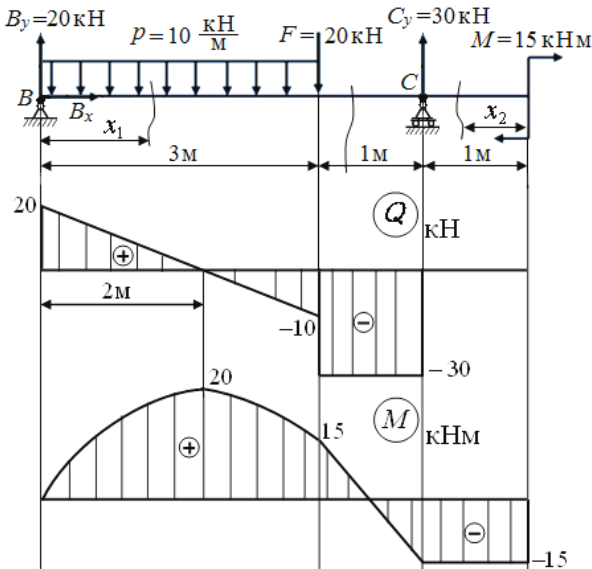


Рис. 4.10

Опасным является сечение, в котором изгибающий момент экстремальный, $M_{\max} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Пример 4.1. Для заданной рамы (рис. 4.11) построить эпюры внутренних силовых факторов и подобрать прямоугольное поперечное сечение при $h / b = 1,5$ и $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

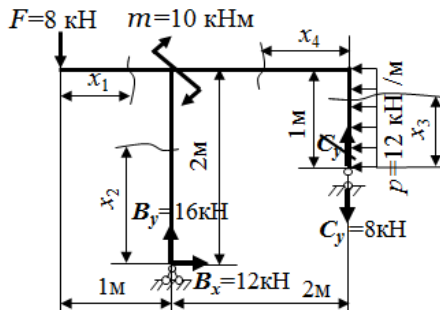


Рис. 4.11

Решение. Обозначаем опорные реакции и определяем их с помощью уравнений статики:

$$\Sigma F_x = 0; \quad B_x - p \cdot 1 = 0 \Rightarrow B_x = 12 \text{ кН};$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad -F + B_y + C_y = 0 \quad \text{— уравнение для проверки};$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad F \cdot 1 - m + p \cdot 1(2 - 0,5) + C_y \cdot 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Sigma M_C = 0; \quad F \cdot 3 - m - B_y \cdot 2 + B_x(2 - 1) + p \cdot 1 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow$$

$$C_y = \frac{-F \cdot 1 + m - p \cdot 1 \cdot 1,5}{2} = -8 \text{ кН.}$$

$$B_y = \frac{F \cdot 3 - m + B_x \cdot 1 - p \cdot 1 \cdot 0,5}{2} = 16 \text{ кН.}$$

Выполняем проверку, подставляя значения опорных реакций с полученными знаками:

$$\Sigma F_y = -F + B_y + C_y = -8 - 8 + 16 = 0.$$

Знак « \leftarrow » опорной реакции C_y означает, что ее направление противоположно указанному. Перечеркиваем на схеме эту опорную реакцию, перенаправляем и указываем с положительным знаком.

Разбиваем раму на участки: $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$; $0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$; $0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}$; $0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м}$.

В рамках принято первой строить эпюру изгибающих моментов, составляем уравнения по соответствующему правилу знаков (см. рис. 4.3) и строим эпюру M (рис. 4.13).

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}, \quad M_{x_1} = -F \cdot x_1;$$

$$x_1 = 0, \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1 \text{ м}, \quad M_{x_1} = -8 \text{ кНм.}$$

$$0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}, \quad M_{x_2} = -B_x \cdot x_2;$$

$$x_2 = 0, \quad M_{x_2} = 0;$$

$$x_2 = 2 \text{ м}, \quad M_{x_2} = -24 \text{ кНм.}$$

$$0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}, M_{x_3} = -p \frac{x_3^2}{2};$$

$$x_3 = 0, M_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1 \text{ м}, M_{x_3} = -12 \frac{1^2}{2} = -6 \text{ кНм}.$$

Отсеченная часть балки на четвертом участке отдельно показана на рис. 4.12. Поскольку на участке отсутствует поперечная сила, поводить проверку на наличие экстремума нет необходимости.

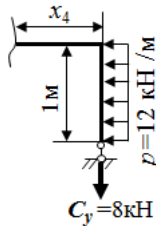


Рис. 4.12

$$0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м}, M_{x_4} = -\frac{p \cdot 1^2}{2} - C_y \cdot x_4;$$

$$x_4 = 0, M_{x_4} = -6 \text{ кНм};$$

$$x_4 = 2 \text{ м}, M_{x_4} = -6 - 8 \cdot 2 = -22 \text{ кНм}.$$

Квадратичная зависимость строится на эпюре в виде параболы вогнутостью навстречу направлению распределенной нагрузки.

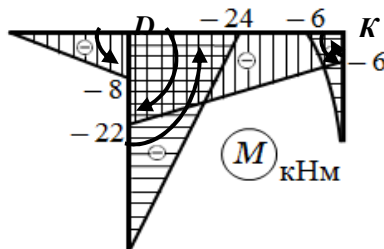


Рис. 4.13

Выполняем проверку равновесия в вырезанных узлах D и K (рис. 4.14). Проводится стрелка момента от стержня по эпюре относительно узла. Сумма всех моментов (включая внешние), примененных по часовой стрелке и против часовой стрелки относительно узла (точки соединения стержней), должна равняться нулю. В узле D помимо моментов, создаваемых внутренними силовыми факторами, необходимо приложить внешний момент $m = 10$ кН·м.

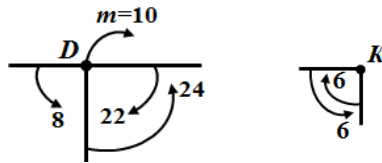


Рис. 4.14

Составляем уравнения по соответствующему правилу знаков (см. рис. 4.2) и строим эпюру поперечных сил Q (рис. 4.15).

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м, } Q_{x_1} = -F = -8 \text{ кН.}$$

$$0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м, } Q_{x_2} = -B_x = -12 \text{ кН.}$$

$$0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м, } Q_{x_3} = p \cdot x_3;$$

$$x_3 = 0, Q_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1 \text{ м, } Q_{x_3} = 12 \text{ кН.}$$

$$0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м, } Q_{x_4} = -C_y = 12 \text{ кН.}$$

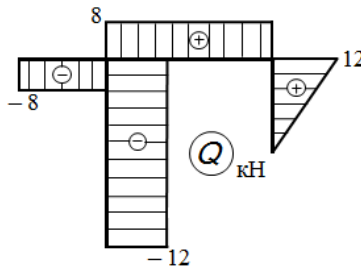


Рис. 4.15

Составляем уравнения по соответствующему правилу знаков (см. рис. 1.2) и строим эпюру продольных сил N (рис. 4.16).

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}, N_{x_1} = 0.$$

$$0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м}, N_{x_2} = -B_y = -16 \text{ кН}.$$

$$0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}, N_{x_3} = C_y = 8 \text{ кН}.$$

$$0 \leq x_4 \leq 2 \text{ м}, N_{x_4} = -p \cdot 1 = -12 \text{ кН}.$$

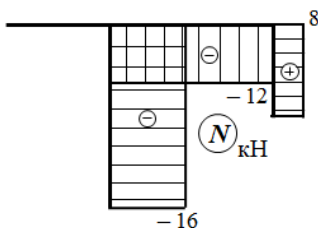


Рис. 4.16

Изображаем схему нагружения с опорными реакциями и участками рамы и эпюры внутренних силовых факторов на рис. 4.17.

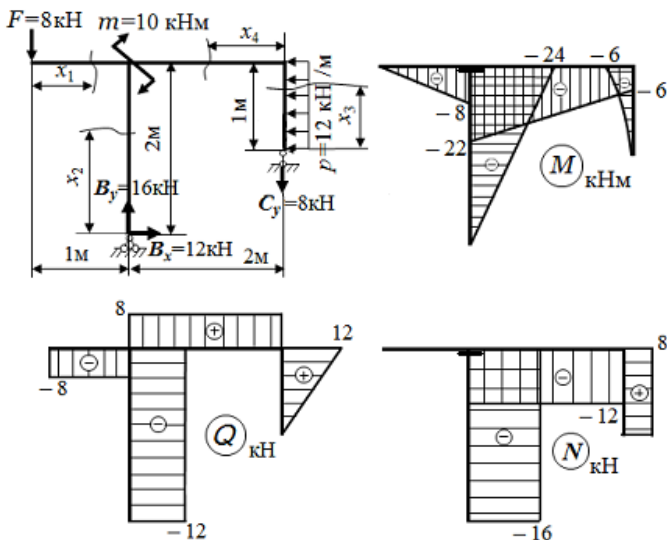


Рис. 4.17

Обозначаем опасное сечение на эпюре изгибающих моментов с $M_{\max} = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (сечение на втором участке при $x_2 = 2 \text{ м}$) и это же сечение на эпюре продольных сил $N = -16 \text{ кН}$.

Определяем размеры поперечного сечения из условия прочности при изгибе, используя заданное отношение высоты сечения к ширине 1,5:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \Rightarrow W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{bh^2}{6} = \frac{h}{1,5} \cdot \frac{h^2}{6} = \frac{h^3}{9} \Rightarrow$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{9M_{\max}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 24 \cdot 10^6}{160}} = 10^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{216}{160}} = 10^2 \cdot 1,105 =$$

$$= 110,5 \text{ мм} \approx 110 \text{ мм},$$

$$b = \frac{h}{1,5} = \frac{110}{1,5} = 73,33 \text{ мм} \approx 75 \text{ мм}.$$

В рамах в поперечном сечении кроме изгибающего момента действует продольная сила, которая также создает в сечении нормальные напряжения. Выполняем проверку с учетом продольной силы:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{N}{A} \text{ £ } [\sigma],$$

где $W_z = \frac{bh^2}{6}$ – осевой момент сопротивления прямоугольного сечения;

$A = bh$ – площадь поперечного сечения.

Численные значения изгибающего момента и продольной силы берутся в опасном сечении из эпюр внутренних силовых факторов. Так как эпюра изгибающих моментов строится со стороны сжатых волокон, знак «-» значения M_{\max} означает, что внутренние волокна в опасном сечении работают на сжатие, а наружные на растяжение. Внутри возникают отрицательные нормальные напря-

жения, снаружи положительные. Знаки перед дробями в формуле для определения максимальных напряжений ставятся по знаку продольной силы:

$$S_{\max} = \left| -\frac{M_{\max} \cdot 6}{b h^2} - \frac{N}{b h} \right| = \left| -\frac{24 \cdot 10^6 \cdot 6}{75 \cdot 110^2} - \frac{16 \cdot 10^3}{75 \cdot 110} \right| =$$

$$= 158,68 + 1,94 = 160,62 \text{ МПа}$$

Определяем процент перегрузки:

$$\frac{160,62 - 160}{160} \cdot 100 = \frac{0,62}{160} \cdot 100 \approx 0,4 \%$$

Полученное значение не превышает допустимое отклонение 5 %.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок (рис. 4.18).

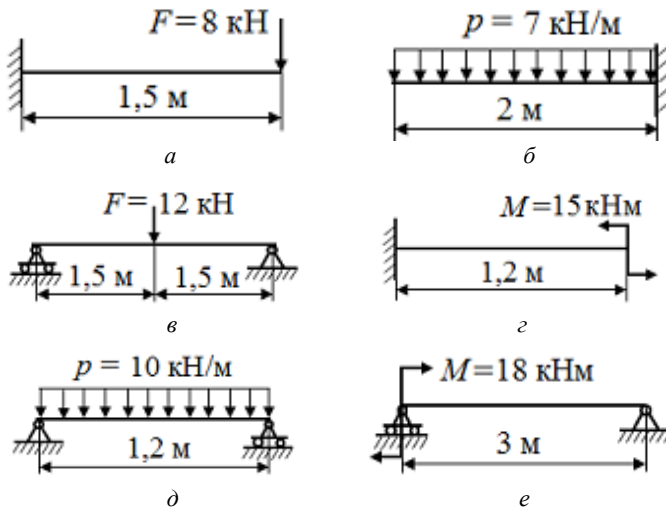


Рис. 4.18

Ответ:

Схема	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>e</i>
Q , кН	8	-14	6	0	6	6
M , кН·м	12	-14	9	12	1,8	18

4.2. Для консольных (схемы 1–6) и шарнирно опертых балок (схемы 7–12), изображенных на рис. 4.19, построить эпюры поперечных сил и вычислить наибольшие по абсолютным значениям величины Q и M .

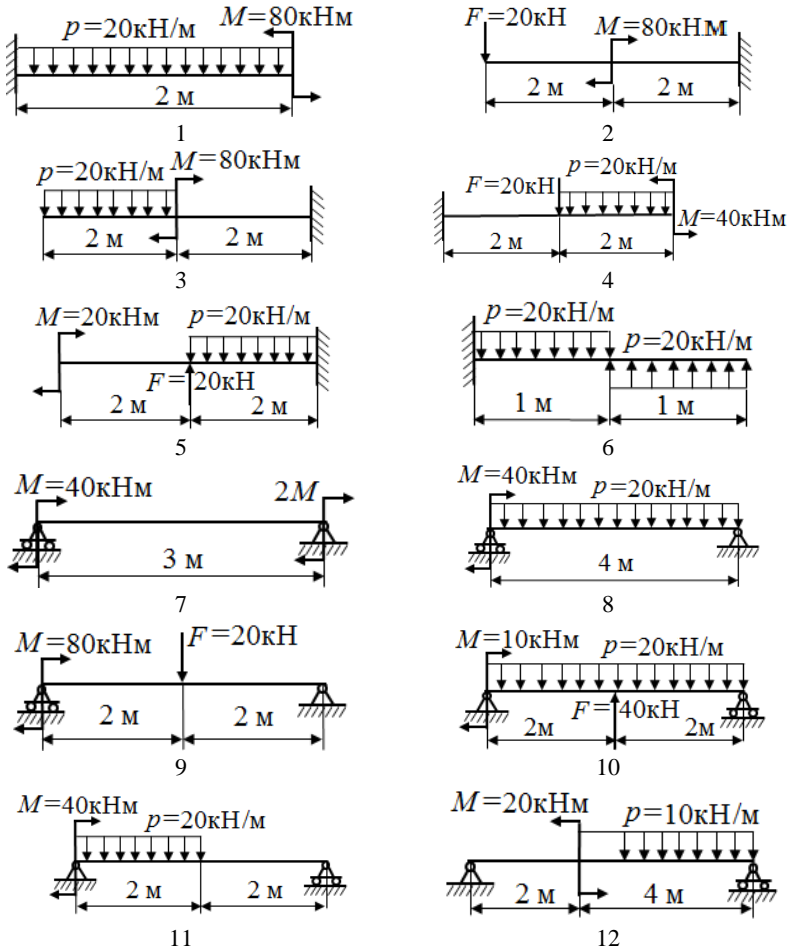


Рис. 4.19

Ответ:

№ схемы консольной балки	1	2	3	4	5	6
Q , кН	40	-20	-40	60	20	-20
M , кН·м	80	40	40	-120	30	20
№ схемы двухопорной балки	7	8	9	10	11	12
Q , кН	40	-50	-30	-22,5	20	23,3
M , кН·м	-80	62,5	80	17,6	50	17,2

4.3. Построить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов для рам (рис. 4.20). Вычислить наибольшие по абсолютному значению величины N , Q и M .

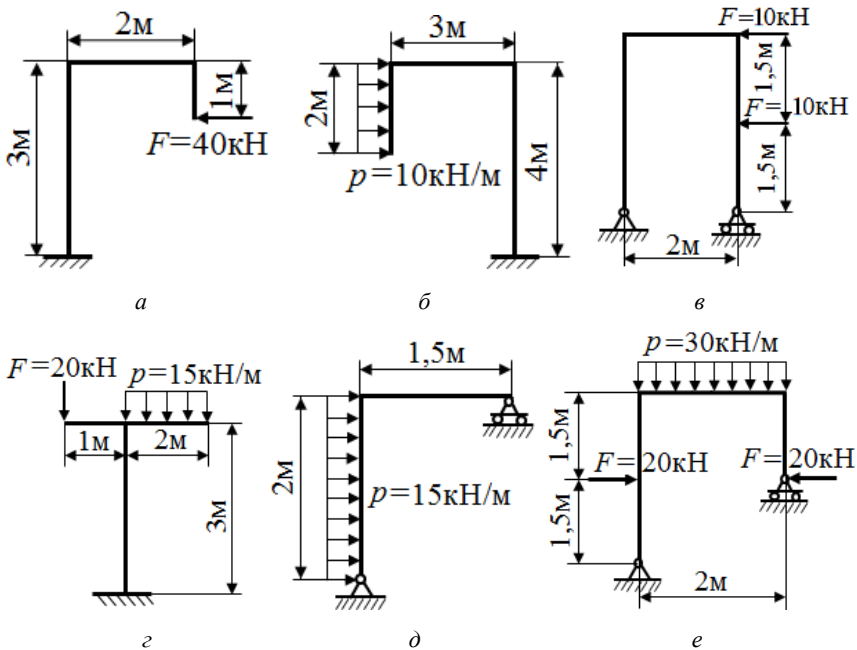


Рис. 4.20

Ответ:

Схема	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>e</i>
<i>N</i> , кН	-40	-20	22,5	-50	-30	-30
<i>Q</i> , кН	40	20	22,5	30	-30	30
<i>M</i> , кН·м	80	60	-60	-30	30	-30

4.4. Деревянная балка круглого сечения диаметром 270 мм нагружена двумя силами $F = 20$ кН каждая (рис. 4.21). Определить величину наибольших нормальных напряжений в опасном сечении балки.

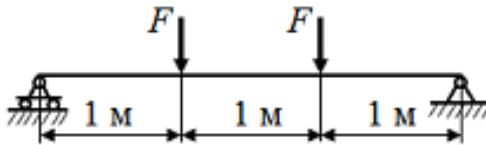


Рис. 4.21

Ответ: $\sigma_{\max} = 10,4$ МПа.

4.5. Консольная балка таврового профиля длиной $l = 1,4$ м нагружена силой F (рис. 4.22). Определить величину силы F и значение наибольших сжимающих напряжений, если растягивающие напряжения в опасном сечении $\sigma_{\max} = 42,4$ МПа.

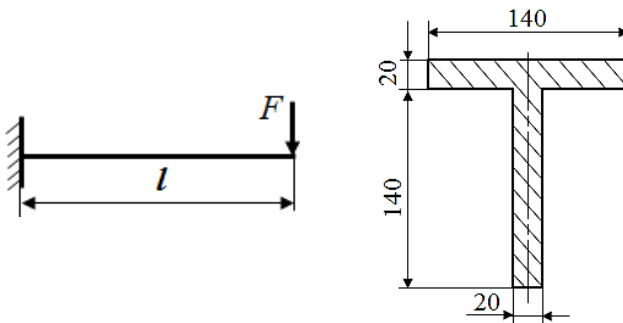
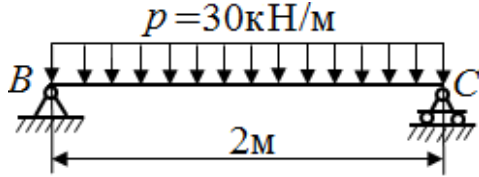


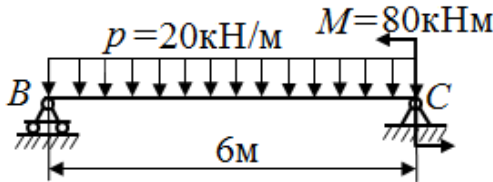
Рис. 4.22

Ответ: $F = 8,25$ кН, $\sigma_{\min} = -93,5$ МПа.

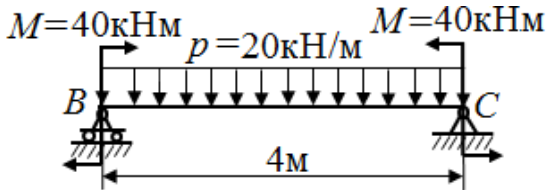
4.6. Определить углы поворота опорных сечений Θ_B и Θ_C и прогибы посередине пролета для шарнирно опертых балок двутаврового сечения (рис. 4.23). Принять номера профилей двутавров для схем: а) № 27, б) № 36, в) № 30.



а



б



в

Рис. 4.23

- Ответ: а) $\Theta_B = -\Theta_C = -0,001$ рад, $y = -0,62$ мм;
 б) $\Theta_B = -0,0097$ рад, $\Theta_C = 0,0127$ рад, $y = -19,4$ мм;
 в) $\Theta_B = -\Theta_C = -0,0094$ рад, $y = -10,4$ мм.

4.7. Подобрать по сортаменту двутавровое сечение балки (рис. 4.24) из условия, чтобы наибольший прогиб не превышал допускаемый $[y] = \frac{1}{400}l$;

Проверить прочность рассчитанного сечения, приняв $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

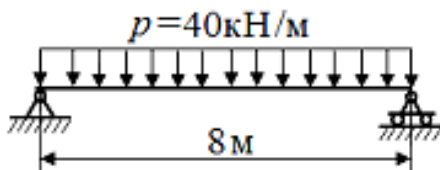


Рис. 4.24

Ответ: двутавр № 55, $\sigma_{\max} = 160,8 \text{ МПа} \approx [\sigma]$.

5. КРУЧЕНИЕ

Теоретические сведения

Кручением называется вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает крутящий момент. Кручение возникает, когда к брусу приложены внешние моменты, плоскости действия которых, перпендикулярны к оси, называемые скручивающими моментами m . На расчетных схемах скручивающие моменты могут показываться как на рис. 5.1.

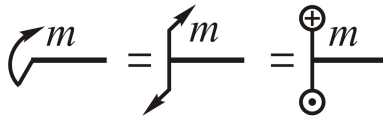


Рис. 5.1. Обозначения скручивающего момента

Крутящий момент T в поперечном сечении бруса равен алгебраической сумме моментов относительно оси x всех внешних сил, действующих на отсеченную часть тела

$$T = \sum_{i=1}^n m_x(F_i). \quad (5.1)$$

Крутящий момент положительный, когда скручивающие моменты от внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса, направлены по часовой стрелке, если смотреть на сечение со стороны внешней нормали n ; если скручивающие моменты направлены против часовой стрелки, то крутящий момент в сечении считается отрицательным (рис. 5.2).



Рис. 5.2. Схематизация правила знаков для крутящего момента

При кручении круглых брусьев в поперечных сечениях возникают касательные напряжения, определяемые по формуле

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho, \quad (5.2)$$

где ρ – расстояние от оси бруса до точки поперечного сечения, в которой определяется τ ;

I_p – полярный момент инерции круглого поперечного сечения.

Максимальные касательные напряжения возникают в точках контура сечения, наиболее удаленных от оси стержня и равны

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \rho_{\max}. \quad (5.3)$$

При кручении круглого бруса деформация заключается в повороте вокруг оси поперечных сечений относительно друг друга на угол, называемый углом закручивания. Для двух сечений бруса, расположенных на расстоянии l одно от другого, угол закручивания будет определяться интегрированием:

$$\varphi = \int_0^l \frac{T dx}{GI_p}, \quad (5.4)$$

где G – модуль сдвига материала.

Если $T = \text{const}$, $GI_p = \text{const}$, то получим

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}.$$

Произведение GI_p называется жесткостью сечения бруса при кручении, так как чем оно больше, тем меньше будет угол закручивания, и наоборот.

Используя выражение (5.3), условие прочности при кручении представится в виде

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \rho_{\max} \leq [\tau]. \quad (5.5)$$

$$\frac{I_p}{\rho_{\max}}$$

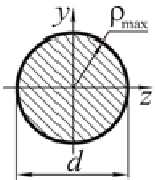
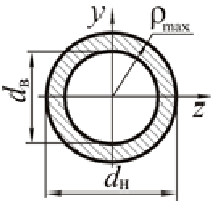
Величина, равная отношению ρ_{\max} , называется полярным моментом сопротивления поперечного сечения и обозначается W_p . Тогда условие прочности при кручении можно записать в виде

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (5.6)$$

Формулы для определения полярного момента сопротивления поперечного сечения бруса в виде сплошного круга и кольца приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Полярный момент сопротивления

Форма и размеры поперечного сечения	Полярный момент сопротивления
	$\rho_{\max} = \frac{d}{2};$ $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$
	$\rho_{\max} = \frac{d_n}{2};$ $W_p = \frac{\pi d_n^3}{16} (1 - c^4);$ $c = \frac{d_h}{d_n}$

Условие жесткости скручиваемого стержня состоит в том, что максимальный угол закручивания стержня не должен превышать допускаемого значения:

$$\varphi_{\max} = \frac{T_{\max} l}{GI_p} \leq [\varphi], \quad (5.7)$$

где $[\varphi]$ – допускаемый угол закручивания, рад.

Допускаемый угол закручивания часто задается на единицу длины бруса. Тогда условие жесткости при кручении бруса будет представлять условие, что наибольший относительный угол закручивания θ_{\max} не превышает допускаемого относительного угла закручивания $[\theta]$.

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\theta]. \quad (5.8)$$

Условия прочности и жесткости при кручении позволяют выполнять, три вида расчетов: конструкторский или проектный, проверочный, определение грузоподъемности или несущей способности.

Пример 5.1. Построить эпюры крутящих моментов для вала, нагруженного моментами: $m_1 = 0,6$ кН·м; $m_2 = 0,8$ кН·м; $m_3 = 2$ кН·м; $m_4 = 0,8$ кН·м (рис. 6.2). Определить диаметр круглого поперечного сечения стального вала, если $[\tau] = 80$ МПа, $[\theta] = 0,8^\circ$ на 1 метр длины вала, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Проверяем условия равномерного вращения вала, пренебрегая моментами трения в подшипниках

$$\sum m_x = -m_1 + m_2 - m_3 + m_4 = -0,6 + 1,8 - 2 + 0,8 = 0.$$

Вал имеет пять расчетных участков. Последовательно на каждом участке проводим секущие плоскости, составляем уравнения крутящих моментов.

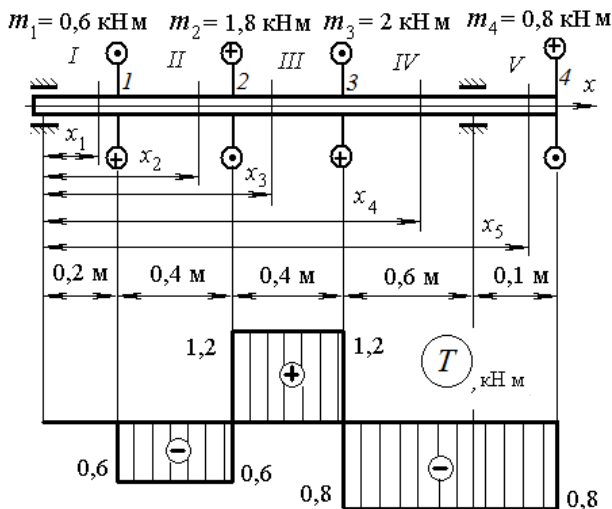


Рис. 5.3. Расчетная схема и эпюра T для вала

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 0,2$ м):

$T_{x_1} = 0$. Этот участок не нагружен.

Участок II ($0,2 \text{ м} \leq x_2 \leq 0,6$ м):

$T_{x_2} = -m_1 = -0,6$ кН·м.

Участок III ($0,6 \text{ м} \leq x_3 \leq 1,0$ м):

$T_{x_3} = -m_1 + m_2 = -0,6 + 1,8 = 1,2$ кН·м.

Участок IV ($1,0 \text{ м} \leq x_4 \leq 1,6$ м):

$T_{x_4} = -m_1 + m_2 - m_3 = -0,6 + 1,8 - 2 = -0,8$ кН·м.

Участок V ($1,6 \text{ м} \leq x_5 \leq 1,7$ м):

$T_{x_4} = T_{x_5} = -0,8$ кН·м.

Из уравнений следует, что крутящие моменты на участках имеют постоянную величину. По вычисленным значениям крутящих моментов на участках строим эпюру T .

Из эпюры видно, что третий участок будет опасным, так как на этом участке крутящий момент имеет максимальное значение. Проверка показывает, что в каждом сечении эпюра крутящих моментов делает скачки, равные приложенным внешним моментам. Значит, эпюра построена правильно.

Из условия прочности при кручении находим диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 80}} = 42,4 \text{ мм.}$$

Диаметр вала из условия жесткости при кручении определяется как

$$d = \sqrt[4]{\frac{32T_{\max}l}{\pi G[\theta]} \cdot \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,2 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,8} \cdot \frac{180}{3,14}} = 57,5 \text{ мм.}$$

Принимаем диаметр вала $d = 57,5$ мм.

Пример 5.2. Определить диаметры полого стального вала, передающего мощность $P = 100$ кВт при частоте вращения $n = 650$ мин⁻¹, если допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau] = 90$ МПа, внутренний диаметр $d_{\text{в}}$ от наружного $d_{\text{н}}$ составляет $c = 0,6$.

Решение. Полярный момент сопротивления можно представить в виде

$$W_p = \frac{T_{\max}}{[\tau]} = \frac{\pi d_{\text{н}}^3}{16} (1 - c^4).$$

В данном случае наибольший крутящий момент T_{\max} , возникающий в сечении вала, будет равен скручивающим моментам m :

$$m = \frac{P}{\omega} = \frac{30P}{\pi n} = \frac{30 \cdot 100 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 640} = 1470 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Тогда наружный диаметр вала будет равен

$$d_{\text{н}} = \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau](1-c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1470 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 90 \cdot (1-0,6^4)}} = 45,7 \text{ мм.}$$

Внутренний диаметр вала равен

$$d_{\text{в}} = c d_{\text{н}} = 0,6 \cdot 45,7 = 27,4 \text{ мм.}$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Определить диаметр сплошного стального бруса круглого сечения, передающего крутящий момент $T = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$, если допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau] = 70 \text{ МПа}$.

Ответ: 103 мм.

5.2. Определить диаметр сплошного стального бруса круглого сечения, передающего крутящий момент $T = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}$, если допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau] = 80 \text{ МПа}$, а допускаемый угол закручивания $[\theta] = 0,6^\circ$ на один метр длины вала.

Ответ: 120 мм.

5.3. Напряжения у поверхности бруса круглого сечения 80 МПа. Чему равны касательные напряжения в том же поперечном сечении на расстоянии четверти радиуса от поверхности бруса?

Ответ: 60 МПа.

5.4. Сплошной стальной брус диаметром 100 мм и длиной 6 м закручен на угол 4° . Чему равно наибольшее касательное напряжение?

Ответ: 46,5 МПа.

5.5. На стальной вал круглого сечения через 5 шкивов действуют пары сил $m_1 = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m_2 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m_3 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m_4 = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m_5 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (рис. 5.4). Построить эпюру крутящего момента, подобрать диаметр бруса при $[\tau] = 90 \text{ МПа}$ и определить величину угла поворота правого концевого сечения по отношению к левому. Затем первую и четвертую пары сил поменять местами и решить задачу при этом измененном условии.

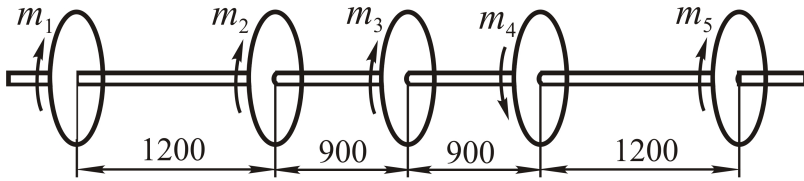


Рис. 5.4

Ответ: 70 мм; 0,0366 рад; 77 мм; 0,0728 рад.

5.6. К стержню круглого поперечного сечения, защемленному правым концом, приложены две одинаковые крутящие пары сил m (рис. 5.5). Диаметр левого участка стержня 40 мм, диаметр правого участка 60 мм. Наибольшее касательное напряжение в стержне на правом участке 80 МПа. Чему равно наибольшее касательное напряжение на левом участке стержня?

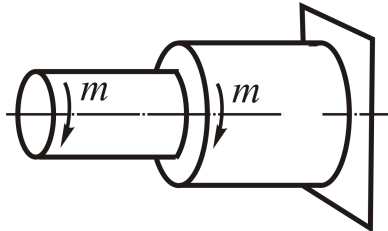


Рис. 5.5

Ответ: 135 МПа.

5.7. К стальному брусу круглого сечения приложены скручивающие моменты: $m_1 = m_4 = 1142 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $m_2 = 2716 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $m_3 = 5000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ (рис. 5.6). Диаметр крайних участков вала составляет 40 мм, среднего – 60 мм. Построить эпюру крутящего момента и эпюру углов закручивания для заданного бруса. Подсчитать, чему равны касательные напряжения у поверхности бруса на каждом его участке и угол закручивания вала между сечениями 2 и 4.

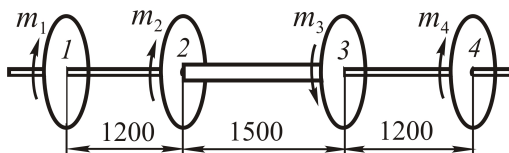


Рис. 5.6

Ответ: 91 МПа на всех участках; 0,0113 рад.

5.8. Определить наибольший крутящий момент, который возникает в поперечном сечении стального бруса диаметром 10 мм, если допускаемое напряжение $[\tau] = 90$ МПа. Какая наименьшая при этом длина бруса, если угол закручивания равен 90° .

Ответ: 29,5 Н·м; 4,18 м.

5.9. Сплошной вал диаметром 400 мм заменяется полым валом, у которого внутренний диаметр составляет 60 % от наружного. Определить наружный диаметр полого вала при условии, что максимальные касательные напряжения у них одинаковые. Во сколько раз масса сплошного вала превышает массу полого вала?

Ответ: 420 мм; 1,41.

5.10. Два вала, один из которых сплошной, а другой полый, имеют одинаковые массы и в их поперечных сечениях возникают одинаковые крутящие моменты. У которого из них максимальные касательные напряжения будут больше и во сколько раз, если внутренний диаметр полого вала составляет 0,6 от наружного.

Ответ: у сплошного в 1,7 раза.

5.11. Определить диаметр сплошного стального бруса круглого сечения, передающего мощность 80 л. с. при частоте вращения 180 мин^{-1} , при допускаемом напряжении 48 МПа и допускаемом угле закручивания 1° на метр длины бруса.

Ответ: 70 мм.

5.12. Вал круглого сечения диаметром 90 мм передает мощность 90 л. с. Определить частоту вращения вала, если возникающее наибольшее касательное напряжение равно 60 МПа.

Ответ: 75 мин^{-1} .

5.13. Полый стальной вал с наружным диаметром 100 мм и внутренним – 50 мм при вращении с частотой 80 мин^{-1} закручивается на угол $1,8^\circ$ на длине 2,7 м. Какую он передает мощность? Чему равно наибольшее касательное напряжение в сечении вала?

Ответ: 70,4 кВт; 46,6 МПа.

5.14. Определить диаметры полого стального вала круглого сечения, передающего мощность 7000 кВт при частоте вращения 100 мин^{-1} , если наибольшее касательное напряжение равно 60 МПа, а внутренний диаметр составляет 0,6 от наружного.

Ответ: 405 мм и 243 мм.

5.15. Определить диаметр сплошного стального вала круглого сечения, передающего мощность 450 л. с. при частоте вращения 300 мин^{-1} . Угол закручивания не должен превышать 1° на 2 м длины вала, а наибольшее касательное напряжение – 40 МПа.

Ответ: 112 мм.

5.16. Стальной трубчатый вал круглого сечения передает мощность 75 кВт при вращении с частотой 100 мин^{-1} . Толщина стенок составляет $1/50$ среднего диаметра сечения. Определить величину этого диаметра из условия, чтобы угол закручивания не превышал 1° на 3 м длины. Чему при этом равны касательные напряжения?

Ответ: 178 мм; 41,3 МПа.

5.17. Стальной трубчатый вал круглого сечения длиной 1,8 м, наружным диаметром 300 мм, при толщине стенок 3 мм вращается с частотой 100 мин^{-1} . Какую мощность передает вал, если в поперечном сечении возникают наибольшие касательные напряжения равные 63 МПа? Чему равен угол закручивания вала?

Ответ: 137,8 кВт; $0,541^\circ$.

5.18. Стальной брус круглого сечения с заземленными концами подвергается действию двух равных и одинаково направленных пар сил с моментами по 8 кН·м (рис. 5.7). Раскрыть статическую неопределимость, построить эпюру крутящих моментов и определить угол поворота среднего сечения 1–1 бруса. Диаметр поперечного сечения бруса равен 100 мм, длина каждого из крайних участков $a = 0,6$ м, а длина среднего участка $b = 0,8$ м.

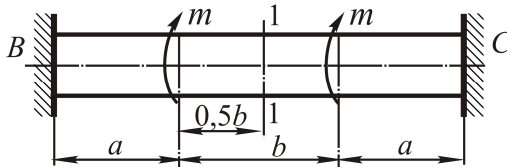


Рис. 5.7

Ответ: $M_B = M_C = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $0,35^\circ$.

5.19. К брусу круглого сечения, защемленному концами, приложены две равные и противоположно направленные пары сил с моментами по $10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (рис. 5.8). Определить диаметр бруса при допускаемом напряжении на сдвиг 60 МПа . Чему равен угол поворота среднего сечения бруса?

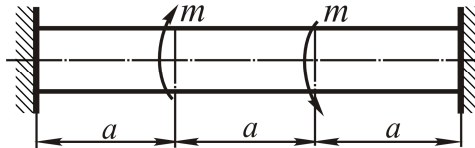


Рис. 5.8

Ответ: $82,7 \text{ мм}$; 0 .

5.20. Диаметр левой части бруса, защемленного на концах, равен 60 мм , а правой – 50 мм . Общая длина бруса $a + b = 3,3 \text{ м}$ (рис. 5.9). Определить размеры a и b из условия, чтобы крутящий момент, приложенный в месте изменения диаметра бруса, вызвал в каждой части бруса одинаковые наибольшие касательные напряжения.

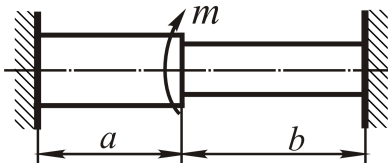


Рис. 5.9

Ответ: $a = 1,8 \text{ м}$; $b = 1,5 \text{ м}$.

6. СЛОЖНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

Теоретические сведения

Сложным называется вид *нагружения*, при котором в поперечном сечении бруса возникает два и более внутренних силовых фактора.

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором след плоскости изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения. При расчетах на прочность и жесткость косоу изгиб приводится к двум изгибам в главных центральных плоскостях инерции бруса.

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения балки согласно принципу независимости действия сил определяется как алгебраическая сумма напряжений от изгибающих моментов относительно главных центральных осей инерции M_z и M_y .

$$\sigma = \pm \sigma_{M_z} \pm \sigma_{M_y}$$

или

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z, \quad (6.1)$$

где I_z и I_y – осевые моменты инерции относительно осей z и y соответственно.

При расчете нормальных напряжений по формуле (6.1) все величины подставляются в правую часть по модулю, а знаки перед каждым из двух слагаемых ставятся с учетом растяжения или сжатия в рассматриваемой точке (растяжение – «+», сжатие – «-»), обусловленного соответствующим изгибающим моментом.

Точки поперечного сечения балки, в которых нормальные напряжения равны нулю, располагаются на прямой линии, проходящей через центр тяжести (начало координат), называемой

нейтральной осью. Уравнение нейтральной линии представляется следующим выражением:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y}, \quad (6.2)$$

где α – угол, который составляет след результирующего изгибающего момента с главной центральной осью инерции z (рис. 6.1);

β – угол, который составляет нейтральная ось с главной центральной осью инерции z (рис. 6.1).

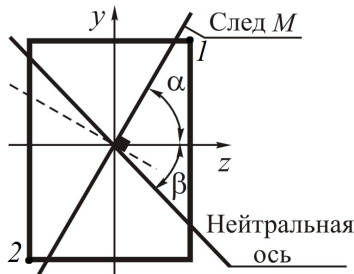


Рис. 6.1. След действия M и нейтральная ось в поперечном сечении бруса

Нейтральная ось в поперечном сечении бруса при косом изгибе не перпендикулярна следу результирующего изгибающего момента. Она отклоняется от перпендикуляра к следу полного изгибающего момента к главной центральной оси инерции сечения, относительно которой момент инерции минимальный. По мере удаления точки от нейтральной оси нормальное напряжение в ней линейно возрастает. Наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают в точках 1 и 2, наиболее удаленных от нейтральной оси по разные от нее стороны. Причем в одной из них возникает наибольшее растягивающее напряжение σ_{\max} , а в другой наибольшее сжимающее напряжение σ_{\min} .

Условия прочности для опасных точек имеют следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(1)} = \frac{M_z}{I_z} y_1 + \frac{M_y}{I_y} z_1 \leq [\sigma_p]; \quad (6.3)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{(2)} = \left| -\frac{M_z}{I_z} y_2 - \frac{M_y}{I_y} z_2 \right| \leq [\sigma_c], \quad (6.4)$$

где $[\sigma_p]$, $[\sigma_c]$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии соответственно;

z_1, y_1, z_2, y_2 – координаты опасных точек.

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то достаточно обеспечить выполнение одного условия, соответствующего большему по абсолютной величине напряжению.

Для сечений с двумя осями симметрии (прямоугольник, двутавр), опасные точки легко устанавливаются по характеру изгиба бруса; ими будут угловые точки, наиболее удаленные от обеих главных центральных осей. Условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \quad (6.5)$$

где W_z и W_y – осевые моменты сопротивления.

Подбор сечений при косом изгибе осложняется наличием в условиях прочности (6.5) одновременно двух неизвестных моментов сопротивления или моментов инерции. Поэтому сначала задаются их отношением, а затем производится проверка выбранного сечения.

При косом изгибе перемещение (прогиб) поперечного сечения f определяется как геометрическая сумма перемещений (прогибов) в главных центральных плоскостях инерции f_z и f_y , найденных теми же методами, что и при прямом изгибе:

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}. \quad (6.6)$$

Вектор полного перемещения f (рис. 6.2) будет составлять угол γ с осью z , равный

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_y}{f_z} = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_y}{I_z}. \quad (6.7)$$

Полное перемещение (прогиб) при косом изгибе происходит перпендикулярно нейтральной оси, то есть перемещение происходит не в плоскости действия внешних сил, а в плоскости, перпендикулярной к нейтральной оси.

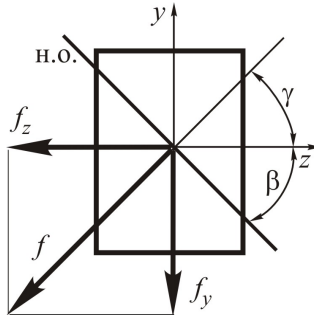


Рис. 6.2. Перемещения центра тяжести поперечного сечения балки при косом изгибе

Пример 6.1. Балка прямоугольного поперечного сечения ($h \times b = 0,3 \times 0,2$ м) нагружена сосредоточенной силой F , равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p и моментом в виде пары сил m (рис. 6.3). Определить положение опасного сечения балки, провести в нем нейтральную ось, найти нормальные напряжения в опасных точках, а также в выступающих угловых точках опасного сечения и построить эпюры нормальных напряжений по сторонам этого сечения.

Решение. Проведем для поперечных сечений балки главные центральные оси инерции y, z , ось x совместим с осью балки (рис. 6.3).

Спроецируем силы, действующие на балку, в главную центральную плоскость инерции yx :

$$F_y = F = 5 \text{ кН};$$

$$m_z = m \cos \alpha_m = 12 \cos 20^\circ = 11,276 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Составляем расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в плоскости yx (рис. 6.3). Для нахождения неизвестных реакций опор B_y и C_y используем уравнения равновесия. Составляющая

реакции B_x в шарнире B равна нулю, так как все силы, действующие на балку, перпендикулярны оси x .

$$\sum m_c(F_i) = -B_y \cdot 4,8 + m_z - F_y \cdot 1,3 = 0;$$

$$\sum m_B(F_i) = -C_y \cdot 4,8 + m_z + F_y \cdot 3,5 = 0.$$

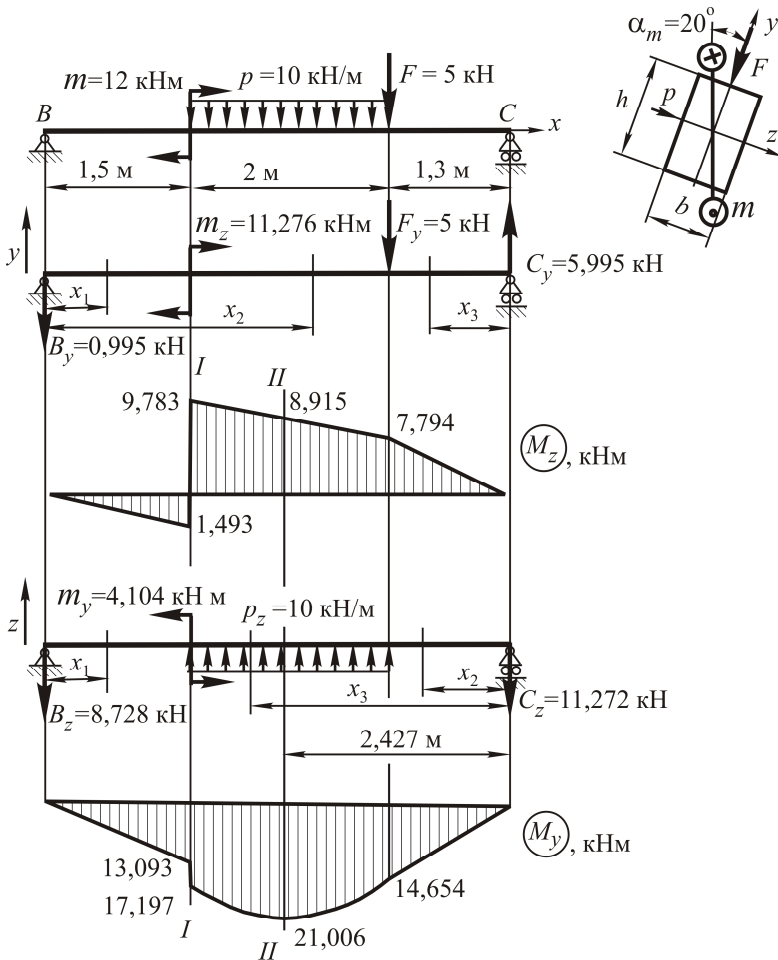


Рис. 6.3. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов балки

Решая уравнения равновесия, находим реакции опор:

$$B_y = \frac{m_z - F_y \cdot 1,3}{4,8} = \frac{11,276 - 5 \cdot 1,3}{4,8} = 0,995 \text{ кН};$$

$$C_y = \frac{m_z + F_y \cdot 3,5}{4,8} = \frac{11,276 + 5 \cdot 3,5}{4,8} = 5,995 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим не использованное в этой задаче уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось y и подставим их значения:

$$\Sigma F_y = -B_y + C_y - F_y = -0,995 + 5,995 - 5 = 0.$$

В результате расчета получили $\Sigma F_y = 0$, что указывает на правильность определения реакций опор.

Разбиваем балку на три расчетных участка и находим значения изгибающих моментов M_z .

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 1,5$ м):

$$M_{x_1} = -B_y \cdot x_1;$$

$$x_1 = 0, \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,5 \text{ м}, \quad M_{x_1} = -0,995 \cdot 1,5 = -1,493 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II ($1,5 \text{ м} \leq x_2 \leq 3,5$ м):

$$M_{x_2} = -B_y \cdot x_2 + m;$$

$$x_2 = 1,5 \text{ м}, \quad M_{x_2} = -0,995 \cdot 1,5 + 11,276 = 9,783 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_2 = 3,5 \text{ м}, \quad M_{x_2} = -0,995 \cdot 3,5 + 11,276 = 7,794 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III ($0 \leq x_3 \leq 1,3$ м):

$$M_{x_3} = C_y \cdot x_2;$$

$$x_3 = 0, \quad M_{x_3} = 0;$$

$$x_3 = 1,3 \text{ м}, \quad M_{x_3} = 5,995 \cdot 1,3 = 7,794 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям изгибающих моментов строим эпюру M_z (см. рис. 6.3).

Спроецируем силы, действующие на балку, в главную центральную плоскость инерции zx :

$$p_z = p = 10 \text{ кН/м};$$

$$m_y = m \sin \alpha_m = 12 \cdot \sin 20^\circ = 4,104 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составляем расчетную схему балки, нагруженной внешними силами в плоскости zx (см. рис. 6.3). Для нахождения неизвестных реакций опор B_z и C_z составим уравнения равновесия. Составляющая реакции B_x в шарнире B равна нулю, так как силы, действующие на балку, перпендикулярны оси x .

$$\Sigma m_c(F_i) = -B_z \cdot 4,8 - m_y + p_z \cdot 2 \cdot 2,3 = 0;$$

$$\Sigma m_B(F_i) = -C_z \cdot 4,8 + m_y + p_z \cdot 2 \cdot 2,5 = 0.$$

Решая уравнения равновесия, находим реакции опор:

$$B_z = \frac{-m_y + p_z \cdot 2 \cdot 2,3}{4,8} = \frac{-4,104 + 10 \cdot 2 \cdot 2,3}{4,8} = 8,728 \text{ кН};$$

$$C_z = \frac{m_y + p_z \cdot 2 \cdot 2,5}{4,8} = \frac{4,104 + 10 \cdot 2 \cdot 2,5}{4,8} = 11,272 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций опор составим не использованное в этой задаче уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось z и подставим их значения:

$$\Sigma F_z = -B_z + p_z \cdot 2 - C_z = -8,728 + 20 - 11,272 = 0.$$

В результате расчета получили $\Sigma F_z = 0$, что указывает на правильность определения реакций опор.

Разбиваем балку на три расчетных участка и находим значения изгибающих моментов M_y .

Участок I ($0 \leq x_1 \leq 1,5$ м):

$$M_{x_1} = -B_z \cdot x_1;$$

$$x_1 = 0, \quad M_{x_1} = 0;$$

$$x_1 = 1,5 \text{ м}, \quad M_{x_1} = -8,728 \cdot 1,5 = -13,093 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II ($0 \leq x_2 \leq 1,3$ м):

$$M_{x_2} = -C_z \cdot x_2;$$

$$x_2 = 0, \quad M_{x_2} = 0;$$

$$x_2 = 1,3 \text{ м}, \quad M_{x_2} = -11,272 \cdot 1,3 = -14,654 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III: ($1,3 \text{ м} \leq x_3 \leq 3,3$ м):

$$M_{x_3} = -C_z \cdot x_3 + p_z \frac{(x_3 - 1,3)^2}{2};$$

$$x_3 = 1,3 \text{ м}, \quad M_{x_3} = -11,272 \cdot 1,3 = -14,654 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$x_3 = 3,3 \text{ м}, \quad M_{x_3} = -11,272 \cdot 3,3 + 10 \frac{(3,3 - 1,3)^2}{2} = 17,197 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На третьем расчетном участке изгибающий момент M_y имеет экстремальное значение. Для его определения приравняем выражение первой производной от M_{x_3} к нулю и найдем расстояние x_3 до сечения с экстремальным значением изгибающего момента:

$$\frac{dM_{x_3}}{dx_3} = C_z - p_z (x_3 - 1,3) = 0,$$

откуда

$$x_3 = \frac{11,272 + 1,3 \cdot 10}{10} = 2,427 \text{ м.}$$

Подставив полученное значение x_3 в уравнение моментов M_{x_3} , найдем величину искомого экстремального момента:

$$M_{x_3} = -11,272 \cdot 2,427 + 10 \frac{(2,427 - 1,3)^2}{2} = -21,006 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

По найденным значениям изгибающего момента строим эпюру M_y (см. рис. 6.3).

Находим положение опасного сечения балки. Как показывают эпюры изгибающих моментов M_z и M_y , опасное сечение может располагаться на расстоянии 1,5 м от точки B ($M_{z \max} = 9,783 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_y = 17,197 \text{ кН}\cdot\text{м}$) или на расстоянии 2,427 м от точки C ($M_z = 5,995 \cdot 2,427 - 5(2,427 - 1,3) = 8,915 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_{y \max} = 21,006 \text{ кН}\cdot\text{м}$). Определяем величину максимального напряжения в этих сечениях по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y},$$

где W_z и W_y – момент сопротивления поперечного сечения относительно осей z и y соответственно:

$$W_z = \frac{b h^2}{6} = \frac{0,2 \cdot 0,3^2}{6} = 0,003 \text{ м}^3;$$

$$W_y = \frac{h b^2}{6} = \frac{0,3 \cdot 0,2^2}{6} = 0,002 \text{ м}^3.$$

Тогда

$$\sigma_{\max I} = \frac{9,783 \cdot 10^3}{0,003} + \frac{17,197 \cdot 10^3}{0,002} = 119 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 11,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max II} = \frac{8,915 \cdot 10^3}{0,003} + \frac{21,006 \cdot 10^3}{0,002} = 135 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 13,5 \text{ МПа}.$$

Значит, опасным сечением является сечение II, так как $\sigma_{\max II} > \sigma_{\max I}$. Определяем в опасном сечении балки положение нейтральной оси:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} = -\frac{M_y}{M_z} \frac{12 b h^3}{12 h b^3} = -\frac{-21,006}{8,915} \cdot \frac{0,3^2}{0,2^2} = 5,302.$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} 5,302 = 79,3^\circ.$$

Откладывая от оси z против хода часовой стрелки угол β и проводим нейтральную ось (рис. 6.4). Опасными точками будут точки опасного поперечного сечения, наиболее удаленные от нейтральной оси, то есть точки 1 и 3. Исходя из растяжения (+) или сжатия (-), обусловленных изгибающими моментами M_z и M_y , расставляем для каждого квадранта опасного поперечного сечения знаки напряжений (рис. 6.4), где верхние знаки – для напряжений от M_z , нижние знаки – для напряжений от M_y . Находим нормальные напряжения в опасных точках опасного сечения балки по формуле

$$\sigma = \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

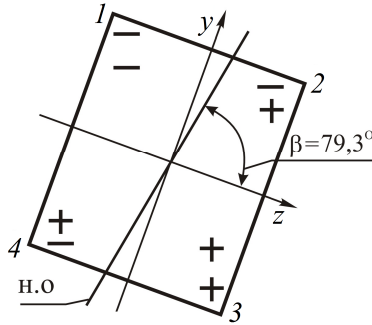


Рис. 6.4. Нейтральная ось и знаки напряжений в опасном сечении балки

$$\sigma_{(1)} = -\frac{8,915 \cdot 10^3}{0,003} - \frac{21,006 \cdot 10^3}{0,002} = -135 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -13,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{8,915 \cdot 10^3}{0,003} + \frac{21,006 \cdot 10^3}{0,002} = 135 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 13,5 \text{ МПа}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Какое положение займет нейтральный слой в балке прямоугольного поперечного сечения, если плоскость действия результирующего изгибающего момента будет совпадать с одной из диагональных плоскостей?

Ответ: Совпадает с другой диагональной плоскостью.

6.2. В поперечном сечении балки (рис. 6.5), состоящем из двух соединенных между собой двутавров № 24 (ГОСТ 8239–89), действуют изгибающие моменты $M_z = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и $M_y = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Определить величину угла, который составляет нейтральная ось с осью z . Определить нормальные напряжения в точках 2 и 3.

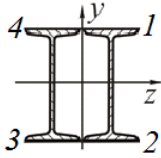


Рис. 6.5

Ответ: $\beta = -60^\circ$; $\sigma_{(2)} = -17$ МПа; $\sigma_{(3)} = 68,9$ МПа.

6.3. Двутавровая балка (ГОСТ 8239–89), шарнирно закрепленная по концам, посередине пролета $l = 5$ м нагружена сосредоточенной силой $F = 8$ кН (рис. 6.6). Подобрать сечение балки при допуске напряжении $[\sigma] = 160$ МПа.

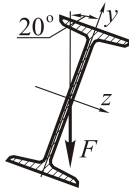


Рис. 6.6

Ответ: двутавр № 22.

6.4. Деревянный брус прямоугольного поперечного сечения, длиной $l = 1,8$ м, защемленный одним концом, нагружен на другом конце сосредоточенной силой $F = 3$ кН (рис. 6.7). Полагая, что $h / b = 1,5$, подобрать размеры сечения бруса при допуске напряжении $[\sigma] = 10$ МПа. Определить величину и направление вектора наибольшего перемещения.

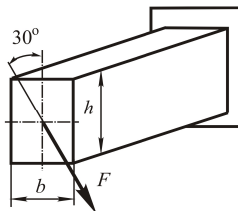


Рис. 6.7

Ответ: $h = 200$ мм; $f = 9,3$ мм; $\gamma = 52,4^\circ$.

6.5. Для балок (рис. 6.8) с поперечными сечениями (рис. 6.9) найти положение нейтральной линии (угол β), определить наибольшие нормальные напряжения σ_{\max} и найти величину наибольшего прогиба f_{\max} . Плоскость действия нагрузки во всех случаях совпадает с вертикальной плоскостью v , проходящей через центр тяжести сечения – точку C . Балки прямоугольного сечения – деревянные, в виде двутавра – стальные. Данные о размерах балок, величине нагрузки и ответы приведены в табл. 6.1.

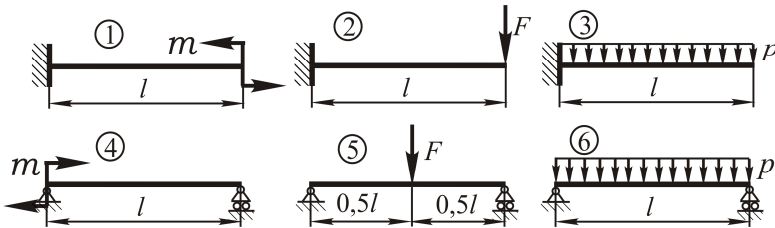


Рис. 6.8

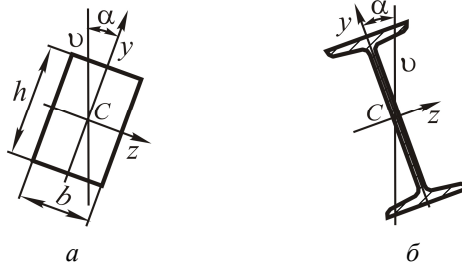


Рис. 6.9

Таблица 6.1

Данные о размерах балок, величине нагрузки и ответы

№ варианта	Схема балки и сечения	Пролет l , м	Нагрузка	Размеры сечения	Угол α	Ответ		
						Угол β	f_{\max} , мм	σ_{\max} , МПа
1	1-а	1,5	$m = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$	120×200 мм	60°	78°16'	13,3	9,72
2	1-б	1,4	$m = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$	№ 12	30°	-82°8'	17,7	144,3

№ варианта	Схема балки и сечения	Пролет l , м	Нагрузка	Размеры сечения	Угол α	Ответ		
						Угол β	f_{\max} , мм	σ_{\max} , МПа
3	2-а	2,0	$F = 0,8$ кН	100×150 мм	45°	66°2'	13,2	7,54
4	2-б	1,5	$F = 2$ кН	№ 16	30°	-83°22'	9,7	127,3
5	3-а	2,0	$p = 2$ кН/м	100×250 мм	45°	80°55'	13,7	9,5
6	3-б	1,2	$p = 3$ кН/м	№ 14	30°	-82°46'	4,7	116,8
7	4-а	2,5	$m = 6$ кН·м	120×300 мм	60°	84°43'	4,8	8,88
8	4-б	3,0	$m = 8$ кН·м	№ 27	45°	-87°2'	6,3	151,6
9	5-а	2,5	$F = 2,5$ кН	90×150 мм	45°	70°12'	6,7	8,73
10	5-б	4,0	$F = 12$ кН	№ 36	60°	-88°44'	13,4	154,2
11	6-а	3,2	$p = 6$ кН/м	160×240 мм	60°	75°37'	8,9	9,0
12	6-б	5,0	$p = 4$ кН/м	№ 40	60°	-88°50'	21,2	132,6

6.6. Деревянный брус с заданным поперечным сечением (рис. 6.10) шарнирно закреплен по концам. Посредине пролета длиной $l = 3$ м на брус действует сосредоточенная сила F , линия действия которой проходит через центр тяжести сечения – точку C . Определить наибольшую допускаемую величину силы F , при допускаемом напряжении для материала бруса $[\sigma] = 11$ МПа.

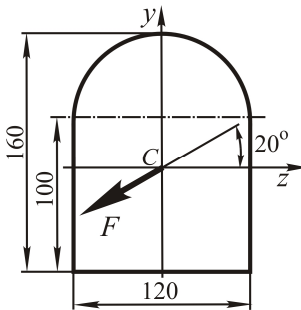


Рис. 6.10

Ответ: 3880 Н.

6.7. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью

$p = 10$ кН/м и моментом в виде пары сил $m = 12$ кН·м (рис. 6.11). В опорах балки возникают реакции, действующие в главных центральных плоскостях инерции. Поперечное сечение имеет размеры $h = 282$ мм и $b = 235$ мм. Найти положение опасного сечения балки, провести в нем нейтральную ось, установить положение опасных точек и определить в них нормальные напряжения.

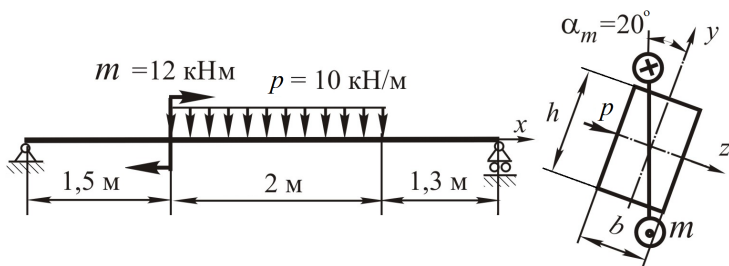


Рис. 6.11

Ответ: $\sigma_{\max} = 9,92$ МПа; $\sigma_{\min} = -9,92$ МПа.

6.8. Деревянная балка, защемленная одним концом, нагружена силами $F_1 = 0,8$ кН и $F_2 = 1,65$ кН (рис. 6.12). Подобрать прямоугольное сечение балки с отношением высоты сечения h к ширине b , равным 2, и определить полный прогиб ее в сечении B по величине и направлению. Принять для материала балки $[\sigma] = 10$ МПа.

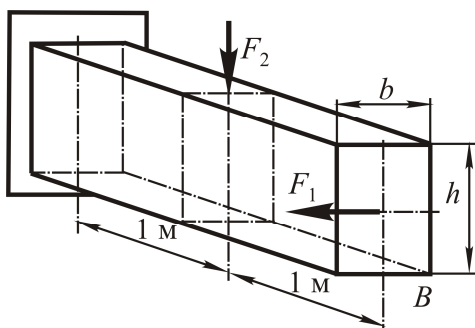


Рис. 6.12

Ответ: $h = 180$ мм; $f = 19,8$ мм; $\gamma = 9,47^\circ$.

Теоретические сведения

Внецентренным растяжением или сжатием называется такой вид сложного нагружения, при котором под действием внецентренно приложенной продольной внешней нагрузки в поперечных сечениях бруса одновременно действуют нормальная растягивающая или сжимающая сила и изгибающий момент. Этот вид нагружения возникает, когда равнодействующая внешних сил смещена относительно центра тяжести поперечного сечения и направлена параллельно оси бруса.

Если на брус в произвольном поперечном сечении действует сила F в точке B , являющаяся равнодействующей всех внешних сил, то ее координаты z_F и y_F называются эксцентриситетами этой силы относительно главных центральных осей сечения z и y (рис. 6.13, а). Точка B приложения силы F называется полюсом или центром давления.

В произвольном поперечном сечении бруса (рис. 6.13, б) действуют внутренние силовые факторы:

- продольная сила, равная $N = F$.
- изгибающий момент относительно оси z , равный $M_z = F y_F$;
- изгибающий момент относительно оси y , равный $M_y = F z_F$.

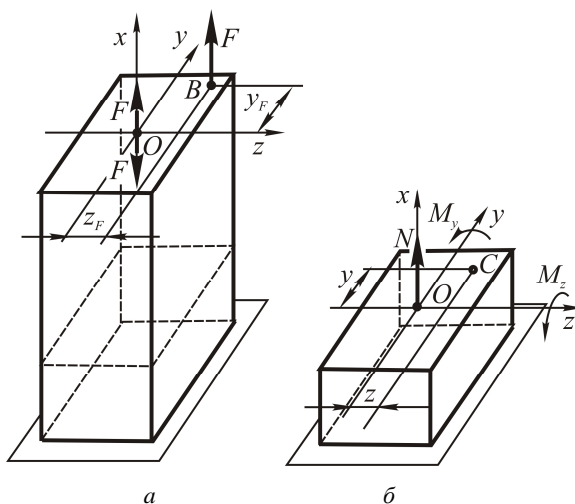


Рис. 6.13. Схема внецентренного растяжения:

а – координаты приложения силы; б – внутренние силовые факторы

Таким образом, внецентренное растяжение (сжатие) в любом поперечном сечении приводится к центральному растяжению (сжатию) от нормальной силы F и изгибу относительно осей z и y . Нормальное напряжение σ в любой точке с координатами z и y поперечного сечения бруса, на основании принципа независимости действия сил, равно алгебраической сумме напряжений от действия каждого внутреннего силового фактора:

$$\sigma = \sigma_N \pm \sigma_{M_z} \pm \sigma_{M_y} \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z. \quad (6.8)$$

где A – площадь поперечного сечения бруса.

При расчете нормальных напряжений все величины, входящие в правую часть выражения (6.8), подставляются по модулю, а знаки перед каждым слагаемым ставятся с учетом растяжения или сжатия в рассматриваемой точке (растяжение – «+», сжатие – «-»), обусловленного соответствующим внутренним силовым фактором. При определении нормальных напряжений по формуле (6.8) в любой точке поперечного сечения рассматриваемого бруса (рис. 6.13) перед первым слагаемым ставится знак «+», поскольку растягивающая сила F вызывает положительную продольную силу N .

Точки поперечного сечения бруса, в которых нормальные напряжения равны нулю, располагаются на прямой линии, не проходящей через начало координат (центр тяжести). Эта линия называется нейтральной линией. Положение нейтральной линии удобно представлять в виде отрезков, которые она отсекает на главных центральных осях инерции поперечного сечения (рис. 6.14).

$$a_z = -\frac{I_y}{A z_F}; \quad a_y = -\frac{I_z}{A y_F}, \quad (6.9)$$

где a_z , a_y – отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях z и y соответственно.

При внецентренном растяжении и сжатии нейтральная линия обладает следующими свойствами:

- не проходит через центр тяжести сечения;
- ее положение не зависит от величины и знака внешней нагрузки F ;
- нейтральная линия и полюс располагаются по разные стороны от центра тяжести сечения;
- если полюс располагается на главной центральной оси инерции сечения, то нейтральная линия пройдет перпендикулярно этой оси;
- нейтральная линия может как пересекать сечение, так и располагаться за его пределами.

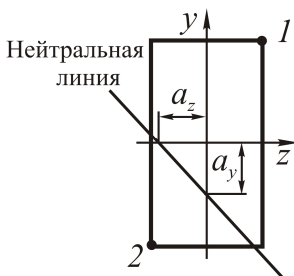


Рис. 6.14. Положение нейтральной линии и опасных точек

По мере удаления от нейтральной линии исследуемой точки поперечного сечения бруса нормальное напряжение в ней будет линейно возрастать. Тогда опасные точки поперечного сечения (рис. 6.14) будут располагаться на наибольшем удалении от нейтральной линии. Поэтому для определения положения опасных точек необходимо провести нейтральную линию, затем провести параллельно ей касательные к контуру сечения, которые и определяют искомые точки 1 и 2 в растянутой и сжатой зонах сечения.

Условия прочности примут следующий вид:

$$\sigma_{p \max} = \sigma_{(1)} = F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y_1}{I_z} + \frac{z_F z_1}{I_y} \right) \leq [\sigma_p]; \quad (6.10)$$

$$\sigma_{c \min} = \sigma_{(2)} = F \left| \frac{1}{A} - \frac{y_F y_2}{I_z} - \frac{z_F z_2}{I_y} \right| \leq [\sigma_c]. \quad (6.11)$$

Для сечений, имеющих две оси симметрии и выступающие угловые точки, условие прочности удобно записывать в виде

$$\sigma_{p \max} = \frac{F}{A} + \frac{Fy_F}{W_z} + \frac{Fz_F}{W_y} \leq [\sigma_p]; \quad (6.10)$$

$$\sigma_{c \min} = \sigma_{(2)} = \left| \frac{F}{A} - \frac{Fy_F}{W_z} - \frac{Fz_F}{W_y} \right| \leq [\sigma_c]. \quad (6.11)$$

Пример 6.2. Короткая деревянная стойка прямоугольного поперечного сечения ($h \times b = 200 \times 150$ мм) нагружена силой $F = 90$ кН, приложенной в точке B (рис. 6.15, *a*). Определить нормальные напряжения в опасных точках стойки.

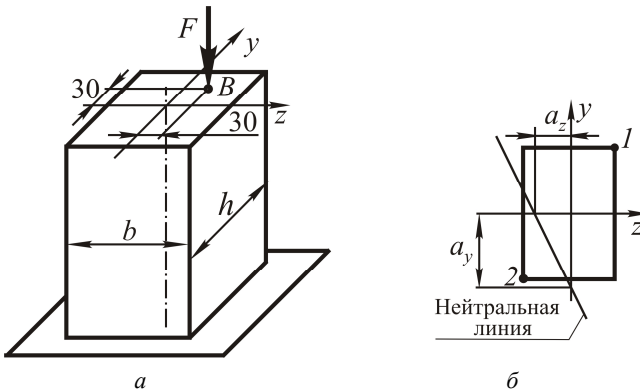


Рис. 6.15. Схема нагружения бруса, положение нейтральной линии и опасных точек в поперечном сечении:
a – приложение силы; *б* – нейтральная линия и опасные точки

Решение. Для определения положения опасных точек необходимо в поперечном сечении провести нейтральную линию. Положение нейтральной линии установим через отрезки, которые она отсекает на главных центральных осях инерции поперечного сечения (рис. 6.15, *б*).

$$a_z = -\frac{I_y}{A z_F}; \quad a_y = -\frac{I_z}{A y_F}.$$

Площадь и главные центральные моменты инерции поперечного сечения стойки определяются следующим образом:

$$A = bh = 150 \cdot 200 = 3 \cdot 10^4 \text{ мм}^2 ;$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{150 \cdot 200^3}{12} = 10^8 \text{ мм}^4 ;$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{200 \cdot 150^3}{12} = 5,625 \cdot 10^7 \text{ мм}^4 .$$

Тогда

$$a_z = -\frac{5,625 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^4 \cdot 30} = -62,5 \text{ мм} ;$$

$$a_y = -\frac{10^8}{3 \cdot 10^4 \cdot 30} = -111,1 \text{ мм} .$$

Отложим найденные отрезки на главных центральных осях инерции поперечного сечения и через их концы проведем нейтральную линию (рис. 6.15, б). Тогда опасными точками поперечного сечения бруса будут точки 1 и 2 – как наиболее удаленные от нейтральной линии. Определяем нормальные напряжения в опасных точках:

$$\begin{aligned} \sigma_{c \min} = \sigma_{(1)} &= F \left(-\frac{1}{A} - \frac{y_F y_1}{I_z} - \frac{z_F z_1}{I_y} \right) = \\ &= 90\,000 \left(-\frac{1}{3 \cdot 10^4} - \frac{30 \cdot 100}{10^8} - \frac{30 \cdot 75}{5,625 \cdot 10^7} \right) = -9,3 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{p \max} = \sigma_{(2)} &= F \left(-\frac{1}{A} + \frac{y_F y_2}{I_z} + \frac{z_F z_2}{I_y} \right) = \\ &= 90\,000 \left(-\frac{1}{3 \cdot 10^4} + \frac{30 \cdot 100}{10^8} + \frac{30 \cdot 75}{5,625 \cdot 10^7} \right) = 3,3 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

6.9. Короткий брус с заданным поперечным сечением (рис. 6.16) сжимается силой F , линия действия которой параллельна оси бруса и проходит через точку B . Определить длины отрезков, отсекаемых нейтральной линией на осях z и y . Принять: $h = 240$ мм; $b = 160$ мм; $t = 40$ мм.

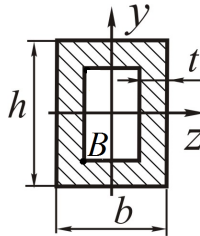


Рис. 6.16

Ответ: $a_z = 73,3$ мм; $a_y = 76,7$ мм.

6.10. Определить необходимую толщину h стальной полосы шириной $b = 180$ мм (рис. 6.17), растягиваемой двумя параллельными ее оси силами $F = 90$ кН, приложенными посредине толщины на расстоянии 50 мм от края полосы, если $[\sigma] = 160$ МПа.

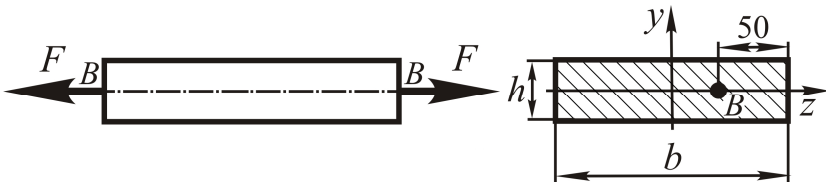


Рис. 6.17

Ответ: 7,3 мм.

6.11. Нормальное напряжение в точке B сжатого бруса (рис. 6.18) равно 10 МПа (растяжение), в точке D оно равно нулю. Чему равно напряжение в точке C ?

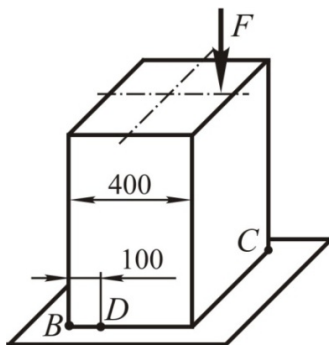


Рис. 6.18

Ответ: -30 МПа.

6.12. В точках B двух колонн приложены сжимающие силы F (рис. 6.19). При этом в точках C обеих колонн сжимающие напряжения оказались одинаковыми. Сравнить нормальные напряжения в точках D колонн.

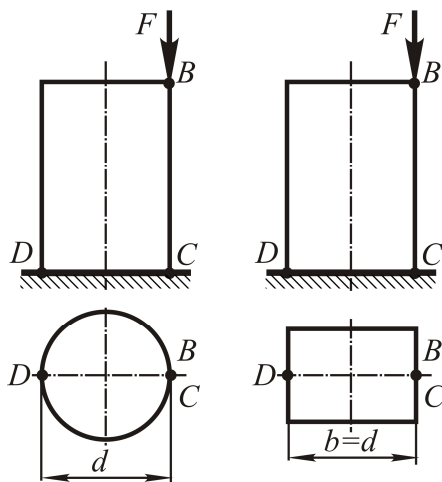


Рис. 6.19

Ответ: В колонне круглого сечения нормальное напряжение будет больше на 20 %.

6.13. Проверить прочность нижней части бетонного столба прямоугольного поперечного сечения (рис. 6.20). Допускаемое напряжения на растяжение равно 0,7 МПа, на сжатие – 7 МПа.

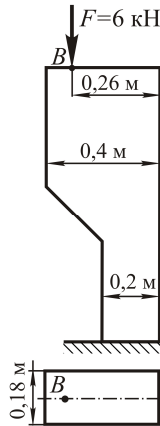


Рис. 6.20

Ответ: $\sigma_{\max} = 0,63 \text{ МПа} < 0,7 \text{ МПа}$; $\sigma_{\min} = | -0,97 \text{ МПа} | < 7 \text{ МПа}$.

6.14. Основание бруса имеет поперечное сечение $200 \times 300 \text{ мм}$ (рис. 6.21, а). Определить наибольшее нормальное напряжение в основании бруса, если он сжимается силой $F = 360 \text{ кН}$. Чему будет равно это напряжение, если основание бруса имеет поперечное сечение $200 \times 200 \text{ мм}$ (рис. 6.21, б)?

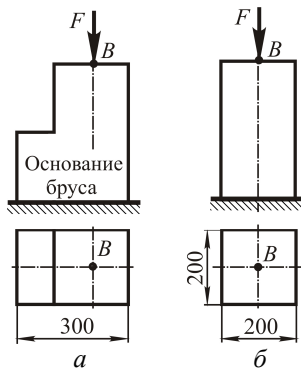


Рис. 6.21

Ответ: а) 12 МПа; б) 9 МПа.

6.15. При монтаже деталей, когда в их сопряжении возникает посадка с натягом, гидроцилиндр может создать усилие $F = 16$ кН. Определить диаметр d круглой чугунной колонны BC (рис. 6.22), если допусковое напряжение на растяжение $[\sigma_p] = 35$ МПа.

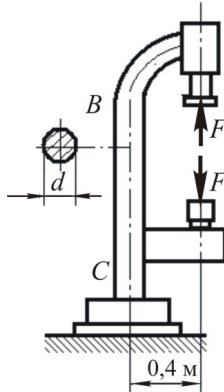


Рис. 6.22

Ответ: 125 мм.

6.16. Стержень прямоугольного поперечного сечения $b \times h = 120 \times 200$ мм имеет с одной стороны вырез глубиной $0,5h$ (рис. 6.23). Определить наибольшие растягивающие σ_{\max} и сжимающие σ_{\min} напряжения, возникающие в опасных сечениях стержня при нагружении его силой $F = 100$ кН.

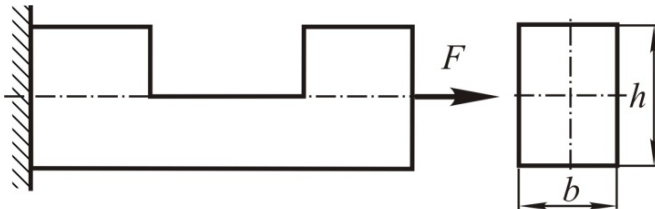


Рис. 6.23

Ответ: $\sigma_{\max} = 29,17$ МПа; $\sigma_{\min} = -20,83$ МПа.

6.17. Столб, служащий для подвески одиночного провода, состоит из двух швеллеров № 16 (рис. 6.24). Учитывая вес провода $F_1 = 0,4$ кН, вес консоли $F_2 = 0,6$ кН, к которой подвешен провод, и собственный вес столба, определить наибольшие растягивающие σ_{\max} и сжимающие σ_{\min} напряжения в сечении у основания столба.

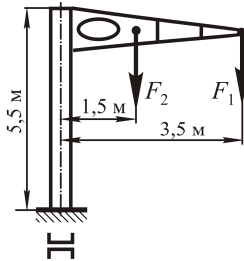


Рис. 6.24

Ответ: $\sigma_{\max} = 11,6$ МПа; $\sigma_{\min} = -13,0$ МПа.

6.18. Короткая двутавровая стойка № 55 (ГОСТ 8239–89), нагруженная центрально приложенной сжимающей силой $F = 1800$ кН (рис. 6.25, а), «усилена» швеллером № 18 (ГОСТ 8240–89), приваренным к стойке по всей ее длине (рис. 6.25, б). Чему было равно наибольшее сжимающее напряжение в двутавровой стойке и чему оно равно в стойке, «усиленной» швеллером?

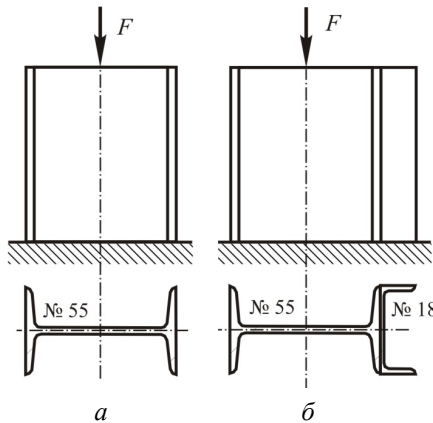


Рис. 6.25

Ответ: а) 157,9 МПа; б) 171 МПа.

6.19. Стальная полоса растягивается центрально приложенными силами $F = 8$ кН (рис. 6.26). Какой глубины a может быть сделана в полосе односторонняя прорезь при условии, что наибольшие нормальные напряжения в ослабленном сечении не превысят 150 МПа. Концентрацию напряжений в прорези не учитывать.

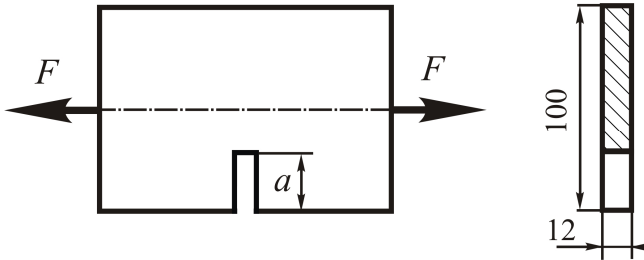


Рис. 6.26

Ответ: 20,7 мм.

Теоретические сведения

Изгибом с кручением называется вид сложного нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникают изгибающий и крутящий моменты. С сочетанием изгиба и кручения брусьев круглого поперечного сечения наиболее часто приходится встречаться при расчете валов. Значительно реже встречаются случаи изгиба с кручением брусьев некруглого сечения. Изгиб с кручением испытывают валы различных редукторов, механизмов, короб перемены передач и т. д. Валы обычно устанавливаются в подшипниковых опорах, которые позволяют им вращаться относительно оси. На валах устанавливаются звенья различных передач (шкивы, зубчатые колеса, звездочки, полумуфты и т. д.). При передаче мощности от одного звена другому вал нагружается силами, которые всегда вызывают изгиб и кручение вала.

При изгибе с кручением опасные точки круглого поперечного сечения бруса располагаются на его поверхности, в которых

действуют наибольшие нормальные и касательные напряжения. Обычно валы изготавливают из стали (пластичный материал), поэтому их расчет рекомендуется проводить с использованием третьей или четвертой классических теорий прочности.

Условие прочности для бруса круглого поперечного сечения, испытывающего изгиб с кручением, по третьей теории прочности представляется выражениями

$$\sigma_{\text{экв III}} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_z} \leq [\sigma]; \quad (6.12)$$

$$\text{или } \sigma_{\text{экв III}} = \frac{M_{\text{прив III}}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (6.13)$$

где $M_{\text{прив III}} = \sqrt{M^2 + T^2}$ – приведенный момент в сечении бруса по третьей теории прочности;

M и T – соответственно изгибающий и крутящий момент в опасном сечении бруса.

Условие прочности для бруса круглого поперечного сечения, испытывающего изгиб с кручением, по четвертой теории прочности представляется выражениями

$$\sigma_{\text{экв IV}} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{W_z} \leq [\sigma]; \quad (6.14)$$

$$\text{или } \sigma_{\text{экв IV}} = \frac{M_{\text{прив IV}}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (6.15)$$

где $M_{\text{прив IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2}$ – приведенный момент в сечении вала по четвертой теории прочности.

Таким образом, эквивалентное напряжение при изгибе с кручением бруса круглого поперечного сечения равно отношению

приведенного момента к осевому моменту сопротивления. Все полученные формулы можно применять и в случаях, когда поперечное сечение – кольцо.

Пример 6.3. Определить диаметр бруса круглого поперечного сечения (рис. 6.27, а) по третьей теории прочности, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 80$ МПа. Ведущий шкив $D_1 = 0,8$ м передает мощность $P_1 = 15$ кВт, ведомые шкивы $D_2 = 0,6$ м и $D_3 = 1,0$ м передают мощности $P_2 = 5$ кВт и $P_3 = 10$ кВт соответственно, при частоте вращения $n = 1200$ мин⁻¹. Ветви ремней параллельны и образуют с горизонтом: угол $\alpha_1 = 45^\circ$ на ведущем шкиве и угол $\alpha_2 = 60^\circ$ на ведомых шкивах. Натяжение ведущих ветвей ремней в 2 раза больше натяжения ведомых ветвей.

Решение. Определяем скручивающие моменты, приложенные к шкивам. Скручивающий момент, приложенный к первому шкиву (D_1), равен

$$m_1 = \frac{30P_1}{\pi n} = \frac{30 \cdot 15 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1200} = 119,4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Скручивающий момент, приложенный ко второму шкиву (D_2), равен

$$m_2 = \frac{30P_2}{\pi n} = \frac{30 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1200} = 39,8 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Скручивающий момент, приложенный к третьему шкиву (D_3), равен

$$m_3 = \frac{30P_3}{\pi n} = \frac{30 \cdot 10 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1200} = 79,6 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного скручивающими моментами (рис. 6.27, б) и строим эпюру крутящих моментов T (рис. 6.27, в).

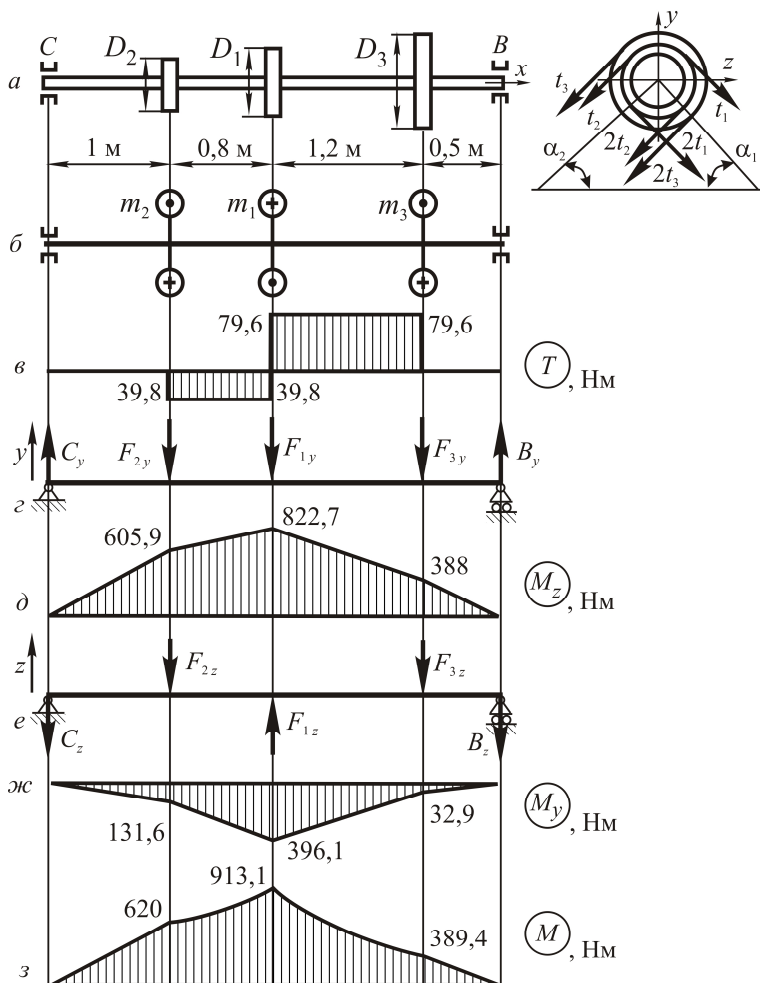


Рис. 6.27. Расчетные схемы нагружения, эпюры крутящих и изгибающих моментов в сечениях бруса

Определяем окружные усилия t_1, t_2 и t_3 , действующие на шкивы. Крутящий момент на шкиве равен

$$m = (2t - t) \frac{D}{2}.$$

Отсюда
$$t_1 = \frac{2m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 119,4}{0,8} = 298,6 \text{ Н};$$

$$t_2 = \frac{2m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 39,8}{0,6} = 132,7 \text{ Н};$$

$$t_3 = \frac{2m_3}{D_3} = \frac{2 \cdot 79,6}{1} = 159,2 \text{ Н}.$$

Определяем усилия, действующие на вал:

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot 298,6 = 896 \text{ Н};$$

$$F_2 = 3 \cdot t_2 = 3 \cdot 132,7 = 398 \text{ Н};$$

$$F_3 = 3 \cdot t_3 = 3 \cdot 159,2 = 478 \text{ Н}.$$

Проецируем силы, действующие на вал, в плоскость ux :

$$F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1 = 896 \cdot \sin 45^\circ = 633,4 \text{ Н};$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2 = 398 \cdot \sin 60^\circ = 344,8 \text{ Н};$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \alpha_3 = 478 \cdot \sin 60^\circ = 413,7 \text{ Н}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного силами в плоскости ux (рис. 6.27, z), и определяем реакции в опорах:

$$\sum M_B = F_{1y} \cdot 1,7 + F_{2y} \cdot 2,5 + F_{3y} \cdot 0,5 - C_y \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_B = 633,4 \cdot 1,7 + 344,8 \cdot 2,5 + 413,7 \cdot 0,5 - C_y \cdot 3,5 = 0.$$

Откуда $C_y = 605,9 \text{ Н}$.

$$\sum M_C = F_{1y} \cdot 1,8 + F_{2y} \cdot 1,0 + F_{3y} \cdot 3,0 - B_y \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_C = 633,4 \cdot 1,8 + 334,8 \cdot 1,0 + 413,7 \cdot 3,0 - B_y \cdot 3,5 = 0.$$

Откуда $B_y = 776$ Н.

Проверка:

$$\sum F_{iy} = -F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} + B_y + C_y = 0;$$

$$\sum F_{iy} = -633,4 - 334,8 - 413,7 + 605,9 + 776 = 0.$$

Реакции в опорах B_y и C_y определены верно.

Строим эпюру изгибающих моментов M_z (рис. 6.27, δ).

Проецируем силы, действующие на вал, в плоскость zx :

$$F_{1z} = F_1 \cos \alpha_1 = 896 \cdot \cos 45^\circ = 633,4 \text{ Н};$$

$$F_{2z} = F_2 \cos \alpha_2 = 398 \cdot \cos 60^\circ = 199,1 \text{ Н};$$

$$F_{3z} = F_3 \cos \alpha_3 = 478 \cdot \cos 60^\circ = 236,9 \text{ Н}.$$

Составляем расчетную схему вала, нагруженного силами в плоскости zx (рис. 6.27, e), и определяем реакции в опорах:

$$\sum M_B = F_{1z} \cdot 1,7 - F_{2z} \cdot 2,5 - F_{3z} \cdot 0,5 - C_z \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_B = 633,4 \cdot 1,7 - 199,1 \cdot 2,5 - 236,9 \cdot 0,5 - C_z \cdot 3,5 = 0.$$

Откуда $C_z = 131,6$ Н;

$$\sum M_C = F_{1z} \cdot 1,8 - F_{2z} \cdot 1,0 - F_{3z} \cdot 3,0 + B_z \cdot 3,5 = 0;$$

$$\sum M_C = 633,4 \cdot 1,8 - 199,1 \cdot 1,0 - 236,9 \cdot 3,0 - B_z \cdot 3,5 = 0.$$

Отсюда $B_z = 65,84$ Н.

Проверка:

$$\sum F_{iz} = F_{1z} - F_{2z} - F_{3z} - B_z - C_z = 0;$$

$$\sum F_{iz} = 633,4 - 199,1 - 236,9 - 65,8 - 131,6 = 0.$$

Реакции в опорах B_z и C_z определены верно.

Строим эпюру изгибающих моментов M_y (рис. 6.27, ж).

Строим эпюру полных изгибающих моментов в сечениях вала (рис. 6.27, з), используя формулу

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Определяем положение опасного сечения вала. Из эпюр M и T следует, что опасное сечение вала находится в месте крепления первого шкива (D_1).

Выражаем из формулы (6.12) осевой момент сопротивления:

$$W_z = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{[\sigma]} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Тогда диаметр вала будет равен

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M^2 + T^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{(79,6 \cdot 10^3)^2 + (913,1 \cdot 10^3)^2}}{3,14 \cdot 80}} = 48,8 \text{ мм.}$$

Принимаем $d = 50$ мм.

Задачи для самостоятельного решения

6.20. Сплошной стальной вал круглого поперечного сечения в опасном сечении подвергается действию крутящего момента ($T = 10$ кН·м) и изгибающего момента ($M = 12$ кН·м). Из условия прочности по третьей теории прочности определить необходимый

диаметр вала, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 80$ МПа. Какой диаметр должен был бы иметь вал, если расчет произвести по четвертой теории прочности?

Ответ: 126 мм; 124 мм.

6.21. Полый стальной вал, внутренний диаметр которого составляет 0,6 наружного, в опасном сечении подвергается действию крутящего момента ($T = 120$ кН·м) и изгибающего момента ($M = 90$ кН·м). Определить наружный и внутренний диаметры поперечного сечения вала при допускаемом напряжении $[\sigma] = 120$ МПа, используя теорию наибольших касательных напряжений.

Ответ: 245 мм; 147 мм.

6.22. Определить наибольшее расчетное напряжение в стальном стержне BC круглого поперечного сечения диаметром 40 мм, нагруженном двумя одинаковыми грузами $F = 1$ кН (рис. 6.28). Чему будет равно наибольшее расчетное напряжение в стержне, если один из грузов будет снят? Использовать четвертую теорию прочности.

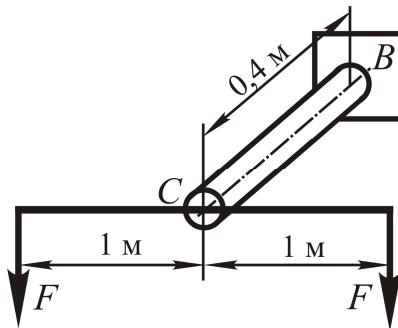


Рис. 6.28

Ответ: 127,3 МПа; 151,8 МПа.

6.23. Стальной коленчатый стержень $BCDK$ жестко закреплен (рис. 6.29). Участок BC имеет круглое поперечное сечение диаметром 125 мм. Сила $F = 20$ кН приложена в точке M перпендикулярно к плоскости чертежа. Пренебрегая касательными напряжениями от поперечной силы, определить в опасной точке стержня BC главные

напряжения и расчетные напряжения по третьей и четвертой теориям прочности.

Ответ: $\sigma_1 = 45,1$ МПа; $\sigma_3 = -5,4$ МПа; $\sigma_{\text{эKB III}} = 50,5$ МПа; $\sigma_{\text{эKB IV}} = 48$ МПа.

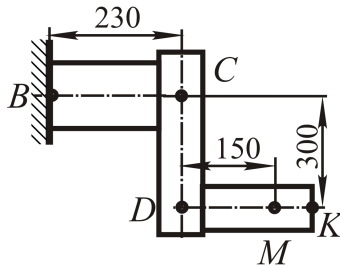


Рис. 6.29

6.24. Дорожный знак укреплен на полый круглой стойке с наружным диаметром 80 мм (рис. 6.30). Используя третью теорию прочности, определить толщину стенки стойки при допуске напряжения $[\sigma] = 80$ МПа, если наибольшая ветровая нагрузка на знак равна 1500 Па.

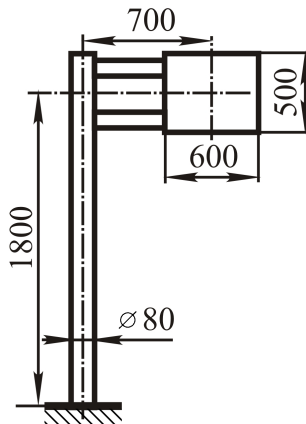


Рис. 6.30

Ответ: 2,36 мм \approx 2,4 мм.

6.25. Из условия прочности по теории наибольших касательных напряжений определить наибольшую допускаемую величину груза F , которую можно поднять при помощи ворота (рис. 6.31). Вал ворота круглого поперечного сечения диаметром $d = 30$ мм. Допускаемое напряжение для материала вала $[\sigma] = 800$ МПа.

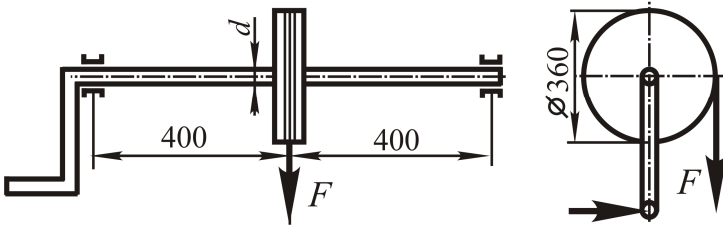


Рис. 6.31

Ответ: 790 Н.

6.26. Два одинаковых шкива B и C насажены на вал (рис. 6.32). Ведущий шкив B передает 10 л. с. при частоте вращения 100 мин^{-1} . Обе ветви ремня на шкиве C горизонтальны, на шкиве B вертикальны. Натяжение ремней: $t_2 = 1500$ Н; $t_1 > t_2$. Диаметры шкивов 600 мм. Из условия прочности по третьей теории прочности определить необходимый диаметр вала при допускаемом напряжении $[\sigma] = 800$ МПа.

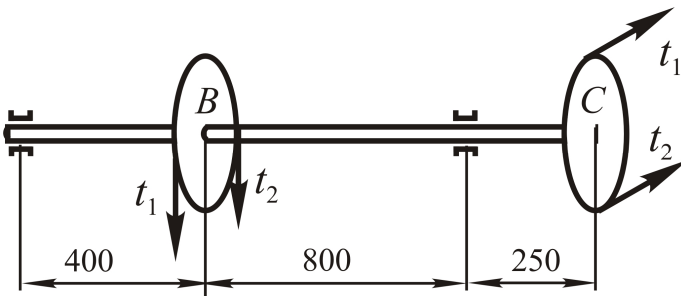


Рис. 6.32

Ответ: 60 мм.

6.27. Мотылевая шейка коленчатого вала испытывает сложное нагружение (рис. 6.33). Из условия прочности по четвертой теории прочности определить необходимый диаметр шейки при $[\sigma] = 120$ МПа. Указать координаты опасной точки.

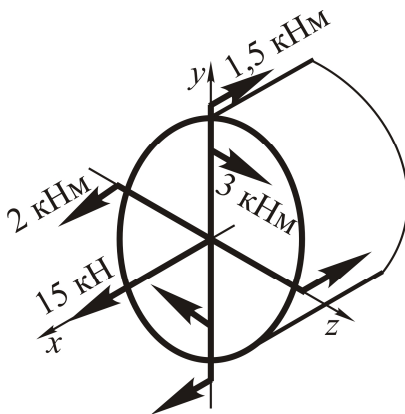


Рис. 6.33

Ответ: 68 мм; $z = -27,2$ мм; $y = -20,4$ мм.

7. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В УПРУГОЙ СИСТЕМЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Теоретические сведения

Интегралы Максвелла–Мора. Формула для определения перемещений в плоских упругих системах (интегралы Максвелла–Мора) имеет следующий вид:

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^n \int_l \frac{N_1 N_F}{EA} dx + \sum_{i=1}^n \int_l \frac{M_1 M_F}{EI_z} dx + \sum_{i=1}^n \int_l \frac{Q_1 Q_F}{GA} \eta dx, \quad (7.1)$$

где Δ_{1F} – перемещение по направлению единичной силы, вызванное действием всех внешних сил;

n – число расчетных участков упругой системы;

N_F, M_F, Q_F – уравнения соответственно продольных сил, изгибающих моментов, поперечных сил для i -го участка упругой системы от действия внешних сил;

N_1, M_1, Q_1 – уравнения, соответственно, продольных сил, изгибающих моментов, поперечных сил для i -го участка упругой системы от действия единичной безразмерной силы или единичного безразмерного момента;

EA, EI_z, GA – жесткость поперечного сечения элемента конструкции при растяжении и сжатии, при изгибе, при сдвиге соответственно;

η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения (для прямоугольника $\eta = 1,2$; для круглого сечения $\eta = 10/9$).

Определение перемещений в упругих системах с помощью интегралов Максвелла–Мора производится в следующем порядке.

1. Для каждого расчетного участка упругой системы составляются уравнения внутренних силовых факторов от действия внешних сил.

2. В сечении, перемещение которого предстоит определить, по его направлению прикладывается единичная безразмерная сила при

нахождении линейного перемещения, или единичный безразмерный момент при нахождении углового перемещения.

3. Для каждого расчетного участка упругой системы составляются уравнения внутренних силовых факторов от действия единичной безразмерной силы или единичного безразмерного момента.

4. Составленные в п. 1 и п. 3 уравнения подставляются в формулу (7.1), и производится вычисление. Если в результате расчета $\Delta_{1F} > 0$, то направление перемещения совпадает с направлением единичной безразмерной силы или единичного безразмерного момента; если $-\Delta_{1F} < 0$, то направление перемещения противоположно направлению единичной безразмерной силы или единичного безразмерного момента.

При выполнении практических расчетов по определению перемещений обычно используются не все слагаемые (интегралы), входящие в формулу (7.1):

1. Если упругая система в основном испытывает растяжение (сжатие), то используются слагаемые, содержащие уравнения продольных сил:

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^n \int_l \frac{N_i N_F}{EA} dx. \quad (7.2)$$

2. Если упругая система в основном испытывает изгиб, то используются слагаемые, содержащие уравнения изгибающих моментов:

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^n \int_l \frac{M_i M_F}{EI_z} dx. \quad (7.3)$$

3. Если упругая система в основном испытывает сдвиг, то используются слагаемые, содержащие уравнения поперечных сил:

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^n \int_l \frac{Q_i Q_F}{GA} \eta dx. \quad (7.4)$$

При нахождении перемещений не учтены в выше перечисленных случаях остальные слагаемые (интегралы) из формулы (7.1) приводит к погрешности не превышающей 2–3 %.

Способ Верещагина. Вычисление интегралов Максвелла–Мора при определении перемещений представляет громоздкий и трудоемкий процесс. В связи с этим были предложены специальные приемы вычисления интегралов, из которых широкое распространение получил способ Верещагина, часто называемый способом перемножения эпюр.

Способ Верещагина – это графоаналитический прием вычисления интегралов, входящих в формулу Максвелла–Мора.

Способ Верещагина применим для определения перемещений в упругих системах в следующих случаях:

- оси элементов конструкции прямолинейны, по крайней мере в пределах расчетных участков;
- жесткость поперечных сечений элементов конструкции постоянная по длине или изменяется скачкообразно.

Формула для определения перемещений в плоской упругой системе, испытывающей в основном изгиб, имеет вид

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_{Fi} M_{1Ci}}{EI_z}, \quad (7.5)$$

где Δ_{1F} – перемещение по направлению единичной силы, вызванное действием всех внешних сил;

Ω_{Fi} – площадь i -й части площади эпюры изгибающих моментов от внешних сил, то есть грузовой эпюры;

M_{1Ci} – ордината, взятая из эпюры изгибающих моментов от единичной безразмерной силы или от единичного безразмерного момента, то есть единичной эпюры, под центром тяжести i -й части площади грузовой эпюры.

Из формулы (7.5) Верещагина следует:

1. В пределах расчетного участка площадь грузовой эпюры должна разделяться на части границей, проходящей через поперечное сечение, в котором:

- на единичной эпюре есть излом или скачок;
- жесткость поперечного сечения изменяется скачкообразно.

2. Если в пределах рассматриваемого расчетного участка грузовая эпюра представляет сложную фигуру, то ее следует разбить на простейшие фигуры, для каждой из которых можно легко определить площадь и положение центра тяжести этой площади. Простейшими фигурами являются: прямоугольник, треугольник, сегмент (рис. 7.1).

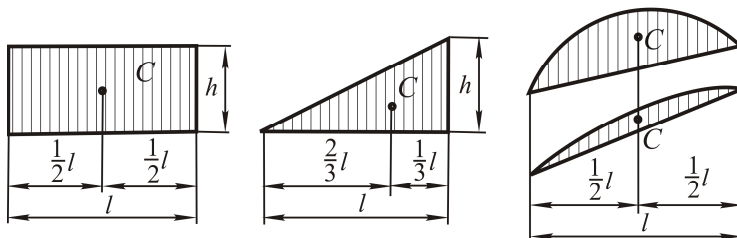


Рис. 7.1. Положение центра тяжести площади простейших фигур

Площади простейших фигур:

– прямоугольника $\Omega_F = lh$;

– треугольника $\Omega_F = \frac{1}{2}lh$;

– сегмента $\Omega_F = \frac{pl^3}{12}$, где p – интенсивность распределенной на-

грузки.

3. Если на данном расчетном участке грузовая и единичная эпюры линейные, то безразлично, из какой из них брать площадь, а из какой – ординату.

4. Если грузовая и единичная эпюры или их части имеют одинаковые знаки, то результат положительный, если разные – отрицательный.

5. Формулы для вычисления других интегралов, входящих в формулу Максвелла–Мора, будут иметь вид подобный выражению (7.5).

Определение перемещений с помощью способа Верещагина в упругих системах, в основном испытывающих изгиб, производится в следующем порядке:

1. Строится эпюра изгибающих моментов от действия внешних сил (грузовая эпюра) M_F .

2. В сечении, перемещение которого предстоит определить, по его направлению прикладывается единичная безразмерная сила при нахождении линейного перемещения или единичный безразмерный момент при нахождении углового перемещения.

3. Строится эпюра изгибающих моментов от действия единичной безразмерной силы или единичного безразмерного момента (единичная эпюра) M_1 .

4. Площадь грузовой эпюры разбивается на простейшие фигуры.

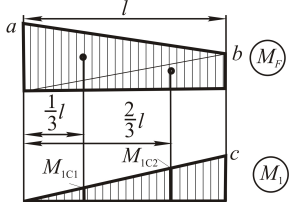
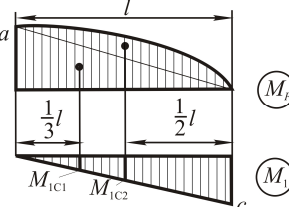
5. Последовательно подставляется в формулу (7.5) алгебраическая сумма произведений площади каждой простейшей фигуры из грузовой эпюры на соответствующую ординату, взятую из единичной эпюры под центром тяжести принятой площади.

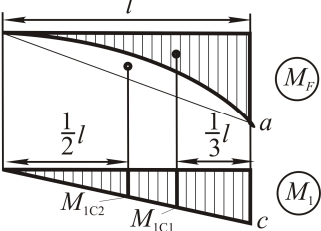
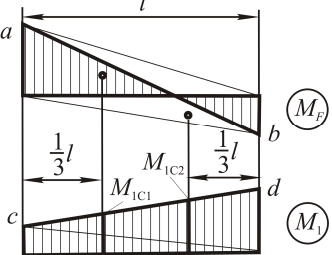
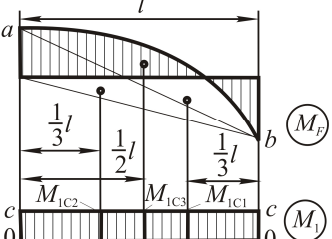
6. Производится вычисление по формуле (7.5). Если в результате расчета $\Delta_{1F} > 0$, то направление перемещения совпадает с направлением единичной безразмерной силы или единичного безразмерного момента; если $\Delta_{1F} < 0$, то направление перемещения противоположно направлению единичной безразмерной силы или единичного безразмерного момента.

Особенности перемножения эпюр представлены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Некоторые примеры перемножения эпюр по способу Верещагина

Эпюры M_F и M_1	$\sum_{i=1}^n \Omega_{Fi} M_{1Ci}$
	$\frac{1}{2}al \cdot \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}bl \cdot \frac{2}{3}c$
	$-\frac{1}{2}al \cdot \frac{1}{3}c - \frac{pl^3}{12} \cdot \frac{1}{2}c$

Эпюры MF и M1	$\sum_{i=1}^n \Omega_{Fi} M_{1Ci}$
	$\frac{1}{2}al \cdot \frac{2}{3}c - \frac{pl^3}{12} \cdot \frac{1}{2}c$
	$\frac{1}{2}al \cdot \left(\frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d \right) + \frac{1}{2}bl \cdot \left(\frac{1}{3}c + \frac{2}{3}d \right)$
	$\frac{1}{2}al \cdot c - \frac{1}{2}bl \cdot c + \frac{pl^3}{12}c$

Пример 7.1. Определить наибольший прогиб стальной балки (рис. 7.2). В расчете принять: $F = 400$ Н; $b = 40$ мм; $h = 20$ мм; $l = 1$ м.

Решение. Наибольший прогиб стальной балки возникает в сечении B . Для его определения применяем интегралы Максвелла–Мора. Балка в основном испытывает изгиб. Тогда для определения прогиба следует использовать формулу (7.3):

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^n \int_l \frac{M_1 M_F}{EI_z} dx.$$

Для балки выделим два участка. На одном из них поперечное сечение переменное ($b = f(x)$), а на другом постоянное ($b = \text{const}$).

В сечении B по направлению наибольшего перемещения, то есть вертикально, прикладываем единичную безразмерную силу (рис. 7.2, ϵ). На расстоянии x_1 и x_2 проводим секущие плоскости. Для выбранных двух сечений записываем уравнения изгибающих моментов от внешних сил M_F и от единичной безразмерной силы M_1 (табл. 7.2).

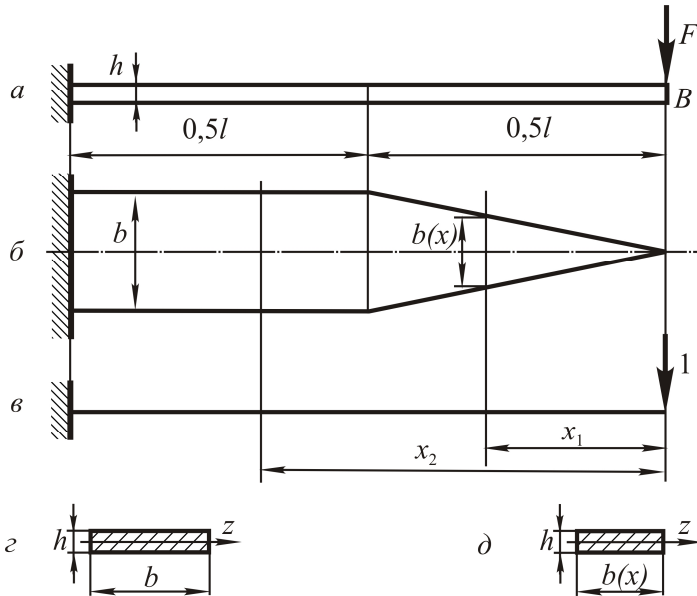


Рис. 7.2. Расчетные схемы балки

Таблица 7.2

Уравнения изгибающих моментов

Обозначение уравнения	$0 \leq x_1 \leq 0,5l$	$0,5l \leq x_2 \leq l$
M_F	$-Fx_1$	$-Fx_2$
M_1	$-1x_1$	$-1x_2$

Из соотношения оснований и высот подобных треугольников (рис. 7.2, б) получим

$$b(x) = 2x_1 \frac{b}{l}.$$

Тогда осевые моменты инерции для двух сечений балки (рис. 7.2, з и д) будут соответственно равны

$$I_z = \frac{bh^3}{12};$$

$$I_z(x) = \frac{b(x)h^3}{12} = \frac{2x_1}{l} \frac{bh^3}{12} = \frac{2x_1}{l} I_z.$$

Подставляя уравнения изгибающих моментов и моментов инерции в формулу (7.3), определяем величину наибольшего прогиба балки:

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} = y_B &= \int_0^{0,5l} \frac{(-1x_1)(-Fx_1)}{EI_z \frac{2x_1}{l}} dx_1 + \int_{0,5l}^l \frac{(-1x_2)(-Fx_2)}{EI_z} dx_2 = \\ &= \frac{17Fl^3}{48EI_z} = \frac{17 \cdot 400 \cdot 1000^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{40 \cdot 20^3}{12}} = 26,6 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Таким образом, сечение *B* балки переместилось по направлению единичной безразмерной силы, то есть вниз на 26,6 мм.

Пример 7.2. Определить прогиб на консоли балки (двутавр № 14, ГОСТ 8239–89: $I_z = 572 \text{ см}^4$) и угол поворота сечения на правой опоре (рис. 7.3, а).

Решение. Определение перемещений в балке постоянной жесткости, в основном испытывающей изгиб, производим с помощью способа Верещагина.

Для этого определяем реакции опор, которые будут равны $B_y = 7$ кН, $C_y = 23$ кН и строим эпюру изгибающих моментов от действия внешних сил M_F (рис. 7.3, б).

В сечении D , прогиб которого предстоит определить, по его направлению прикладывается единичная безразмерная сила (рис. 7.3, в) и строится эпюра изгибающих моментов от действия единичной безразмерной силы M_1 (рис. 7.3, з).

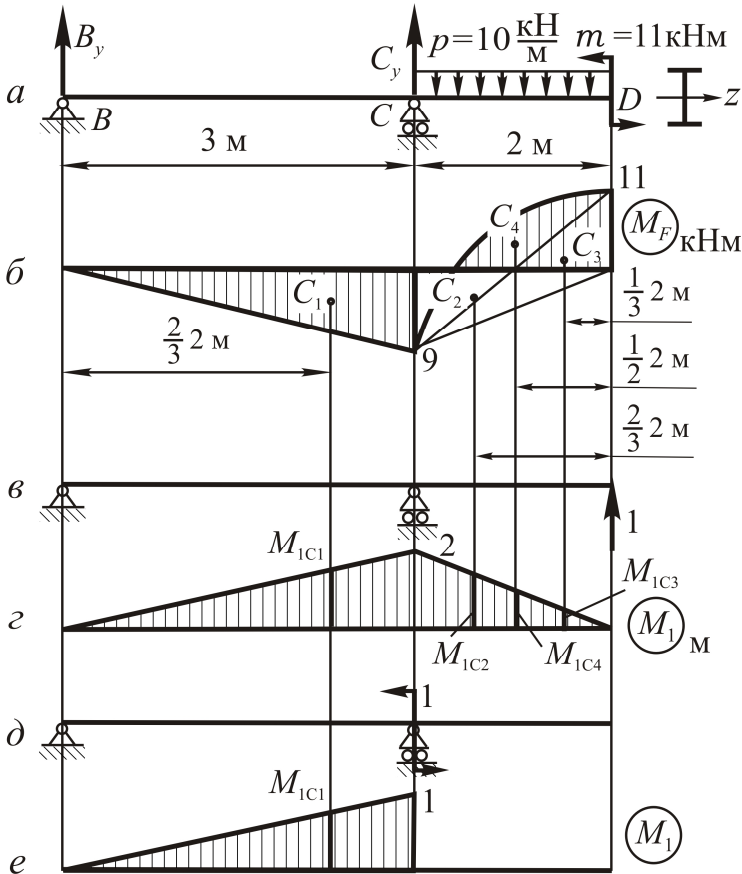


Рис. 7.3. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов балки

Площадь эпюры M_F разбивается на простейшие фигуры: участок I – треугольник; участок II – два треугольника и сегмент.

Последовательно подставляется в формулу (7.5) алгебраическая сумма произведений площади каждой простейшей фигуры Ω_{Fi} из эпюры M_F на соответствующую ординату M_{1ci} , взятую из эпюры M_1 в сечении под центром тяжести принятой площади C_i и производится вычисление перемещения:

$$\Delta_{1F} = y_D = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = -\frac{48 \text{ кНм}^3}{3EI_z} = -\frac{48 \cdot 10^3 \cdot 10^9}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^4} = -13,99 \text{ мм.}$$

Сечение D переместилось против направления единичной безразмерной силы, то есть вниз на 13,99 мм.

Для определения углового перемещения сечения C по его направлению прикладывается единичный безразмерный момент (рис. 7.3, δ) и строится эпюра изгибающих моментов от действия единичного безразмерного момента M_1 (рис. 7.3, e).

Площадь эпюры M_F представляет собой на участке I простейшую фигуру – треугольник.

Подставляется в формулу (7.5) произведение площади простейшей фигуры Ω_{Fi} из эпюры M_F на соответствующую ординату M_{1ci} , взятую из эпюры M_1 в сечении под центром тяжести принятой площади C_i и производится вычисление перемещения:

$$\Delta_{1F} = \theta_C = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = -\frac{9 \text{ кНм}^2}{EI_z} = -\frac{9 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5 \cdot 572 \cdot 10^4} = -0,00787 \text{ рад} = -0,451^\circ.$$

Сечение C повернулось против направления единичного безразмерного момента, то есть по ходу часовой стрелки на $0,451^\circ$.

Пример 7.3. Определить полное перемещение центра тяжести сечения B рамы (рис. 7.4, a). Элементы рамы изготовлены из двух швеллеров (профиль № 14а, ГОСТ 8240–89: $I_z = 545 \text{ см}^4$), составленных в коробку.

Решение. Перемещение центра тяжести сечения B рамы Δ_B будем определять как геометрическую сумму вертикального y_B и горизонтального перемещений x_B .

$$\Delta_B = \sqrt{y_B^2 + x_B^2}.$$

Определение перемещений в упругой системе, оси элементов у которой прямые и поперечные сечения имеют постоянную жесткость, в основном испытывающей изгиб, производим с помощью способа Верещагина.

Для этого строим эпюру изгибающих моментов от действия внешних сил M_F (рис. 7.4, a).

Для определения вертикального перемещения в сечении B по его направлению прикладывается единичная безразмерная сила (рис. 7.4, b) и строится эпюра изгибающих моментов от действия единичной безразмерной силы M_1 (рис. 7.4, d).

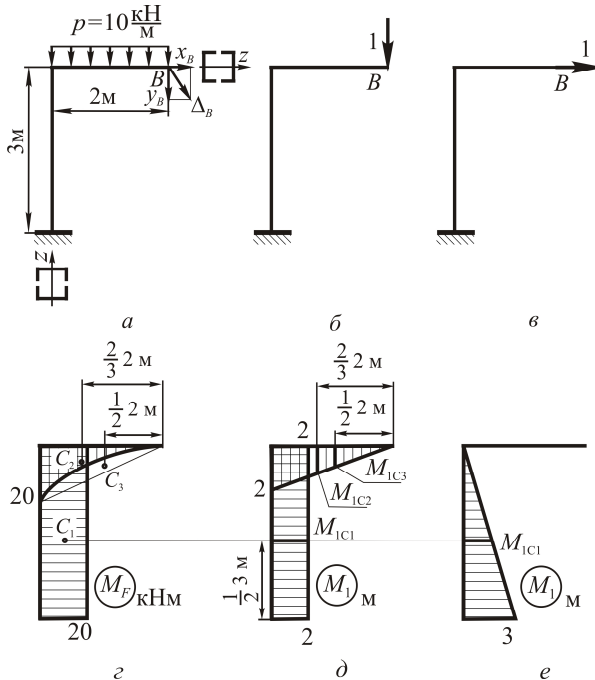


Рис. 7.4. Расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов рамы

Площадь эпюры M_F разбивается на простейшие фигуры: вертикальный участок – прямоугольник; горизонтальный участок – треугольник и сегмент.

Последовательно подставляется в формулу (7.5) алгебраическая сумма произведений площади каждой простейшей фигуры Ω_{Fi} из эпюры M_F на соответствующую ординату M_{1ci} , взятую из эпюры M_1 в сечении, где находится центр тяжести площади простейшей фигуры C_i и производится вычисление вертикального перемещения

$$\begin{aligned}\Delta_{1F} = y_B &= \frac{1}{EI_z} \left(20 \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \\ &= \frac{140 \text{ кНм}^3}{EI_z} = \frac{140 \cdot 10^3 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 545 \cdot 10^4 \cdot 2} = 64,2 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Центр тяжести сечения B переместился по направлению единичной безразмерной силы, то есть вниз на 64,2 мм.

Для определения горизонтального перемещения в сечении B по его направлению прикладывается единичная безразмерная сила (рис. 7.4, в) и строится эпюра изгибающих моментов от действия единичной безразмерной силы M_1 (рис. 7.4, е).

Перемножая эпюры M_F и M_1 по способу Верещагина, получим горизонтальное перемещение центра тяжести сечения B .

$$\Delta_{1F} = x_B = \frac{1}{EI_z} \left(20 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = \frac{90 \text{ кНм}^3}{EI_z} = \frac{90 \cdot 10^3 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 545 \cdot 10^4 \cdot 2} = 41,3 \text{ мм}.$$

Центр тяжести сечения B переместился по направлению единичной безразмерной силы, то есть вправо на 41,3 мм.

Полное перемещение центра тяжести сечения B рамы равно

$$\Delta_B = \sqrt{64,2^2 + 41,3^2} = 76,3 \text{ мм}.$$

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Рама состоит из двух стоек и ригеля одинаковых размеров, жестко соединенных между собой и изготовленных из двутавров

№ 10 (рис. 7.5). Длина этих элементов рамы $a = 1$ м. Величина горизонтальной силы F , стремящейся переместить подвижную опору рамы влево, равна 6 кН. Определить величину перемещений правой опоры рамы.

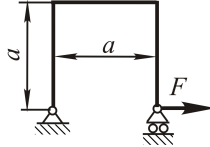


Рис. 7.5

Ответ: 25,3 мм.

7.2. К балке пролетом $2a = 4$ м, размещенной на двух опорах, прикреплен жестко на правом конце стойка высотой $a = 2$ м (рис. 7.6). К верхнему концу стойки приложена горизонтально сила $F = 9$ кН. Балка и стойка выполнены из двутавров № 16. Определить величину горизонтального перемещения точки приложения силы F .

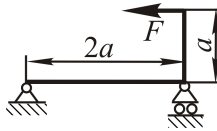


Рис. 7.6

Ответ: 41,2 мм.

7.3. Балка на двух опорах с консолью нагружена двумя равными силами F , приложенными посередине пролета и на свободном конце (рис. 7.7). При какой длине a консоли прогиб в сечении C будет равен нулю?

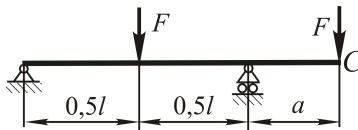


Рис. 7.7

Ответ: $a = 0,16l$.

7.4. Две балки равного сопротивления имеют одинаковое квадратное сечение в защемлении и нагружены одинаковыми силами на свободном конце. У первой балки меняется ширина, у второй – высота. Какая балка будет легче? У какой из них наибольший прогиб будет больше?

Ответ: $V_1 / V_2 = f_1 / f_2 = 0,75$.

7.5. Стальная рессора (рис. 7.8) составлена из девяти листов, образующих брус равного сопротивления изгибу постоянной высоты, и десятого листа таких же размеров, как самый длинный из девяти. Ширина каждого листа $b = 60$ мм, толщина $t = 10$ мм. Пролет рессоры $l = 1080$ мм. Найти прогиб рессоры посередине ее пролета при значении $F = 12$ кН.

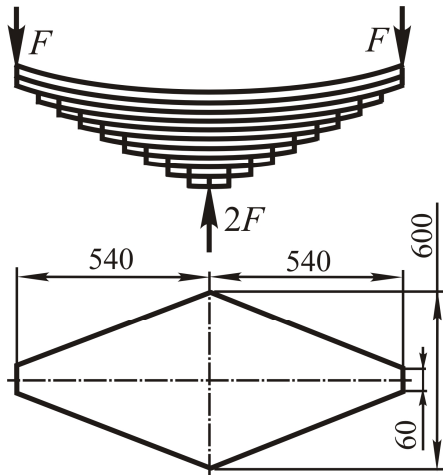


Рис. 7.8

Ответ: 105 мм.

7.6. Стальная рессора (рис. 7.9) состоит из десяти листов шириной 75 мм и толщиной 10 мм. Пролет рессоры 1 м. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 400$ МПа. Определить грузоподъемность рессоры и величину прогиба посередине пролета.

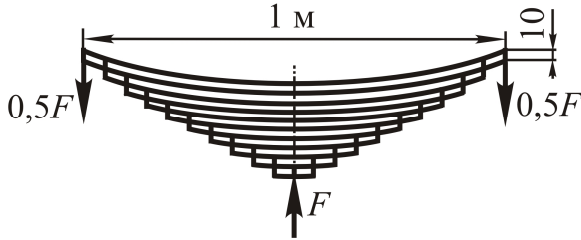


Рис. 7.9

Ответ: $[F] = 20$ кН; $f = 50$ мм.

7.7. Стальная рессора равного сопротивления изготовлена из полос шириной 80 мм и толщиной 8 мм. Сколько нужно полос, если рессора в середине пролета нагружена силой $F = 12,8$ кН при допуске напряжении $[\sigma] = 300$ МПа, а величина пролета рессоры $l = 0,8$ м? Вычислить величину осадки рессоры.

Ответ: 10 полос; 30 мм.

7.8. Пользуясь способом Верещагина, определить величину прогиба сечения C и угла поворота сечения D балок (рис. 7.10). Принять: жесткость поперечного сечения каждой балки $EI_z = 8 \cdot 10^{11}$ Н·мм²; $F = 12$ кН; $m = 8$ кН·м; $p = 60$ кН/м; $a = 1$ м. С отрицательным знаком указаны в ответах перемещения, направленные вниз, отрицательный угол поворота – по часовой стрелке.

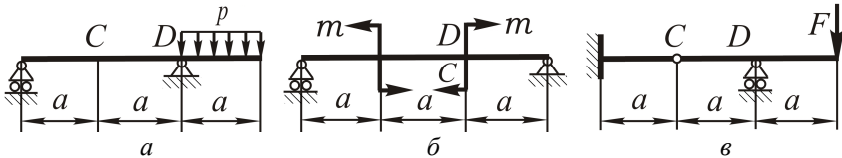


Рис. 7.10

Ответ: а) 2,5 мм; $-0,0067$ рад; б) 5 мм; $-0,005$ рад;
в) 5 мм; $-0,01$ рад.

7.9. Пользуясь способом Верещагина, определить величину прогиба и угла поворота сечения B балки, жесткость поперечных

сечений которой изменяется скачкообразно от EI_z до $2EI_z$ (рис. 7.11).
 Принять: $F = 12$ кН, $m = 10$ кН·м, $p = 8$ кН/м, $a = 2$ м.

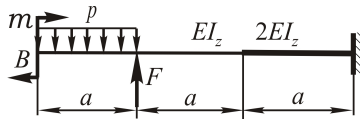


Рис. 7.11

Ответ: $\frac{44}{EI_z}$ и $\frac{46}{3EI_z}$.

7.10. Определить величину вертикального перемещения сечения D (y_D), величину горизонтального перемещения сечения B (x_B) и величину угла поворота сечения C (θ_C) статически определимых рам (рис. 7.12) постоянной и одинаковой на всех участках жесткости EI_z . В ответах с отрицательным знаком указаны перемещения, направленные вниз и влево, отрицательный угол поворота – по часовой стрелке.

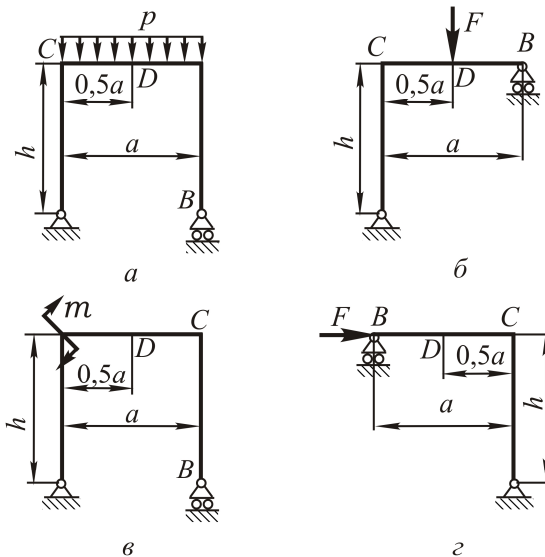


Рис. 7.12

Ответ к задаче 7.10:

Перемещение	Схема			
	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
y_D	$-\frac{5}{384}pa^4$	$-\frac{1}{48}Fa^3$	$-\frac{1}{16}ma^2$	$\frac{1}{16}Fha^2$
x_B	$\frac{1}{12}pa^3h$	$\frac{1}{16}Fa^2h$	$\frac{1}{2}mah$	$\frac{1}{3}Fh^2(a+h)$
θ_C	$-\frac{5}{24}pa^3$	$-\frac{1}{16}Fa^2$	$\frac{1}{6}ma$	$-\frac{1}{3}Fha$

7.11. Определить любым методом величину вертикального перемещения сечения D (y_D), величину горизонтального перемещения сечения B (x_B) и величину угла поворота сечения C (θ_C) статически определимых рам (рис. 7.13) постоянной и одинаковой на всех участках жесткости EI_z . В ответах с отрицательным знаком указаны перемещения, направленные вниз и влево, отрицательный угол поворота – по часовой стрелке.

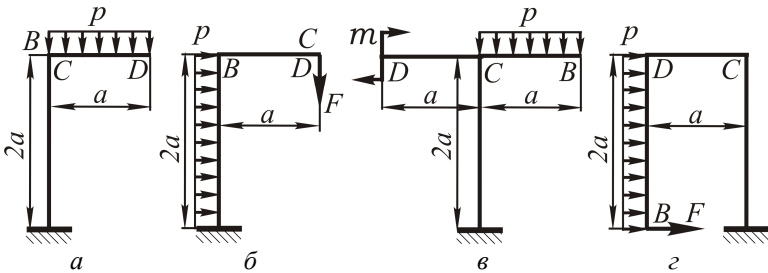


Рис. 7.13

Ответ к задаче 7.11:

Перемещение	Схема			
	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
y_D	$-\frac{9}{8}pa^4 + 2ma^2$	$-\frac{4}{3}pa^4 - \frac{7}{3}Fa^3$	$pa^4 + \frac{5}{2}ma^2$	$-pa^4 - 3Fa^3$

Перемещение	Схема			
	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>
x_B	$-pa^4 + 2ma^2$	$2pa^4 + 2Fa^3$	$pa^4 + 2ma^2$	$\frac{22}{3}pa^4 + \frac{28}{3}Fa^3$
θ_C	$-pa^3 + 2ma$	$-\frac{4}{3}pa^3 - \frac{5}{2}Fa^2$	$-pa^3 - 2ma$	$2Fa^2$

7.12. Балка на двух опорах с консолью загружена сосредоточенной силой и распределенной нагрузкой (рис. 7.14). Какой величины должна быть сила F , чтобы прогиб конца консоли равнялся нулю?

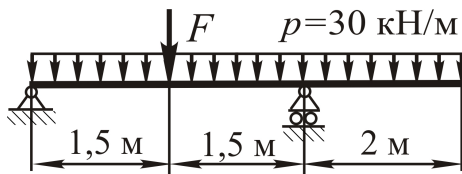


Рис. 7.14

Ответ: 100 кН.

8. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Теоретические сведения

Стержневые системы, в которых опорные реакции и внутренние силовые факторы в элементах конструкции не могут быть определены с помощью уравнений равновесия и метода сечений, называются статически неопределимыми. Статически неопределимые системы позволяют за счет более рационального распределения усилий по элементам конструкции достигать значительной экономии материала.

Всякое ограничение, накладываемое на перемещение элемента конструкции, называется связью. Наложение одной связи отнимает у конструкции одну степень свободы. Если на плоскую систему наложено три связи, то ее положение на плоскости (за некоторыми исключениями) установлено и она превращается из механизма в кинематически неизменяемую систему.

Кинематически неизменяемой называется система, наложенные связи на которую исключают ее перемещение как жесткого целого.

Число связей, которое обеспечивает статическую определенность и кинематическую неизменяемость, называется необходимым числом связей.

Связи, накладываемые на систему сверх необходимых, называются лишними или дополнительными связями. Эти связи могут быть удалены без нарушения кинематической неизменяемости системы.

Степень статической неопределимости системы равна числу дополнительных связей, которые удобно находить из кинематического анализа системы. Каждый элемент конструкции на плоскости имеет три степени свободы. Тогда общее число степеней свободы плоской системы будет равно:

$$H = 3D - C_0 - C_B, \quad (8.1)$$

где D – число элементов конструкции;

C_0 – число опорных или внешних связей;







C_B – число внутренних или взаимных связей.

При определении C_0 принимается, что в плоской системе шарнирно-подвижная опора налагает одну внешнюю связь, шарнирно-неподвижная опора – две, защемление (заделка) – три внешние связи.

Число внутренних или взаимных связей C_B зависит от схемы и числа элементов в соединении (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Внутренние связи в соединениях

Схема соединения элементов						
Число элементов	2	3	n	2	3	n
Число внутренних связей C_B	2	4	$2(n - 1)$	3	6	$3(n - 1)$

Результат расчета H по формуле (8.1) сводится к трем вариантам:

- 1) $H > 0$ – система кинематически изменяемая и не применяется в качестве инженерного сооружения;
- 2) $H = 0$ – система статически определима;
- 3) $H < 0$ – система статически неопределима, имеет дополнительные (лишние) связи. Степень статической неопределимости системы равна модулю $|H|$.

Суть метода сил заключается в том, что статически неопределимая система путем освобождения от дополнительных (лишних) связей превращается в статически определимую, геометрически неизменяемую. Действие отброшенных связей заменяется неизвестными силами и моментами. Их величины подбираются так, чтобы перемещения в системе оставались такими же, что и при наличии дополнительных связей. Таким образом, неизвестными при этом способе являются силы, откуда и происходит название «метод сил».

Расчет начинается с выбора основной системы. Основной системой является статически определимая, кинематически неизменяемая система, получаемая из заданной в результате освобождения ее от дополнительных связей. Основная система, к которой приложены все внешние нагрузки и неизвестные силы, заменяющие отброшенные связи, называется эквивалентной.

Для раскрытия статической неопределенности методом сил составляются уравнения перемещений, которые называются каноническими уравнениями метода сил и выражают условия равенства нулю перемещений в основной системе по направлению каждой из отброшенных связей, вызванных действием неизвестных и внешних сил. Их число должно быть равно степени статической неопределенности системы.

Канонические уравнения имеют следующий вид:

– при $H = -1$

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0; \quad (8.2)$$

– при $H = -2$

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0, \end{cases} \quad (8.3)$$

где δ_{11} – перемещение в основной системе по направлению силы X_1 , вызванное действием силы $X_1 = 1$;

δ_{12} – перемещение в основной системе по направлению силы X_1 , вызванное действием силы $X_2 = 1$;

δ_{22} – перемещение в основной системе по направлению силы X_2 , вызванное действием силы $X_2 = 1$;

Δ_{1F} и Δ_{2F} – перемещение в основной системе по направлению силы X_1 и X_2 соответственно, вызванное действием всех внешних сил.

Перемещения с одинаковыми индексами (δ_{11} , δ_{22} и т. п.) называются главными коэффициентами канонических уравнений. Они всегда положительны и не равны нулю. Перемещения с разными индексами (δ_{12} , δ_{21} и т. п.) называются побочными коэффициентами канонических уравнений и могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Согласно теореме о взаимности перемещений эти коэффициенты попарно равны, то есть $\delta_{12} = \delta_{21}$.

Свободные слагаемые канонических уравнений (Δ_{1F} , Δ_{2F} и т. п.) могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Чем больше побочных коэффициентов и свободных слагаемых канонических уравнений равно нулю, тем рациональнее выбрана основная система.

Коэффициенты и свободные слагаемые канонических уравнений определяются с помощью интегралов Максвелла – Мора или способа Верещагина. В результате решения системы канонических уравнений определяются неизвестные силы, после чего статическая неопределимость заданной системы раскрыта и для нее строятся эпюры внутренних силовых факторов.

Затем выполняются проверки правильности выполненных расчетов:

1) статическая, которая заключается в выполнении уравнений равновесия;

2) деформационная, которая заключается в определении перемещений (Δ_1 , Δ_2 и т. д.) в заданной системе по направлению дополнительных связей (X_1 , X_2 и т. д.), каждое из которых должно быть равно нулю. Допускаются погрешности в расчетах, определяемые как $\frac{\Delta_1}{\Delta_{1F}} 100\%$ и т. д., которые не должны превышать 1 %.

*Рекомендуемая методика решения
статически неопределимых систем методом сил*

1. Определить степень статической неопределимости системы.
2. Выбрать основную систему.
3. Построить эквивалентную систему.
4. Составить для эквивалентной системы канонические уравнения метода сил.
5. Построить в основной системе эпюру изгибающих моментов (или других внутренних силовых факторов) от действия внешних сил.
6. Построить в основной системе эпюры изгибающих моментов (или других внутренних силовых факторов) от действия единичных сил.
7. Определить коэффициенты и свободные слагаемые канонических уравнений.

8. Подставить значения коэффициентов и свободных слагаемых в канонические уравнения и определить неизвестные силы.

9. Построить эпюру изгибающих моментов (и других внутренних силовых факторов).

10. Произвести статическую и деформационную проверки.

11. Подобрать размеры поперечного сечения элементов системы (конструкции).

Пример 8.1. Раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для рамы (рис. 8.1, а). Жесткость поперечных сечений элементов рамы постоянная и одинаковая. Принимая $[\sigma] = 160$ МПа, подобрать номер профиля швеллера (ГОСТ 8240–89) для изготовления элементов рамы, если сечение состоит из двух швеллеров, составленных в коробку.

Решение. Определяем степень статической неопределимости системы

$$H = 3D - C_O - C_B = 3 \cdot 2 - 4 - 3 = -1.$$

Заданная рама один раз статически неопределима.

Выбираем основную систему (рис. 8.1, б). Строим соответствующую основной эквивалентную систему (рис. 8.1, в).

Составляем для эквивалентной системы каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Главный коэффициент и свободное слагаемое канонического уравнения будем находить по способу Верещагина. Прикладываем в основной системе силу $X_1 = 1$ (рис. 8.1, з) и строим эпюру изгибающих моментов M_1 (рис. 8.1, д). Перемножая эпюру M_1 саму на себя, получим

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \right) = \frac{44}{3EI_z}.$$

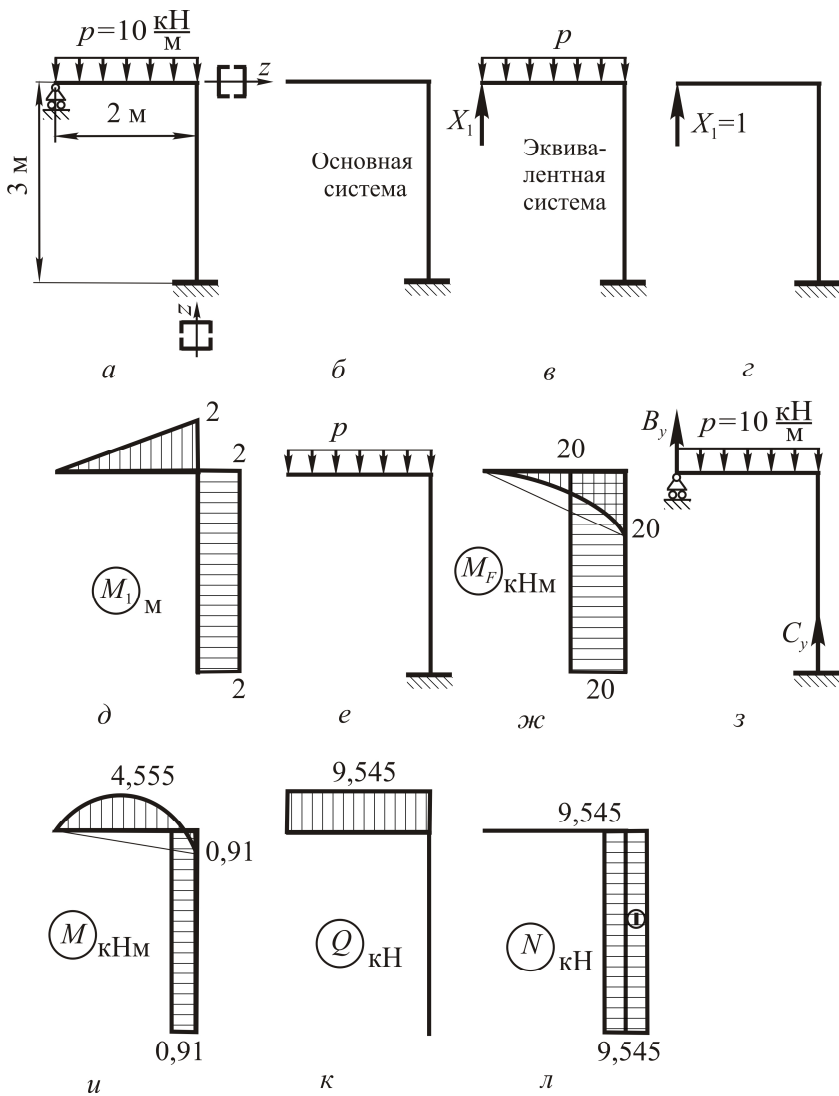


Рис. 8.1. Расчетные схемы и эпюры внутренних силовых факторов рамы

Прикладываем в основной системе все внешние нагрузки (рис. 8.1, е) и строим эпюру изгибающих моментов M_F (рис. 8.1, ж).

Перемножая эпюру M_F на эпюру M_1 , получим свободное слагаемое канонического уравнения:

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 20 \cdot 3 \cdot 2 \right) = -\frac{140}{EI_z}.$$

Подставляем в каноническое уравнение полученные значения главного коэффициента и свободного слагаемого и определяем неизвестную силу X_1 .

$$\frac{44}{3EI_z} X_1 - \frac{140}{EI_z} \Delta_{1F} = 0; \quad X_1 = \frac{140 \cdot 3}{44} = 9,545 \text{ кН}.$$

Статическая неопределимость заданной системы раскрыта. Это значит, что найдена вертикальная реакция, возникающая в шарнирно подвижной опоре $B_y = X_1 = 9,545$ кН (рис. 8.1, з). Тогда в опоре C возникает реакция, равная

$$C_y = 2p - B_y = 2 \cdot 10 - 9,545 = 10,455 \text{ кН}.$$

Запишем уравнение изгибающего момента для горизонтального участка рамы:

$$M_x = B_y x - p \frac{x^2}{2}.$$

Определим экстремальное значение изгибающего момента для этого участка рамы:

$$\frac{dM_x}{dx} = B_y - px = 0;$$

$$x = \frac{B_y}{p} = \frac{9,545}{10} = 0,9545 \text{ м};$$

$$M_x = 9,545 \cdot 0,9545 - 10 \frac{0,9545^2}{2} = 4,555 \text{ кНм} .$$

Находим значение изгибающего момента при $x = 2 \text{ м}$.

$$M_x = 9,545 \cdot 2 - 10 \frac{2^2}{2} = -0,91 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Строим эпюру изгибающих моментов в заданной системе (рис. 8.1, *u*). Выполняем деформационную проверку правильности выполненных расчетов и построений, определяя перемещение в заданной системе по направлению силы X_1 . Для этого перемножаем по способу Верещагина эпюры M и M_1 .

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,91 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 0,91 \cdot 3 \cdot 2 \right) = -\frac{0,00667}{EI_z} .$$

Определим погрешность:

$$\delta = \frac{\Delta_1}{\Delta_{1F}} \cdot 100 \% = \frac{0,00667}{140} 100 \% = 0,005 \% < 1 \% .$$

Значит все расчеты и построения выполнены верно.

Строим эпюры поперечных сил Q (рис. 8.1, *к*) и продольных сил N (рис. 8.1, *л*).

Производим подбор размеров поперечного сечения элементов рамы. Из условия прочности при изгибе определяем значение осевого момента сопротивления поперечного сечения элементов рамы.

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{4,555 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{160 \cdot 10^2} = 28,5 \text{ см}^3 .$$

Поперечное сечение элементов рамы состоит из двух швеллеров, составленных в коробку. Тогда осевой момент сопротивления для одного швеллера должен быть не менее

$$W_{z1} = \frac{W_z}{2} = \frac{28,5}{2} = 14,25 \text{ см}^3 .$$

По таблице сортамента для швеллеров стальных (ГОСТ 8240–89) выбираем профиль № 6,5 ($W_{z1} = 15 \text{ см}^3$).

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Раскрыть статическую неопределенность, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок (рис. 8.2) и подобрать номер профиля двутавра (ГОСТ 8239–89) для их изготовления при условии, что: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $F = 30 \text{ кН}$; $m = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $p = 20 \text{ кН/м}$.

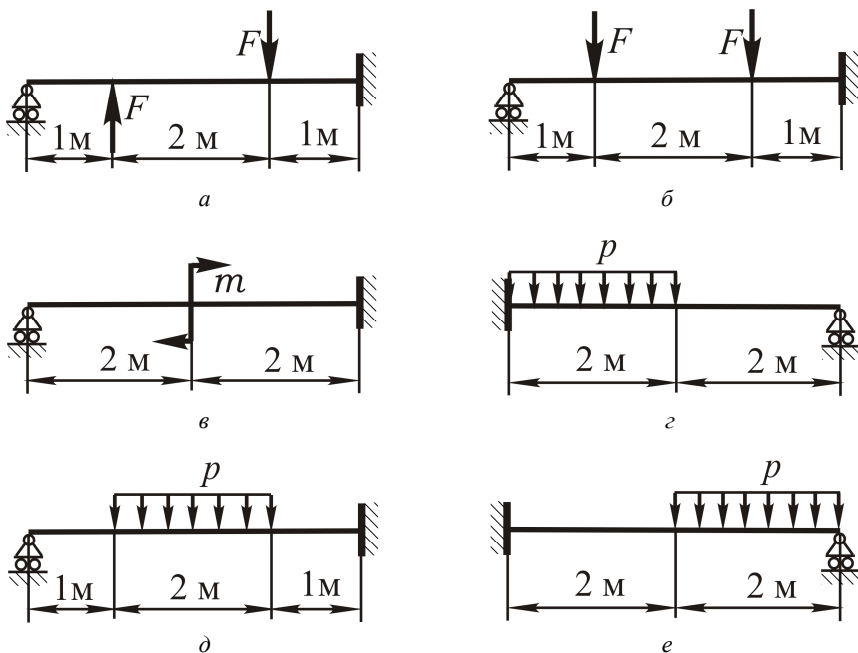


Рис. 8.2

8.2. Раскрыть статическую неопределенность, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок (рис. 8.3) и подобрать номер профиля швеллера (ГОСТ 8240–89) для их изготовления при условии, что: сечение состоит из двух швеллеров, составленных в коробку ($[\]$); $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $F = 30 \text{ кН}$; $m = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $p = 20 \text{ кН/м}$.

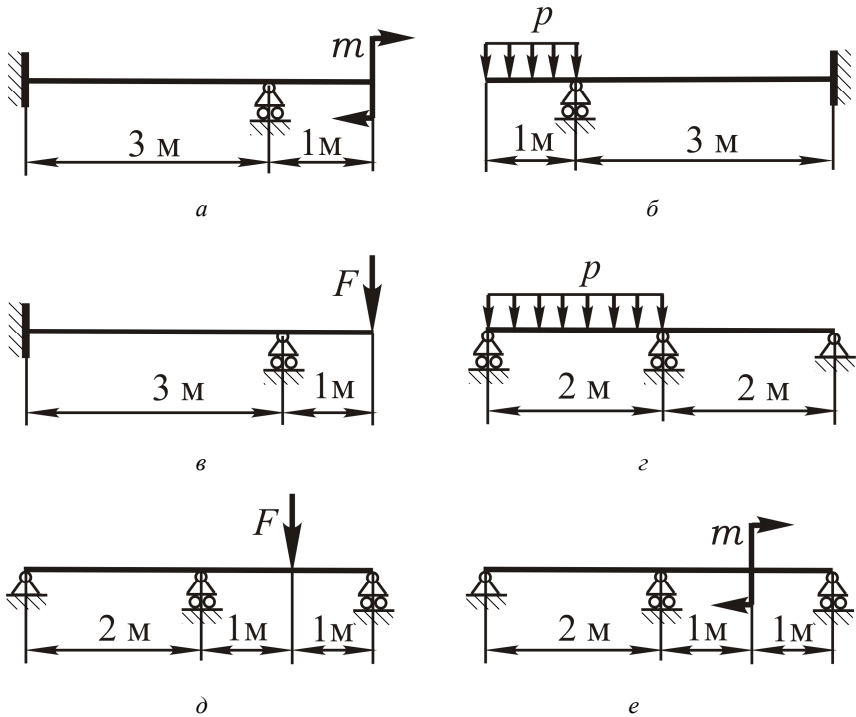


Рис. 8.3

8.3. Раскрыть статическую неопределенность, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок (рис. 8.4) и подобрать для них размеры поперечного сечения в виде кольца при условии, что: отношение внутреннего диаметра кольца к наружному составляет $0,8$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $F = 20 \text{ кН}$; $m = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $p = 20 \text{ кН/м}$.

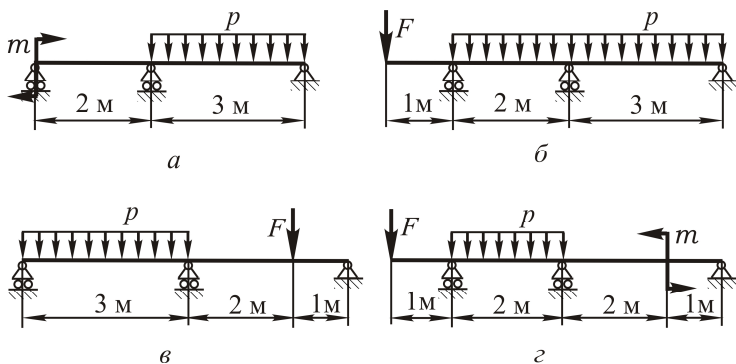


Рис. 8.4

8.4. Раскрыть статическую неопределенность, построить эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для рам (рис. 8.5) и подобрать номер профиля двутавра (ГОСТ 8239–89) для их изготовления при условии, что: $[\sigma] = 160$ МПа; $F = 40$ кН; $m = 30$ кН·м; $p = 20$ кН/м; $a = 2$ м; $b = 3$ м. Жесткость поперечных сечений элементов рамы постоянная и одинаковая.

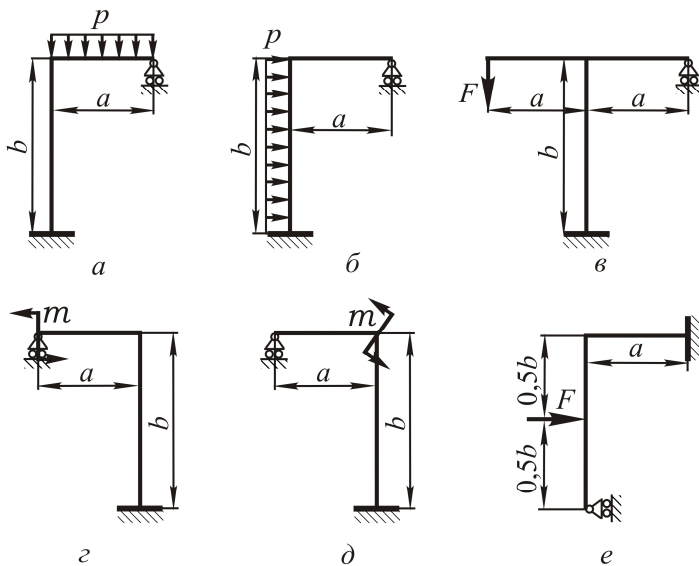


Рис. 8.5

8.5. Раскрыть статическую неопределенность, построить эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для рам (рис. 8.6) и подобрать для них размеры поперечного сечения в виде кольца при условии, что: отношение внутреннего диаметра кольца к наружному составляет 0,7; $[\sigma] = 160$ МПа; $F = 40$ кН; $m = 30$ кН·м; $p = 20$ кН/м; $a = 2$ м; $b = 3$ м; $c = 1$ м.

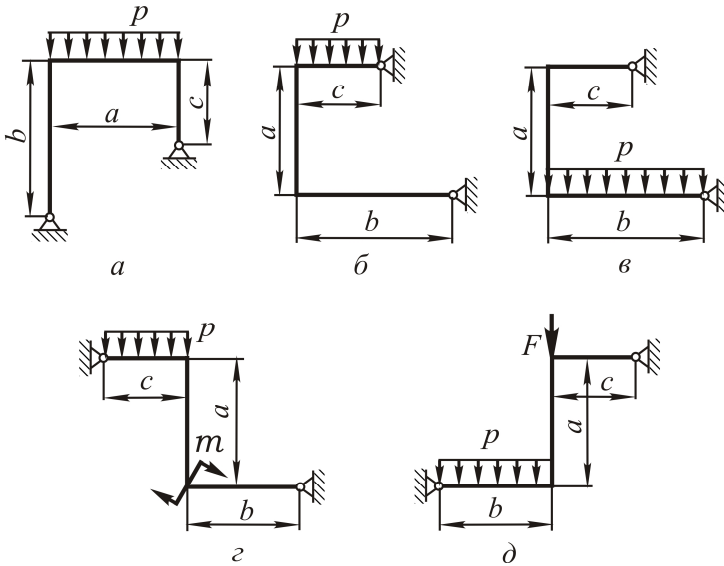


Рис. 8.6

При этом жесткость поперечных сечений элементов рамы постоянная и одинаковая.

9. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Теоретические сведения

Под *устойчивостью* понимается способность упругой системы сохранять под нагрузкой свою первоначальную форму равновесия. Если система этой способностью не обладает, то она называется *неустойчивой*, а ее состояние является неустойчивым.

Наименьшая сжимающая сила, при которой прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется критической силой и обозначается F_k .

Пока сжимающая стержень сила меньше критической, прямолинейная форма будет являться устойчивой формой равновесия, то есть если приложить поперечную силу и создать небольшой прогиб, то после снятия поперечной силы стержень снова вернется в первоначальное положение. Когда сжимающая сила превысит критическую, прямолинейная форма станет неустойчивой и приложение малой поперечной силы вызовет прогиб, который не исчезнет после удаления поперечной силы.

Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня под действием осевой сжимающей силы называется продольным изгибом.

Напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня при $F = F_k$, называются критическими, обозначаются σ_k и являются опасными напряжениями.

Надежная работа сжатого стержня будет обеспечена, если выполняются условия:

- прочности
$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma_c]; \quad (9.1)$$

- устойчивости
$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{брутто}}} \leq [\sigma_y], \quad (9.2)$$

где $A_{\text{нетто}}$, $A_{\text{брутто}}$ – площадь поперечного сечения стержня с учетом и без учета местных ослаблений соответственно;

$[\sigma_c]$ – допускаемое напряжение на сжатие для материала стержня;
 $[\sigma_y]$ – допускаемое напряжение на устойчивость, равное
 $[\sigma_y] = \frac{\sigma_k}{[n_y]}$, где $[n_y]$ – нормативный коэффициент безопасности по
 устойчивости.

Коэффициентом безопасности по устойчивости называется величина, равная отношению критической силы к приложенной силе:

$$n_y = \frac{F_k}{F} = \frac{\sigma_k}{\sigma}. \quad (9.3)$$

Коэффициент безопасности по устойчивости всегда принимается несколько больше коэффициента безопасности на прочность. Нормативный коэффициент безопасности по устойчивости $[n_y]$ принимают для сталей в пределах 1,8–3,0, для чугуна – 5,0–5,5, для дерева – 2,8–3,2.

Впервые задачу по определению критической силы стержня сжимаемого осевой силой решил Леонард Эйлер в середине XVIII века. Формула (9.4) называется формулой Эйлера для определения критической силы.

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (9.4)$$

где l – длина стержня;

μ – коэффициент приведения длины, величина которого зависит от способов закрепления и нагружения стержня.

Коэффициент приведения длины показывает, во сколько раз необходимо изменить длину шарнирно закрепленного и сжатого центральными силами стержня по концам, чтобы его критическая сила была равна критической силе стержня длиной l при заданном способе закрепления и нагружения. Для наиболее часто встречающихся на практике случаев закрепления и нагружения стержня коэффициент μ имеет следующие значения, представленные на рис. 9.1.

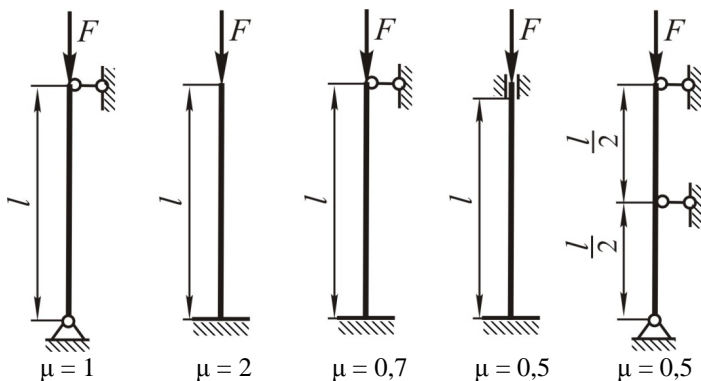


Рис. 9.1. Значения коэффициента приведения длины стержня

Критические напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня при $F = F_k$, определяются по формуле

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (9.5)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня;

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} \text{ – гибкость стержня;}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \text{ – минимальный радиус инерции сечения.}$$

Формула Эйлера применима для стержней, у которых гибкость равна или превышает предельную гибкость ($\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$), которая зависит только от физико-механических свойств материала и определяется по формуле

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{п}}}}, \quad (9.6)$$

где $\sigma_{\text{п}}$ – предел пропорциональности материала стержня.

Если $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ Ф. С. Ясинским была предложена двучленная формула для вычисления критических напряжений за пределом пропорциональности, которая носит его имя:

$$\sigma_{\text{к}} = a - b\lambda; \quad (9.7)$$

для чугунного литья формула Ясинского имеет параболический вид:

$$\sigma_{\text{к}} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (9.8)$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты, зависящие от свойств материала, имеющие размерность напряжения; их значения приводятся в справочниках.

Формула Ясинского применяется при гибкости стержня в пределах $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$, где λ_0 – значение гибкости, при котором критическое напряжение у пластичных материалов равно пределу текучести, у хрупких – пределу прочности при сжатии.

Условие устойчивости сжатых стержней будет следующим:

$$\sigma = \frac{F_{\text{к}}}{A_{\text{брутто}}} \leq \varphi[\sigma_{\text{с}}] = [\sigma_{\text{y}}], \quad (9.9)$$

где φ – коэффициент снижения допускаемого напряжения или коэффициент продольного изгиба.

Коэффициент φ изменяется в пределах от 0 до 1 и зависит от гибкости и материала стержня. Его значения приводятся в справочниках, обычно в виде таблиц.

С использованием условия устойчивости сжатых стержней выполняются три вида инженерных расчетов:

1. Проверочный расчет. Исходными данными для этого расчета являются схема нагружения и величина силы F , форма и размеры поперечного сечения стержня, материал стержня и допускаемое напряжение $[\sigma_{\text{с}}]$, длина стержня и схема его закрепления. Проверочный

расчет выполняется в следующем порядке: определяются $A_{\text{брутто}}$, I_{min} , i_{min} , гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}}$, по справочным таблицам принимается

коэффициент продольного изгиба ϕ , в условие устойчивости подставляются необходимые величины, и при его выполнении делается вывод, что устойчивость сжатого стержня обеспечена (допускается перегрузка до 5 %).

2. Конструкторский или проектный расчет. В результате данного расчета устанавливаются размеры поперечного сечения стержня. Исходные данные: схема нагружения и величина силы F , форма поперечного сечения стержня, длина стержня и схема его закрепления, материал стержня и допускаемое напряжение $[\sigma_c]$. Расчет выполняется методом последовательных приближений в следующем порядке: принимается коэффициент продольного изгиба $\phi_1 = 0,5$, из условия устойчивости определяется $A_{\text{брутто}}$, размеры поперечного сечения стержня, I_{min} , i_{min} , гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}}$, по справочным таблицам

принимается коэффициент продольного изгиба ϕ_1^* . Если ϕ_1 и ϕ_1^* отличаются более чем на 5 %, значит в такой же мере будет отличаться и действительное напряжение σ от допускаемого напряжения на устойчивость $[\sigma_y] = \phi[\sigma_c]$, и тогда расчет следует

повторить, приняв $\phi_2 = \frac{\phi_1 + \phi_1^*}{2}$. Обычно на практике бывает доста-

точно трех попыток.

3. Расчет грузоподъемности или несущей способности. В результате данного расчета для заданного стержня определяется допускаемая сжимающая сила. Исходными данными для расчета являются схема нагружения, форма и размеры поперечного сечения стержня, материал стержня и допускаемое напряжение $[\sigma_c]$, длина стержня и схема его закрепления. Расчет выполняется в следующем порядке:

определяются $A_{\text{брутто}}$, I_{min} , i_{min} , гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}}$, по справоч-

ным таблицам принимается коэффициент продольного изгиба ϕ ,

а затем из условия устойчивости находится допускаемая сжимающая сила:

$$[F] = A_{\text{брутто}} \varphi[\sigma_c].$$

Пример 9.1. Произвести проверочный расчет и определить коэффициент безопасности по устойчивости для стержня (рис. 9.2). Поперечное сечение трубчатое: $d_{\text{н}} = 50$ мм, $d_{\text{в}} = 40$ мм. Материал стержня сталь Ст3: $\sigma_{\text{п}} = 200$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma_c] = 160$ МПа.

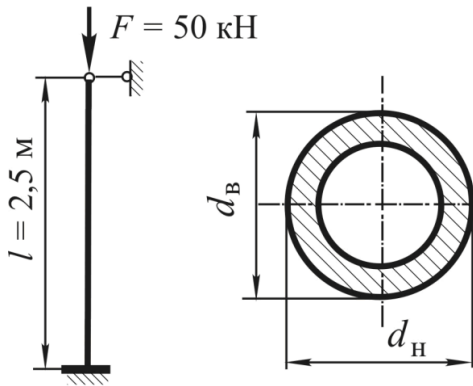


Рис. 9.2. Схема нагружения и форма поперечного сечения стержня

Решение. Используя условие устойчивости, производим проверочный расчет:

$$\sigma = \frac{F_{\text{к}}}{A_{\text{брутто}}} \leq \varphi[\sigma_c].$$

Находим площадь поперечного сечения стержня:

$$A_{\text{брутто}} = \frac{\pi d_{\text{н}}^2}{4} (1 - c^2),$$

где $c = \frac{d_{\text{н}}}{d_{\text{в}}} = \frac{40}{50} = 0,8$.

$$A_{\text{брутто}} = \frac{3,14 \cdot 50^2}{4} (1 - 0,8^2) = 707 \text{ мм}^2.$$

Радиус инерции сечения равен

$$\begin{aligned} i_{\min} = i_{\max} &= \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{\text{брутто}}}} = \sqrt{\frac{\pi d_H^4 (1 - c^4)}{64} \cdot \frac{4}{\pi d_H^2 (1 - c^2)}} = \\ &= \frac{d_H}{4} \sqrt{1 + c^2} = \frac{50}{4} \sqrt{1 + 0,8^2} = 16 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Находим гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2500}{16} = 109.$$

По материалу и гибкости стержня, используя справочные данные, методом интерполяции устанавливаем величину коэффициента продольного изгиба:

$$\lambda = 100; \quad \varphi = 0,60;$$

$$\lambda = 110; \quad \varphi = 0,52;$$

$$\varphi = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{110 - 100} (109 - 100) = 0,528.$$

Находим допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] = 0,528 \cdot 160 = 84,5 \text{ МПа}.$$

Действительное напряжение в стержне равно

$$\sigma = \frac{F_k}{A_{\text{брутто}}} = \frac{50000}{707} = 70,7 \text{ МПа}.$$

Сопоставляя действительное и допускаемое напряжение на устойчивость ($\sigma = 70,7 \text{ МПа} < [\sigma_y] = 84,5 \text{ МПа}$), делаем вывод о том, что устойчивость стержня обеспечена.

Коэффициент безопасности по устойчивости находим из соотношения

$$n_y = \frac{F_k}{F}.$$

Чтобы установить формулу для нахождения критической силы, определим предельную гибкость:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{н}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100.$$

Сопоставим действительную и предельную гибкость стержня:

$$\lambda = 109 > \lambda_{\text{пред}} = 100.$$

Следовательно, критическую силу сжатого стержня определяем по формуле Эйлера:

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{\text{min}}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 50^4 (1 - 0,8^4)}{(0,7 \cdot 2500)^2} = 116\,570 \text{ Н}.$$

Коэффициент безопасности по устойчивости для заданного стержня будет равен

$$n_y = \frac{116\,570}{50\,000} = 2,33.$$

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Определить наименьшую гибкость стержня, при которой для вычисления критической силы еще применима формула Эйлера, если стержень выполнен:

а) из стали с пределом пропорциональности $\sigma_{\text{п}} = 220$ МПа и модулем упругости $E = 1,9 \cdot 10^5$ МПа;

б) из никелевой стали с $\sigma_{\text{п}} = 490$ МПа и $E = 2,15 \cdot 10^5$ МПа;

в) из дуралюмина с $\sigma_{\text{п}} = 177$ МПа и $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа;

г) из сосны с $\sigma_{\text{п}} = 16$ МПа и $E = 10^5$ МПа.

Ответ: а) 92,3; б) 65,8; в) 62,5; г) 78,5.

9.2. Используя формулу Эйлера, подобрать для стойки длиной 2,6 м, которая сжимается силой $F = 125$ кН, номер профиля двутавра (ГОСТ 8239–89). Один конец стойки зашпелен, второй оперт шарнирно. Материал – сталь Ст3. Коэффициент безопасности по устойчивости $n_y = 2$.

9.3. Определить величину допускаемого сжимающего усилия и допускаемого напряжения для стойки прямоугольного поперечного сечения 120×200 мм, длиной 6 м (рис. 9.3, показаны две проекции), из дерева с модулем упругости $E = 0,9 \cdot 10^4$ МПа и пределом пропорциональности $\sigma_{\text{п}} = 15$ МПа. Нормативный коэффициент безопасности по устойчивости $[n_y] = 3$.

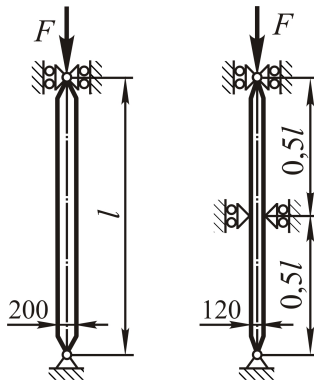


Рис. 9.3

Ответ: 65,8 кН; 2,74 МПа.

9.4. Прямой стальной стержень длиной 1 м, шириной 25 мм и толщиной 2,5 мм изогнут в виде лука с упругим прогибом посредине, равным 50 мм. Его концы связаны тетивой. Определить усилие в тетиве и наибольшее напряжение в стержне.

Ответ: $F = F_k \approx 64,5 \text{ Н}$; $\sigma_{\max} \approx 125 \text{ МПа}$.

9.5. Определить допускаемую величину нагрузки на стойку (рис. 9.4), поперечное сечение которой состоит из двух швеллеров с профилем № 18 (ГОСТ 8240–89, сталь Ст3), составленных вплотную и сваренных. Длина стойки $l = 6 \text{ м}$, нормативный коэффициент безопасности по устойчивости $[n_y] = 3$.

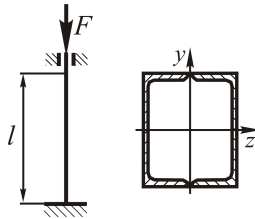


Рис. 9.4

Ответ: 341,3 кН.

9.6. Произвести проверочный расчет и определить коэффициент безопасности по устойчивости для стержня (рис. 9.5) из равнополочного уголка с профилем № 10 и толщиной полки 10 мм (ГОСТ 8509–93, сталь Ст3). Принять: $F = 250 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $[\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$; $\sigma_n = 200 \text{ МПа}$.

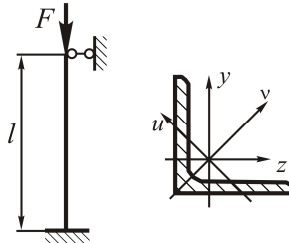


Рис. 9.5

Ответ: $\sigma = 130 \text{ МПа}$; $[\sigma_y] = 128 \text{ МПа}$; $n_y = 1,756$.

9.7. Определить размеры поперечного сечения в виде квадрата для стержня (рис. 9.6), изготовленного из дерева (сосна: $\sigma_{п} = 15$ МПа; $E = 10^4$ МПа), длина $l = 2$ м, шарнирно закрепленного по концам, нагруженного силой $F = 40$ кН. Нормативный коэффициент безопасности по устойчивости $[n_y] = 3$.

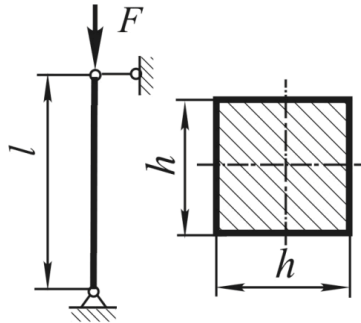


Рис. 9.6

Ответ: $h = 91$ мм.

9.8. Определить размеры поперечного сечения и коэффициент безопасности по устойчивости деревянного стержня (рис. 9.7), если $l = 2,5$ м; $F = 22$ кН; $[\sigma_c] = 8$ МПа.

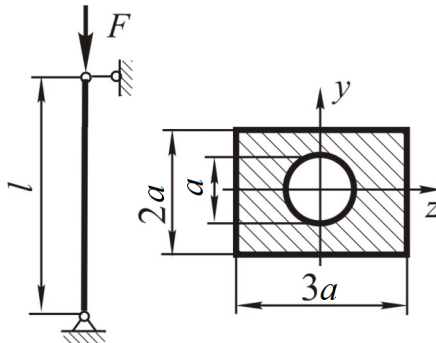


Рис. 9.7

Ответ: $a = 41$ мм; $n_y = 3,2$.

9.9. Подобрать сечение стержня (рис. 9.8) из четырех равнополочных уголков (ГОСТ 8509–93) и определить коэффициент безопасности по устойчивости, если: материал сталь Ст3; $l = 5,6$ м; $F = 60$ кН; $[\sigma_c] = 160$ МПа.

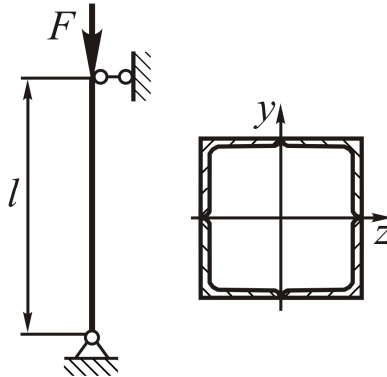


Рис. 9.8

Ответ: $45 \times 45 \times 4$ мм; $n_y = 1,81$.

9.10. Определить диаметр подкоса BC кронштейна (рис. 9.9) из дерева с допускаемым напряжением $[\sigma_c] = 11$ МПа. Оба конца подкоса считать шарнирно опертыми. Равномерно распределенная по балке DK нагрузка $p = 60$ кН/м.

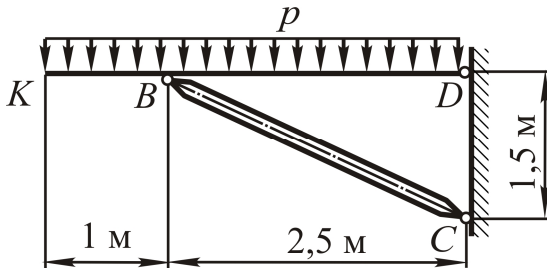


Рис. 9.9

Ответ: 210 мм.

9.11. Стержень в виде двутавра с профилем № 24 (ГОСТ 8239–89, сталь Ст3), длиной 5 м зашпелен обоими концами в абсолютно жесткие стены при температуре 15 °С. При какой температуре стержень начнет терять устойчивость?

Ответ: 87 °С.

9.12. Определить допускаемую величину нагрузки на колонну длиной 6 м (рис. 9.10), поперечное сечение которой состоит из двух швеллеров с профилем № 30 (ГОСТ 8240–89, сталь Ст3), скрепленных планками и расставленных так, что главные центральные моменты инерции поперечного сечения одинаковы. Допускаемое напряжение $[\sigma_c] = 160$ МПа. Определить наименьшую величину расстояния a .

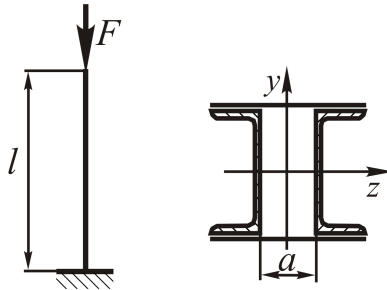


Рис. 9.10

Ответ: 777,6 кН; 182,3 мм.

10. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

Теоретические сведения

Процесс постепенного накопления повреждений в материале при действии переменных напряжений, приводящий к образованию трещин, их развитию и разрушению детали, называется усталостью, а соответствующее разрушение – усталостным разрушением.

Значительное количество эксплуатационных поломок деталей машин в различных отраслях машиностроения связано с усталостным разрушением. Как показывает опыт, при действии переменных напряжений разрушение наступает при напряжениях, значительно меньших, чем пределы прочности и текучести.

Типы циклов напряжений и их параметры. Совокупность всех значений, принимаемых переменными напряжениями за один период их изменения, называется циклом напряжений, а напряжения – циклическими. Цикл напряжений в общем случае характеризуется следующими параметрами: максимальным σ_{\max} и минимальным σ_{\min} напряжениями, за которые принимаются наибольшее и наименьшее по алгебраической величине напряжения цикла; средним напряжением σ_m и амплитудой σ_a цикла; коэффициентом асимметрии r цикла (отношение минимального напряжения σ_{\min} к максимальному σ_{\max} , взятое с учетом знаков напряжений).

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad (10.1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}; \quad (10.2)$$

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (10.3)$$

Коэффициент асимметрии r изменяется от $-\infty < r < +\infty$. Для постоянного напряжения $r = 1$. Циклы с одинаковыми коэффициентами асимметрии называются подобными.

Различают циклы напряжений симметричные и асимметричные. Если максимальное и минимальное напряжения цикла равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку: $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, цикл называется симметричным. Если максимальное и минимальное напряжения по абсолютной величине различны, циклы называются асимметричными. Асимметричные циклы бывают знакопеременными и знакопостоянными. Среди асимметричных циклов выделяют отнулевые или пульсирующие циклы, для которых характерно равенство нулю максимального или минимального напряжения цикла.

Предел выносливости. Свойство материала воспринимать многократное действие переменных напряжений, то есть способность материала противостоять усталостному разрушению, называется выносливостью. Расчет элементов конструкции испытывающих действие переменных напряжений на прочность называется расчетом на выносливость, или расчетом на усталость, или расчетом на сопротивление усталости. Под сопротивлением усталости элементов конструкций понимается их способность не разрушаться под действием переменных напряжений в течение заданного числа циклов.

Испытания на усталость показывают, что для каждого материала существует такое максимальное напряжение, при котором он выдерживает, не разрушаясь, заданное число циклов. Число циклов, до которого ведется испытание на усталость, называется базой испытания и обозначается N_0 . Для черных металлов база испытаний принимается $N_0 = 10^7$ циклов. Считается, что если образец из черного металла не разрушился до базового числа циклов, то он не разрушится и при действии неограниченного числа циклов на том же уровне напряжений.

Наибольшая величина максимального напряжения цикла, при котором еще не происходит усталостного разрушения до базы испытания N_0 , называется пределом выносливости. Предел выносливости обозначается через σ_r . Так, σ_{-1} – предел выносливости при симметричном цикле, σ_0 – предел выносливости при пульсирующем цикле и т. д.

Для цветных металлов и их сплавов предела выносливости не существует, то есть такие материалы могут разрушиться при достаточно большом числе циклов даже при сравнительно малых напряжениях. Для этих материалов пользуются понятием условного

предела выносливости, за который принимают максимальное напряжение, при котором стандартный образец выдерживает, не разрушаясь $N = 5 \cdot 10^8$ циклов.

Предел выносливости не является, подобно модулю упругости, коэффициенту Пуассона, механической характеристикой материала. Он представляет собой характеристику сопротивления усталости образца специальной формы и качества обработки, изготовленного из данного материала. Поэтому при расчете на сопротивление усталости деталей машин необходимо дополнительно учитывать влияние ряда факторов.

Факторы, влияющие на сопротивление усталости. Многочисленные исследования методами теории упругости и экспериментальной механики показывают, что в местах резких изменений в форме детали (переход от одного диаметра к другому, выточка, резьба, канавка для смазки, шпоночный паз, поперечное отверстие и т. п.), а также в зонах контакта возникают повышенные напряжения, то есть имеет место концентрация напряжений.

В расчетах на сопротивление усталости концентрация напряжений учитывается эффективным коэффициентом концентрации для циклов нормальных напряжений:

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}} \quad (10.4)$$

и циклов касательных напряжений

$$K_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}}, \quad (10.5)$$

где σ_{-1} , τ_{-1} – предел выносливости при симметричном цикле для стандартного образца, соответственно для циклов нормальных и касательных напряжений;

σ_{-1K} , τ_{-1K} – то же самое, но с концентратором напряжений.

На практике величины K_{σ} и K_{τ} принимаются из справочных таблиц или графиков, составленных для соответствующего концентратора напряжений.

Снижение сопротивления усталости с увеличением поперечных размеров образца получило название масштабного эффекта. Объясняется это статистической теорией разрушения, согласно которой с увеличением поперечных размеров образца возрастает вероятность попадания в зону концентрации напряжений различного рода дефектов (несовершенство кристаллической решетки, наличие включений, пористости и т. п.).

В расчетах на сопротивление усталости размеры детали учитываются масштабным коэффициентом:

– для циклов нормальных напряжений

$$\varepsilon_{\text{м}\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}; \quad (10.6)$$

– для циклов касательных напряжений

$$\varepsilon_{\text{м}\tau} = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}}, \quad (10.7)$$

где σ_{-1d} , τ_{-1d} – предел выносливости при симметричном цикле для стандартного образца с заданными поперечными размерами для циклов нормальных и касательных напряжений соответственно.

На практике величины $\varepsilon_{\text{м}\sigma}$ и $\varepsilon_{\text{м}\tau}$ принимаются из справочных таблиц или графиков в зависимости от материала и поперечных размеров детали.

На сопротивление усталости существенное влияние оказывает состояние поверхности детали или образца, которое в расчетах учитывают коэффициентом качества поверхности:

для циклов нормальных напряжений

$$\varepsilon_{\text{н}\sigma} = \frac{\sigma_{-1\text{н}}}{\sigma_{-1}} \quad (10.8)$$

и циклов касательных напряжений

$$\varepsilon_{\text{пт}} = \frac{\tau_{-1\text{п}}}{\tau_{-1}}, \quad (10.9)$$

где $\sigma_{-1\text{п}}$, $\tau_{-1\text{п}}$ – предел выносливости при симметричном цикле для стандартного образца с заданным качеством обработки поверхности для циклов нормальных и касательных напряжений соответственно.

На практике величины $\varepsilon_{\text{пс}}$ и $\varepsilon_{\text{пт}}$ принимаются из справочных таблиц или графиков в зависимости от материала и вида механической обработки или шероховатости поверхности детали.

Многие детали машин в условиях эксплуатации подвергаются атмосферной коррозии, изменению температуры, действию агрессивных сред. В расчетах на сопротивление усталости влияние коррозии учитывается коэффициентом коррозии $\beta_{\text{кор}}$. В расчетах влияние коэффициента коррозии учитывается его использованием вместо коэффициента качества поверхности $\varepsilon_{\text{пс}}$ ($\varepsilon_{\text{пт}}$). Значения $\beta_{\text{кор}}$ можно принять по справочным данным.

Технологические методы поверхностного упрочнения являются эффективным средством повышения сопротивления усталости деталей. Эффект упрочнения (наклеп поверхности обкаткой роликами, обдувкой дробью, чеканкой, нагрев поверхности ТВЧ и последующая закалка, цементация, азотирование, цианирование и т. п.) учитывается коэффициентом поверхностного упрочнения:

$$\beta_{\text{упр}} = \frac{\sigma_{-1\text{дупр}}}{\sigma_{-1\text{д}}}, \quad (10.10)$$

где $\sigma_{-1\text{дупр}}$ и $\sigma_{-1\text{д}}$ – предел выносливости материала детали после и до упрочнения соответственно.

На практике $\beta_{\text{упр}}$ принимается из справочных таблиц в зависимости от материала и технологического метода поверхностного упрочнения.

Влияние выше рассмотренных факторов при симметричном цикле можно заменить общим коэффициентом снижения предела выносливости при симметричном цикле нормальных напряжений:

$$K_{\sigma_d} = \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{m\sigma} \varepsilon_{n\sigma}} \frac{1}{\beta_{уупр}} \quad (10.11)$$

и касательных напряжений:

$$K_{\tau_d} = \frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{m\tau} \varepsilon_{n\tau}} \frac{1}{\beta_{уупр}}. \quad (10.12)$$

В последнее время на основе обобщения экспериментальных данных коэффициенты K_{σ_d} и K_{τ_d} рекомендуется определять по формулам

$$K_{\sigma_d} = \left(\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{m\sigma}} + \frac{1}{\varepsilon_{n\sigma}} - 1 \right) \frac{1}{\beta_{уупр}}. \quad (10.13)$$

$$K_{\tau_d} = \left(\frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{m\tau}} + \frac{1}{\varepsilon_{n\tau}} - 1 \right) \frac{1}{\beta_{уупр}}. \quad (10.14)$$

Расчеты на сопротивление усталости. Расчет элементов конструкций на выносливость, как правило, носит проверочный характер, так как ряд используемых коэффициентов зависят от размеров детали и заранее не известны. Прочность детали обеспечена, если коэффициент безопасности n не меньше нормативного коэффициента безопасности $[n]$.

Если элемент конструкции испытывает действие переменных напряжений и изготовлен из пластичного материала, то фактический коэффициент безопасности n выбирается меньшим из коэффициентов безопасности по усталостному разрушению n_r и по текучести материала n_r .

Коэффициенты безопасности по усталостному разрушению определяются по схематизированной диаграмме усталостной прочности С. В. Серенсена и Р. С. Кинашошвили, которые при линейном напряженном состоянии $n_{r\sigma}$ и при чистом сдвиге $n_{r\tau}$ равны

$$n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a K_{\sigma d} + \Psi_\sigma \sigma_m}; \quad (10.15)$$

$$n_{r\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a K_{\tau d} + \Psi_\tau \tau_m}, \quad (10.16)$$

где Ψ_σ и Ψ_τ – коэффициент влияния асимметрии, соответственно, для циклов нормальных и касательных напряжений.

На практике значения Ψ_σ и Ψ_τ принимаются по справочным таблицам или графикам в зависимости от предела прочности и вида нагружения.

Для пластичных материалов возникает необходимость определения коэффициента безопасности по текучести, который определяется при линейном напряженном состоянии n_{σ_T} и при чистом сдвиге n_{τ_T} по формулам

$$n_{\sigma_T} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_m + \sigma_a}; \quad (10.17)$$

$$n_{\tau_T} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_T}{\tau_m + \tau_a}, \quad (10.18)$$

где σ_T , τ_T – предел текучести материала при растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно.

В качестве фактического коэффициента безопасности n принимается меньшее значение из найденных по формулам: для линейного напряженного состояния – (10.15) и (10.17); для чистого сдвига – (10.16) и (10.18).

При плоском напряженном состоянии коэффициент безопасности по усталостному разрушению определяется из общепринятой эмпирической формулы Гафа и Полларда:

$$n_r = \frac{n_{r\sigma} \cdot n_{r\tau}}{\sqrt{n_{r\sigma}^2 + n_{r\tau}^2}}. \quad (10.19)$$

Коэффициенты $n_{r\sigma}$, $n_{r\tau}$ определяются по формулам (10.15) и (10.16) соответственно.

Коэффициент безопасности по текучести материала при плоском напряженном состоянии определяется по формуле

$$n_T = \frac{n_{T\sigma} \cdot n_{T\tau}}{\sqrt{n_{T\sigma}^2 + n_{T\tau}^2}}. \quad (10.20)$$

Коэффициенты $n_{\sigma T}$, $n_{\tau T}$ определяются по формулам (10.17) и (10.18) соответственно.

В качестве фактического коэффициента безопасности n при плоском напряженном состоянии принимается меньшее значение из найденных по формулам (10.19) и (10.20).

Пример 10.1. Ступенчатый вал с диаметрами $d = 50$ мм и $D = 60$ мм имеет в месте перехода галтель радиусом $r = 4$ мм (рис. 10.1). Вал подвергается переменному изгибу с кручением. Нормальные напряжения при изгибе изменяются от $\sigma_{\min} = -60$ МПа до $\sigma_{\max} = 60$ МПа, касательные напряжения при кручении изменяются от $\tau_{\min} = 0$ до $\tau_{\max} = 50$ МПа. Материал вала – сталь 45, для которой $\sigma_B = 600$ МПа, $\sigma_T = 420$ МПа, $\sigma_{-1} = 250$ МПа, $\tau_T = 220$ МПа, $\tau_{-1} = 160$ МПа. Качество поверхности вала соответствует обработке резцом. Определить величину коэффициента безопасности.

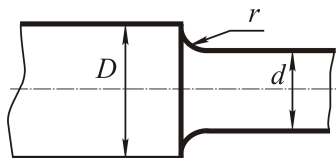


Рис. 10.1

Решение. Материал вала в опасных точках испытывает плоское напряженное состояние и действие переменных напряжений. Тогда коэффициент безопасности по усталостному разрушению определяется по формуле

$$n_r = \frac{n_{r\sigma} n_{r\tau}}{\sqrt{n_{r\sigma}^2 + n_{r\tau}^2}}.$$

Коэффициент безопасности по усталостному разрушению для циклов нормальных напряжений определяется по формуле

$$n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a K_{\sigma d} + \psi_{\sigma} \sigma_m}.$$

Находим амплитудное и среднее напряжения цикла нормальных напряжений:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{60 - (-60)}{2} = 60 \text{ МПа};$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{60 + (-60)}{2} = 0.$$

Для определения общего коэффициента снижения предела выносливости при симметричном цикле нормальных напряжений $K_{\sigma d}$ устанавливаем по справочнику значения эффективного коэффициента концентрации K_{σ} , масштабного коэффициента $\epsilon_{m\sigma}$, коэффициента качества поверхности $\epsilon_{п\sigma}$, коэффициента упрочнения поверхности детали $\beta_{упр}$:

$$K_{\sigma} = 1,5 \quad \text{при} \quad D/d = 1,2 \quad \text{и} \quad r/d = 0,08 \quad [8, \text{табл. 4.4}];$$

$$\epsilon_{m\sigma} = 0,78 \quad [8, \text{табл. 4.9}];$$

$$\epsilon_{п\sigma} = 0,93 \quad [8, \text{рис. 4.1}];$$

$$\beta_{упр} = 1, \text{ вал не подвергался поверхностному упрочнению.}$$

$$K_{\sigma_d} = \left(\frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_m} + \frac{1}{\varepsilon_n} - 1 \right) \frac{1}{\beta_{\text{упр}}} = \left(\frac{1,5}{0,78} + \frac{1}{0,93} - 1 \right) \frac{1}{1} = 2.$$

Тогда

$$n_{r,\sigma} = \frac{250}{60 \cdot 2} = 2,13.$$

Коэффициент безопасности по усталостному разрушению для циклов касательных напряжений определяется по формуле

$$n_{r\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a K_{\tau_d} + \psi_{\tau} \tau_m}.$$

Находим амплитудное и среднее напряжения цикла касательных напряжений:

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{50 - 0}{2} = 25 \text{ МПа};$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{50 + 0}{2} = 25 \text{ МПа}.$$

Для определения общего коэффициента снижения предела выносливости при симметричном цикле касательных напряжений K_{τ_d} устанавливаем по справочнику значения эффективного коэффициента концентрации K_{τ} , масштабного коэффициента $\varepsilon_{m\tau}$, коэффициента качества поверхности $\varepsilon_{n\tau}$, коэффициента упрочнения поверхности детали $\beta_{\text{упр}}$:

$$K_{\tau} = 1,23 \quad \text{при } D/d = 1,2 \text{ и } r/d = 0,08 \quad [8, \text{ табл. 4.4}];$$

$$\varepsilon_{m\tau} = 0,78 \quad [8, \text{ табл. 4.9}];$$

$$\varepsilon_{n\tau} = 0,93 \quad [8, \text{ рис. 4.1}];$$

$$\beta_{\text{упр}} = 1, \text{ вал не подвергался поверхностному упрочнению.}$$

$$K_{\tau d} = \left(\frac{K_{\tau}}{\epsilon_M} + \frac{1}{\epsilon_{II}} - 1 \right) \frac{1}{\beta_{\text{упр}}} = \left(\frac{1,23}{0,78} + \frac{1}{0,93} - 1 \right) \frac{1}{1} = 1,65.$$

Принимаем значение коэффициента чувствительности материала к асимметрии цикла нормальных напряжений $\psi_{\tau} = 0,05$ [8, табл. 4.8].

Тогда

$$n_{r\tau} = \frac{160}{25 \cdot 1,65 + 0,05 \cdot 25} = 3,76.$$

Коэффициент безопасности по усталостному разрушению будет равен

$$n_r = \frac{2,13 \cdot 3,76}{\sqrt{2,13^2 + 3,76^2}} = 1,85.$$

Находим коэффициент безопасности по текучести материала для нормальных и касательных напряжений:

$$n_{\sigma T} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{420}{60} = 7;$$

$$n_{\tau T} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{220}{50} = 4,4.$$

Определяем коэффициент безопасности по текучести материала при плоском напряженном состоянии:

$$n_T = \frac{n_{\sigma T} n_{\tau T}}{\sqrt{n_{\sigma T}^2 + n_{\tau T}^2}} = \frac{7 \cdot 4,4}{\sqrt{7^2 + 4,4^2}} = 3,73.$$

Фактический коэффициент безопасности вала принимаем равным $n = 1,85$.

Задачи для самостоятельного решения

10.1. Стержень прямоугольного поперечного сечения с галтелью (рис. 10.2), изготовленный из углеродистой стали 35 с характеристиками $\sigma_b = 550$ МПа, $\sigma_T = 280$ МПа и $\sigma_{-1} = 180$ МПа подвергается действию сжимающей нагрузки, величина которой меняется от $0,15F_{\max}$ до F_{\max} . Качество поверхности стержня соответствует обработке резцом (фрезой) с $Ra 20$. Определить наибольшую допускаемую величину F_{\max} , если коэффициент безопасности $n = 1,8$.

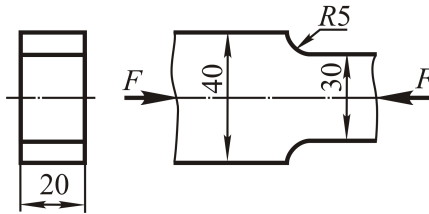


Рис. 10.2

10.2. Цилиндрическая винтовая пружина имеет 10 витков при среднем диаметре витка $D = 18$ мм и диаметре проволоки $d = 4$ мм. Пружина изготовлена из легированной стали с характеристиками: $\sigma_b = 1200$ МПа, $\tau_T = 1000$ МПа, $\tau_{-1} = 350$ МПа. Пружина предварительно сжата на 4 мм; наибольшая амплитуда деформаций пружины во время работы равна ± 3 мм. Проверить прочность пружины при коэффициенте безопасности $[n] = 2$. Качество поверхности проволоки – после проката.

10.3. Проверить прочность ступенчатого торсионного вала круглого поперечного сечения диаметрами $D = 60$ мм и $d = 30$ мм, изготовленного из углеродистой стали с $\sigma_b = 700$ МПа, $\tau_T = 220$ МПа, $\tau_{-1} = 160$ МПа, при коэффициенте безопасности $[n] = 1,6$. Переход от одного диаметра к другому происходит через галтель радиусом $r = 3$ мм. Качество поверхности вала соответствует обработке резцом. В процессе работы крутящий момент в поперечных сечениях вала изменяется от $T_{\max} = 480$ Н·м до $T_{\min} = -240$ Н·м.

10.4. Балка прямоугольного поперечного сечения, ослабленная прорезями (рис. 10.3), в плоскости наибольшей жесткости подвергается действию моментов в виде пары сил, вызывающих изгибающий

момент, изменяющийся от $-0,5M_{\max}$ до M_{\max} . Балка изготовлена из легированной стали с характеристиками: $\sigma_b = 950$ МПа, $\sigma_T = 720$ МПа и $\sigma_{-1} = 400$ МПа. Качество поверхности балки соответствует обработке резцом (фрезой) с $Ra 20$. Определить наибольшую допускаемую величину M_{\max} , если коэффициент безопасности $n = 1,7$.

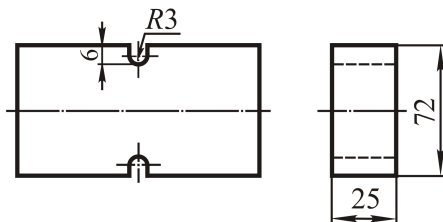


Рис. 10.3

10.5. Вращающийся вал с проточкой (рис. 10.4) испытывает действие постоянного изгибающего момента $M = 50$ Н·м и крутящего момента, изменяющегося от 0 до $T = 60$ Н·м. Принять размеры вала: $D = 30$ мм; $d = 20$ мм; $R = 5$ мм. Материал вала – легированная сталь: $\sigma_b = 700$ МПа; $\sigma_T = 460$ МПа; $\sigma_{-1} = 400$ МПа; $\tau_T = 300$ МПа; $\tau_{-1} = 220$ МПа. Поверхность вала упрочнена – нагрев токами высокой частоты с последующей закалкой. Качество поверхности вала соответствует шлифованию. Определить величину коэффициента безопасности.

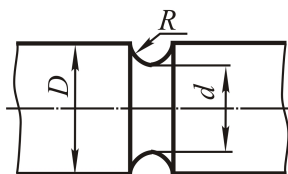


Рис. 10.4

10.6. Вал круглого поперечного сечения диаметром 100 мм, снабженный кольцевой полукруглой выточкой радиусом 8 мм и глубиной 10 мм, изготовлен из стали 12ХНЗА с характеристиками: $\sigma_b = 950$ МПа, $\sigma_T = 700$ МПа, $\sigma_{-1} = 450$ МПа, $\tau_T = 400$ МПа, $\tau_{-1} = 240$ МПа. Качество поверхности вала соответствует обработке

резцом. При вращении вала в поперечном сечении возникает действующий в одной плоскости изгибающий момент $M = 3$ кН·м и крутящий момент, изменяющийся от $0,7T_{\max}$ до T_{\max} . Определить наибольшую допускаемую величину крутящего момента. Коэффициент безопасности $[n] = 1,7$.

10.7. Проверить прочность двутавровой балки № 24 (ГОСТ 8239–89) длиной $l = 3$ м, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $p = 10$ кН/м и переменной силой F , величина которой изменяется от 20 кН до –30 кН (рис. 10.5).

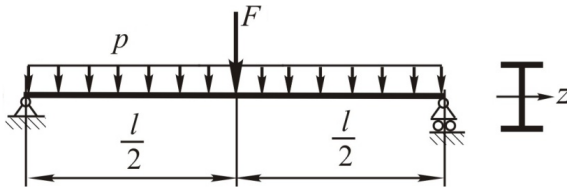


Рис. 10.5

Допускаемый коэффициент безопасности $[n] = 1,4$. Материал – углеродистая сталь ($\sigma_b = 450$ МПа, $\sigma_t = 250$ МПа, $\sigma_{-1} = 200$ МПа). Эффективный коэффициент концентрации в опасном сечении балки принять равным $K_\sigma = 1,2$. Качество поверхности балки – после проката.

11. ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЖЕНИЯ

Теоретические сведения

Динамическим называется такой вид нагружения, при котором приложенные к элементу конструкции внешние нагрузки значительно изменяются за малые промежутки времени. Такие нагрузки, а также вызываемые ими в конструкции напряжения и перемещения называются динамическими. При действии динамической нагрузки движение тела совершается с ускорением или происходит резкое изменение скоростей соприкоснувшихся тел. Так, например, первый случай имеет место при перемещении элемента конструкции с ускорением, второй – при воздействии копра на сваю в момент забивания в грунт, при ударе молота о наковальню и т. д.

Установлено, что практически во всех случаях динамические силы F_d пропорциональны статическим силам F . Поэтому расчет действующих на конструкцию динамических сил, возникающих в конструкции динамических напряжений σ_d и динамических перемещений Δ_d производится с помощью формул и методов, используемых при статическом нагружении, в которые вводится динамический коэффициент K_d .

$$F_d = FK_d; \quad \sigma_d = \sigma_{ст} K_d; \quad \Delta_d = \Delta_{ст} K_d,$$

где $\sigma_{ст}$, $\Delta_{ст}$ – напряжение и перемещение в конструкции при статическом нагружении соответственно.

Условие прочности элемента конструкции при динамическом нагружении имеет вид

$$\sigma_{\max d} = \sigma_{\max ст} K_d \leq [\sigma], \quad (11.1)$$

где $\sigma_{\max ст}$ – наибольшее напряжение в элементе конструкции при статическом нагружении.

Таким образом, результат при расчете на динамическую нагрузку равен результату при статической нагрузке, умноженному на динамический коэффициент.

Нагрузки, вызывающие движение тела с ускорением. Для расчета на прочность движущихся элементов конструкции используют принцип Даламбера, согласно которому всякое движущееся тело (точку) можно рассматривать как находящуюся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на нее внешним силам добавить силы инерции.

Сила инерции $F_{и}$ при прямолинейном равноускоренном движении тела равна произведению массы тела m на ее ускорение a :

$$F_{и} = ma . \quad (11.2)$$

При неравномерном криволинейном движении тела сила инерции представляется в виде двух составляющих:

касательная сила (тангенциальная) инерции $F_{и\tau} = ma_{\tau}$;

нормальная сила (центробежная) инерции $F_{ин} = ma_n$,

где a_{τ} , a_n – тангенциальное и центробежное ускорение соответственно.

Рассмотрим подъем груза весом F , движущегося с постоянным ускорением (рис. 11.1). Определим нормальное напряжение в поперечном сечении каната площадью A . В сечении каната возникает продольная сила N . Приложив, согласно принципу Д'Аламбера, силу инерции $F_{и}$, составим уравнение равновесия в виде алгебраической суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$N_{д} - F - F_{и} = 0. \quad (11.3)$$

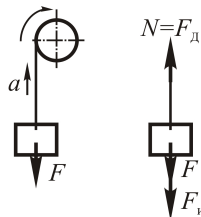


Рис. 11.1

Откуда продольная сила в канате будет равна

$$N = F + F_{\text{и}} = F \left(1 + \frac{a}{g} \right) = F_{\text{д}}, \quad (11.4)$$

где g – ускорение свободного падения;

$F_{\text{д}}$ – динамическая сила.

Выражение в скобках обозначается $K_{\text{д}}$ и называется динамическим коэффициентом.

$$K_{\text{д}} = 1 + \frac{a}{g}.$$

Нормальное напряжение в поперечном сечении каната или динамическое напряжение найдем, разделив N на площадь поперечного сечения каната:

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{N}{A} = \frac{F_{\text{д}}}{A} = \frac{F}{A} K_{\text{д}} = \sigma K_{\text{д}}, \quad (11.5)$$

где σ – статическое напряжение в сечении каната от веса груза.

Таким образом, как динамическая сила, так и динамическое напряжение равны статическим значениям, умноженным на динамический коэффициент.

Ударной называется нагрузка, при которой происходит резкое изменение скоростей соприкоснувшихся тел за очень малый промежуток времени.

При ударе возникают большие ударные нагрузки, чаще всего превосходящие соответствующие статические нагрузки.

Динамический коэффициент при действии ударной нагрузки определяется по формуле

$$K_{\text{д}} = \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{v^2}{g \Delta_{\text{ст}} \left(1 + \eta \frac{Q}{F} \right)}}, \quad (11.6)$$

где α – угол, заключенный между направлением удара и горизонтом;
 v – скорость в момент соприкосновения ударяющего груза с конструкцией;

g – ускорение свободного падения;

η – коэффициент приведения массы конструкции;

Q – сила тяжести конструкции;

F – сила тяжести ударяющего груза.

Динамический коэффициент показывает, во сколько раз перемещение при ударе отличается от перемещения, возникающего при статическом приложении веса ударяющего груза.

По направлению удара можно выделить два частных случая:

1. При $\alpha = \pi / 2$ имеет место вертикальный удар, при котором динамический коэффициент будет определяться следующим образом:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{ст} \left(1 + \eta \frac{Q}{F}\right)}}. \quad (11.7)$$

Когда вес ударяющего груза намного больше веса конструкции $Q \ll F$, отношение $\frac{Q}{F}$ стремится к нулю. Тогда выражение $\left(1 + \eta \frac{Q}{F}\right)$ в формуле (11.7) может быть принято равным единице и динамический коэффициент будет равен

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{ст}}}. \quad (11.8)$$

При таком упрощении неучет массы конструкции идет в запас ее прочности.

Для случая, когда груз падает с высоты h и начальная его скорость равна нулю, динамический коэффициент равен

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cr}}}. \quad (11.9)$$

Причем, если $h = 0$, то $K_d = 2$.

2. При $\alpha = \pi / 2$ имеет место горизонтальный удар, при котором динамический коэффициент будет определяться следующим образом:

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{cr} \left(1 + \eta \frac{Q}{F}\right)}}. \quad (11.10)$$

Если вес ударяемой конструкции намного меньше веса ударяющего груза $Q \ll F$, то динамический коэффициент будет равен

$$K_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{cr}}}. \quad (11.11)$$

При постоянном поперечном сечении элемента коэффициент приведения массы определяется по формуле

$$\eta = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{\Delta_{xcr}}{\Delta_{cr}} \right)^2 dx, \quad (11.12)$$

где l – длина элемента конструкции.

Коэффициент приведения массы для некоторых распространенных ударов: стержень, жестко закрепленный одним концом, испытывает продольный удар в свободном торцевом сечении ($\eta = 1 / 3$); балка, шарнирно закрепленная по концам, испытывает изгибающий удар посередине пролета ($\eta = 17 / 35$); масса конструкции сосредоточена в месте удара ($\eta = 1$).

Пример 11.1. Двутавровая балка № 24 ($W_z = 289 \text{ см}^3$; $I_z = 3460 \text{ см}^4$; $q = 273 \text{ Н/м}$) длиной $l = 2 \text{ м}$ шарнирно закреплена по концам.

Определить наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб, возникающие в балке в результате удара при падении на нее посередине пролета груза с силой тяжести $F = 5 \text{ кН}$ с высоты $h = 18 \text{ мм}$. Задачу решить для следующих условий:

- 1) опоры балки абсолютно жесткие (рис. 11.2, а);
- 2) правый конец балки опирается на пружину, жесткость которой равна $c = 0,5 \text{ кН/мм}$ (рис. 11.3, а).

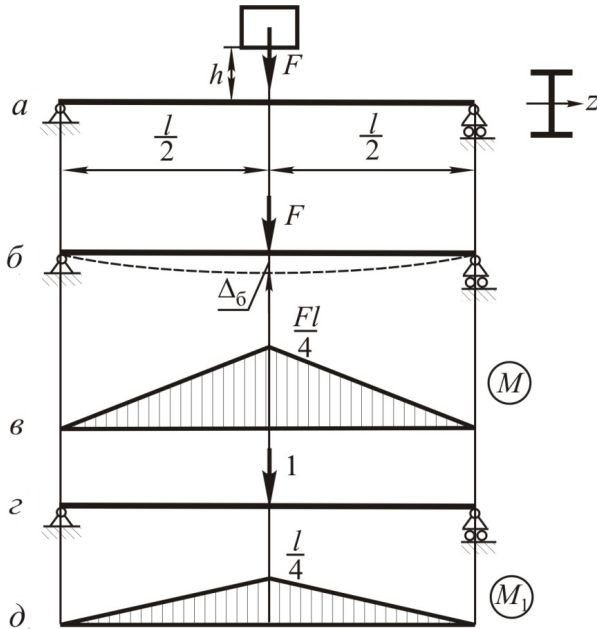


Рис. 11.2. Расчетные схемы балки с абсолютно жесткими опорами и эпюры изгибающих моментов

Решение. Наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб в балке, возникающие при ударе, определим, соответственно, по формулам

$$\sigma_{\max \text{ д}} = \sigma_{\max \text{ ст}} K_{\text{д}} ;$$

$$\Delta_{\max \text{ д}} = \Delta_{\max \text{ ст}} K_{\text{д}} .$$

Балка испытывает изгибающий удар. Наибольшие нормальные напряжения, возникающие в балке при статическом нагружении грузом F (рис. 11.2, б), определяются по формуле

$$\sigma_{\max \text{ ст}} = \frac{M_{\max}}{W_z}.$$

Для нахождения максимального изгибающего момента строим эпюру M (рис. 11.2, в), из которой принимаем M_{\max} . Тогда

$$\sigma_{\max \text{ ст}} = \frac{F l}{4 W_z} = \frac{5000 \cdot 200}{4 \cdot 289} = 865 \text{ Н/см}^2 = 8,65 \text{ МПа}.$$

Сила тяжести балки почти на порядок меньше силы тяжести груза F . Динамический коэффициент определим по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}.$$

Перемещение в месте удара по направлению удара, вызванное статическим действием силы тяжести ударяющего груза, приложенной в направлении удара $\Delta_{\text{ст}}$, находим по способу Верещагина. Для этого к балке в месте удара прикладываем вертикально единичную безразмерную силу (рис. 11.3, з), строим от нее эпюру изгибающих моментов M_1 (рис. 11.2, д). В результате перемножения эпюр M и M_1 получим прогиб балки $\Delta_{\text{б}}$:

$$\Delta_{\text{б}} = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{F l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \right) \cdot 2 = \frac{F l^3}{48 EI_z} = \frac{5000 \cdot 2000^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 0,12 \text{ мм}.$$

1. Если опоры балки абсолютно жесткие, то $\Delta_{\text{ст}} = \Delta_{\text{б}}$.

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 18}{0,12}} = 18,35.$$

Возникающие в результате удара наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб в балке с абсолютно жесткими опорами будут равны

$$\sigma_{\max \text{ д}} = 8,65 \cdot 18,35 = 158,7 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{\max \text{ д}} = 0,12 \cdot 18,35 = 2,2 \text{ мм.}$$

2. Если один конец балки находится на жесткой опоре, а другой – опирается на пружину (рис. 11.3, а), то перемещение $\Delta_{\text{ст}}$ будет определяться прогибом балки $\Delta_{\text{б}}$ и перемещением, вызванным осадкой пружины $\Delta_{\text{пр}}$ (рис. 11.3, б).

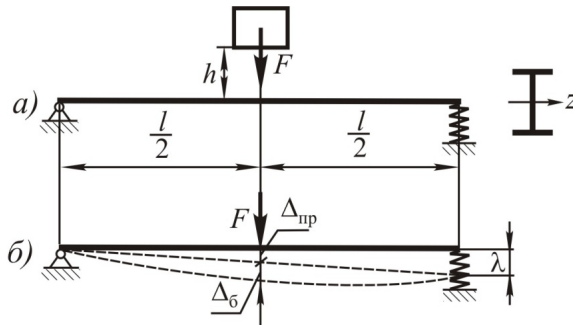


Рис. 11.3. Расчетные схемы балки, правый конец которой опирается на пружину

$$\Delta_{\text{ст}} = \Delta_{\text{б}} + \Delta_{\text{пр}} = \Delta_{\text{б}} + \lambda \frac{1}{2} = \Delta_{\text{б}} + \frac{F}{2c} \cdot \frac{1}{2} = 0,12 + \frac{5}{2 \cdot 0,5} \cdot \frac{1}{2} = 2,62 \text{ мм.}$$

Тогда динамический коэффициент будет равен:

$$K_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 18}{2,62}} = 4,84.$$

Возникающие в результате удара наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб в балке будут равны

$$\sigma_{\max \text{ д}} = 8,65 \cdot 4,84 = 41,87 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{\max \text{ д}} = 0,12 \cdot 4,84 = 0,58 \text{ мм.}$$

Задачи для самостоятельного решения

11.1. Груз весом 30 кН поднимается равноускоренно с помощью стального троса, причем за первые две секунды он поднимается на высоту 4 м. Площадь поперечного сечения троса 500 мм^2 , длина его 90 м, объемный вес материала 72 кН/м^3 . Определить наибольшее нормальное напряжение в тросе без учета и с учетом его собственного веса.

Ответ: 72,2 МПа; 80 МПа.

11.2. Стальной тонкостенный цилиндр диаметром 200 мм вращается вокруг своей оси с частотой 5000 мин^{-1} . Определить нормальные напряжения в меридиональных сечениях цилиндра. Объемный вес стали 78 кН/м^3 .

Ответ: 21,8 МПа.

11.3. Чугунный стержень круглого поперечного сечения, несущий на свободном конце груз F (рис. 11.4), вращается вокруг горизонтальной оси $O-O$ с постоянной угловой скоростью 120 с^{-1} . Определить величину груза F , при которой произойдет разрушение стержня, если предел прочности чугуна при растяжении равен 180 МПа, а объемный вес его 72 кН/м^3 .

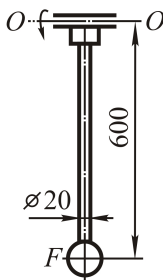


Рис. 11.4

Ответ: 50 Н.

11.4. Чугунный стержень круглого поперечного сечения (рис. 11.5) вращается вокруг вертикальной оси $O-O$ с постоянной угловой скоростью. Определить для этого стержня предельное число оборотов в минуту, если объемный вес чугуна 74 кН/м^3 , а допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma_p] = 40 \text{ МПа}$. Определить удлинение стержня при 1000 мин^{-1} , если модуль упругости материала $E = 1,6 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

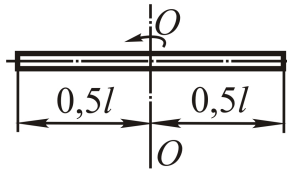


Рис. 11.5

Ответ: 1090 мин^{-1} ; $0,251 \text{ мм}$.

11.5. Противовес подъемника (рис. 11.6) имеет вес 42 кН . При торможении поднимающегося подъемника опускающийся противовес испытывает ускорение, равное $1,5 \text{ м/с}^2$. Определить диаметры болтов B и C противовеса, если для материала болтов $[\sigma] = 32 \text{ МПа}$ и $[\tau] = 20 \text{ МПа}$. Число болтов: B – два, C – один.

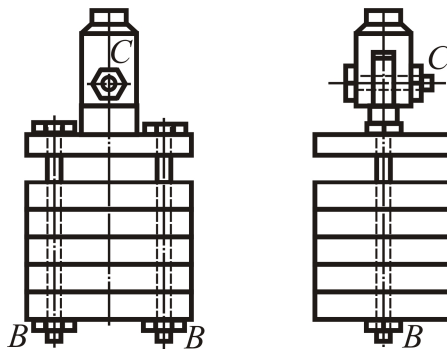


Рис. 11.6

Ответ: $d_B = 31 \text{ мм}$; $d_C = 39,3 \text{ мм}$.

11.6. На балке с длиной пролета $l = 3$ м, состоящей из двух швеллеров № 20 (ГОСТ 8240–89), установлена лебедка весом 8 кН, поднимающая груз $F = 30$ кН с помощью стального каната (рис. 11.7). Площадь поперечного сечения каната $A = 5$ мм². Подъем происходит с постоянным ускорением 4 м/с². Учитывая вес груза, лебедки и собственный вес балок, определить величину наибольшего нормального напряжения в балке и в канате.

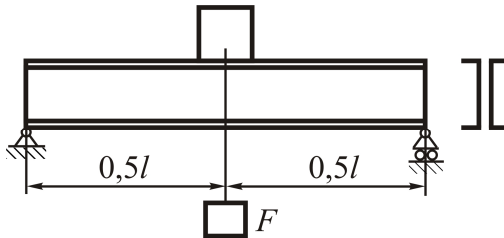


Рис. 11.7

Ответ: $\sigma_{\max \text{ Б}} = 125,3$ МПа; $\sigma_{\max \text{ К}} = 84,5$ МПа.

11.7. Груз F равноускоренно поднимается на канате, накрутом на шкив (рис. 11.8). Площадь поперечного сечения троса $A = 10$ мм². Определить наибольшее расчетное напряжение в канате и в опасном сечении вала по третьей теории прочности, если ускорение движения равно $0,8$ м/с². Массу каната, вала и шкива при расчете не учитывать.

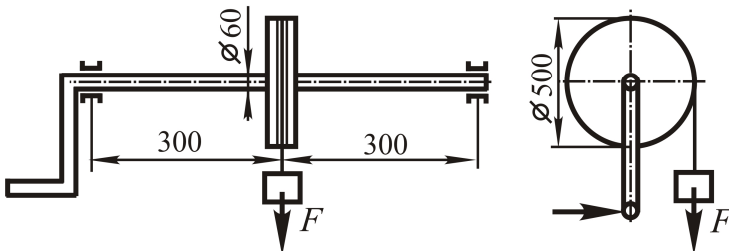


Рис. 11.8

Ответ: $\sigma_{\max \text{ К}} = 64,9$ МПа; $\sigma_{\max \text{ В}} = 89,2$ МПа.

11.8. Определить величину наибольшего нормального напряжения в стальном ступенчатом стержне (рис. 11.9), подвергающемся действию удара при падении груза с силой тяжести $F = 4$ кН и с высоты $h = 6$ мм. Площадь поперечного сечения стержня $A = 20$ мм², длина $l = 5$ м. Какое наибольшее напряжение возникнет в стержне, если на кольцевой выступ B для смягчения удара поместить цилиндрическую винтовую пружину, которая при действии статической нагрузки, равной 1 Н, сжимается на $4 \cdot 10^{-4}$ мм?

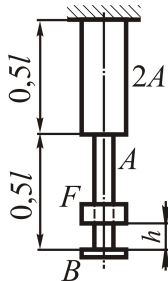


Рис. 11.9

Ответ: 134,9 МПа; 73,2 МПа.

11.9. Лыдина весом $F = 1500$ Н плавает со скоростью $v = 1$ м/с и ударяется о деревянную сваю круглого поперечного сечения (рис. 11.10). Определить наибольшее нормальное напряжение и наибольший прогиб сваи при ударе, если модуль упругости дерева $E = 8 \cdot 10^3$ МПа. Сваю в нижнем сечении считать заземленной.

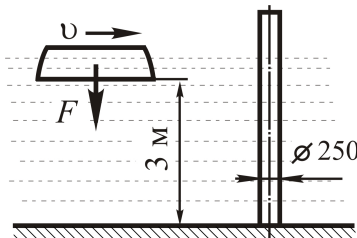


Рис. 11.10

Ответ: 10 МПа; 30 мм.

11.10. Определить высоту падения h груза $F = 1$ кН, при которой свободный конец консольной двутавровой балки № 16 (ГОСТ 8239–89) длиной $l = 5$ м в результате удара коснется неподвижной плоскости (рис. 11.11).

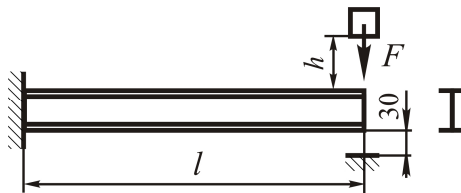


Рис. 11.11

Ответ: 57,3 мм.

11.11. Консольная балка из двух швеллеров № 22 (ГОСТ 8240–89) подверглась удару при падении груза F (рис. 11.12). Наибольший прогиб на конце консоли оказался равным 8 мм. Определить высоту падения груза h и наибольшее нормальное напряжение в балке.

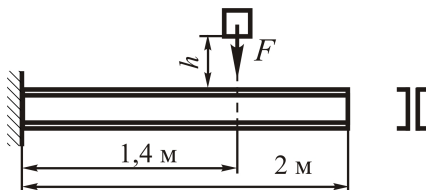


Рис. 11.12

Ответ: 6,06 мм; 163,7 МПа.

11.12. Двутавровая балка № 24 (ГОСТ 8239–89) длиной пролета $l = 3$ м шарнирно закреплена по концам. Определить наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб, возникающие в балке в результате удара при падении на нее посередине пролета груза $F = 5$ кН. Скорость груза в момент удара 0,5 м/с. Задачу решить для следующих условий:

- опоры балки абсолютно жесткие (рис. 11.13, а);
- балка опирается на пружины, жесткость которых равна $c = 4 \cdot 10^4$ мм/Н (рис. 11.13, б);

в) опоры балки абсолютно жесткие, в месте падения груза на балке установлен буферный груз $Q = 5 \text{ кН}$ (рис. 11.13, в).

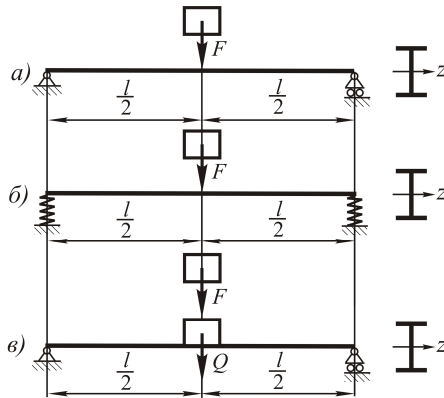


Рис. 11.13

Ответ: а) 173,6 МПа; 5,44 мм; б) 108,3 МПа; 3,39 мм; в) 131,9 МПа; 4,13 мм.

11.13. Двутавровая балка № 24 (ГОСТ 8239–89) длиной пролета $l = 3 \text{ м}$ шарнирно закреплена по концам (рис. 11.14). Определить наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб, возникающие в балке в результате удара грузом ($F = 5 \text{ кН}$). Груз перемещается горизонтально с постоянной скоростью $0,5 \text{ м/с}$.

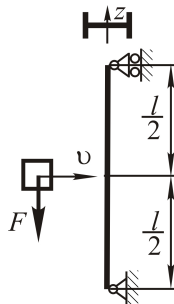


Рис. 11.14

Ответ: 101,8 МПа; 3,14 мм.

11.14. Двутавровая балка № 18 (ГОСТ 8239–89) длиной пролета $l = 3,2$ м шарнирно закреплена одним концом, а другой опирается на резиновую подушку заданных размеров и модулем упругости $E = 8$ МПа (рис. 11.15). Определить наибольшие нормальные напряжения и наибольший прогиб, возникающие в балке в результате удара при падении на нее с высоты $h = 0,2$ м посередине пролета груза с силой тяжести $F = 1$ кН.

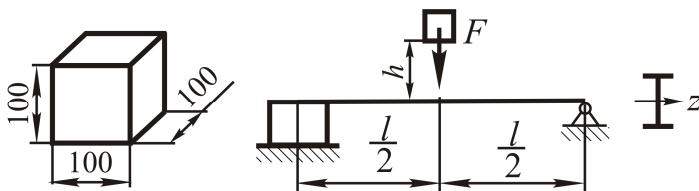


Рис. 11.15

Ответ: 152,8 МПа; 7,1 мм.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов : учебник / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 800 с.
2. Механика материалов : учебное пособие / О. И. Мисуно [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2013. – 252 с.
3. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов. Практикум по решению задач : учебное пособие / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2009. – 633 с.
4. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В. К. Качурина. – М. : Наука, 1970. – 432 с.
5. Беляев, Н. М. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М., Наука, 1968. – 352 с.
6. Лихарев, К. К. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов» : учебное пособие для машиностроительных вузов / К. К. Лихарев, Н. А. Сухова. – М. : Машиностроение, 1980. – 224 с.
7. Сопротивление материалов : тестовые задания / БГАТУ ; кафедра сопротивления материалов и деталей машин ; сост.: О. И. Мисуно, Д. Н. Колоско. – Минск : БГАТУ, 2003. – 113 с.
8. Механика материалов : справочник / сост.: О. И. Мисуно, Д. Н. Колоско, С. А. Легенький. – Минск : БГАТУ, 2011. – 48 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

В двух частях

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Составители:

Мисуно Олег Иосифович,
Колоско Дина Николаевна

Ответственный за выпуск *В. Н. Еднач*

Редактор *Д. О. Михеева*

Компьютерная верстка *Д. А. Пекарского*

Дизайн обложки *А. А. Покало*

Подписано в печать 18.10.2023. Формат 60×84¹/₁₆.

Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 11,39. Уч.-изд. л. 8,91. Тираж 99 экз. Заказ 46.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования

«Белорусский государственный аграрный технический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий

№ 1/359 от 09.06.2014.

№ 2/151 от 11.06.2014.

Пр-т Независимости, 99–1, 220012, Минск.