



БИОМЕХАНИКА

УДК 612.13:539.3

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ ОРТОТРОПНОЙ СТЕНКИ АРТЕРИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПУЛЬСОВОЙ ВОЛНЫ

И.В. АВДОШКА^{1*}, Г.И. МИХАСЕВ²

¹Белорусский государственный аграрный технический университет, пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Беларусь;

²Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь.

Рассмотрена задача о распространении гармонической волны давления в вязкой жидкости, содержащейся в тонкой вязкоупругой ортотропной круговой цилиндрической оболочке. Для учета вязкости оболочки-сосуда использована модель линейной вязкоупругости. Расчеты показали, что учет вязкости оболочки приводит к снижению фазовой скорости и коэффициента передачи волны.

Введение

Для оценки механических свойств кровеносных сосудов нетравматическим путем важна по возможности более точная интерпретация параметров распространения пульсовой волны. В работе [1] для изучения движения крови в артериях рассматривается задача о распространении волны давления в вязкой несжимаемой жидкости, содержащейся в предварительно напряженной упругой ортотропной цилиндрической оболочке. Но при динамических испытаниях артериальная ткань проявляет не только упругие, но и вязкие свойства [2], [3]. Целью настоящей работы является решение указанной задачи с учетом вязкости стенки артерии.

Постановка задачи

Пусть артериальное давление меняется по гармоническому закону с малой амплитудой по сравнению с величиной среднего значения. Будем изучать осесимметричное движение крови и сосуда, дополнительное к основному стационарному течению. Считаем жидкость несжимаемой, вязкой, ньютоновской, протекающей ламинарно. Тогда для описания дополнительного движения крови используем линеаризованные уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время, u и w — компоненты скорости жидкости в радиальном и осевом направлениях соответ-

ственно (дополнительные к скоростям стационарного течения), z и r — продольная и радиальная координаты, p — дополнительное давление, ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Артерию будем рассматривать как тонкую круговую цилиндрическую оболочку, движение которой подчиняется мембранной теории. Пусть уравнения движения оболочки имеют вид [1]

$$\begin{aligned} M_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + C_r \frac{\partial \xi}{\partial t} + K_r \xi &= -\mu \left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{r=a} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{T_0 - T_{\theta_0}}{a} + \frac{\partial T_r}{\partial z}, \\ M_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + C_r \frac{\partial \eta}{\partial t} + K_r \eta &= \left[p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=a} + \frac{\eta}{a^2} T_{\theta_0} - \frac{T_0 - T_{\theta_0}}{a} + T_{\theta_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (2) $\xi = \xi(z, t)$, $\eta = \eta(z, t)$ — продольное и радиальное перемещения срединной поверхности оболочки, вызванные пульсовой волной. Здесь $\mu = \nu r$; a — радиус срединной поверхности предварительно напряженной оболочки; $M_0 = \rho_0 h + M_a$, ρ_0 — плотность материала оболочки, h — толщина оболочки. В уравнениях (2) учтено начальное продольное и кольцевое усилия, а также воздействие окружающих тканей. Так параметры K_r , C_r и M_a — это коэффициент постели, коэффициент вязкости и дополнительная масса на единицу площади поверхности оболочки, соответствующие продольному направлению; K_r , C_r , M_a с аналогичные величины для окружного направления; T_r , T_{θ_0} — полное продольное и окружное усилия в срединной поверхности оболочки, T_0 и T_{θ_0} — их соответствующие начальные значения.

Считаем, что пульсовая волна вызывает малые деформации, налагаемые на большие начальные. Тогда линейная связь дополнительных перемещений η и ξ и дополнительных усилий $T_{\theta_0} - T_0$ и $T_r - T_0$ для ортотропной вязкоупругой оболочки имеет следующий вид [4], [5]

$$\begin{aligned} T_0 - T_{\theta_0} &= B_{11} \frac{\eta}{a} + B_{12} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\ T_l - T_{\theta_l} &= B_{21} \frac{\eta}{a} + B_{22} \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$B_{ij} z = D_{ij} J_{ij}^*(z), \quad J_{ij}^*(z) = z - \int_0^l K_{ij}(t-\tau) z(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_0 h}{1 - \sigma_\theta \sigma_l}, & D_{12} &= \frac{E_0 h \sigma_l}{1 - \sigma_\theta \sigma_l}, \\ D_{21} &= \frac{E_l h \sigma_\theta}{1 - \sigma_\theta \sigma_l}, & D_{22} &= \frac{E_l h}{1 - \sigma_\theta \sigma_l}. \end{aligned}$$

Здесь E_0, σ_θ — мгновенный модуль Юнга и коэффициент Пуассона в окружном направлении, E_l, σ_l — те же величины в продольном направлении; $K_{ij}(\theta)$ — ядра скорости релаксации напряжений вязкоупругого материала. Полагая $K_{ij}(\theta) \equiv 0$, переходим к упругой модели кровеносного сосуда, рассмотренной в [1].

Преобразуем интегральные операторы $J_{ij}^*(z)$.

$$\text{Очевидно, что } J_{ij}^*(z) = z - \left[\int_0^l K_{ij}(t-\tau) z(\tau) d\tau - \int_0^0 K_{ij}(t-\tau) z(\tau) d\tau \right].$$

Применяя теорему о среднем ко второму интегралу и предполагая, что ядро удовлетворяет свойству затухающей памяти

$$\left(\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^0 K_{ij}(t-\tau) d\tau = 0 \right), \text{ заключаем, что интегральные операторы } J_{ij}^*(z) \text{ можно записать как}$$

$$J_{ij}^*(z) = z - \int_{-\infty}^l K_{ij}(t-\tau) z(\tau) d\tau.$$

Взаимодействие между мембраной и протекающей жидкостью учитывается граничными условиями [1]

$$u(r, z, t)|_{r=a} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad w(r, z, t)|_{r=a} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (4)$$

то есть условиями идеального прилипания жидкости к стенке сосуда.

Решение поставленной задачи

Рассмотрим распространение пульсовой волны, которая является гармонической по времени t и по продольной координате z . Тогда в силу линейности задачи решение уравнений (1), (2) с учетом (3) при граничных условиях (4) будем искать в виде

$$\{u, w, p, \eta, \xi\} = \{\bar{u}(r), \bar{w}(r), \bar{p}(r), A_3, A_4\} \exp[i\omega(t - z/c)]. \quad (5)$$

Здесь ω означает круговую частоту вынужденных колебаний (действительное число), c — комплексная величина, связанная с фазовой скоростью распространения волны и с ее затуханием, $\bar{u}(r), \bar{w}(r), \bar{p}(r)$ — неизвестные функции, A_3, A_4 — неизвестные постоянные.

Общее решение уравнений (1) в виде (5), данное в работе [6] имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \left[-A_1 \frac{\beta_0 a}{\mu \alpha_0^2} J_1 \left(\beta_0 \frac{r}{a} \right) + A_2 \frac{\beta_0}{\alpha_0 J_0(\alpha_0)} J_1 \left(\sqrt{\alpha_0^2 + 3\beta_0^2} \frac{r}{a} \right) \right] \exp[i\omega(t - z/c)] \\ w &= \left[-A_1 \frac{\beta_0 a}{\mu \alpha_0^2} J_0 \left(\beta_0 \frac{r}{a} \right) + A_2 \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}{\alpha_0 J_0(\alpha_0)} J_0 \left(\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \frac{r}{a} \right) \right] \exp[i\omega(t - z/c)] \\ p &= A_3 J_0 \left(\beta_0 \frac{r}{a} \right) \exp[i\omega(t - z/c)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь A_1, A_2 — постоянные интегрирования, $J_0(x), J_1(x)$ — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно, α_0 и β_0 — безразмерные параметры, где $\alpha_0^2 = i^3 a^2 \omega / \nu = i^3 \alpha^2, \beta_0 = i a \omega / c = i \beta$.

Подставляя выражения из (5), (6) в граничные условия (4), получим два однородных линейных алгебраических уравнения относительно неизвестных постоянных $A_i (i = \overline{1, 4})$, которые полностью совпадают с уравнениями (24), (25) из [1] и здесь не приводятся.

Подставим (5) в (3), учитывая, что $\int_{-\infty}^l K_{ij}(t-\tau) \exp[i\omega(\tau - z/c)] d\tau = \exp[i\omega(t - z/c)] C_{ij}$, где

$$C_{ij} = \int_0^{\infty} K_{ij}(\theta) \exp(-i\omega\theta) d\theta.$$

Полученное выражение подставим в (2), которое с учетом (5) даст еще два линейных однородных алгебраических уравнения относительно A_i :

$$\begin{aligned} &A_1 \left[J_0(\beta_0) + \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} (J_0(\beta_0) - J_2(\beta_0)) \right] - \\ &- A_2 \frac{\mu \beta_0 \sqrt{\alpha_0^2 + 3\beta_0^2}}{\alpha_0 J_0(\alpha_0)} \left[J_0(\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}) - J_2(\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}) \right] + \\ &+ A_3 \left[T_0 \beta_0^2 + T_{\theta_0} - \frac{E_0 h}{1 - \sigma_\theta \sigma_l} (1 - C_{11}) \right] \frac{1}{a^2} + \\ &+ \omega^2 \left[M_0 - i \frac{C_r}{\omega} - \frac{K_r}{\omega^2} \right] + A_4 \frac{\beta_0}{a^2} \frac{E_0 h \sigma_\theta}{1 - \sigma_\theta \sigma_l} (1 - C_{12}) = 0, \\ &- A_1 \frac{2\beta_0^3}{\alpha_0^2} J_1(\beta_0) + A_2 \frac{\mu(\alpha_0^2 + 2\beta_0^2)}{\alpha_0} \frac{J_1(\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2})}{J_0(\alpha_0)} - \\ &- A_3 \frac{\beta_0}{a^2} \left[T_0 - T_{\theta_0} + \frac{E_l h \sigma_\theta}{1 - \sigma_\theta \sigma_l} (1 - C_{21}) \right] + \\ &+ A_4 \left[\frac{E_l h}{1 - \sigma_\theta \sigma_l} \frac{\beta_0^2}{a^2} (1 - C_{22}) + \right. \\ &\left. + \omega^2 \left(M_0 - i \frac{C_l}{\omega} - \frac{K_l}{\omega^2} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая определитель однородной системы линейных алгебраических уравнений к нулю, получим частотное уравнение, в котором неизвестной будет только комплексная величина c . Это уравнение будет очень сложным. Для его упрощения, следуя [1], предположим, что длина волны колебаний очень велика по сравнению с радиусом трубы a , что соответствует физиологическим условиям. Тогда частотное уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} -\frac{\beta_0 a}{\mu \alpha_0^2} & 1 & 0 & -i\omega \\ \frac{\beta_0^2 a}{2\mu \alpha_0^2} & \frac{\beta_0}{2} F_{10} & -i\omega & 0 \\ 1 & -\frac{\mu \beta_0}{a} [2 - F_{10}] & \Xi_1 & \frac{\beta_0}{a^2} \frac{E_0 h \sigma_l}{1 - \sigma_\theta \sigma_l} (1 - C_{12}) \\ -\frac{\beta_0^3}{\alpha_0^2} & \frac{\mu \alpha_0^2}{2a} F_{10} & \Xi_2 & \Xi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F_{10} &= \frac{2J_1(\alpha_0)}{\alpha_0 J_0(\alpha_0)}, \quad \Xi_1 = \frac{1}{a^2} \left[T_{\theta_0} - \frac{E_0 h}{1 - \sigma_\theta \sigma_l} (1 - C_{11}) \right], \\ \Xi_2 &= -\frac{\beta_0}{a^2} \left[T_0 - T_{\theta_0} + \frac{E_l h \sigma_\theta}{1 - \sigma_\theta \sigma_l} (1 - C_{21}) \right], \\ \Xi_3 &= \frac{E_l h}{1 - \sigma_\theta \sigma_l} \frac{\beta_0^2}{a^2} (1 - C_{22}) + \omega^2 \left(M_0 - i \frac{C_l}{\omega} - \frac{K_l}{\omega^2} \right). \end{aligned}$$

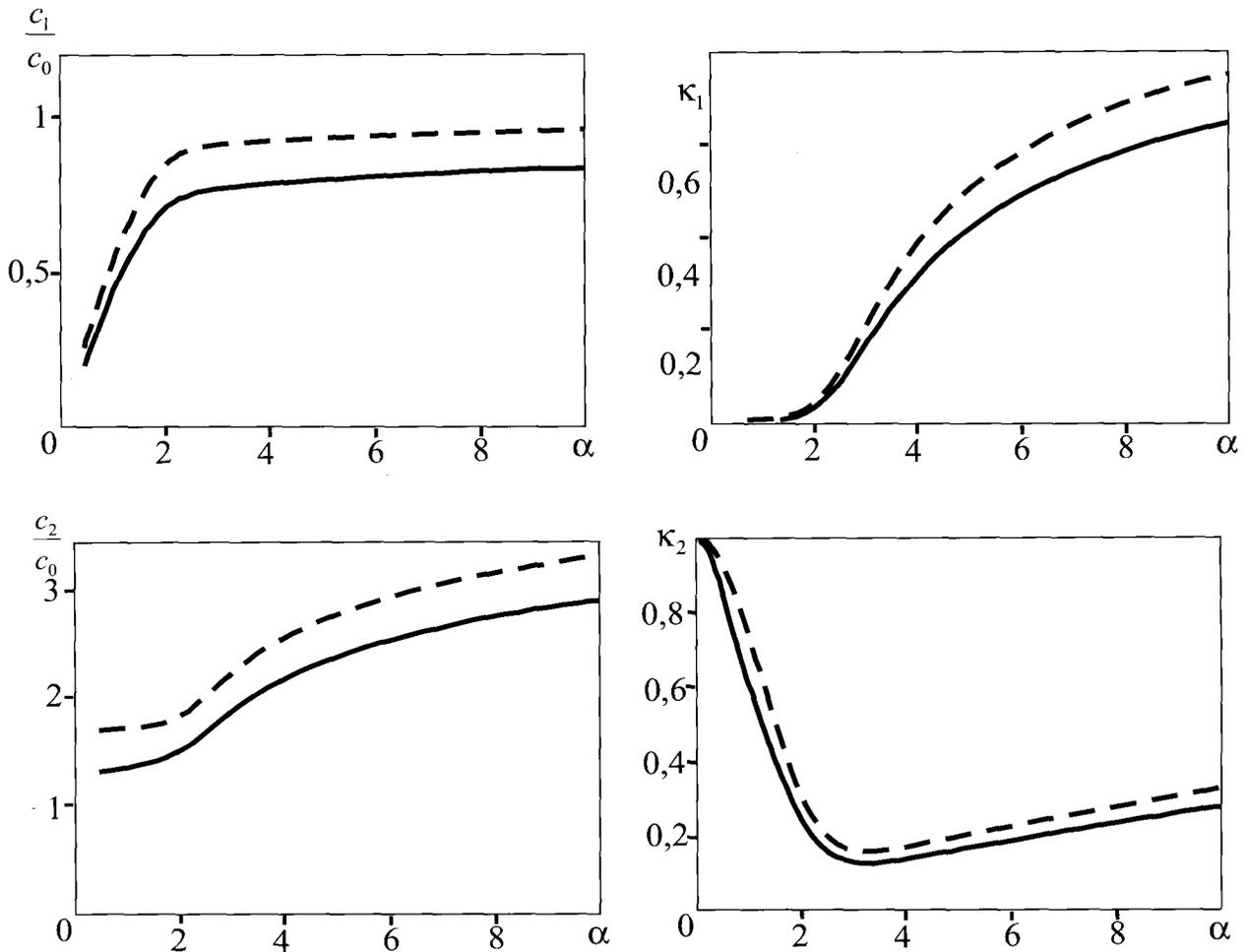


Рисунок 1 — Графики групповых скоростей медленной волны c_1/c_0 и быстрой волны c_2/c_0 и соответствующих коэффициентов передачи k_1 и k_2 в зависимости от безразмерного параметра a : сплошная линия — вязкоупругая оболочка; пунктирная — упругая оболочка

После преобразований получим итоговое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{4(1-F_{10})}{(1-\gamma_2\sigma_\theta^2)^2} [\gamma_1(1-C_{22})[(1-C_{11})-\tau_\theta] - \\ & -\gamma_2\sigma_\theta(1-C_{12})[\tau_r-\tau_\theta+\gamma_1\sigma_\theta(1-C_{21})]] \frac{c_0^2}{c^4} + \\ & + \frac{2}{1-\gamma_2\sigma_\theta^2} [-k(1-F_{10})[(1-C_{11})-\tau_\theta] + \\ & + F_{10}[\gamma_1\sigma_\theta(1-C_{21})+\gamma_2\sigma_\theta(1-C_{12}) + \\ & + \tau_r - \frac{\tau_\theta}{2} - \frac{1}{2}(1-C_{11})] - \\ & - 2\gamma_1(1-C_{22}) \frac{c_0^2}{c^2} + 2k + F_{10} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= \frac{T_{\theta_0}(1-\gamma_2\sigma_\theta^2)}{E_0 h}, \quad \tau_r = \frac{T_{r_0}(1-\gamma_2\sigma_\theta^2)}{E_0 h}, \\ \gamma_1 &= \frac{E_t}{E_0}, \quad \gamma_2 = \frac{\sigma_r}{\sigma_\theta}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E_0 h}{2ap}}, \end{aligned}$$

где τ_θ, τ_r — безразмерные параметры, учитывающие начальные кольцевое и продольное усилия, γ_1, γ_2 характеризуют степень анизотропии, c_0 — волновая скорость Моэнса-Кортэвэга (Moens-Korteweg). Комплексное

число k учитывает воздействие окружающих тканей:

$$\begin{aligned} k &= M - i \frac{C}{\alpha^2} - \frac{K}{\alpha^4}, \quad M = \frac{M_0}{ap}, \\ C &= \frac{C_1 a}{\mu}, \quad K = \frac{K_1 a^3 p}{\mu^2}, \quad C_1 = C_r, \quad K_1 = K_r. \end{aligned}$$

Уравнение (7) отличается от уравнения, полученного в работе [1] наличием коэффициентов C_y , учитывающих вязкость стенки артерии.

Если представить комплексный корень уравнения (7) в виде $c_0/c = X - iY$, то

$\exp[i\omega(t-z/c)] = \exp\left[i\omega\left(t - \frac{zX}{c_0}\right)\right] \exp\left[-2\pi\frac{z}{\lambda} \frac{Y}{X}\right]$, где λ — длина волны колебаний, c_0/X — скорость распространения волны, $\kappa = \exp(-2\pi Y/X)$ — коэффициент передачи, характеризующий уменьшение амплитуды волны на единицу ее длины за счет затухания.

Пример

В качестве примера рассмотрим модель, в которой артерия представлена изотропной ненагруженной оболочкой. Тогда $\tau_\theta = \tau_r = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, ядра скорости релаксации совпадают между собой $K_y(\theta) = K(\theta)$. Использовались следующие значения параметров: $\sigma_\theta = 0,5, M = 0,15, K = C = 0, \nu = 0,0381 \text{ см}^2/\text{с}, a = 0,15 \text{ см}$.

Для вязкоупругой оболочки $K(\theta) = A\theta^{-s}e^{-\beta\theta}$, где $A = 0,4/\Gamma(0,1)$, $s = 0,9$, $\beta = 1$; для упругой — $K(\theta) = 0$.

Результаты расчетов представлены на рисунке 1. Здесь под групповыми скоростями понимаются величины $c_1/c_0 = 1/X_1$, $c_2/c_0 = 1/X_2$. В работе [7] учет вязкости артерии привел к незначительному увеличению скорости волны и снижению коэффициента передачи. Как видно у нас, в отличие от работы [7], наблюдается снижение и групповых скоростей и коэффициентов передачи.

Работа выполнена в рамках ГКПНИ «Механика» на 2006—2010 гг. (задание «Механика 4.10»).

Список литературы

1. Atabeck, H.B. Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered, initially stressed, orthotropic elastic tube / H.B. Atabeck // *Biophysical Journal*. — 1968. — Vol. 8. — P. 626—649.
2. Bergel, D.H. The properties of blood vessels / D.H. Bergel // *Biomechanics Its Foundation and Objectives*. — New York: Engelwood Cliffs, 1972. — P. 105—132.
3. Dynamic anisotropic viscoelastic properties of the aorta in living dogs / D.J. Patel [et al.] // *Circulat. Res.* — 1973. — Vol. 22. — P. 93—107.
4. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. — Москва: Наука, 1976. — 512 с.
5. Матяш, В.И. Колебания изотропных упруго-вязких оболочек / В.И. Матяш // *Механика полимеров*. — 1971. — № 1. — С. 157—163.
6. Womersley, J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. 1. The linear approximation for long waves / J.R. Womersley // *Philosophical Magazine*. — 1955. — Vol. 46. — P. 199—221.
7. Whirlow, D.K. Periodic flow of a viscous liquid in a thick-walled elastic tube / D.K. Whirlow, W.T. Rouleau // *Bull. Math. Biophys.* — 1965. — Vol. 27. — P. 355—370.

Audoshka I.V., Mikhasev G.I.

Effect of visco-elasticity of an orthotropic arterial wall on pulse-wave propagation.

The problem of harmonic pressure wave propagation through a viscous fluid contained in a thin viscoelastic orthotropic tube is considered. To take into account viscoelasticity of the tube the linear viscoelasticity model is used. The computations have shown that taking into account the tube visco-elasticity leads to decrease of the phase velocity and transmission per wavelength.

Поступила в редакцию 07.03.2008.

© И.В. Авдошка, Г.И. Михасев, 2008.