

УДК 539.3:534.1

## ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ В ТОНКОЙ ОБОЛОЧКЕ, БЛИЗКОЙ К ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ, С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ СИЛ

канд. физ.-мат. наук И.В. АВДОШКА

(Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск)

Рассматривается начально-краевая задача для уравнений пологих оболочек, описывающих движение тонкой упругой оболочки, подверженной нестационарному давлению. Срединная поверхность оболочки предполагается близкой к цилиндрической, которая в общем случае может быть некруговой. На краях, которые не обязательно являются плоскими кривыми, рассматриваются условия шарнирного опирания. Начальные условия представляют собой начальный волновой пакет, т.е. начальные перемещения и скорости – функции, быстро убывающие при удалении от нулевой образующей опорного цилиндра. С использованием комплексного ВКБ-метода строится формальное асимптотическое решение задачи в виде пакетов изгибно-плоскостных волн, бежущих в окружном направлении оболочки. Рассмотрены примеры численных расчетов итоговых уравнений, иллюстрирующие влияние начальной погиби на протекание волнового процесса. В случае параболической погиби краевая задача нулевого приближения имеет явное решение.

**Введение.** Вопрос о колебаниях и устойчивости цилиндрических оболочек, имеющих начальные погиби, обусловленные технологическими неточностями, неоднократно обсуждался в ряде исследований. При этом установлено, что даже небольшие отклонения в форме срединной поверхности от цилиндра существенно влияют на величину критической нагрузки, частоты собственных колебаний, области динамической неустойчивости и т.д.

В настоящей статье асимптотический метод интегрирования уравнений пологих оболочек, изложенный в [1], обобщается на случай оболочек, отличных от оболочек нулевой гауссовой кривизны. Рассматривается движение волновых пакетов в оболочке, срединная поверхность которой близка к цилиндрической, а кривизна и длина переменны. Также исследуется влияние динамических усилий на характер волнообразования.

**Постановка задачи.** Рассмотрим тонкую упругую оболочку, поверхность которой близка к опорной цилиндрической поверхности, в общем случае некруговой и с косыми краями. Опорная поверхность задается векторным уравнением:

$$\mathbf{r}_0(s, \theta) = R(\rho(\theta) + ks), \quad (1)$$

где  $k$  – орт оси  $Oz$ ;  $\rho(\theta)$  – радиус-вектор направляющей цилиндра в плоскости  $Oxy$ ;  $s$  – продольная координата;  $\theta$  – долготный угол;  $R$  – характерный размер срединной поверхности.

Предполагаем, что рассматриваемая нами оболочка находится на расстоянии  $\mu R f(s, \theta)$  от поверхности (1), где  $\mu$  – некоторый малый параметр, а  $f(s, \theta)$  описывает форму погиби оболочки. Расстояние  $\mu R f(s, \theta)$  откладывается по направлению нормали к (1) в соответствующей точке. Таким образом, векторное уравнение срединной поверхности оболочки имеет вид:

$$\mathbf{r}(s, \theta) = \mathbf{r}_0 + \mu R f(s, \theta) \mathbf{n}_0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{n}_0(s, \theta)$  – единичный вектор внешней нормали опорной поверхности:

$$\mathbf{n}_0(s, \theta) = i \frac{\rho(\theta) \cos(\theta) + \rho'(\theta) \sin(\theta)}{\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}} + j \frac{\rho(\theta) \sin(\theta) - \rho'(\theta) \cos(\theta)}{\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}}.$$

Штрих в формуле для  $\mathbf{n}_0(s, \theta)$  означает дифференцирование по координате, указанной в качестве индекса внизу.

Предположим, что  $f(s, \theta)$ ,  $|\rho(\theta)|$  вместе со своими производными имеют порядок  $O(1)$ . Вычислим основные геометрические характеристики рассматриваемой оболочки в координатах  $s, \theta$ .

Коэффициенты первой и второй квадратичной формы, отнесенные к характерному размеру  $R$ , имеют вид:

$$A_1^2 = 1 + \mu^2 (f'_s)^2, \quad A_{12} = r'_\theta r'_s = \mu^2 f'_s f'_\theta, \quad A_2^2 = \rho^2 + \rho_\theta'^2 + 2\mu f \frac{\rho^2 + 2\rho_\theta'^2 - \rho\rho_\theta''\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho_\theta'^2}} + O(\mu^2); \quad (3)$$

$$L_1 = f''_{ss}\mu + O(\mu^2), \quad L_{12} = f''_{\theta s}\mu + O(\mu^2), \quad L_2 = -\frac{\rho^2 + 2\rho_\theta'^2 - \rho\rho_\theta''\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho_\theta'^2}} + O(\mu).$$

Введем новую окружную координату  $\varphi$  по формуле  $d\varphi = d\theta\sqrt{\rho^2 + \rho_\theta'^2}$ . Ее геометрический смысл – длина направляющей опорного цилиндра, отложенная от нулевого меридиана и отнесенная к характерному размеру  $R$ . В системе координат  $s, \varphi$  – параметры геометрии оболочки, отнесенные к  $R$ , примут вид:

$$A_1^2 = 1 + \mu^2 (f'_s)^2, \quad A_{12} = \mu^2 f'_s f'_\varphi, \quad A_2^2 = 1 + 2k(\varphi) f\mu + O(\mu); \quad (4)$$

$$L_1 = f''_{ss}\mu + O(\mu^2), \quad L_{12} = f''_{\varphi s}\mu + O(\mu^2), \quad L_2 = -k(\varphi) + O(\mu),$$

где  $k(\varphi)$  – кривизна направляющей опорного цилиндра. Для радиусов кривизны получаем:

$$\frac{R}{R_1} = -\frac{L_1}{A_1^2} = -f''_{ss}\mu + O(\mu^2), \quad \frac{R}{R_{12}} = \frac{L_{12}}{A_1 A_2} = f''_{\varphi s}\mu + O(\mu^2), \quad \frac{R}{R_2} = -\frac{L_2}{A_2^2} = k(\varphi) + O(\mu). \quad (5)$$

Пусть края оболочки задаются соотношениями:

$$s_1(\varphi) \leq s \leq s_2(\varphi); \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2. \quad (6)$$

Для исследования движения рассматриваемой оболочки воспользуемся системой уравнений полых оболочек [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Delta^2 W + \Delta_R \Phi + \varepsilon^2 \Delta_T W + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0; \\ \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - \Delta_R W &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Delta z = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \right];$$

$$\Delta_R z = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{A_2 R}{A_1 R_2} \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{A_1 R}{A_2 R_1} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{R}{R_{12}} \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{R}{R_{12}} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) \right];$$

$$\Delta_T z = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{A_1 T_2}{A_2} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( T_3 \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( T_3 \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{A_2 T_1}{A_1} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right];$$

$$\varepsilon^8 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}, \quad W = \varepsilon^4 \frac{W'}{R}, \quad \Phi = \frac{\Phi'}{EhR\varepsilon^4}, \quad (T_1^0, T_2^0, S) = -Eh\varepsilon^6 (T_1, T_2, T_3), \quad t = \frac{t'}{t_c}, \quad t_c^2 = \frac{R^2 \rho}{E\varepsilon^6},$$

где  $\varepsilon$  – естественный малый параметр;  $W'$  и  $\Phi'$  – нормальный прогиб и функция напряжений соответственно;  $h$  – толщина оболочки;  $E, \nu, \rho$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки соответственно;  $t'$  – время;  $t_c$  – характерное время,  $T_1^0, T_2^0, S$  – мембранные усилия в срединной поверхности оболочки.

Система (7) описывает движение оболочки произвольного очертания с использованием не обязательно ортогональной системы координат. Для рассмотрения движения оболочки, определяемой уравнением (2), подставим в систему (7) значения параметров (4), (5).

Пусть функции  $k(\varphi)$ ,  $T_i(\varphi, t)$  вместе со своими производными являются функциями порядка  $O(1)$ .

Выберем малый параметр  $\mu$  таким образом, чтобы влияние начальной погиби  $\mu Rf(s, \theta)$  сказывалось уже в нулевом приближении итерационного процесса. Для этого положим  $\mu = \varepsilon^2$ , т.е. будем считать, что характерное значение погиби  $\mu Rf(s, \theta)$  имеет порядок  $(R/h)^{1/2}$ .

Для исследования основного напряженного состояния на краях оболочки (6) рассмотрим условия шарнирного опирания, которые с точностью до величин  $\varepsilon^2$  имеют вид [2]:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0; \quad \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_1(\varphi), \quad s = s_2(\varphi). \quad (8)$$

Рассмотрим начальные условия [1]:

$$W|_{t=0} = W_0^*(s, \varphi, \varepsilon) F_0; \quad \dot{W}|_{t=0} = i\varepsilon^{-1} V_0^*(s, \varphi, \varepsilon) F_0; \quad (9)$$

$$F_0 = F_0(\varphi, \varepsilon) = \exp \left\{ i\varepsilon^{-1} \left( a_0 \varphi + \frac{1}{2} b_0 \varphi^2 \right) \right\},$$

где  $\text{Im } b_0 > 0$ ,  $a_0$  ( $a_0 \neq 0$ ) – вещественное число;  $W_0^*$ ,  $V_0^*$  – комплекснозначные функции, имеющие в направлении  $\varphi$  конечное число осцилляций с изменяемостью  $\varepsilon^{-1/2}$ .

**Метод решения.** Формальное асимптотическое решение начально-краевой задачи (7)...(9) построим методом, описанным в [1]. Рассмотрим самосопряженную краевую задачу, состоящую из уравнения:

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( g_2(s) \frac{d^2 z}{ds^2} \right) + \frac{d}{ds} \left( g_1(s) \frac{dz}{ds} \right) + g_0(s) z - \lambda z = 0, \quad (10)$$

где  $g_2, g_1, g_0$  – некоторые достаточное число раз дифференцируемые вещественные функции, конкретный вид которых будет указан ниже, с граничными условиями

$$z = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 0, \quad (11)$$

заданными на краях  $s = s_1(\varphi)$ ,  $s = s_2(\varphi)$ . Обозначим систему собственных функций самосопряженной краевой задачи (10), (11) через  $z_1(s)$ ,  $z_2(s)$ , ..., а соответствующую бесконечную последовательность собственных чисел обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . Указанная система функций будет ортонормированной. Кроме того, и собственные функции, и собственные числа действительны.

Пусть функции  $W_0^*$ ,  $V_0^*$  из (9) удовлетворяют соответствующим граничным условиям (11), заданным на краях (6). Это требование с точностью до величин  $O(\varepsilon^{1/2})$  совпадает с требованием согласованности начальных условий (9) и граничных условий (8), заданных на краях (6). В случае выполнения последнего предположения для любого  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$  функции  $W_0^*$ ,  $V_0^*$  могут быть разложены в абсолютно и равномерно сходящиеся на отрезке  $[s_1(\varphi), s_2(\varphi)]$  ряды [3]:

$$W_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} W_{n0}(\varphi, \varepsilon) z_n(s, \varphi, 0), \quad \text{где} \quad W_{n0} = \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} W_0^*(s, \varphi, \varepsilon) z_n(s, \varphi, 0) ds; \quad (12)$$

$$V_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} V_{n0}(\varphi, \varepsilon) z_n(s, \varphi, 0), \quad \text{где} \quad V_{n0} = \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} V_0^*(s, \varphi, \varepsilon) z_n(s, \varphi, 0) ds.$$

Представим функции  $W, \Phi$  в виде суперпозиции  $n$ -ных волновых пакетов

$$W(s, \varphi, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^N W_n(s, \varphi, t, \varepsilon), \quad \Phi(s, \varphi, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(s, \varphi, t, \varepsilon) \quad (13)$$

с центрами на образующих  $\varphi = q_n(t)$ , где  $q_n(0) = 0$ . В силу линейности и однородности уравнений (7) функции  $W_n, \Phi_n$ , очевидно, будут удовлетворять этой же системе уравнений с заменой  $W$  на  $W_n$  и  $\Phi$  на  $\Phi_n$ . Ниже будем называть эту систему системой уравнений для  $n$ -ного волнового пакета. Начальные условия для функций  $W_n, \Phi_n$  имеют вид:

$$W_n|_{t=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}^0 z_n|_{t=0} F_0, \quad \dot{W}_n|_{t=0} = i\varepsilon^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} v_{nm}^0 z_n|_{t=0} F_0. \quad (14)$$

Граничные условия на краях  $s = s_i(\varphi), i = 1, 2$  для  $n$ -ного волнового пакета имеют тот же вид, что и исходные граничные условия (8) для функций  $W, \Phi$ .

Перейдем к локальной системе координат, связанной с центром  $n$ -ного волнового пакета, по формуле:

$$\varphi = q_n(t) + \varepsilon^{1/2} \xi_n. \quad (15)$$

Разложим коэффициенты системы уравнений (7)  $R/R_i, R/R_{i2}, A_i, A_i^{-1}, T_i$  в соответствующие ряды по переменной  $\varphi$  в окрестности точки  $q_n(t)$ . Решение полученной начально-краевой задачи для  $n$ -ного волнового пакета будем искать в виде:

$$W_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}(s, \xi_n, t) F_n, \quad \Phi_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} f_{nm}(s, \xi_n, t) F_n; \quad (16)$$

$$F_n = \exp \left\{ i \left[ \varepsilon^{-1} \int_0^t \omega_n(\tau) d\tau + \varepsilon^{-1/2} p_n(t) \xi_n + \frac{1}{2} b_n(t) \xi_n^2 \right] \right\}; \quad \text{Im } b_n(t) > 0 \text{ для любого } 0 \leq t \leq t' < +\infty,$$

где  $\omega_n, p_n, b_n$  – дважды дифференцируемые по  $t$  функции для любого  $t > 0$ , а  $w_{nm}, f_{nm}$  – полиномы по  $\xi_n$  с достаточным числом раз дифференцируемые по  $s$  и  $t$  комплексными коэффициентами.

Укажем механический смысл величин, входящих в (16):  $|\omega_n(t)|$  имеет смысл мгновенной частоты колебаний оболочки;  $p_n(t)$  определяет изменяемость в направлении  $\varphi$ ;  $b_n(t)$  характеризует скорость затухания амплитуды волн при удалении от центра  $\varphi = q_n(t)$ ;  $w_{nm}, f_{nm}$  – амплитудные функции.

Подстановка (16) в соответствующее уравнение приводит к последовательности краевых задач, состоящей из уравнений:

$$\sum_{j=0}^m L_{nj} w_{n, m-j} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Здесь

$$L_{n0} y = \frac{k^2 [q_n] \partial^4 y}{p_n^4 \partial s^4} + \frac{2k [q_n] \partial}{p_n^2 \partial s} \left( \frac{\partial^2 f(s, q_n) \partial y}{\partial s^2 \partial s} \right) + \left[ \frac{k [q_n] \partial^4 f(s, q_n)}{p_n^2 \partial s^4} + \left( \frac{\partial^2 f(s, q_n)}{\partial s^2} \right)^2 + p_n^4 - T_2(s, q_n(t), t) p_n^2 - (\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2 \right] y; \quad (18)$$

$$L_{n1} = b_n \xi_n L_p + \xi_n L_q + \dot{p}_n \xi_n L_\omega - i L_p \frac{\partial}{\partial \xi_n};$$

$$L_{n2} = \frac{\xi_n^2}{2} \left( b_n^2 L_{pp} + 2b_n L_{pq} + L_{qq} + \dot{p}_n^2 L_{\omega\omega} + 2\dot{p}_n L_{\omega q} + \right. \\ \left. 2\dot{p}_n b_n L_{\omega p} + \dot{b}_n L_\omega \right) + a_{n0} \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} + a_{n1} \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} + a_{n2} \frac{\partial}{\partial t} + a_{n3};$$

$$a_{n0} = -\frac{1}{2} L_{pp}, \quad a_{n1} = -i(b_n L_{pp} + L_{pq} + \dot{p}_n L_{\omega p}), \quad a_{n2} = -i L_\omega, \quad a_{n3} = -i \left( \frac{1}{2} b_n L_{pp} + \frac{1}{2} \dot{\omega}_n L_{\omega\omega} + \dot{p}_n L_{\omega p} \right) + G_n;$$

$$G_n y = i \left[ \frac{4k}{p_n^3} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (f_{ss\varphi} y) + \frac{2k}{p_n^3} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( f_{s\varphi}'' \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \frac{2k'_\varphi f_{ss}''}{p_n^3} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{2f_{ss}''}{p_n} \frac{\partial}{\partial s} (f_{s\varphi}'' y) + \right. \\ \left. + \frac{2kf_{s\varphi}''}{p_n^3} \frac{\partial^3 y}{\partial s^3} + \frac{2f_{s\varphi}''}{p_n} \frac{\partial}{\partial s} (f_{ss}'' y) + \frac{4kk'_\varphi}{p_n^5} \frac{\partial^4 y}{\partial s^4} + 2p_n T_3 \frac{\partial y}{\partial s} + \left( p_n \frac{\partial T_3}{\partial s} + p_n T_2' - \ddot{q}_n p_n \right) y \right].$$

Коэффициенты  $p, q, \omega$  здесь и ниже означают дифференцирование по соответствующей переменной.

Граничные условия для первых трех приближений примут вид:

$$w_{n0} = \frac{\partial^2 w_{n0}}{\partial s^2} = 0; \quad (19)$$

$$w_{n1} + \xi_n s' \frac{\partial w_{n0}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{n1}}{\partial s^2} + \xi_n s' \frac{\partial^3 w_{n0}}{\partial s^3} = 0; \quad (20)$$

$$w_{n2} + \xi_n s' \frac{\partial w_{n1}}{\partial s} + \frac{\xi_n^2 s''}{2} \frac{\partial w_{n0}}{\partial s} = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 w_{n2}}{\partial s^2} + \xi_n s' \frac{\partial^3 w_{n1}}{\partial s^3} + \frac{\xi_n^2}{2} \left[ s'' \frac{\partial^3 w_{n0}}{\partial s^3} + s'^2 \frac{\partial^4 w_{n0}}{\partial s^4} \right] + \frac{6}{p_n^2} \frac{\partial^4 w_{n0}}{\partial s^2 \partial \xi_n^2} - \frac{4ib_n \xi_n}{p_n^2} \frac{\partial^3 w_{n0}}{\partial s^2 \partial \xi_n} = 0.$$

Зададим конкретный вид коэффициентов уравнения (10). Пусть левая часть уравнения (10) совпадает с выражением (18). Тогда коэффициенты  $g_2, g_1, g_0$  имеют вид:

$$g_2 = \frac{k^2(q_n(t))}{p_n^4(t)}; \quad g_1 = \frac{2k(q_n(t))}{p_n^2(t)} \frac{\partial^2 f(s, q_n(t))}{\partial s^2}; \quad (22)$$

$$g_0 = \frac{k(q_n(t))}{p_n^2(t)} \frac{\partial^4 f(s, q_n(t))}{\partial s^4} + \left( \frac{\partial^2 f(s, q_n(t))}{\partial s^2} \right)^2 + p_n^4(t) - T_2(s, q_n(t), t) p_n^2(t)$$

и параметрически зависят от функций  $p_n(t), q_n(t)$  и от времени  $t$  явно. Это означает, что и собственные функции  $z_n$ , и собственные числа  $\lambda_n$  также зависят от указанных параметров.

Решение последовательности краевых задач (17) с граничными условиями (19)...(21) будем искать в виде:

$$w_{n0} = P_{n0}(\xi_n, t) z_n[s, q_n(t), t]; \quad (23)$$

$$w_{n1} = P_{n1}(\xi_n, t) z_n[s, q_n(t), t] + w_{n1}^{(p)}(s, \xi_n, t); \quad (24)$$

$$w_{n2} = P_{n2}(\xi_n, t) z_n[s, q_n(t), t] + w_{n2}^{(p)}(s, \xi_n, t), \quad (25)$$

где  $P_{ni}$  – полиномы аргумента  $\xi_n$ ;  $w_{n1}^{(p)}$ ,  $w_{n2}^{(p)}$  – какие-либо частные решения краевых задач соответственно в первом и втором приближениях.

Условие разрешимости краевой задачи (17), (19) в нулевом приближении имеет вид

$$\omega_n = \dot{q}_n p_n - H_n^\pm [p_n(t), q_n(t), t] \quad (26)$$

и представляет собой формулу для мгновенной частоты колебаний  $\omega_n$ , где  $H_n^\pm$  – функция Гамильтона рассматриваемой задачи:

$$H_n^\pm = \pm \sqrt{\lambda_n}. \quad (27)$$

Неоднозначность в определении  $\omega_n$  связана с наличием двух ветвей решений, отвечающих функциям  $H_n^+$  и  $H_n^-$ . Соответствующие им  $n^+$  и  $n^-$  волновые пакеты в начальный момент времени движутся в противоположные стороны от нулевой образующей. В дальнейшем, для определенности изложения рассматриваем решение, соответствующее  $H_n^+$ , при этом верхний индекс «+» опускается.

В первом приближении (17), (20) получаем систему Гамильтона

$$\dot{q}_n = H_p; \quad \dot{p}_n = -H_q \quad (28)$$

с начальными условиями

$$q_n(0) = 0; \quad p_n(0) = a_0. \quad (29)$$

Условия разрешимости краевой задачи во втором приближении (17), (21) приводят к уравнению Риккати для нахождения функции  $b_n$ :

$$\dot{b}_n + H_{pp} b_n^2 + 2H_{pq} b_n + H_{qq} = 0 \quad (30)$$

с начальным условием

$$b_n(0) = b_0 \quad (31)$$

и амплитудному уравнению для нахождения  $P_{n0}$ :

$$a_{n0}^* \frac{\partial^2 P_{n0}}{\partial \xi_n^2} + a_{n1}^* \xi_n \frac{\partial P_{n0}}{\partial \xi_n} + a_{n2}^* \frac{\partial P_{n0}}{\partial t} + a_{n3}^* P_{n0} = 0, \quad (32)$$

$$a_{n0}^*(t) = \frac{1}{2} H_{pp}, \quad a_{n1}^*(t) = i(b_n H_{pp} + H_{pq}), \quad a_{n2}^* = i, \quad \eta_n = \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} z_n^2 ds, \quad (33)$$

$$a_{n3}^* = \frac{i}{2H_n} \left\{ b_n H_n H_{pp} - \dot{\omega}_n + 2H_p H_q + \frac{1}{\eta_n} \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} (L_p z_q + L_\omega \dot{z}_n + iG_n z_n) z_n ds \right\}.$$

Решение амплитудного уравнения (32) в виде полинома  $P_{n0}(\xi_n, t; d_{nm}) = \sum_{k=0}^{M_{n0}} A_{nk}(t) \xi_n^k$  степе-

ни  $M_{n0}$  приводится в [1].

В случае произвольной функции  $f(s, \varphi)$  не представляется возможным найти явные выражения собственных чисел и функций задачи в нулевом приближении (10) с учетом (22), (11) и, соответственно,

явное значение функции Гамильтона (27) и выражающихся через нее условий разрешимости. Явные выражения удастся получить лишь при рассмотрении некоторых частных случаев формы начальной погиби.

**Случай параболической погиби.** Рассмотрим важную с точки зрения приложений параболическую погибь, определяемую формулой

$$f(s, \varphi) = a(\varphi)s^2 + b(\varphi)s + c(\varphi). \quad (34)$$

Уравнение (10) с учетом (22), (34) примет вид

$$\frac{k^2}{p_n^4} \frac{d^4 z}{ds^4} + \frac{4ka(\varphi)}{p_n^2} \frac{d^2 z}{ds^2} + \left(4a(\varphi)^2 + p_n^4 - T_2 p_n^2\right) z - \lambda z = 0. \quad (35)$$

Предположим также, что функции  $T_2, T_3$  не зависят от  $s$ .

Удовлетворяя граничным условиям (11), будем искать функцию  $z$  в виде

$$z_n(s, \varphi) = \sin[\lambda_n^*(s - s_1(\varphi))], \quad (36)$$

где

$$\lambda_n^*(\varphi) = \pi n / (s_2(\varphi) - s_1(\varphi)). \quad (37)$$

Подставляя (36) в (35), получим равенство для определения собственных чисел краевой задачи (35), (11):

$$\lambda_n = \frac{k^2 \lambda_n^{*4}}{p_n^4} - \frac{4ka(\varphi) \lambda_n^{*2}}{p_n^2} + 4a(\varphi)^2 + p_n^4 - T_2 p_n^2. \quad (38)$$

Таким образом, в данном случае бесконечные системы  $\{z_n\}, \{\lambda_n\}$  определяются равенствами (36), (38), а функция Гамильтона имеет вид:

$$H_n^\pm [p_n, q_n, l] = \pm \sqrt{\left(\frac{k \lambda_n^{*2}}{p_n^2} - 2a(q_n)\right)^2 + p_n^4 - T_2 p_n^2}, \quad (39)$$

что позволяет в явном виде формулировать итоговую систему Гамильтона (28), уравнение Риккати (30) и амплитудное уравнение (32), где коэффициенты  $a_{n0}^*, a_{n1}^*, a_{n2}^*$  сохраняют прежний вид (с учетом формулы (39)), а формула для коэффициента  $a_{n3}^*$  преобразуется следующим образом:

$$a_{n3}^* = \frac{i}{H_n} \left\{ \frac{b_n H_n H_{pp}}{2} - \frac{\dot{\omega}_n}{2} - H_p H_q - \frac{7k^2 \lambda_n^3 \lambda_n'}{p_n^5} + \frac{6ak \lambda_n \lambda_n'}{p_n^3} + p_n^3 \frac{l'}{l} - p_n T_2 \frac{l'}{2l} + \frac{7a' k \lambda_n^2}{p_n^3} + \frac{2k' a \lambda_n^2}{p_n^3} - \frac{2kk' \lambda_n^4}{p_n^5} - \frac{2aa'}{p_n} - \frac{p_n T_2'}{2} + \frac{\ddot{q}_n p_n}{2} - \frac{8\lambda_n^4 k^2 l'}{p_n^5 l} \right\}, \quad l = s_2(\varphi) - s_1(\varphi), \quad (40)$$

где штрих означает производную по  $\varphi$ , а параметры  $k, \lambda_n, a, l, T_2$  и их производные взяты при  $\varphi = q_n(l)$ .

Заметим, что при  $a(\varphi) \equiv 0$  функция Гамильтона  $H_n$ , определяемая формулой (39), с точностью до обозначений совпадает с аналогичной функцией для цилиндрической оболочки [4], если же для любого  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$   $a(\varphi) < 0$  ( $a(\varphi) > 0$ ), то рассматривается выпуклая (вогнутая) оболочка.

**Стационарный волновой пакет. Сравнение с известными результатами.** Рассмотрим стационарный волновой пакет в некруговой оболочке с погибью и с косыми краями, подверженной действию кольцевого усилия  $T_2(\varphi)$ . Пусть  $q_w = 0$ ,  $p_w$  – решения вырожденной системы Гамильтона  $H_p = 0$ ,  $H_q = 0$ , а  $b_w$  – решение вырожденного уравнения Риккати:  $H_{pp} b_n^2 + 2H_{pq} b_n + H_{qq} = 0$ .

Тогда, если  $p_n(0) = p_w$ ,  $b_n(0) = b_w$ , то начальный волновой пакет (9) не распадается на  $n^+$  и  $n^-$  волновые пакеты, а решением задачи динамики оболочки с погибью будет стационарный волновой пакет. Обозначим через  $\omega^2$  квадрат частоты колебаний стационарного волнового пакета  $\omega^2 = H_n^2 + O(\varepsilon)$ , где  $H_n = H_n^+(p_w, 0, 0)$ . В случае параболической погиби (34) квадрат частоты будет иметь вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 + O(\varepsilon), \quad \omega_0^2 = \left( \frac{k(q_w)\pi^2 n^2}{p_w^2 l^2 (q_w)} - 2a(q_w) \right)^2 + p_w^4 - T_2(q_w) p_w^2, \quad (41)$$

где  $l = s_2(\varphi) - s_1(\varphi)$ ,  $\omega_0^2$  — квадрат частоты в нулевом приближении.

*Случай круговой оболочки с прямыми краями.* Проведем сравнение частоты стационарного волнового пакета с частотой собственных колебаний оболочки с погибью, найденной в работе [5]. В этой статье рассмотрена оболочка постоянной длины  $L$ , близкая к круговому цилиндру радиуса  $R$ , нагруженная нормальным давлением  $q$ , так, что  $T_2^0 = qR$ . Ее края свободно оперты. В данном случае рассматривается параболическая погибь, которая в размерных переменных определяется формулой:

$$F(z) = \delta_0(1 - 4z^2/L^2), \quad (42)$$

где  $z$  — длина образующей опорного цилиндра;  $-L/2 \leq z \leq L/2$ . В результате разделения переменных для размерной частоты колебаний получена формула:

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho R^2} \left[ \varepsilon^8 n'^4 + \left( \frac{m'\pi R}{n'L} \right)^4 + \frac{16\delta_0 R}{L^2} \left( \frac{m'\pi R}{n'L} \right)^2 + \frac{64\delta_0^2 R^2}{L^4} - \frac{qR}{Eh} n'^2 \right], \quad (43)$$

где  $m'$  и  $n'$  — число полуволн в осевом направлении и волновое число в окружном направлении соответственно. В остальном, в (43), использованы наши обозначения.

Далее в рассматриваемой работе проводится работа по нахождению наименьшей по  $m'$  и  $n'$  частоте  $\omega^2$  для того, чтобы исследовать влияние погиби на наимизшую частоту собственных колебаний. В частности, указывается, что минимальное значение  $\omega^2$  достигается при  $m' = 1$ , что далее и полагаем. Кроме того, решаются алгебраические уравнения — условия минимума, и на основании полученных решений приводятся графики для различных значений параметров погиби и давления.

Вернемся к нашим результатам. Удовлетворяя всем описанным условиям, получаем: неравенства (6) принимают вид

$$-L/(2R) \leq s \leq L/(2R), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (44)$$

т.е.  $k(\varphi) \equiv L/R$ ;  $k(\varphi) \equiv 1$ ;  $T_2 = qR/(Eh\varepsilon^6)$ . Параметр погиби  $a(\varphi)$  с учетом формул (2), (34) и (42) будет иметь вид:  $a = -4\delta_0 R / (L^2 \varepsilon^2)$ .

С учетом последних равенств формула (41) преобразуется к виду:

$$\omega_0^2 = \left( \frac{\pi^2 n^2 R^2}{p_w^2 L^2} + 8 \frac{\delta_0 R}{L^2 \varepsilon^2} \right)^2 + p_w^4 - \frac{qR p_w^2}{Eh \varepsilon^6}. \quad (45)$$

Ниже полагаем  $n = 1$ , при котором, очевидно, достигается наименьшее значение величины  $\omega_0^2$ . Переходя к размерному времени в формуле (16), получим формулу для размерной частоты:

$$\omega_{разм}^2 = \frac{\omega_0^2 E \varepsilon^4}{R^2 \rho} + O(\varepsilon) = \frac{E}{R^2 \rho} \left( \frac{\pi^4 R^4 \varepsilon^4}{p_w^4 L^4} + \frac{16\pi^2 R^3 \delta_0 \varepsilon^2}{p_w^2 L^4} + \frac{64\delta_0^2 R^2}{L^4} + p_w^4 \varepsilon^4 - \frac{qR p_w^2}{Eh \varepsilon^2} \right) + O(\varepsilon), \quad (46)$$



где  $p_n = p_w$ ,  $q_n = 0$  – решение вырожденной системы Гамильтона, что является необходимым условием минимальности гамильтониана (39) по  $p_n$ ,  $q_n$ . Здесь условие  $H_{pp}[p_w, 0, 0] > 0$  является достаточным условием минимальности (46). Таким образом, в неявной форме нами учтены все условия минимальности частоты (46).

В силу независимости параметров задачи от окружной координаты  $\varphi$ , получим, что решением вырожденной системы Гамильтона будет  $b_w = 0$ , т.е. решение не будет локализовано, а покроет всю поверхность оболочки. Так как  $p_w/\varepsilon$  является волновым числом, положим в (43)  $n' = p_w/\varepsilon$ . Получаемая таким образом формула полностью совпадает с (46).

Итак, при учете всех предположений работы [5] нулевое приближение наименьшей частоты колебаний стационарного волнового пакета совпадает с наименьшей частотой собственных колебаний шарнирно опертой оболочки с однородной по окружной координате параболической погибью, близкой к круговому цилиндру с прямыми краями, под действием однородного нормального давления.

**Пример нестационарного волнового пакета.** Здесь приводятся результаты численных расчетов для случая параболической погиби оболочки (34), в ходе которых исследовалось влияние погиби различной формы (выпуклость, вогнутость, неосесимметричная погибь).

Во всех случаях опорный цилиндр являлся круговым с кривизной  $k = 1$ , прямые края ( $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 1$ ) шарнирно оперты. Считалось, что оболочка свободна от нагрузки, а форма погиби определяется формулой:

$$f(s, \varphi) = c(\varphi) s(1 - s). \quad (47)$$

Были приняты следующие значения параметров:

$$R/h = 100; n = 1; \nu = 0,3; a_0 = 2; b_0 = i; w_{n0}^0 = (1 + i)(1 + \zeta + \zeta^2). \quad (48)$$

Расчеты проводились для трех значений функции  $c(\varphi)$ . На рисунках графиков (рис. 1...3), соответствующих этому примеру, цифрой 1 обозначены кривые, соответствующие оболочке, получающейся в результате малого изгиба оси круговой цилиндрической оболочки. В этом случае

$$c(\varphi) = -0,5 \cos \varphi. \quad (49)$$

Цифра 2 соответствует  $c(\varphi) = 0,5$ , т.е. случаю равномерно выпуклой оболочки, а цифра 3 –  $c(\varphi) = -0,5$  (равномерно вогнутая оболочка).

Как свидетельствуют графики (рис. 1, б), изображающие зависимость координаты центра волнового пакета от времени, в случае погиби (49) происходит отражение волнового пакета от некоторых образующих. При этом колебания локализуются в окрестности наиболее вогнутой образующей, которая является «наиболее слабой», так как, как показано в [6], в ее окрестности оболочка теряет устойчивость. В случае же равномерной погиби (графики 2, 3) происходит равномерное движение волнового пакета, причем для вогнутой оболочки это движение быстрее, чем для выпуклой.

На рисунке 2 приведены графики функций групповой скорости  $v_g^+ = \dot{q}_n(t)$  и мгновенной частоты в окрестности центра волнового пакета  $\omega_n(t)$ . Видно, что параметру погиби (49) соответствует переменные групповая скорость и мгновенная частота, в то время как при равномерной по окружности погиби эти функции постоянны.

Графики функций  $\text{Im } b_n^+(t)$  и  $w_{n \max}^+(t)$  приводятся на рисунках 3, а и 3, б соответственно.

Величина  $\text{Im } b_n^+(t)$  связана с шириной волнового пакета (его ширина – величина порядка  $\varepsilon^{1/2} / \sqrt{\text{Im } b_n^+(t)}$ ), а  $w_{n \max}^+(t)$  – функция максимальной амплитуды колебаний.

Сверяя графики (см. рис. 1, б и рис. 3, а 3, б) заключаем, что отражения волнового пакета (см. кривую 1 на рис. 1 (б)) сопровождаются фокусировкой и ростом амплитуд, в то время как движение без отражений (кривые 2, 3) приводит к «расплыванию» волнового (увеличению ширины и уменьшению амплитуды колебаний).

Нами также были проведены расчеты, которые показали, что влияние растущего сжимающего кольцевого усилия  $T_2 = C_t t$  на одну из локализованных собственных форм колебаний оболочки с неравномерной погибью приводит к расщеплению ее на два подвижных волновых пакета и к сильному возрастанию частоты и амплитуды колебаний.

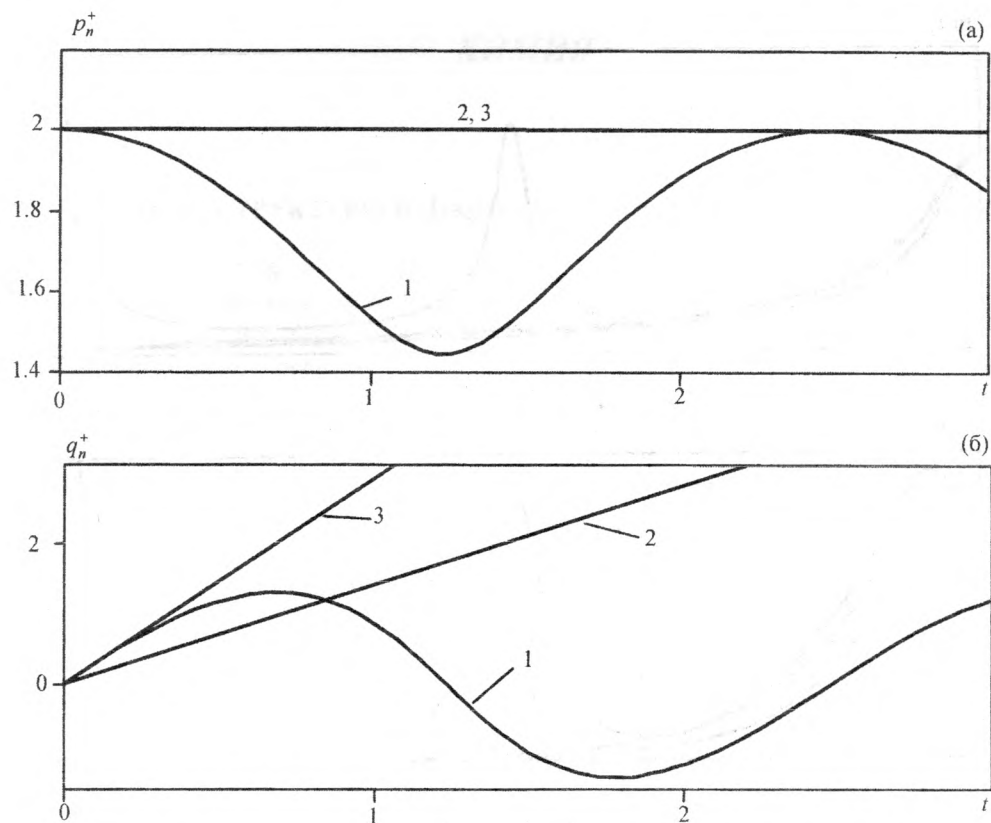


Рис. 1. Графики решений системы Гамильтона для  $c(\varphi) = -0,5\cos(\varphi)$ ; 0,5; -0,5 (кривые 1, 2, 3 соответственно)

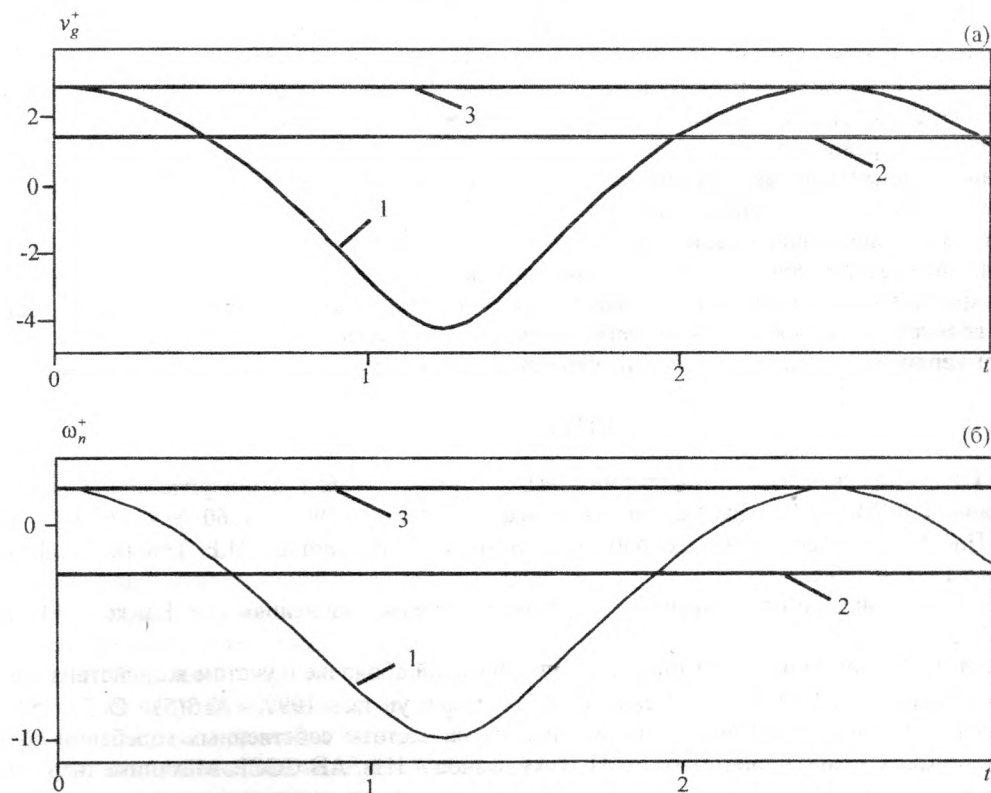


Рис. 2. Графики групповой скорости (а); мгновенной частоты (б); для  $c(\varphi) = -0,5\cos(\varphi)$ ; 0,5; -0,5 (кривые 1, 2, 3 соответственно)

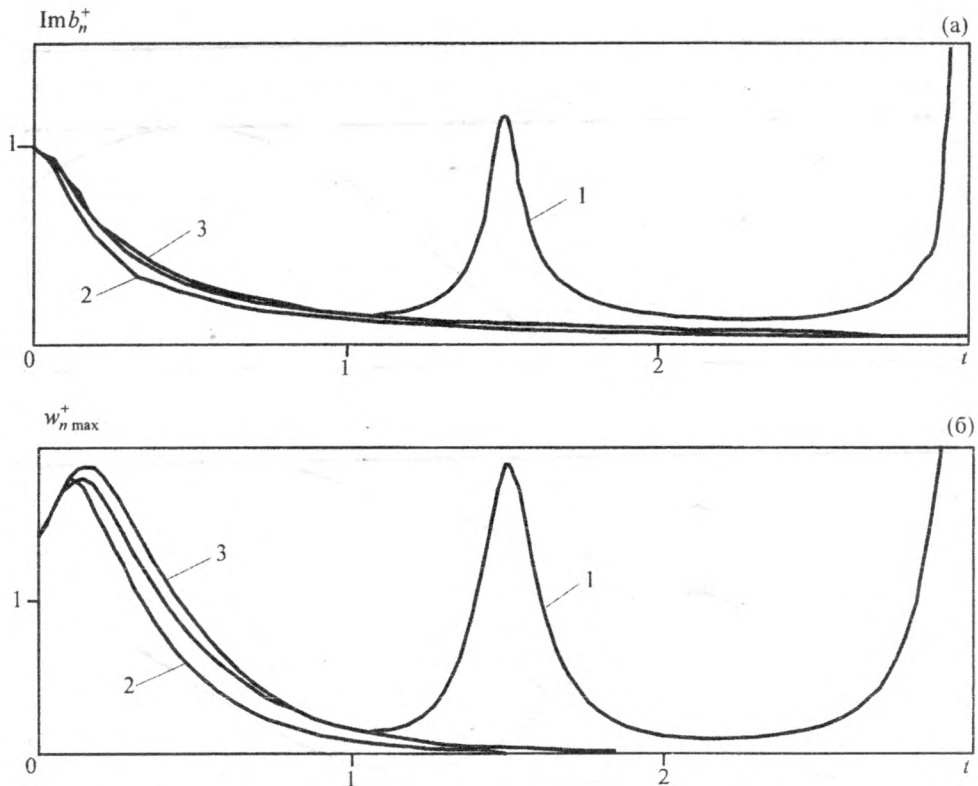


Рис. 3. Графики функций  $\text{Im } b_n(t)$  (а);  $w_n^+ \max(t)$  (б);  
для  $a(\varphi) = -0,5\cos(\varphi)$ ; 0,5; -0,5 (кривые 1, 2, 3 соответственно)

### Выводы

1. С использованием комплексного метода ВКБ [1] исходная начально-краевая задача сведена к последовательности одномерных краевых задач, условия разрешимости которых привели к системе Гамильтона, уравнению Риккати и амплитудному уравнению. В случае параболической погнб получено явное выражение для функции Гамильтона, и, соответственно, для системы Гамильтона, уравнения Риккати и амплитудного уравнения.

2. Установлено совпадение нулевого приближения наименьшей частоты колебаний стационарного волнового пакета для оболочки с параболической погнбю с наименьшей частотой собственных колебаний, найденной в [5], при использовании одинаковых предположений.

3. Численные расчеты показали, что неоднородная погнб может привести к локализации изгибных колебаний в окрестности наиболее вогнутой образующей. Расчеты также показали, что влияние растущего сжимающего кольцевого усилия на одну из собственных форм колебаний оболочки приводит к расщеплению начального волнового пакета, а также, к неограниченному возрастанию амплитуд колебаний.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев, Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями / Г.И. Михасев // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60, № 4. – С. 635 – 643.
2. Товстик, П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы / П.Е. Товстик. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.
3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
4. Авдошка, И.В. Волновые пакеты в тонкой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил / И.В. Авдошка, Г.И. Михасев // Вестник Витебск. дзярж. ун-та. – 1997. – № 3(5). – С. 50 – 54.
5. Кукуджанов, С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний оболочек вращения, близких к цилиндрическим / С.Н. Кукуджанов // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. – 1996. – № 6. – С. 121 – 126.
6. Михасев, Г.И. Некоторые задачи устойчивости оболочек, близких к цилиндрическим / Г.И. Михасев // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астрон. – 1987. – № 1. – С. 67 – 72.

Поступила 24.08.2007