РАЗМЫСЛОВИЧ И. Р.,
РАПИНЧУК Л. К.,
кандидаты технических наук

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ В ФУНКЦИЯХ БЕССЕЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СИНУСОВ ДЛЯ КАЧАЮЩИХСЯ ГРОХОТОВ

Качающийся грохот весьма широко применяется в качестве рабочего органа зерновых комбайнов, молотилок, зерноочистительных машин, картофелеуборочных машин. Материал на качающемся грохоте совершает под действием силы веса, трения и нормальной реакции сложное движение, состоящее из переносного движения грохота и относительного движения материала на грохоте. Характер этого движения определяется параметрами грохота: скоростью вращения приводного вала кривошипов, радиусом кривошипов, углом наклона грохота к горизонту и подвесок к вертикали. Материал находится на грохоте в относительном покое, пока выполняется условие равновесия:

$$Q_u \cos(\alpha - \beta) + mg \sin\alpha \mp F_{тр} = 0; \tag{1}$$

$$Q_u \sin(\alpha - \beta) - mg \cos\alpha + N = 0, \tag{2}$$

где Q_u — сила инерции;
α — угол наклона грохота к горизонту;
β — угол наклона подвесок к вертикали;
m — масса материала;
N — нормальная реакция;
$F_{тр}$ — сила трения.

Определив из уравнения (2) N и учитывая, что

$$F_{тр} = fN \quad и \quad f = \operatorname{tg}\mu,$$

где f — коэффициент трения и μ — угол трения, получим после подстановки в уравнение (1)

$$\pm Q_u \cos[\mu \mp (\alpha - \beta)] - mg \sin(\mu \mp \alpha) = 0. \tag{3}$$

При синусоидальном законе движения грохота сила инерции

$$Q_u = -m\omega^2 r \cos\omega t, \tag{4}$$

где ω — угловая скорость вращения вала кривошипов;
r — радиус кривошипов.

Решив совместно уравнения (3) и (4), найдем

$$\cos\omega t = -\frac{g}{\omega^2 r}\ \frac{\sin(\mu \mp \alpha)}{\pm\cos[\mu \mp (\alpha - \beta)]}, \tag{5}$$

где ωt — фазовый угол, при котором начинается скольжение. В формулах (1)—(5) знак минус соответствует прямому скольжению, знак плюс — обратному.

Обозначим угол начала скольжения через $\varphi_к$. Если скольжение начинается с фазы относительного покоя, назовем его свободным и обозначим

$$k_0 = \frac{g}{\omega^2 r}\ \frac{\sin(\mu \mp \alpha)}{\pm\cos[\mu \mp (\alpha - \beta)]}. \tag{6}$$

Дифференциальное уравнение движения материала на качающемся грохоте имеет вид

$$m\frac{dU_x}{dt} = mg\sin\alpha \mp F_{тр}. \tag{7}$$

Здесь $\dfrac{dU_x}{dt}$ — ускорение материала в абсолютном движении;

$mg\sin\alpha \mp F_{тр}$ — движущаяся сила (правило знаков то же, что и для равенств (1)—(6).

Интегрируя уравнение (6) в пределах от начала прямого $t_к$ и обратного t_q скольжений до конца прямого t_m и обратного t_e скольжений и учитывая, что в начале и в конце скольжения скорости материала и грохота равны, получим так называемые уравнения синусов:

$$\sin\varphi_m - \sin\varphi_к = -k_0(\varphi_m - \varphi_к); \tag{8}$$

$$\sin\varphi_e - \sin\varphi_q = q_0(2\pi + \varphi_e - \varphi_q). \tag{9}$$

Здесь $\dfrac{\pi}{2} < \varphi_k < \dfrac{3}{2}\pi$ — угол начала прямого скольжения;

$\pi < \varphi_m < \dfrac{5}{2}\pi$ — угол конца прямого скольжения;

$\left.\begin{array}{r}\dfrac{3}{2}\pi < \varphi_q < 2\pi\\ 0 < \varphi_q < \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}$ — угол начала обратного скольжения;

$0 < \varphi_e < \dfrac{3}{2}\pi$ — угол конца обратного скольжения.

Перепишем уравнение (8) в виде

$$\varphi_m = \varphi_к + \frac{\sin\varphi_к}{k_0} - \frac{\sin\varphi_m}{k_0}. \tag{10}$$

Введем обозначения:

$$\varphi_m = x; \; -\frac{1}{k_0} = q;$$

$$\varphi_к + \frac{\sin\varphi_к}{k_0} = a.$$

Тогда

$$x = q\sin x + a. \tag{11}$$

Это уравнение Кеплера. Оно решается для любых x при условии, что

$$0 < q < 1.$$

В нашем же случае $q = -\frac{1}{k_0}$. Так как k_0 всегда положителен и меньше 1, то q всегда отрицательно и по абсолютному значению больше 1.

Покажем, что и в нашем случае, когда $\pi < x < \frac{5}{2}\pi$, уравнение (3) имеет единственное решение.

Функция вида $F = x - q\sin x - a$ имеет экстремумы при $F'_x = 1 - q\cos x = 0$, т. е. при $\cos x = \frac{1}{q} = -k_0$ или $x = \pi - \mathrm{Arc}\cos k_0$ и $x = \pi + \mathrm{Arc}\cos k_0$.

При $x = \pi + \mathrm{Arc}\cos k_0$ функция имеет максимум, ибо $F''_x = q\sin x < 0$.

При $x = \pi - \mathrm{Arc}\cos k_0$ функция имеет минимум, $F''_x = q\sin x > 0$.

В промежутке

$$\pi - \mathrm{Arc}\cos k_0 < x < \pi + \mathrm{Arc}\cos k_0 \tag{12}$$

функция монотонно возрастающая и, следовательно, имеется единственное значение x, при котором $F = 0$, т. е. имеется единственный корень уравнения (11). Определим этот корень. Увеличение a на 2π влечет за собой явным образом увеличение x на 2π.

Таким образом функция x будет периодической с периодом 2π.

Функция $\sin x$ — периодическая с тем же периодом, к тому же она нечетная, ее можно разложить в ряд по синусам дуг, кратным a

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin a. \tag{13}$$

Коэффициенты b_n определим, как коэффициенты ряда Фурье

$$\frac{\pi}{2} b_n = \int_0^{\pi} \sin x \sin na da = -\sin x \frac{\cos na}{n}\Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos na \frac{d \sin x}{da} da. \tag{14}$$

Внеинтегральный член обратится в нуль, так как при $a=\pi$ $x=\pi$, при $a=0$ $x=0$.

Заменяя в последнем интеграле переменную a переменной x, для которой промежуток значения будет тот же, и учитывая само уравнение Кеплера, получим

$$\frac{\pi}{2} b_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos na \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos (nx - nq \sin x) \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{2n} \Big[\int_0^{\pi} \cos (\overline{n+1}\, x - nq \sin x) dx +$$

$$+ \int_0^{\pi} \cos (\overline{n-1}\, x - nq \sin x) dx \Big]. \tag{15}$$

Согласно известной интегральной формуле

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (mx - \varepsilon \sin x) dx = I_m(\varepsilon), \tag{16}$$

где $I_m(\varepsilon)$ — функция Бесселя 1-го рода m-го порядка аргумента ε.

Таким образом,

$$b_n = \frac{1}{n}\left[I_{n+1}(nq) + I_{n-1}(nq)\right]. \tag{17}$$

Но для функций Бесселя известно соотношение

$$\frac{\varepsilon}{2m}\left[I_{m+1}(\varepsilon) + I_{m-1}(\varepsilon)\right] = I_m(\varepsilon). \tag{18}$$

Тогда

$$b_n = \frac{2}{nq} I_n(nq). \tag{19}$$

Таким образом,

$$x = a + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} I_n(nq)\sin na. \tag{20}$$

В нашем случае

$$\varphi_m = \varphi_k + \frac{\sin\varphi_{k_0}}{k_0} +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} I_n\left(-\frac{n}{k_0}\right)\sin\left(\varphi_k + \frac{\sin\varphi_k}{k_0}\right) n. \tag{21}$$

Кроме того, не трудно заметить из самого вывода интегрального выражения функции Бесселя, что

$$I_n\left(-\frac{n}{k_0}\right) = I_{-n}\left(\frac{n}{k_0}\right) \tag{22}$$

или

$$I_n\left(-\frac{n}{k_0}\right) = (-1)^n I_n\left(\frac{n}{k_0}\right). \tag{23}$$

Тогда

$$\varphi_m = \varphi_k + \frac{\sin\varphi_k}{k_0} +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} I_n\left(\frac{n}{k_0}\right)\sin n\left(\varphi_k + \frac{\sin\varphi_k}{k_0}\right). \tag{24}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Берг Б. А. Движение материальной точки по колеблющейся наклонной плоскости с трением. Теория, конструкция и производство сельскохозяйственных машин, т. 1. М.—Л., Сельхозгиз, 1935.
2. Кузнецов Д. С. Специальные функции. М., «Высшая школа», 1962.
3. Левенсон Л. Б. Машины для обогащения. Труды института МЕХАНОБР, вып. 1-й, Л., 1924.
4. Олевский В. А. Кинематика грохотов. Металлургиздат, 1941.