Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (135), 2022

УДК 511.42

Неулучшаемость теоремы Дирихле в диофантовых приближениях в поле комплексных чисел

О.Н. Кемеш[1], И.М. Морозова[1], Ж.И. Пантелеева[2]

Теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными обобщена на поля комплексных и p-адических чисел. Однако в обобщениях не установлены точные постоянные как в теореме Гурвица. В статье предложен метод оценок постоянных сверху, основанный на метрической теории диофантовых приближений зависимых величин. Установлено распределение алгебраических комплексных сопряженных чисел второй и третьей степени.
Ключевые слова: диофантовы приближения, многочлен с целыми коэффициентами, алгебраические числа, теорема Дирихле, теорема Гурвица.

Dirichlet's theorem on approximation of real numbers by rational numbers has been generalized to fields of complex and p-adic numbers. However, unlike Hurwitz's theorem, these generalizations do not provide the exact constants in the approximations. In this paper, we propose a method for estimating these constants from above based on metric theory of Diaphantine approximation of dependent variables. We also specify the distribution of algebraic conjugate complex numbers of the second and third degree.
Keywords: Diophantine approximation, integral polynomial, algebraic numbers, Dirichlet's theorem, Hurwitz's theorem.

Введение. Почти два века назад Дирихле [1] доказал следующую теорему о приближении действительных чисел рациональными числами.

Теорема Дирихле. Для любого действительного числа $x \in I \subset [0;1)$ и натурального числа $Q > 1$ найдутся натуральное число $1 \le q \le Q$ и целое число p такие, что выполняются неравенства

$$\left|x - p/q\right| \le \frac{1}{qQ} \text{ или } |qx - p| \le \frac{1}{Q}. \tag{1}$$

Из первого неравенства в (1) следует неравенство $\left|x - p/q\right| \le \frac{1}{q^2}$. Доказываются все три неравенства легко, и поэтому возникает предположение, что их можно без труда улучшить.

Далее $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ – величины, зависящие от n и не зависящие от Q. Точный ответ о неравенстве

$$\left|x - p/q\right| < c_1 q^{-2} \tag{2}$$

дал Гурвиц [2]. Он доказал, что при $c_1 < \sqrt{5}$ неравенство (2) имеет бесконечное число решений (p,q), $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ для любого $x \subset I$. Если же $\varepsilon > 0$, $c_2 = \sqrt{5} + \varepsilon$, то существуют числа x_1 такие, что при любом достаточно большом $q > q_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|x_1 - p/q\right| > c_2^{-1} q^{-2}. \tag{3}$$

В частности можно взять $x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}61\ldots$

Получение неравенств вида (3) для специальных действительных чисел представляет собой одну из самых сложных и красивых задач теории чисел. Ее решение при алгебраических числах принесло Роту [3], [4] в 1958 г. и А. Бейкеру [5] в 1970 г. премии Филдса.

Основная часть. В данной работе мы покажем, что второе неравенство в (1) также практически неулучшаемо как в поле действительных, так и в поле комплексных чисел. Для получения таких результатов привлечем методы метрической теории диофантовых приближений, первые результаты в которой были получены А. Хинчиным [6]. Далее $\mu_1(A)$ – мера Лебега измеримого множества $A \subset I$.

Теорема 1. Пусть $x \in I$, функция $\Psi(x)$ монотонно убывает. Обозначим через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество действительных чисел x из интервала I, для которых неравенство

$$|qx - p| < \Psi(q) \tag{4}$$

имеет бесконечное число решений в рациональных числах p/q. Тогда

$$\mu_1 \mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu_1 I, & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases}$$

К настоящему времени разрешимости значительно более сложных чем (4) диофантовых неравенств посвящены монографии [7]–[10].

В неравенстве (4) рассматривается разрешимость в точке x в многочленах первой степени. В конце прошлого века аналогичная задача была решена для многочленов произвольной степени.

Рассмотрим многочлен $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами степени $\deg P_n(x) = n$ и высоты $H = H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество действительных $x \in I$, для которых неравенство

$$|P_n(x)| < H^{-n+1}\Psi(H) \tag{5}$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P_n(x)$ степени $\deg P_n(x) \le n$ и высоты H.

Теорема 2. Справедливы два утверждения:

$$\mu_1 \mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, & (6) \\ \mu_1 I, & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. & (7) \end{cases}$$

Утверждение (6) в теореме было доказана В.И. Берником [11], а утверждение (7) – В. Бересневичем [12], [13].

Вскоре теорема 2 была обобщена с многочленов на невырожденные кривые и поверхности в работах В. Бересневича, В.И. Берника, Д. Клейнбока и Г. Маргулиса [14]–[16].

При $\Psi(H) = H^{-w}$, $w > n$, в [5], [17] была найдена размерность Хаусдорфа множества $\mathcal{L}_n(\Psi)$, которая оказалась равна $\dfrac{n+1}{w+1}$.

Несколько изменим задачу (1). Докажем, что существуют $x \in I$, для которых выполняется неравенство

$$\left| x - p/q \right| > c_3 q^{-1} Q^{-1}$$

при некотором c_3. Из теоремы Дирихле следует, что $c_3 < 1$. Методами метрической теории диофантовых приближений докажем следующую теорему.

Теорема 3. Для любого Q обозначим через $\mathcal{L}_1(c_4, Q)$ множество $x \in [0;1)$, для которых верно неравенство

$$|qx - p| < c_4 Q^{-1}.$$

Тогда при $c_4 < \dfrac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\mu_1 \mathcal{L}_1(c_4,Q)<1. \tag{8}$$

Неравенство (7) показывает, что существуют $x\in[0;1)\setminus\mathcal{L}_1(c_4,Q)$, для которых верно неравенство

$$|qx-p|>c_4Q^{-1}.$$

Доказательство теоремы. Неравенство $|qx-p|<c_4Q^{-1}$ выполняется для всех x из интервалов

$$I_q=\left\{{}^{p}\!/_{q}-c_4Q^{-1},{}^{p}\!/_{q}+c_4Q^{-1}\right\}\cap[0;1),\ 1\le q\le Q,\ 0\le p\le q.$$

Если $p\ne 0$, то

$$\mu I_q=2c_4Q^{-1}.$$

При $p=0$

$$\mu I_q=c_4Q^{-1}.$$

Определим множество

$$B_1=\bigcup_{q=1}^{Q}\bigcup_{p=0}^{q}I_q.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mu B_1\le 2c_4\sum_{q=1}^{Q}Q^{-1}=2c_4 \tag{9}$$

Из неравенства (9) очевидно, что при $c_4<\frac{1}{2}$ имеем $\mu B_1<1$.

Комплексный случай. Определим множество комплексных чисел

$$B_2=\left\{|z|\le 1\cap \operatorname{Im} z\ge\frac{1}{2}\right\},$$

мера которого равна $\mu_1 B_2=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\approx 0,614185$.

Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1 [7]. Пусть γ_1 – ближайший к z корень полинома $P(z)$. Тогда

$$|z-\gamma_1|\le 2^{n-1}|P(z)||P'(\gamma_1)|^{-1}. \tag{10}$$

Лемма 2. Для того, чтобы все корни $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ полинома $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ удовлетворяли оценке сверху по модулю

$$|\alpha_j|<d(n),\quad 1\le j\le n, \tag{11}$$

необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$|a_n|>d_1(n)\cdot H. \tag{12}$$

Достаточность леммы доказана в [7] (лемма 1, глава 1, часть I).

Необходимость. Возьмем a_j такое, что $|a_j|=H=(-1)^j\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_j)}\left(\alpha_{i_1}\cdot\ldots\cdot\alpha_{i_j}\right)$. Обозначим $\left|\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_j)}\left(\alpha_{i_1}\cdot\ldots\cdot\alpha_{i_j}\right)\right|\le\delta(n)$. Ясно, что тогда $|a_n|>\delta(n)H$.

Нетрудно понять, что при $|\alpha_i|\le 1,01$ и $n=2$ имеем $\delta(2)=2,02$, а при $n=3$ – $\delta(3)=3,0603$.

Теорема 4. Для любого Q обозначим через $\mathcal{L}_2(c_5,Q)$ множество $z\in B_2$, для которых верно неравенство

$$\left|P_2(z)\right| < c_5 Q^{-\frac{1}{2}},\ H(P) \le Q. \tag{13}$$

Тогда при $c_5 < \sqrt{\frac{1}{60} - \frac{\sqrt{3}}{80\pi}} \approx 0,09887$ справедливо неравенство

$$\mu_1 \mathcal{L}_2(c_5, Q) < \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{14}$$

Это означает, что существует точка $z_1 \in B_2$, в которой верно неравенство, противоположное (13).

Доказательство теоремы 4.

Воспользуемся неравенством (10):

$$\left|z - \gamma_1\right| < 2\left|P(z)\right|\left|P'(\gamma_1)\right|^{-1} < 2c_5 Q^{-\frac{1}{2}} a_2^{-1} \left|\gamma_2 - \gamma_1\right|^{-1} < 2c_5 Q^{-\frac{1}{2}} \left|a_2\right|^{-1}.$$

Точки z лежат в круге K с центром γ_1 радиуса $r(K) = 2c_5 Q^{-\frac{1}{2}} \left|a_2\right|^{-1}$ площадью $S(K) = 4\pi c_5^2 Q^{-1} a_2^{-2}$.

Просуммируем эту площадь по всем тройкам (a_2, a_1, a_0). Поскольку изменение знака всех коэффициентов многочлена на противоположный не влияет на корни, то можно считать коэффициент a_2 положительным, а из леммы 2 следует $\left|a_2\right| \ge \frac{H}{\delta(2)}$. Таким образом, имеем $\frac{H}{\delta(2)} \le a_2 \le H$, $-Q \le a_1, a_0 \le Q$, то есть общее количество интересующих нас троек $\#\{a_2, a_1, a_0\}$ оценивается сверху как $Q\left(1 - \frac{1}{\delta(2)}\right)(2Q+1)^2$.

Можно считать, что корни многочлена удовлетворяют условию $\left|a_j\right| < 1,01$ и можно использовать лемму 2.

Так как $\frac{Q}{\delta(2)} \le \left|a_2\right| \le Q$, то $\#\{a_2\} = Q\left(1 - \frac{1}{\delta(2)}\right)$

Тогда

$$\sum_{(a_0, a_1, a_2)} \mu_1 K_1 = \sum_{(a_0, a_1, a_2)} 4\pi c_5^2 Q^{-1} a_2^{-2} \le 4\pi c_5^2 Q^{-1} \cdot (2Q+1)^2 \cdot \sum_{\frac{Q}{\delta(2)} \le a_2 \le Q} a_2^{-2} \le$$

$$\le 4\pi c_5^2 Q^{-1} \cdot 5Q^2 \cdot \left(Q\left(1 - \frac{1}{\delta(2)}\right)\right)^{-2} \cdot Q\left(1 - \frac{1}{\delta(2)}\right) < c_5^2 \frac{20\pi\delta(2)}{\delta(2)-1}.$$

Очевидно, неравенство (14) выполняется при $c_5 < \sqrt{\frac{\delta(2)-1}{60\delta(2)} - \frac{(\delta(2)-1)\sqrt{3}}{80\pi\delta(2)}} \approx 0,07026$.

Теорема 5. Для любого Q обозначим через $\mathcal{L}_3(c_6, Q)$ множество $z \in B_2$, для которых верно неравенство

$$\left|P_3(z)\right| < c_6 Q^{-1},\ H(P) \le Q. \tag{15}$$

Тогда при $c_6 < \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 2^9} - \frac{\sqrt{3}}{2^{11}\pi}} \approx 0,01954$ справедливо неравенство

$$\mu_1 \mathcal{L}_3(c_6, Q) < \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{16}$$

Доказательство теоремы 5.

Многочлен третьей степени имеет три корня $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$, один из которых будет действительным. Без ограничения общности положим, что γ_3 – действительный корень.

Воспользуемся неравенством (10):

$$|z-\gamma_1|<4|P(z)||P'(\gamma_1)|^{-1}. \tag{17}$$

Оценим значение производной

$$|P'(\gamma_1)|=a_3|\gamma_1-\gamma_2||\gamma_1-\gamma_3|>\frac{a_3}{2},$$

т. к. $|\gamma_1-\gamma_2|>1$ и $|\gamma_1-\gamma_3|>\frac{1}{2}$.

Тогда из неравенства (17) следует

$$|z-\gamma_1|<4|P(z)||P'(\gamma_1)|^{-1}<8c_6Q^{-\frac{1}{2}}|a_3|^{-1}.$$

Рассмотрим круги K_1 и K_2 с центрами в комплексных корнях двух многочленов $P(x)$, удовлетворяющих условию (15). Пусть радиусы этих кругов равны $r(K_i)=2^3c_6Q^{-1}|a_3|^{-1}$, соответственно их площади равны $S(K_i)=2^6\pi c_6{}^2Q^{-2}a_3{}^{-2}$, $i=1,2$.

Для оценки меры исследуемого множества можно просуммировать площадь кругов K_2 по всем четверкам коэффициентов (a_3,a_2,a_1,a_0).

Считаем коэффициент a_3 положительным, а из леммы 2 следует $|a_3|\geq\frac{H}{\delta(3)}$. Таким образом имеем $\frac{H}{\delta(3)}\leq a_3\leq H$, $-Q\leq a_2,a_1,a_0\leq Q$, поэтому $\#\{a_3\}=Q\left(1-\frac{1}{\delta(2)}\right)$, и общее количество интересующих нас четверок $\#\{a_3,a_2,a_1,a_0\}$ оценивается сверху как $Q\left(1-\frac{1}{\delta(3)}\right)(2Q+1)^3$.

Учитывая, что корни многочлена удовлетворяют условию $|a_j|<1{,}01$, используем лемму 2. Тогда

$$\sum_{(a_0,a_1,a_2,a_3)}\mu_1K_2=\sum_{(a_0,a_1,a_2)}2^6\pi c_6{}^2Q^{-2}a_3{}^{-2}\leq 2^6\pi c_6{}^2Q^{-2}\cdot(2Q+1)^3\cdot\sum_{\frac{Q}{\delta(3)}\leq a_3\leq Q}a_3{}^{-2}\leq$$

$$\leq 2^6\pi c_6{}^2Q^{-2}\cdot 9Q^3\cdot\left(Q\left(1-\frac{1}{\delta(3)}\right)\right)^{-2}\cdot Q\left(1-\frac{1}{\delta(3)}\right)<c_6{}^2\frac{24^2\pi\delta(3)}{\delta(3)-1}.$$

Таким образом, (16) доказано для $c_6<\sqrt{\frac{\delta(3)-1}{12^3\delta(3)}-\frac{\sqrt{3}(\delta(3)-1)}{48^2\pi\cdot\delta(3)}}\approx 0{,}01512$.

Заключение. Результаты статьи могут быть обобщены на специальные многочлены действительной и комплексной переменной, а также для многочленов p-адической переменной.

Литература

1. Dirichlet, L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen / L. G. P. Dirichlet // Werke I. – 1842. – P. 633–638.
2. Hurwitz, A. Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche / A. Hurwitz // Mathematische Annalen. – 1891. – Vol. 39, № 2. – P. 279–284.
3. Касселс, Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – М. : Изд-во Иностр. литер., 1961. – 213 с.
4. Шмидт, В. Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М. : Мир, 1983. – 228 с.

5. Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Schmidt // Proc. London Math. Soc. – 1970. – № 21. – P. 1–11.

6. Khintchine, A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khintchine // Mathematische Annalen. – 1924. – Vol. 92. – P. 115–125.

7. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 181 с.

8. Спринджук, В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук. – М. : Наука, 1977. – 143 с.

9. Bernik, V. I. Metric Diophantine Approximation on Manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1999. – Vol. 137. – P. 172.

10. Bugeaud, Y. Approximation by Algebraic Numbers (Cambridge Tracts in Mathematics) / Y. Bugeaud. – Cambridge : Cambridge University Press, 2004. – Vol. 160. – P. 174.

11. Bernik, V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials / V. I. Bernik // Acta Arith. – 1989. – Vol. 53, № 1. – P. 17–28.

12. Бересневич, В. В. Оптимальный порядок аппроксимации точек на гладких кривых в трехмерном евклидовом пространстве / В. В. Бересневич // Доклады НАН Беларуси. – 1999. – Т. 43, № 4. – С. 9–13.

13. Beresnevich, V. V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. – Vol. 90, № 2. – P. 97–112.

14. Beresnevich, V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds / V. Beresnevich // Acta Mathematica Hungarica. – 2002. – Vol. 94, № 1. – P. 99–130.

15. Beresnevich, V. V. Metric Diophantine approximation : The Khintchine-Groshev theorem for non-degenerate manifolds / V. V. Beresnevich // Moscow Math. J. – 2002. – Vol. 2. – P. 203–225.

16. Bernik, V. I. Khintchine-type theorems on manifolds : the convergence case for standard and multiplicative versions / V. I. Bernik, D. Kleinbock, G. A. Margulis // Internat. Math. Res. Notices. – 2001. – Vol. 9. – P. 453–486.

17. Bernik, V. I. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations / V. I. Bernik // Acta Arith. – 1983. – Vol. 42, № 3. – P. 219–253.

[1]Белорусский государственный
аграрно-технический университет

[2]Институт математики
НАН Беларуси

Поступила в редакцию 20.09.2022