Несенчук А.А., к.т.н., доцент
Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, г.Минск

ДИНАМИКА КОРНЕВЫХ ПОРТРЕТОВ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ключевые слова: Динамическая система, переменные параметры, корневой портрет, синтез, анализ.

Аннотация. Выполняется исследование области пересечения границы асимптотической устойчивости динамической системы с переменными коэффициентами семейством годографов корневого портрета системы. Формулируются условия устойчивости для проверки устойчивости и параметрического синтеза системы.

1. Динамика функции параметра на границе устойчивости

Рассмотрим систему с переменными параметрами, динамические свойства которой описываются полиномиально [1]:

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = p(s), \tag{1.1}$$

где $a_j \in [\underline{a}_j, \overline{a}_j]$, и ее свободный корневой портрет [2], т.е. портрет, сформированный при вариации свободного члена a_3.

Уравнение свободного корневого годографа полинома (1.1):

$$\omega^3 - a_2\omega = 0\,, \tag{1.2}$$

уравнение параметра [2] (1.1):

$$a_1\omega^2 = a_3\,. \tag{1.3}$$

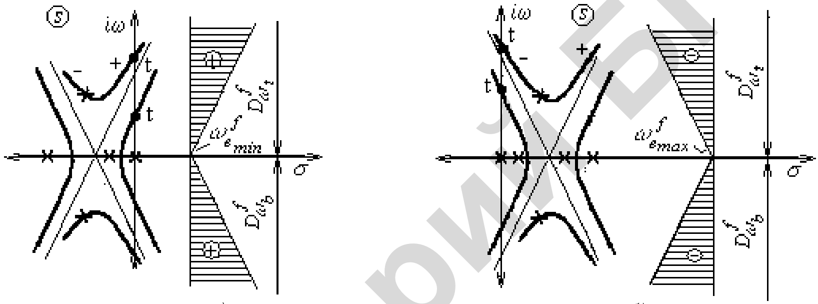
На основе результатов, полученных в [2], установлены три следующих варианта пересечения границы асимптотической устойчивости данной системы ветвями корневых годографов:

– границу пересекают положительные ветви, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$;
– границу пересекают отрицательные ветви, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$;
– ветви годографов не пересекают границу, $-\infty < a_1 < +\infty$, $a_2 < 0$.

На основании выполненного исследования поведения функции параметра (1.3) для поля корневых траекторий [1] с параметром a_2 на границе устойчивости при положительных коэффициентах полинома (1.1) сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1.1. Функция параметра (1.3) траектории для поля корневых траекторий динамической системы третьего порядка, описываемой характеристическим полиномом (1.1) с положительными или отрицательными коэффициентами, имеет соответственно возрастающий или убывающий характер; в единственной точке экстремума функции, находящейся в начале координат плоскости корней, параметр траектории равен нулю.

На рис. 1.1 показаны диаграммы распределения функции параметра при положительных (рис. 1,1, а)) и отрицательных (рис. 1,1, б)) коэффициентах ($D_\omega{}^f$ – область пересечений границы устойчивости $i\omega$ годографами поля F (область пересечений)).



а) *б)*

Рис. 1.1. Динамика функции параметра на границе устойчивости

Из отмеченного следует, что при прочих равных условиях с уменьшением a_1 корневой портрет интервального семейства постепенно и непрерывно перемещается вправо в сторону неустойчивого состояния.

2. Алгоритм параметрического синтеза систем

Сформулируем условие устойчивости интервальной системы.

Теорема 2.1. Для асимптотической устойчивости динамической системы, описываемой семейством характеристических уравнений вида (1.1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\bar{a}_3 < a_{r_{\min}}, \qquad (2.1)$$

где $a_{r_{\min}}$ – минимальное значение параметра a_3 в области пересечений D_ω границы устойчивости годографами портрета [1].

На этом основании определим простой алгоритм для параметрического синтеза интервальной системы:

1. Вычисление координаты $\omega_{r\min}$ точки реальной области пересечений D_ω, в которой параметр траектории a_3 минимален: $a_3 = a_{r\min}$, с использованием формулы (1.2) при $a_2 = \underline{a}_2$.

2. Вычисление минимального значения параметра $a_{r\min}$ в полученной в п. 1 точке $\omega_{r\min}$ по формуле (1.3) при $a_1 = \underline{a}_1$.

3. Проверка условия устойчивости (2.1) и корректировка предельного значения $\overline{a}_3$ в случае необходимости.

На основе сделанных выше заключений сформулируем еще одно условие устойчивости для рассматриваемой системы.

Теорема 2.2. Для асимптотической устойчивости интервальной динамической системы третьего порядка, описываемой семейством характеристических полиномов вида (1.1), необходимо и достаточно, чтобы был устойчив только один следующий полином семейства:

$$h(s) = s^3 + \underline{a}_1 s^2 + \underline{a}_2 s + \overline{a}_3. \tag{2.2}$$

Полином (2.2) совпадает с полиномом, полученным Андерсоном [3]. Однако по сравнению с условием Андерсона полученное условие (2.2) в сочетании с (2.1) имеет серьезное преимущество, поскольку позволяет не только проверить устойчивость интервальной системы, но в случае неустойчивости, также найти значения интервалов изменения коэффициента a_3, обеспечивающих ее устойчивость.

Результаты работы могут быть использованы при синтезе систем управления объектами с переменными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dorf, R. Modern Control Systems / R. Dorf, R. Bishop. – N.Y.: Prentice Hall, 2011. – 1111 p.

2. Несенчук, А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А.А. Несенчук. – Мн: ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.

3. Anderson, B. On Robust Hurwitz Polynomials / B. Anderson // IEEE Trans. Automat. Control. – Vol. 32. – P. 909–913 –1987.